

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 47 (1947)

Artikel: Das Zinsfussproblem

Autor: Lah, Ivo

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966846>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Zinsfussproblem

Von Ivo Lah, Ljubljana

Problemstellung und einleitende Bemerkungen

Unter dem Zinsfussproblem versteht man die Aufgabe, irgendeinen Versicherungswert $V_x(i)$ *unmittelbar* — d. h. ohne vorherige Ermittlung der Kommutationszahlen $D_x(i)$, $N_x(i)$, $S_x(i)$, aber auch ohne Anwendung von Rekursionsformeln, welche alle $V_x(i)$ vom höchsten Alter abwärts nacheinander liefern — zu berechnen.

Mit dem Zinsfussproblem haben sich schon mehrere Autoren befasst und dabei eine Menge von Formeln hergeleitet, so dass eine systematische Schlichtung und Einordnung derselben bereits notwendig erscheint. Mit Rücksicht auf die *Ausgangswerte*, welche bekannt sein müssen, um $V_x(i)$ unmittelbar berechnen zu können, hat *Frucht* [1] die verschiedenen Formeln in drei, *Fischer* [2] dagegen in vier Gruppen eingeteilt. Die Einteilung in vier Gruppen wollen wir beibehalten, jedoch in einer ein wenig abgeänderten Form, und zwar:

Die I. Gruppe umfasst alle jene Lösungsmethoden, bei welchen nur eine einzige, zum Zinsfusse i_0 berechnete Versicherungstafel — wir wollen sie Grundtafel nennen — mit den Kommutationszahlen 0D_x , 0N_x , 0S_x , ${}^0S_x^{(2)}$, ... verwendet wird.

Die II. Gruppe umfasst alle jene Lösungsmethoden, bei welchen zwei oder mehrere zu Zinsfüssen $i_0 < i_1 < i_2 \dots$ berechnete Versicherungstafeln — wir wollen sie Grundtafeln nennen — mit den Kommutationszahlen 0D_x , 0N_x , 0S_x , ${}^0S_x^{(2)}$, ... 1D_x , 1N_x , 1S_x , ${}^1S_x^{(2)}$... 2D_x , 2N_x , 2S_x , ${}^2S_x^{(2)}$, ... usw. verwendet werden.

Die III. Gruppe umfasst alle jene Lösungsmethoden, die sich auf das Bestehen eines formelmässigen Ausscheidegesetzes gründen.

Die IV. Gruppe umfasst alle jene Lösungsmethoden, bei welchen Zeitrentenbarwerte herangezogen werden.

Frucht hat ausserdem gefunden, dass zwischen den Lösungsmethoden der I. und der II. Gruppe enge Zusammenhänge bestehen in dem Sinne, dass sich die Formeln der einen Gruppe in die entsprechenden Formeln der anderen Gruppe überführen lassen. *Fischer* hat aber den leicht verständlichen Satz aufgestellt, dass zwischen den Formeln der I. und der II. Gruppe überhaupt kein tieferer Unterschied bestehe, sie seien alle Interpolationsformeln mit dem Zinsfusse als einziger Veränderlicher; nur handle es sich in einem Falle um die oskulierende und im anderen Falle um die übliche Interpolation.

Trotz des Formelreichtums sind aber die bisherigen praktischen Erfolge des Zinsfussproblemcs als bescheiden zu nennen. Nur für den Barwert der konstanten Leibrente ist es gelungen, Näherungsformeln aufzustellen, welche für die Praxis ausreichend genaue Resultate liefern, jedoch nur bei den Altern vom 20. Jahre aufwärts und nur bei einer Spannung des Zinsfusses von ungefähr $\pm 0,5\%$ vom Grundzinsfusse bzw. von den Grundzinsfüssen.

Dieser Umstand hat entschieden viel dazu beigetragen, dass die Versicherungstabeln meistens für mehrere Zinsfüsse berechnet werden. So z. B. hat man bei der slowenischen Volkssterbetafel, Beobachtungsperiode 1931—1933 [3], die Kommutationszahlen für sieben Zinsfüsse, nämlich 0% , 1% , 2% , 3% , 4% , 5% , 6% , berechnet. *Istituto Previdenza* [4] hat die Kommutationszahlen der italienischen Volkssterbetafel, Beobachtungsperiode 1930—1932, sogar für zehn Zinsfüsse, nämlich 3% , $3,5\%$, 4% , $4,25\%$, $4,5\%$, $4,75\%$, 5% , $5,5\%$, 6% , $6,5\%$, veröffentlicht usw. Die obigen Tafeln erwähnen wir deshalb, weil wir an ihnen verschiedene Formeln des Zinsfussproblemcs rechnerisch überprüft haben. Die slowenische Volkssterbetafel, männliches Geschlecht, werden wir im folgenden einfachheits halber mit STM und die italienische Volkssterbetafel, männliches Geschlecht, mit ITM bezeichnen.

Dieser merkwürdige Sachverhalt — bunter Formelreichtum einerseits und die verhältnismässig geringe Genauigkeit der Formeln und beschränktes Anwendungsgebiet derselben andererseits — führt uns zu folgenden vier prinzipiellen Fragen des Zinsfussproblemcs:

1. Ist es möglich, für den Barwert der konstanten Leibrente strengere Formeln aufzustellen, welche für alle Alter und für alle in der Versicherungspraxis vorkommenden Zinsfüsse — sagen wir von 1% bis 6% — wenigstens bis zur dritten Dezimalstelle genaue Werte liefern?

2. Ist es möglich, solche strengere Formeln auch für andere Versicherungswerte, z. B. für die Barwerte der steigenden und variablen Rente, für Prämien, Reserven usw., aufzustellen?

3. Ist die Umkehrung des Zinsfussproblemcs möglich, d. h. ob man zu gegebenem Versicherungswerte $V_x(i)$ den zugehörigen Zinsfuss i mit derselben Genauigkeit unmittelbar berechnen kann?

4. Existiert eine Grundgleichung des Zinsfussproblemcs, aus welcher, wenn schon nicht alle, wenigstens die meisten und darunter die besten bereits bekannten Näherungsformeln hergeleitet werden können?

Vom praktischen Standpunkte aus ist die dritte Frage besonders wichtig. Alle Versicherungswerte kann man auch mit Kommutationszahlen oder mit Rekursionsformeln exakt berechnen. Die Näherungsformeln des Zinsfussproblemcs werden daher nur mit der Zeit- und Arbeitersparnis begründet. Bei der Umkehrung des Zinsfussproblemcs handelt es sich aber um die grundsätzliche Lösung einer Aufgabe, mit welcher man sich bisher noch nicht eingehend befasst hat.

Vom theoretischen Standpunkte aus scheint uns aber die vierte Frage ganz besonders interessant und reizend. Die Verwandtschaft der Lösungsmethoden der I. und der II. Gruppe haben bereits *Frucht* und *Fischer* bewiesen. Die Lösungsmethoden der III. und der IV. Gruppe stehen aber vorläufig noch isoliert und scheinbar ohne jeglichen Zusammenhang mit den ersten zwei Gruppen da. Desgleichen gibt es auch in einer und derselben Gruppe verschiedene Näherungsformeln, die keinen inneren Zusammenhang zu haben scheinen. *Die Aufstellung einer Grundgleichung, aus welcher die meisten und darunter die besten Formeln aller vier Gruppen des Zinsfussproblemcs einheitlich hergeleitet werden können, bildet den Kern unserer Abhandlung.*

* *

Bei unseren Ausführungen werden wir wiederholt von den Stirlingschen Zahlen Gebrauch machen müssen. Weil die Stirlingschen Zahlen in der Versicherungsmathematik sehr wenig verwendet werden, wollen wir einige, später gebrauchte Formeln, welche wir der Arbeit *Jordans* [5] entnommen haben, gleich niederschreiben. Diese Formeln sind zu Berufungszwecken mit denselben Zahlen wie beim Autor nur in doppelten Klammern (()) bezeichnet.

Die Stirlingschen Zahlen erster Art S_n^r dienen zur Transformation des Faktoriellen

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$$

in eine Summe von Potenzen

$$(x)_n = \sum_{r=1}^n S_n^r x^r \quad ((2))$$

Die Stirlingschen Zahlen erster Art S_n^r Tab. 1

n/r	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	—1	1					
3	2	—3	1				
4	—6	11	—6	1			
5	24	—50	35	—10	1		
6	—120	274	—225	85	—15	1	
7	720	—1764	1624	—735	175	—21	1
...

Die weiteren S_n^r können leicht nach der Rekursionsformel

$$S_{n+1}^r = S_n^{r-1} - n S_n^r \quad ((3))$$

berechnet werden. Für $x=1$ bekommen wir aus ((2)), wenn $n \neq 1$

$$\sum_{r=1}^n S_n^r = 0 \quad ((4))$$

Ausserdem ist

$$S_{n-1}^k = \sum_{r=k+1}^n \binom{r-1}{k} S_n^r \quad ((31))$$

Die Stirlingschen Zahlen zweiter Art \mathfrak{S}_n^r dienen zur Transformation der Potenz in eine Summe von Faktoriellen

$$x^n = \sum_{r=1}^n \mathfrak{S}_n^r (x)_r \quad ((33))$$

Die Stirlingschen Zahlen zweiter Art \mathfrak{S}_n^r

Tab. 2

n/v	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1
...

Die weiteren \mathfrak{S}_n^r können leicht nach der Rekursionsformel

$$\mathfrak{S}_{n+1}^r = \mathfrak{S}_n^{r-1} + r \mathfrak{S}_n^r \quad ((34))$$

berechnet werden. Die Summe der Produkte der Stirlingschen Zahlen beider Arten

$$\sum_{r=j}^n S_n^r \mathfrak{S}_r^j = \sum_{r=j}^n S_r^j \mathfrak{S}_n^r = 0 \text{ bzw. } 1 \quad ((45))$$

wenn $j \neq n$ bzw. $j = n$.

Schliesslich bemerken wir noch, dass

$$(x)_{-n} = \frac{1}{(x+n)_n}$$

* *

Bezüglich der Bezeichnung wollen wir uns an die internationalen Konventionen anlehnen. Zwischen der Zinsintensität δ , dem Zinsfusse i , dem Aufzinsungsfaktor r und dem Diskontfaktor v besteht bekanntlich die Beziehung

$$e^\delta = 1 + i = r = \frac{1}{v}$$

Die Grössen, die sich auf eine oder auf mehrere Grundtafeln beziehen, werden mit den Indizes 0, 1, 2, ... rechts unten oder, wenn dieser Platz konventionell für andere Bezeichnungen, z. B. für das Alter x oder Rentendauer m usw., bestimmt ist, aber links oben

bezeichnet, so z. B. δ_0 , i_0 , r_0 , v_0 , 0a_x , 0N_x , 0S_x , ${}^0S_x^{(2)}$, 0M_n usw. Die gesuchten Versicherungswerte als auch die ihnen zugrunde liegenden Zinswerte haben keine solche Indizes.

Die Näherungswerte werden wir in Präzisionsgrade (n) bzw. in Präzisionsordnungen $[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots \infty$, einteilen. Der Präzisionsgrad (∞) bzw. die Präzisionsordnung $[\infty]$ bedeutet den exakten Wert. So z. B. bedeutet $a_{x(n)} = a_{(n)}$ bzw. $a_{x[n]} = a_{[n]}$ den Näherungswert der lebenslänglichen nachschüssigen Leibrente n -ten Präzisionsgrades bzw. n -ter Präzisionsordnung.

Nebst konstanten nachschüssigen Leibrenten werden wir uns mehrmals auch mit steigenden nachschüssigen Leibrenten verschiedener Grade befassen. Um die etwas komplizierte internationale Schreibweise zu vereinfachen und so die Formeln übersichtlicher zu gestalten, werden wir nachstehende Bezeichnung einführen:

$$\begin{aligned} \frac{S_{x+1}^{(\nu)}}{D_x} &= (I^\nu a)_x = I_x^\nu = I^\nu \\ \text{Es ist also: } \frac{N_{x+1}}{D_x} &= I^0 = a_x = a \\ \frac{S_{x+1}}{D_x} &= I \\ \frac{S_{x+1}^{(2)}}{D_x} &= I^2 \\ \frac{S_{x+1}^{(3)}}{D_x} &= I^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Sofern sich I^ν auf einen bestimmten Grundzinsfuss, z. B. auf i_0 , beziehen sollte, so bekommt es links oben den entsprechenden Index, z. B. ${}^0I^\nu$. Die Näherungswerte von I^ν werden mit $I_{(n)}^\nu$ bzw. mit $I_{[n]}^\nu$ bezeichnet usw.

Alle im Texte angeführten Ableitungen (Derivationen) sind, wenn nichts anderes gesagt, nach der Zinsintensität genommen, z. B.

$$a' = \frac{da}{d\delta} \quad \text{und} \quad a^{(\nu)} = \frac{d^\nu a}{d\delta^\nu}$$

Infolgedessen sind alle Integrationskonstanten, z. B. A , B , C_r , nur hinsichtlich der Zinsintensität bzw. des Zinsfusses konstant, sonst sind aber die Integrationskonstanten Funktionen des Alters x .

* * *

Als Ausgangspunkt nehmen wir die Taylorsche Reihe des Barwertes der konstanten nachschüssigen Leibrente, welche bekanntlich lautet:

$$a = a_x(i) = \frac{1}{{}_0D_x} \sum_{r=0}^n (-v_0 \Delta)^r {}^0S_{x+1}^{(r)} + R_n, \quad \Delta = i - i_0 \quad (1)$$

Drei Voraussetzungen müssen erfüllt werden, nämlich: Die Reihe (1) muss konvergieren — die höheren Summen der diskontierten Zahlen ${}^0S_{x+1}^{(r)}$, sofern sie nicht in der Grundtafel vorliegen, müssen sich leicht berechnen oder wenigstens abschätzen lassen — und der Wert des Restgliedes R_n muss sich ebenfalls berechnen oder wenigstens abschätzen lassen.

Die Konvergenz der Reihe (1) im Gebiete der komplexen Zahlen ist bereits von *Wyss*, *Meissner* und *Fischer* untersucht und bewiesen worden. Man kann sie aber auch im Gebiete der reellen Zahlen leicht nachweisen. Nach der ersten Hauptkonvergenzbedingung ist eine Reihe von positiven Gliedern konvergent, wenn von einem bestimmten Gliede ab der Quotient aus einem Glied und dem vorgehenden < 1 . In unserem Falle muss also

$$\left| \frac{(-v_0 \Delta)^{r+1} {}^0S_{x+1}^{(r+1)}}{(-v_0 \Delta)^r {}^0S_{x+1}^{(r)}} \right| < 1$$

welchen Ausdruck man mit Rücksicht auf (4) auch schreiben kann

$$\left| -v_0 \Delta \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t+1} (t+r)_r \left(1 + \frac{t}{r+1}\right)}{\sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}^0D_{x+t+1} (t+r)_r} \right| < 1$$

Wenn r hinreichend gross wird, dann werden von einem bestimmten Gliede weiter alle Quotienten, auch bei $r = \infty$, dem absoluten Werte nach kleiner als 1, wenn nur $|-v_0 \Delta| < 1$. Die Reihe ist

also für alle zwischen 0 % und 100 % liegenden Zinsfüsse i und i_0 konvergent. Wenn $\Delta > 0$, dann ist die Reihe (1) alternierend und so a fortiori konvergent. Aus diesem Grunde ist es zu empfehlen, immer wenn nur möglich den Grundzinsfuss i_0 so anzusetzen, dass er ein wenig unter i zu liegen kommt, weil man so zu bedeutend genaueren Näherungswerten gelangt. (Vergleiche diesbezüglich die Fehler, welche *Fischer* [2] beim Übergange von 3 % zu 2,5 % und umgekehrt von 2,5 % zu 3 % gefunden hat!)

In den bereits bestehenden Näherungsformeln werden in der Regel nur 0N_x und 0S_x verwendet, weil sie in den Grundtafeln meistens berechnet erscheinen. Ausnahmsweise werden auch ${}^0S_x^{(2)}$ geduldet. Höhere Summen, ${}^0S_x^{(\nu)}$, $\nu > 2$, werden gemieden und solche Formeln, z. B. die von *Böhmer*, als praktisch unbrauchbar betrachtet. *Christen* hat bereits eine Methode zur näherungsweisen Berechnung der höheren Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden entwickelt. In folgendem Abschnitt geben wir eine neue, sehr einfache Methode an, die zu genaueren Resultaten führt, wozu allerdings die im Anhang gegebene Tafel der Werte $k_n(x, i)$ notwendig ist.

Die Berechnung bzw. Abschätzung des Restgliedes R_n der Reihe (1) ist bisher, soviel uns bekannt ist, noch gar nicht ernsthaft in Angriff genommen. Diese Berechnung bildet einen wichtigen Punkt des Zinsfussproblems, auf welchen wir in folgenden Kapiteln wiederholt auf Umwegen zurückkommen werden.

Verallgemeinerung der Formel von Poukka

Poukka hat für das Zinsfussproblem die sehr wertvolle, von verschiedenen Autoren oft zitierte und benützte Feststellung gemacht, dass sich für die gebräuchlichsten Zinsfüsse und Alter das folgende Doppelverhältnis der Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden

$$\frac{S_x^{(2)}}{S_x} : \frac{S_x}{N_x} = k_1(x, i) \quad (2)$$

nicht viel mit dem Zinsfusse i und dem Alter x ändert, ja sogar von Tafel zu Tafel nur wenig verschieden ist und deshalb als Konstante betrachtet werden kann. Es entsteht nun die Frage, ob nicht auch andere Doppelverhältnisse von $S_x^{(n)}$ diese, für das Zinsfussproblem so vorteilhafte,

Eigenschaft noch im höheren Masse besitzen. Untersuchen wir zu diesem Zwecke das allgemeine Doppelverhältnis

$$\frac{S_x^{(n+1)} S_x^{(n-1)}}{(S_x^{(n)})^2} = k_n(x, i), \quad n = 0, 1, 2, \dots \infty \quad (3)$$

Bekanntlich ist

$$S_x^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^{\omega-x} (t+n)_n D_{x+t} \quad (4)$$

Stellen wir nun (4) in (3) ein, so bekommen wir nach einigen Umformungen

$$k_n(x, i) = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} \sum_{\tau=0}^{\omega-x} (t+n)_n (\tau+n)_n D_{x+t} D_{x+\tau} \frac{1 + \frac{t}{n+1}}{1 + \frac{\tau}{n}}}{\sum_{t=0}^{\omega-x} \sum_{\tau=0}^{\omega-x} (t+n)_n (\tau+n)_n D_{x+t} D_{x+\tau}} \quad (5)$$

Daraus schliessen wir zunächst, da alle unter den Summenzeichen stehenden Grössen nur positiv sein können, dass

$$0 < k_n(x, i) \leq 1, \quad n \neq 0 \quad (6)$$

Die Variabilität (= Differenz zwischen Maximum und Minimum) des Doppelverhältnisses (3) ist also mit dem Intervalle (0, 1) begrenzt. In speziellen Fällen können durch besondere Untersuchungen, wie z. B. die von *Frucht* [6], die sich natürlich nur auf das Doppelverhältnis (2) beziehen, noch viel engere Grenzen gezogen werden.

In zwei Fällen ist der Zähler des Bruches (5) gleich dem Nenner, nämlich:

1. wenn $t = \tau = 0$; das kommt aber nur im höchsten Alter $x = \omega$ vor, weil alle $S_\omega^{(n)} = D_\omega$, also

$$k_n(\omega, i) = 1$$

2. wenn $n = \infty$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x, i) = 1.$$

Bei hinreichend hohen n kommt der Wert des Doppelverhältnisses (3) der Einheit beliebig nahe, und zwar für jedes Alter, für jeden Zins-

fuss und für jede Ausscheideordnung, d. h. die Variabilität des Doppelverhältnisses (3) nimmt mit wachsendem n unbegrenzt ab, und so kann $k_n(x, i)$ mit desto mehr Recht als Konstante angenommen werden, je grösser n ist. Diese Behauptung gilt nicht nur für die Lebensversicherung allein, sondern für die gesamte Personen- und Sachversicherung, und zwar auch dann, wenn die diskontierten Zahlen D_{x+t} nicht nur durch Abgang, sondern auch durch Zugang geändert werden. Das Anwendungsgebiet des Zinsfussproblemcs wird so von einem eng begrenzten Teile der Lebensversicherung auf die gesamte Versicherung ausgedehnt.

Die Poukkasche Formel (2) ist nur ein Spezialfall des Doppelverhältnisses (3), nämlich wenn $n = 1$, und braucht keine weiteren Erörterungen. Der Fall $n = 0$ muss dagegen noch ein wenig geklärt werden. Nebst $S_x^{(0)} = N_x$ wollen wir noch $S_x^{(-1)} = D_x$ setzen. Wir haben somit

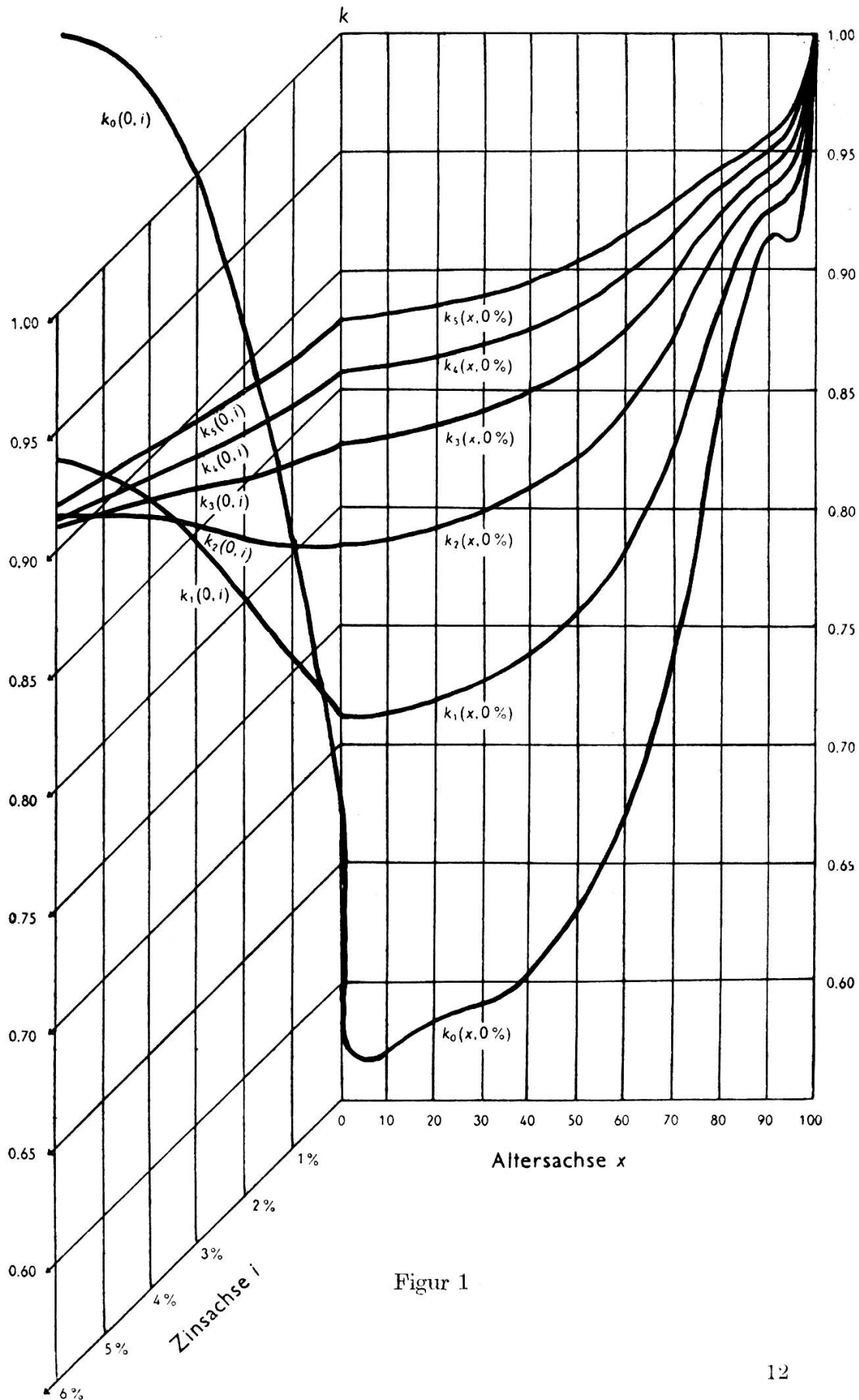
$$\begin{aligned} S_x^{(-1)} &= D_x \\ S_x^{(0)} &= \Sigma D_x \\ S_x^{(1)} &= \Sigma \Sigma D_x \\ S_x^{(2)} &= \Sigma \Sigma \Sigma D_x \\ &\dots \end{aligned}$$

Es ist also

$$k_0(x, i) = \frac{S_x D_x}{(N_x)^2} \quad (7)$$

Zu beachten ist, dass bei niederen Altern und höheren Zinsfüssen $k_0(x, i) > 1$ werden kann.

Auf Grund der STM haben wir $k_n(x, i)$ für alle Alter $x = 0, 1, 2 \dots 100$, für alle ganzen Zinsfüsse von 0 % bis 6 % und für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ auf fünf Dezimalstellen genau berechnet. Die Werte von $k_n(x, i)$, hergeleitet aus anderen Absterbeordnungen, sind selbstverständlich verschieden, jedoch die Differenzen, speziell wenn $n > 1$, dürfen im grossen und ganzen erst in der dritten Dezimalstelle auftreten, wie wir uns übrigens an der ITM empirisch überzeugt haben. Infolgedessen geben wir im Anhangc unserer Abhandlung «Die Tafel der verallgemeinerten Poukkaschen Zahlen $k_n(x, i)$ », auf zwei Dezimalstellen abgerundet, jedoch nur für die Alter $x = 1, 6, 11, 21, 31 \dots 81, 91$. Die Werte von $k_n(x, i)$ für die fehlenden Alter und Zinsfüsse können leicht mittels linearer Interpolation bestimmt werden. Mit Hilfe der



Figur 1

Tafel im Anhang und der Formel (3) können somit die $S_x^{(n)}$ bis $n = 6$ aller Absterbeordnungen leicht abgeschätzt werden. Die Formeln des Zinsfussproblem, welche höhere Summen der diskontierten Zahlen enthalten, z. B. die von Böhmer, jedoch dieselben in der Grundtafel nicht enthalten sind, sind so praktisch brauchbar geworden. Zugleich ist der zweiten Voraussetzung, welche wir an die Taylorsche Reihe (1) gestellt haben, so bereits entsprochen.

Im rechtwinkligen Koordinatensystem mit der Altersachse x , mit der Zinsachse i und mit der Ordinate k , stellen die Funktionen $k_n(x, i)$ ein Flächenbündel durch die Gerade $x = \omega$, $k = 1$ dar. In der Figur 1 sind die Durchschnittskurven der Flächen $k_n(x, i)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mit der Ebene $i = 0$ und mit der Ebene $x = 0$ graphisch dargestellt. Die Kurve $k_0(x, 0\%)$ zeigt einen ähnlichen Verlauf wie die Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x , nicht nur hinsichtlich des absoluten Minimums, welches in der Nähe $x = 10$ liegt, sondern auch hinsichtlich der «Inflexionen», die in den Altersintervallen 20—30 und 90—95 auftreten. Bei höheren n wird diese Ähnlichkeit mehr und mehr verwischt, weil sich die Kurven der Geraden $k_\infty(x, 0\%) = 1$ asymptotisch nähern. Mit wachsendem Zinsfuss und wachsenden Ausscheidequotienten nehmen die $k_n(x, i)$ zu. Ausscheideordnungen, denen grössere Ausscheidequotienten zugrunde liegen, haben also grössere $k_n(x, i)$. Zufolge der säkularen Sterblichkeitsabnahme ist also ein Rückgang der Werte von $k_n(x, i)$ zu erwarten.

Die Grundgleichung des Zinsfussproblem

Der Barwert der konstanten jährlich nachhinein zahlbaren lebenslänglichen Leibrente ist bekanntlich

$$a_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t} e^{-\delta t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} D_{x+t}$$

Die ν -te Ableitung von a_x ist also

$$a_x^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} t^\nu D_{x+t} \quad (8)$$

Aus (4) folgt

$$S_{x+1}^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{t=1}^{\omega-x} (t+n-1)_n D_{x+t} \quad (9)$$

Das Faktorielle in (9) können wir mittels Stirlingschen Zahlen erster Art in eine Potenzsumme verwandeln, nämlich

$$(t + n - 1)_n = \sum_{r=1}^n |S_n^r| t^r = \sum_{r=1}^n (-1)^{n+r} S_n^r t^r$$

So geht (9) über in

$$S_{x+1}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{r=1}^n S_n^r (-1)^r \sum_{t=1}^{\omega-x} t^r D_{x+t}$$

und mit Hilfe von (8)

$$S_{x+1}^{(n)} = \frac{(-1)^n D_x}{n!} \sum_{r=1}^n S_n^r a_x^{(r)} \quad (10)$$

Speziell bekommen wir an Hand der Tabelle 1

$$\begin{aligned} S_{x+1}^{(0)} &= D_x a_x \\ S_{x+1}^{(1)} &= -D_x a'_x \\ S_{x+1}^{(2)} &= \frac{D_x}{2!} (a''_x - a'_x) \\ S_{x+1}^{(3)} &= -\frac{D_x}{3!} (a'''_x - 3a''_x + 2a'_x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Man kann aber auch umgekehrt die Ableitungen von a_x durch die Summen $S_{x+1}^{(r)}$ ausdrücken. Multiplizieren wir zu diesem Zwecke (10), wo zuerst der Faktor vor dem Summenzeichen auf die andere Seite gebracht werden muss, mit den Stirlingschen Zahlen zweiter Art \mathfrak{S}_r^n und bilden wir nachher die Summe von $n=1$ bis $n=r$, so finden wir infolge ((45))

$$a_x^{(r)} = \frac{1}{D_x} \sum_{n=1}^r (-1)^n n! \mathfrak{S}_r^n S_{x+1}^{(n)} \quad (11)$$

Speziell bekommen wir an Hand der Tabelle 2

$$\begin{aligned} a'_x &= (-S_{x+1}) : D_x \\ a''_x &= (-S_{x+1} + 2S_{x+1}^{(2)}) : D_x \\ a'''_x &= (-S_{x+1} + 6S_{x+1}^{(2)} - 6S_{x+1}^{(3)}) : D_x \\ &\dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Zahlen können wir also alle Summen der diskontierten Zahlen $S_{x+1}^{(n)}$ durch Ableitungen des Rentenbarwertes $a_x^{(r)}$ und umgekehrt alle $a_x^{(r)}$ durch $S_{x+1}^{(n)}$ ausdrücken. Nach dieser Feststellung wollen wir das Doppelverhältnis (3) schreiben, wie folgt:

$$S_{x+1}^{(n+1)} S_{x+1}^{(n-1)} = k_n(x+1, i) (S_{x+1}^{(n)})^2 \quad (12)$$

Wenn wir nun die $S_{x+1}^{(r)}$ in (12) mittels (10) eliminieren, bekommen wir eine homogene quadratische Differentialgleichung $(n+1)$ -ter Ordnung. Wir wollen sie *die Grundgleichung des Zinsfussproblem*es nennen. Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir im folgenden anstatt a_x schlechtweg a schreiben und ausserdem noch eine neue Funktion einführen, nämlich

$$h_n = h_n(x+1, i) = \frac{n+1}{n} k_n(x+1, i) \quad (13)$$

Die Grundgleichung lautet dann

$$\sum_{r=1}^{n+1} S_{n+1}^r a^{(r)} \sum_{r=1}^{n-1} S_{n-1}^r a^{(r)} = h_n \left(\sum_{r=1}^n S_n^r a^{(r)} \right)^2 \quad (14)$$

Speziell haben wir

$$a' e^{-\delta} p_x = -k_0 a^2 \quad (14-0)$$

$$(a'' - a') a = h_1 a'^2 \quad (14-1)$$

$$(a''' - 3a'' + 2a') a' = h_2 (a'' - a')^2 \quad (14-2)$$

$$(a'''' - 6a''' + 11a'' - 6a') (a'' - a') = h_3 (a''' - 3a'' + 2a')^2 \quad (14-3)$$

.....

Die beiden ersten Differentialgleichungen (14—0) und (14—1) sind zwar ebenfalls aus (12) hergeleitet, passen aber scheinbar nicht in (14). Deshalb werden dieselben in folgendem bis auf weiteres gesondert behandelt.

Zur Vereinfachung der Formeln führen wir noch eine weitere Funktion ein, nämlich

$$M_n = M_n(x) = (-1)^n n! \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x} = (-1)^n n! (I^n a)_x \quad (15)$$

Die Gleichungen (10), (11) und (14) bekommen so folgende einfache Form

$$M_n = \sum_{\nu=1}^n S_n^{\nu} a^{(\nu)} \quad (10^*)$$

$$a^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\nu} \mathfrak{S}_\nu^n M_n \quad (11^*)$$

$$M_{n+1} M_{n-1} = h_n M_n^2 \quad (14^*)$$

Speziell haben wir, wenn wir noch die Bezeichnung M_{-1} einführen,

$$M_{-1} = a_{x,1|} = \frac{D_{x+1}}{D_x} = v p_x$$

$$M_0 = a = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$M_1 = a' = - \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$M_2 = a'' - a' = 2 \frac{S_{x+1}^{(2)}}{D_x}$$

$$M_3 = a''' - 3a'' + 2a' = -6 \frac{S_{x+1}^{(3)}}{D_x}$$

.

und

$$a = M_0$$

$$a' = M_1$$

$$a'' = M_1 + M_2$$

$$a''' = M_1 + 3M_2 + M_3$$

$$a'''' = M_1 + 7M_2 + 6M_3 + M_4$$

.

Die Ableitung von M_n ist wegen ((3)) sehr einfach, nämlich

$$M'_n = M_{n+1} + n M_n \quad (16)$$

Infolgedessen ist

$$\frac{d^\nu (M_n v^n)}{d r^\nu} = M_{n+\nu} v^{n+\nu} \quad (17)$$

Die Funktion $M_n v^n$ hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass deren Ableitungen und Integrale nach r einfach durch Änderung von n gebildet werden. Diese für Theorie und Praxis der Infinitesimalrechnung ausserordentlich wichtige Eigenschaft haben unter anderem folgende Funktionen: $\frac{r^n}{n!}$, $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{r^n}$, die Bernoullischen Polynome erster Art, die Eulerschen Polynome, weiter die Hermiteschen und die von *Jordan* [7] gebildeten G-Polynome — die beiden letztgenannten nur multipliziert mit gewissen Faktoren. Eben wegen dieser Eigenschaft kann die Funktion $M_n v^n$ nicht nur bei der Integration der Grundgleichung (14*), sondern auch sonst vielfach mit Vorteil angewendet werden. Um aber die verschiedenen Eigenarten der Grundgleichung (14) besser hervortreten zu lassen, werden wir zunächst ihre Integration auf eine andere Art durchführen und erst bei ihren späteren Integrationen von (17) Gebrauch machen.

Die Integration der Grundgleichung

Die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes

Bei der Integration der Grundgleichung (14) als auch der Gleichungen (14—0) und (14—1) wollen wir annehmen, dass alle k_n bzw. alle h_n konstant seien, was nur annähernd der Wirklichkeit entspricht. Infolgedessen können die Integrale nur Näherungswerte von a darstellen, und zwar um so bessere, je kleiner die Variabilität von k_n in bezug auf die Zinsintensität ist, d. h. je grösser n ist. Nur im Falle $n = \infty$ bekommen wir exakte Rentenbarwerte, weil $k_\infty = h_\infty = 1$. Die durch Integration ermittelten Näherungsformeln können wir daher in Präzisionsgrade $n = 0, 1, 2 \dots \infty$ einteilen.

Die Gleichung (14—0) lässt sich ohne weiteres integrieren. Ihr Integral als Näherungsformel des 0-ten Präzisionsgrades lautet

$$a_{(0)} = (A + B e^\delta)^{-1} \quad (18)$$

wo

$$B = \frac{k_0}{p_x} \quad (19)$$

und A eine noch näher zu bestimmende Integrationskonstante bedeutet.

Die Gleichung (14—1) hat *Güttinger* [8] aufgestellt und integriert. Ihr Integral als Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades lautet

$$a_{(1)} = (A + B e^{\delta})^{\frac{1}{1-h_1}} \quad (20)$$

wo A und B zwei noch näher zu bestimmende Integrationskonstanten bedeuten. Wir bemerken gleich, dass (20) in (18) übergeht, wenn $h_1 = 2k_1 = 2$.

Infolge ((4)) muss
$$a' = C e^{\delta} \quad (21)$$

ein partikuläres Integral der Grundgleichung (14) sein. Das vollständige Integral findet man aber mittels Variation der Integrationskonstante C , d. h. wir nehmen an, dass im vollständigen Integral C nicht mehr eine Konstante, sondern eine Funktion der Zinsintensität sei, also

$$C = C(\delta)$$

Durch Differentiation von (21) finden wir

$$a^{(r)} = e^{\delta} \sum_{\mu=0}^{r-1} \binom{r-1}{\mu} C^{(\mu)} \quad (22)$$

Nach Einsetzen von (22) in (14) bekommen wir infolge ((31))

$$\sum_{r=1}^n S_n^r C^{(r)} \sum_{r=1}^{n-2} S_{n-2}^r C^{(r)} = h_n \left(\sum_{r=1}^{n-1} S_{n-1}^r C^{(r)} \right)^2 \quad (23)$$

Speziell ist

$$(C'' - C') C = h_2 C'^2 \quad (23-2)$$

$$(C''' - 3C'' + 2C') C' = h_3 (C'' - C')^2 \quad (23-3)$$

$$(C'''' - 6C''' + 11C'' - 6C') (C'' - C') = h_4 (C''' - 3C'' + 2C')^2 \quad (23-4)$$

.

Die Differentialgleichung von C (23) ist aber ganz dieselbe wie die Differentialgleichung von a (14), nur die Ordnung der Gleichung ist dadurch um eine Einheit niedriger geworden, der Präzisionsgrad n ist aber derselbe geblieben. Dieser Umstand ermöglicht eine sehr leichte Integration der Grundgleichung (14). Das Integral von (23—2) lautet mit Rücksicht auf (14—1) und (20)

$$C = (\underline{A} + \underline{B} e^{\delta})^{\frac{1}{1-h_2}} \quad (24)$$

(24) multipliziert mit e^δ gemäss (21) gibt den Wert von $a'_{(2)}$ — siehe (25—2)! —, welchen wir leicht integrieren können. So bekommen wir den Wert von $a_{(2)}$ — siehe (26—2)! — Es ist also (26—2) das vollständige Integral von (14—2), und wenn wir h_2 mit h_3 vertauschen, auch das Integral von (23—3), welches mit e^δ multipliziert gemäss (21) den Wert für $a'_{(3)}$ der nächsten Gleichung (14—3) gibt — siehe (25—3)! —, welchen wir wiederum leicht integrieren können. So finden wir (26—3) usw.

$$a'_{(2)} = e^\delta (\underline{A} + \underline{B}e^\delta)^{\frac{1}{1-h_2}} \quad (25-2)$$

$$a'_{(3)} = \underline{C}_1 e^\delta + e^\delta (\underline{A} + \underline{B}e^\delta)^{\frac{2-h_3}{1-h_3}} \quad (25-3)$$

$$a'_{(4)} = \underline{C}_1 e^\delta + \underline{C}_2 e^{2\delta} + e^\delta (\underline{A} + \underline{B}e^\delta)^{\frac{3-2h_4}{1-h_4}} \quad (25-4)$$

.

$$a'_{(n)} = \sum_{r=1}^{n-2} \underline{C}_r e^{r\delta} + e^\delta (\underline{A} + \underline{B}e^\delta)^{\frac{(n-1)-(n-2)h_n}{1-h_n}} \quad (25)$$

$$a_{(2)} = C_0 + (A + Be^\delta)^{\frac{2-h_2}{1-h_2}} \quad (26-2)$$

$$a_{(3)} = C_0 + C_1 e^\delta + (A + Be^\delta)^{\frac{3-2h_3}{1-h_3}} \quad (26-3)$$

$$a_{(4)} = C_0 + C_1 e^\delta + C_2 e^{2\delta} + (A + Be^\delta)^{\frac{4-3h_4}{1-h_4}} \quad (26-4)$$

.

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^{n-2} C_r e^{r\delta} + (A + Be^\delta)^{\frac{n-(n-1)h_n}{1-h_n}} \quad (26)$$

Wir wollen (26) als vollständiges Integral der Grundgleichung (14) die *allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes* a nennen. Die Näherungsformeln einzelner Präzisionsgrade bekommen wir, wenn wir in (26) der Reihe nach $n = 0, 1, 2, \dots$ setzen. Im Falle $n = 0$ wird der Exponent in (26), welchen wir auch schreiben können

$$g_n = \frac{n - (n-1)h_n}{1-h_n} = \frac{n^2 - (n^2-1)k_n}{n - (n+1)k_n} \quad (27)$$

gleich -1 , und (26) wird so identisch mit (18). Im Falle $n = 1$ wird (26) identisch mit (20). In der *allgemeinen Näherungsformel des Renten-*

barwertes (26) sind also auch die Integrale von (14—0) und (14—1) *inbegriffen*. Diese beiden Differentialgleichungen sind offenbar durch den Zerfall der Grundgleichung entstanden.

Die allgemeine Näherungsformel (26) ist aus zwei Teilen zusammengesetzt, nämlich:

1. aus einer Potenzreihe des Aufzinsungsfaktors r , die bei $n = 0, 1$ fehlt, und
2. aus einer Potenz des Binoms $(A + Br)$, welche wir *das Schlussglied* nennen werden. Der Exponent des Schlussgliedes ist eine rationale Funktion nur von n und h_n und ist somit für ein gegebenes n als Konstante zu betrachten.

Der wesentliche Teil von $a_{(n)}$ ist das Schlussglied, nicht aber die Potenzreihe, welche übrigens beim 0-ten und 1-ten Präzisionsgrade fehlt, bei folgenden Präzisionsgraden aber einen im Verhältnis zum Schlussgliede nur geringen Wert aufweist. Zahlenmässige Beispiele zeigen nämlich, dass bei wenigen Gliedern der Potenzreihe der Wert des Schlussgliedes relativ gross ist, nimmt aber bei Einschaltung weiterer Glieder der Potenzreihe langsam ab. Damit ist die wohl bekannte Tatsache geklärt, warum parabolische Inter- und Extrapolation der Rentenbarwerte zu ungenauen Werten führt. Weil der Exponent des Schlussgliedes bei $n = 0$ gleich -1 ist, ist es weiter klar, warum von den Autoren die hyperbolische Inter- und Extrapolation der parabolischen bevorzugt wird. Noch besser eignet sich selbstverständlich die Inter- und Extrapolation nach der Funktion $(A + Bi)^{q_1}$, weil dies der Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades entspricht.

Der Präzisionsgrad n bestimmt die Anzahl der Integrationskonstanten. Je mehr Integrationskonstanten eine Näherungsformel enthält, desto bessere Näherungswerte liefert sie. Die Näherungsformel n -ten Präzisionsgrades enthält $(n + 1)$ Integrationskonstanten, nämlich: $A, B, C_0, C_1 \dots C_{n-2}$. Beim 0-ten Präzisionsgrade haben wir z. B. nur eine einzige Integrationskonstante A , der Wert von B ist nämlich schon in (19) bestimmt.

**Bestimmung der Integrationskonstanten
der allgemeinen Näherungsformel des Rentenbarwertes mittels Summen
der diskontierten Zahlen ${}^0S_{x+1}^{(\nu)}$ einer Grundtafel (I. Gruppe)**

Zwischen den Integrationskonstanten \underline{A} , \underline{B} , \underline{C}_r in (25) und den Integrationskonstanten A , B , C_r in (26) bestehen folgende leicht nachweisbare Beziehungen

$$\begin{aligned} A &= \underline{A} (\underline{B} g_n)^{-\frac{1}{g_n}} & \underline{A} &= A (B g_n)^{\frac{1}{g_n-1}} \\ B &= \underline{B} (\underline{B} g_n)^{-\frac{1}{g_n}} & \underline{B} &= B (B g_n)^{\frac{1}{g_n-1}} \\ C_r &= \frac{C_r}{\nu}, \nu \neq 0 & \underline{C}_r &= C_r \nu \end{aligned} \quad (28)$$

Wir werden uns deshalb auf die Bestimmung der Integrationskonstanten A , B , C_r beschränken.

Die Integrationskonstante A in (18) bestimmen wir so, dass der Näherungswert des 0-ten Präzisionsgrades $a_{(0)}$ im Falle $\delta = \delta_0$ dem entsprechenden Rentenbarwerte der Grundtafel 0a gleich wird. Die Integrationskonstante ergibt sich also aus der Gleichung

$${}^0a = \left(A + \frac{k_0 r_0}{p_x} \right)^{-1}$$

Daraus folgt

$$A = \frac{1}{{}^0a} - \frac{k_0 r_0}{p_x} \quad (29)$$

Die Integrationskonstanten A und B der Gleichung (20) hat *Güttinger* [8] so bestimmt, dass im Falle $\delta = \delta_0$ sowohl $a_{(1)}$ als auch seine erste Ableitung $a'_{(1)}$ den entsprechenden Werten der Grundtafel ${}^0a = {}^0M_0$ und ${}^0a' = {}^0M_1$ gleich werden. Die beiden Integrationskonstanten ergeben sich also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} {}^0M_0 &= (A + B r_0)^{\frac{1}{1-h_1}} \\ {}^0M_1 &= \frac{B r_0}{1-h_1} (A + B r_0)^{\frac{h_1}{1-h_1}} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &= {}^0M_0^{1-h_1} \left[1 - (1 - h_1) \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0} \right] \\ B &= {}^0M_0^{1-h_1} v_0 (1 - h_1) \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0} \end{aligned} \quad (30)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten $A, B, C_0, C_1 \dots C_{n-2}$ setzen wir in (26) $\delta = \delta_0$ und $a_{(n)} = {}^0a = {}^0M_0$. So bekommen wir, wenn wir Kürze halber $\eta = (A + Br)$ schreiben,

$${}^0M_0 = \sum_{r=0}^{n-2} C_r r_0^r + \eta_0^{g_n} \quad (31)$$

Die μ -te Ableitung von (31) nach r_0 lautet unter Beachtung von (17)

$${}^0M_\mu v_0^\mu = \sum_{r=\mu}^{n-2} C_r (v)_\mu r_0^{r-\mu} + B^\mu (g_n)_\mu \eta_0^{g_{n-\mu}} \quad (32)$$

oder

$${}^0M_\mu = \sum_{r=\mu}^{n-2} C_r (v)_\mu r_0^r + B^\mu r_0^\mu (g_n)_\mu \eta_0^{g_{n-\mu}} \quad (33)$$

Das zur Berechnung der Integrationskonstanten A, B, C_r notwendige Gleichungssystem ergibt sich aus (33), wenn wir der Reihe nach setzen $\mu = n, (n-1), (n-2) \dots 2, 1, 0$, nämlich:

$${}^0M_n = B^n r_0^n (g_n)_n \eta_0^{g_{n-n}} \quad (33, n)$$

$${}^0M_{n-1} = B^{n-1} r_0^{n-1} (g_n)_{n-1} \eta_0^{g_{n-n+1}} \quad (33, n-1)$$

$${}^0M_{n-2} = B^{n-2} r_0^{n-2} (g_n)_{n-2} \eta_0^{g_{n-n+2}} + C_{n-2} (n-2)! r_0^{n-2} \quad (33, n-2)$$

$${}^0M_{n-3} = B^{n-3} r_0^{n-3} (g_n)_{n-3} \eta_0^{g_{n-n+3}} + C_{n-2} (n-2)! r_0^{n-2} + C_{n-3} (n-3)! r_0^{n-3} \quad (33, n-3)$$

.....

$${}^0M_r = B^r r_0^r (g_n)_r \eta_0^{g_{n-r}} + C_{n-2} (n-2)_r r_0^{n-2} + C_{n-3} (n-3)_r r_0^{n-3} + \dots C_r r_0^r \quad (33, r)$$

.....

$${}^0M_0 = \eta_0^{g_n} + C_{n-2} r_0^{n-2} + C_{n-3} r_0^{n-3} + \dots C_1 r_0 + C_0 \quad (33, 0)$$

Zunächst berechnet man aus (33, n) und (33, $n-1$) die Integrationskonstanten A und B . So findet man die Formeln (35, A) und (35, B), in welchen

$${}_n\pi_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \pi [\lambda - (\lambda - 1) h_n]$$

$${}_n\pi_1 = {}_n\pi_0 = 1 \quad (34)$$

bedeutet. Nachher berechnet man C_{n-2} aus (33, $n-2$), ferner C_{n-3} aus (33, $n-3$) usw. der Reihe nach alle C_r von C_{n-2} bis C_0 . Wir können aber aus dem Gleichungssystem von (33, $n-2$) bis (33, r) den Wert von C_r auch allgemein (z. B. mittels Determinanten, unvollständiger Induktion usw.) bestimmen. Die Rechnung ist etwas umständlich, sie bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Deshalb sehen wir davon ab und schreiben gleich das Resultat in (35, C) nieder.

$$A = \left[\frac{1}{{}_n\pi_n} \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}^0M_n^{n-1}} \right] \frac{1}{g_n} \left[1 - (1 - h_n) \frac{{}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right] \quad (35, A)$$

$$B = \left[\frac{1}{{}_n\pi_n} \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}^0M_n^{n-1}} \right] \frac{1}{g_n} v_0 (1 - h_n) \frac{{}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \quad (35, B)$$

$$C_r = \frac{v_0^r}{r!} \sum_{\lambda=0}^{n-2-r} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \left[{}^0M_{r+\lambda} - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-r-\lambda}}{{}_n\pi_{n-r-\lambda} {}^0M_n^{n-r-\lambda-1}} \right] \quad (35, C)$$

Wenn $n = 1$, bekommen wir aus (35, A) und (35, B) die Werte für A und B der Güttingerschen Gleichung, nämlich (30). Wenn $n = 0$, müssen wir in (35, A) und (35, B) zunächst h_n durch k_n und 0M_n durch ${}^0S_{x+1}^{(n)}$ ausdrücken und erst nachher $n = 0$ setzen. Wir bekommen so die Werte von A und B der Näherungsformel des 0-ten Präzisionsgrades, nämlich (29) und (19). In (35, A) und (35, B) sind also auch die Werte A und B der Näherungsformeln des 0-ten und 1-ten Präzisionsgrades inbegriffen, und so erübrigt sich eine weitere gesonderte Behandlung dieser beiden Näherungsformeln bzw. der Gleichungen (14—0) und (14—1).

Die Integrationskonstanten A , B , C_r sind so bestimmt, dass

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^{n-2} C_r r^r + (A + B r)^{g_n}$$

im Falle $r = r_0$

$${}^0a = \sum_{r=0}^{n-2} C_r r_0^r + (A + B r_0)^{g_n}$$

Wenn wir nun die untere Gleichung von der oberen abziehen, die Werte von A und B einsetzen und Kürze halber

$${}^0M_r - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-r}}{{}_n\pi_{n-r} {}^0M_n^{n-r-1}} = Q_r$$

schreiben, bekommen wir nach einigen Umformungen

$$a_{(n)} = Q_0 + \sum_{r=1}^{n-2} C_r (r^r - r_0^r) + \frac{1}{{}_n\pi_n} \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}^0M_n^{n-1}} \left[1 + \frac{(1 - h_n) v_0 \Delta {}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^{g_n}$$

Es ist aber

$$r - r_0 = \Delta$$

$$r^r - r_0^r = r_0^r [(1 + v_0 \Delta)^r - 1]$$

Also

$$\sum_{r=1}^{n-2} C_r (r^r - r_0^r) = \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{\lambda=0}^{n-2-r} \frac{(-1)^\lambda}{r! \lambda!} [(1 + v_0 \Delta)^r - 1] Q_{r+\lambda}$$

Durch Substitution $\lambda = \varrho - r$ vereinfacht sich die letzte Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n-2} C_r (r^r - r_0^r) &= \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{\varrho=r}^{n-2} \frac{(-1)^{\varrho-r}}{r! (\varrho - r)!} [(1 + v_0 \Delta)^r - 1] Q_\varrho \\ &= \sum_{\varrho=1}^{n-2} \frac{(-1)^\varrho}{\varrho!} Q_\varrho \sum_{r=1}^{\varrho} (-1)^r \binom{\varrho}{r} [(1 + v_0 \Delta)^r - 1] \\ &= \sum_{\varrho=1}^{n-2} \frac{(v_0 \Delta)^\varrho}{\varrho!} Q_\varrho \end{aligned}$$

Endlich bekommen wir so

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(v_0 \Delta)^r}{r!} \left[{}^0M_r - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-r}}{{}_n\pi_{n-r} {}^0M_n^{n-r-1}} \right] + \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}_n\pi_n {}^0M_n^{n-1}} \left[1 + \frac{(1 - h_n) v_0 \Delta {}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^{g_n} \quad (36)$$

Wir wollen (36) mit dem Namen *die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes der I. Gruppe* nennen. Sie unterscheidet sich von (26) nur dadurch, dass die Integrationskonstanten A , B , C , durch die Summen der diskontierten Zahlen ${}^0S_{x+1}^{(r)}$ bzw. durch Funktionen derselben 0M_r ausgedrückt sind und dass das Argument r mit

$\Delta = i - i_0$ ersetzt ist. Die allgemeine Näherungsformel (36) besteht aus einer Potenzreihe der Zinsfusdifferenz $\Delta = i - i_0$ und aus einer Potenz des Binoms $(\alpha + \beta \Delta)$, welche wir ebenfalls Schlussglied nennen wollen.

Verschiedene Bemerkungen zur I. Gruppe

1. Spezielle Näherungsformeln und ihre gegenseitigen Beziehungen

Aus der allgemeinen Näherungsformel des Rentenbarwertes der I. Gruppe bekommen wir die Näherungsformeln aller Präzisionsgrade, wenn wir der Reihe nach $n = 0, 1, 2 \dots$ setzen, nämlich:

$$a_{(0)} = {}^0M_0 \left[1 + \frac{k_0 v_0 \Delta {}^0M_0}{{}^0M_{-1}} \right]^{-1} = {}^0M_0 \left[1 - \frac{v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \right]^{-1} \quad (36-0)$$

$$a_{(1)} = {}^0M_0 \left[1 + \frac{(1 - h_1) v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \right]^{\frac{1}{1-h_1}} \quad (36-1)$$

$$a_{(2)} = {}^0M_0 + \frac{1}{2\pi_2} \frac{{}^0M_1^2}{{}^0M_2} \left[\left(1 + \frac{(1 - h_2) v_0 \Delta {}^0M_2}{{}^0M_1} \right)^{\frac{2-h_2}{1-h_2}} - 1 \right] \quad (36-2)$$

.....

oder, wenn wir zu den ${}^0S_{x+1}^{(r)}$ und k_n zurückgreifen:

$$a_{(0)} = {}^0a \left[1 + \frac{k_0 v_0 \Delta {}^0N_{x+1}}{{}^0D_{x+1}} \right]^{-1} = {}^0a \left[1 + \frac{v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{-1} \quad (36, 0)$$

$$a_{(1)} = {}^0a \left[1 + \frac{(2k_1 - 1) v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{\frac{1}{1-2k_1}} \quad (36, 1)$$

$$a_{(2)} = {}^0a \left\{ 1 + \frac{({}^0S_{x+1})^2}{(4 - 3k_2) {}^0S_{x+1}^{(2)} {}^0N_{x+1}} \left[\left(1 + \frac{(3k_2 - 2) v_0 \Delta {}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0S_{x+1}} \right)^{\frac{4-3k_2}{2-3k_2}} - 1 \right] \right\} \quad (36, 2)$$

.....

Bezüglich der Näherungsformel des 0-ten Präzisionsgrades sei noch bemerkt, dass man zuerst die h_n und 0M_n in (36) durch k_n und ${}^0S_{x+1}^{(r)}$ ausdrücken muss und erst nachher $n = 0$ setzen darf, wie wir schon wiederholt in solchen Fällen gemacht haben.

Wir haben bereits gesagt, dass durch die Substitution $h_1 = 2k_1 = 2$ die Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades in die des 0-ten Präzisionsgrades übergeht. Dies ist aber nur ein Spezialfall der allgemeinen gegenseitigen Beziehungen der Näherungsformeln. Durch die Substitution

$${}^0M_n = h_{n-1} \frac{{}^0M_{n-1}^2}{{}^0M_{n-2}}$$

$$h_n = \frac{2h_{n-1} - 1}{h_{n-1}}$$

geht allgemein die Näherungsformel des n -ten Präzisionsgrades in die des $(n-1)$ -ten restlos über. So kann man also von der Näherungsformel des n -ten Präzisionsgrades ausgehend die Näherungsformeln aller niederen Präzisionsgrade $(n-1), (n-2) \dots 2, 1, 0$, herleiten. Bei dieser Reduktion des Präzisionsgrades ist zu beachten, dass der Koeffizient von $\frac{(v_0 \Delta)^{n-2}}{(n-2)!}$, das ist der Koeffizient des letzten Gliedes der Potenzreihe in (36)

$$\left[{}^0M_{n-2} - \frac{{}^0M_{n-1}^2}{{}_n\tau_2 {}^0M_n} \right]$$

gleich Null wird. Die übrigen Glieder der Potenzreihe als auch das Schlussglied verwandeln sich aber in die entsprechenden Glieder von $a_{(n-1)}$.

Wir können aber auch umgekehrt aus der Näherungsformel des n -ten Präzisionsgrades, wenn $n > 0$, die Näherungsformel des $(n+1)$ -ten Präzisionsgrades herleiten. Dazu brauchen wir ausser der Substitution

$${}^0M_n = \frac{1}{h_n} \frac{{}^0M_{n+1} {}^0M_{n-1}}{{}^0M_n}$$

$$h_n = \frac{1}{2 - h_{n+1}}$$

noch das Glied

$$\frac{(v_0 \Delta)^{n-1}}{(n-1)!} \left[{}^0M_{n-1} - \frac{{}^0M_n^2}{{}_{n+1}\tau_2 {}^0M_{n+1}} \right]$$

zur Potenzreihe in $a_{(n)}$ hinzuzufügen. Auf diese Art und Weise kann man z. B. aus der Güttingerschen Näherungsformel die Näherungsformeln aller Präzisionsgrade $n = 2, 3 \dots \infty$ ohne Aufstellung und Integration der Grundgleichung und ohne Bestimmung der Integrationskonstanten herleiten.

2. Beziehung zur Taylorschen Reihe

Die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes der I. Gruppe (36) können wir schreiben wie folgt:

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^n \frac{(v_0 \Delta)^r}{r!} {}^0M_r + R_{(n)} \quad (37)$$

wo das Restglied

$$R_{(n)} = \frac{(v_0 \Delta)^n}{n!} {}^0M_n \sum_{r=1}^{\infty} (n)_{-r} \left(\frac{h_n}{1-h_n} \right)_r \left[\frac{(1-h_n) v_0 \Delta {}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^r \quad (38)$$

(37) verglichen mit (1) zeigt, dass die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes der I. Gruppe nichts anderes ist als eine bis zur n -ten Potenz von $(-v_0 \Delta)$ entwickelte Taylorsche Reihe des Rentenbarwertes mit einer Abschätzung des Restgliedes, welche um so genauer, je grösser n ist. Der Präzisionsgrad n der Näherungsformel gibt also an, wie viele Glieder der Taylorschen Reihe in die Rechnung einbezogen werden, bevor man das Restglied abschätzt. Es ist also:

$$\begin{aligned} a_{(0)} &= \frac{{}^0N_{x+1}}{{}^0D_x} + R_{(0)} \\ a_{(1)} &= \frac{1}{{}^0D_x} [{}^0N_{x+1} - v_0 \Delta {}^0S_{x+1}] + R_{(1)} \\ a_{(2)} &= \frac{1}{{}^0D_x} [{}^0N_{x+1} - v_0 \Delta {}^0S_{x+1} + (v_0 \Delta)^2 {}^0S_{x+1}^{(2)}] + R_{(2)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$a_{(n)}$ kann also deshalb nicht den exakten Rentenbarwert darstellen, weil das Restglied R_n nicht genau berechnet, sondern nur mit $R_{(n)}$ näherungsweise bestimmt ist. Durch die Integration der Grundgleichung und Bestimmung der Integrationskonstanten mit Hilfe von ${}^0S_{x+1}^{(r)}$ bzw.

M_r , haben wir also auf Umwegen das Restglied der Taylorsche Reihe (1) abgeschätzt. Die dritte Voraussetzung, welche wir an die Taylorsche Reihe gestellt haben, erscheint somit erledigt. Am Ende unserer Abhandlung werden wir noch zeigen, wie und unter welchen Bedingungen das Restglied R_n exakt berechnet werden kann.

3. Beziehung zu den bekannten Näherungsformeln

Bei der Integration der Grundgleichung haben wir k_n als eine vorläufig nicht näher bestimmte Konstante betrachtet. Nun wollen wir dieser Grösse spezielle Werte beilegen.

* *

Zunächst nehmen wir die untere Grenze $k_n = 0$. Die Grundgleichung wird so

$$\sum_{r=1}^{n+1} S_{n+1}^r a^{(r)} = 0$$

Aus $M_{n-1} = 0$ folgt nämlich, dass auch $M_{n+1} = 0$, nicht aber umgekehrt, so dass obige Differenzialgleichung in jedem Falle gilt. Ihr vollständiges Integral lautet

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^n C_r r^r$$

oder nach Bestimmung der Integrationskonstanten C_r

$$a_{(n)} = \sum_{r=0}^n \frac{(v_0 \Delta)^r}{r!} {}^0M_r$$

Das ist aber die Taylorsche Reihe (1) ohne Restglied R_n . Man gelangt zu obiger Formel auch unmittelbar aus (36) durch den Grenzübergang $\lim h_n \rightarrow 0$. Speziell haben wir

$$a_{(0)} = \frac{1}{{}^0D_x} {}^0N_{x+1} \quad (39-0)$$

$$a_{(1)} = \frac{1}{{}^0D_x} [{}^0N_{x+1} - v_0 \Delta {}^0S_{x+1}] \quad (39-1)$$

$$a_{(2)} = \frac{1}{{}^0D_x} [{}^0N_{x+1} - v_0 \Delta {}^0S_{x+1} + (v_0 \Delta)^2 {}^0S_{x+1}^{(2)}] \quad (39-2)$$

.

Die Formel (39—1) hat *Steffensen* und die Formel (39—2) *van Dorsten* gefunden. Die nicht befriedigende Annäherung dieser Formeln und der parabolischen Inter- und Extrapolation überhaupt können wir auch so erklären, dass der Wert von $k_n = 0$ entschieden zu klein genommen ist.

* *

Nehmen wir nun die obere Grenze $k_n = 1$. Die Grundgleichung ändert sich in diesem Falle nicht, so dass wir uns eine neue Integration und eine neue Bestimmung der Integrationskonstanten ersparen können; es genügt, in (36) einfach $h_n = \frac{n+1}{n}$ zu setzen. Dabei wird der Exponent des Schlussgliedes $g_n = -1$. Speziell haben wir:

$$a_{(0)} = {}^0a \left[1 + \frac{v_0 \Delta {}^0N_{x+1}}{{}^0D_{x+1}} \right]^{-1} \quad (40-0)$$

$$a_{(1)} = {}^0a \left[1 + \frac{v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{-1} \quad (40-1)$$

$$a_{(2)} = {}^0a \left[1 - \frac{v_0 \Delta \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}}{1 + v_0 \Delta \frac{{}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0S_{x+1}}} \right] \quad (40-2)$$

.

Die Formel (40—1) ist identisch mit (36, 0) rechts. Wir haben ja schon wiederholt bemerkt, dass im Falle $k_1 = 1$, $a_{(1)}$ in $a_{(0)}$ übergeht. Die Formel (40—2) ist identisch mit der ersten Formel von *Poukka*. Die zweite Formel von *Poukka* bekommen wir aus (40—2) durch Elimination von ${}^0S_{x+1}^{(2)}$ mittels (2), also

$$a_{(1)} = {}^0a \left[1 - \frac{v_0 \Delta \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}}{1 + k_1 v_0 \Delta \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}} \right] \quad (40*)$$

Wenn wir in (40—2) den Diskontfaktor v_0 weglassen und ausserdem

$${}^0S_{x+1}^{(2)} \text{ mit } \frac{1}{2} ({}^0S_{x+1}^{(2)} + {}^0S_{x+2}^{(2)})$$

$$\underline{\Delta} \quad \text{mit} \quad \underline{\Delta} = \delta - \delta_0$$

vertauschen — was das Resultat nicht wesentlich ändern kann —, bekommen wir die Formel von *Berger*:

$$a_{(2)} = {}^0a \left[1 - \frac{\underline{\Delta} \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}}{1 + \frac{\underline{\Delta} ({}^0S_{x+1}^{(2)} + {}^0S_{x+2}^{(2)})}{2 {}^0S_{x+1}}} \right] \quad (40^{**})$$

* *

Weiter nehmen wir $k_n = \frac{n}{n+1}$. Die Werte von k_n sind dann der Reihe nach beim 0-ten Präzisionsgrade angefangen: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots$ und liegen (abgesehen von 0) zwischen der unteren und der oberen Grenze von k_n . Dadurch wird $h_n = 1$, und die Grundgleichung wird

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} S_{n+1}^{\nu} a^{(\nu)} \sum_{\nu=1}^{n-1} S_{n-1}^{\nu} a^{(\nu)} = \left(\sum_{\nu=1}^n S_n^{\nu} a^{(\nu)} \right)^2$$

Das vollständige Integral lautet

$$a_{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-2} C_{\nu} r^{\nu} + AB^r \quad (41)$$

oder nach Bestimmung der Integrationskonstanten

$$a_{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{(v {}^0\Delta)^{\nu}}{\nu!} \left[{}^0M_{\nu} - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-\nu}}{{}^0M_n^{n-\nu-1}} \right] + \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}^0M_n^{n-1}} e^{v {}^0\Delta \frac{{}^0M_n}{{}^0M_{n-1}}}$$

Man gelangt zu obiger Formel auch unmittelbar aus (36) durch den Grenzübergang $\lim h_n \rightarrow 1$. Speziell haben wir

$$a_{(0)} = {}^0a \quad (41-0)$$

$$a_{(1)} = {}^0a e^{-v {}^0\Delta \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}} \quad (41-1)$$

$$a_{(2)} = {}^0a - \frac{({}^0S_{x+1})^2}{2 {}^0D_x {}^0S_{x+1}^{(2)}} \left[1 - e^{-2v {}^0\Delta \frac{{}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0S_{x+1}}} \right] \quad (41-2)$$

.

Die Formel (41—2) hat zuerst *Christen* und später *Frucht* hergeleitet. Eliminiert man ${}^0S_{x+1}^{(2)}$ mittels (2) und setzt $k_1 = 0,84$, so findet man eine weitere Formel von *Frucht*

$$a_{(1)} = \frac{{}^0a}{1.68} \left[0.68 + e^{-1.68 v_0 \Delta \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}} \right] \quad (41—I)$$

Die Formel (41—1) haben bis jetzt verschiedene Autoren — wenigstens unseres Wissens — nur in einer ein wenig geänderten Form aufgestellt, nämlich

$$a_{(1)} = {}^0M_0 e^{\frac{v_0 \Delta}{\alpha} \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0}}$$

Die Grösse α kann als Verbesserung des Integrals (41—1) aufgefasst werden, weil $k_1 = \frac{1}{2}$ zu klein genommen ist. Es ist nach

$$\text{Evans} \quad \alpha = 1 - \frac{v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \frac{1}{3.8 - 20i} \quad (41—II)$$

$$\text{Franckx und Frucht [9]} \quad \alpha = 1 - 0.34 \frac{v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \quad (41—III)$$

$$\text{Hantsch} \quad \alpha = 1 - \frac{v_0 \Delta}{2} \left(\frac{{}^0M_2}{{}^0M_1} - \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0} \right) \quad (41—IV)$$

Die letzte Formel geht übrigens in die vorletzte über, wenn man 0M_2 mittels (2) bzw. (14*) eliminiert und dabei $k_1 = 0,84$ setzt. Eine ähnliche Formel hat auch *Güttinger* [8] gefunden, welche sich allerdings auf a_x und nicht auf $a_{(1)}$ bezieht. Wenn wir in (41—1)

$$e^{-\frac{v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}} \quad \text{mit} \quad (1 + v_0 \Delta)^{-\frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}}$$

vertauschen — beide Ausdrücke stimmen ja in den ersten zwei Gliedern der Reihenentwicklung überein —, bekommen wir die Formel von *Meidell*

$$a_{(1)} = {}^0a (1 + v_0 \Delta)^{-\frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}} \quad (41—V)$$

* * *

Wenn wir schliesslich noch in (36, 1) $k_1 = \frac{5}{6}$ setzen, bekommen wir die Formel von *Palmqvist*

$$a_{(1)} = {}^0a \left(1 + \frac{v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{1.5 {}^0N_{x+1}} \right)^{-1.5} \quad (41^*)$$

Bei den meisten Autoren ist dagegen $k_1 = 0,84$, also

$$a_{(1)} = {}^0a \left[1 + \frac{0.68 v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{-\frac{1}{0.68}}$$

Die allgemeine Formel für $a_{(1)}$ hat *Güttinger* [8] aufgestellt, wie wir bereits erwähnt haben.

* * *

Die Näherungsformeln der I. Gruppe, welche verschiedene Autoren gefunden haben, sind also entweder spezielle Integrale der Grundgleichung des Zinsfussproblemcs oder aber Funktionen, die sich diesen Integralen annähern und die aus verschiedenen, mehr oder weniger zutreffenden, zugrunde gelegten Annahmen hergeleitet sind. Einige dieser Näherungsfunktionen können sogar als Verbesserungen der speziellen Integrale der Grundgleichung betrachtet werden, in welchen der Wert von k_n zu gross oder zu klein genommen ist.

4. Steigende Rente

Sowohl in der Privat- als auch in der Sozialversicherung werden oft auch steigende Renten gebraucht. Der Barwert der nachschüssigen steigenden Rente ist bekanntlich

$$\frac{S_{x+1}}{D_x} = (Ia)_x = I = -a'_x = -a'$$

Die allgemeine Näherungsformel für I bekommen wir aus (25), wo noch die Integrationskonstanten \underline{A} , \underline{B} , \underline{C}_v zu bestimmen sind, oder viel einfacher mittels Differentiation und Vorzeichenänderung in (36).

Es ist (42)

$$I_{(n)} = -v_0 r \sum_{v=1}^{n-2} \frac{(v_0 \Delta)^{v-1}}{(v-1)!} \left[{}^0M_v - \frac{1}{{}_n\pi_{n-v}} \frac{{}^0M_{n-1}^{n-v}}{{}^0M_n^{n-v-1}} \right] - \frac{v_0 r}{{}_n\pi_{n-1}} \frac{{}^0M_{n-1}^{n-1}}{{}^0M_n^{n-2}} \left[1 + \frac{(1-h_n) v_0 \Delta {}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^{g_{n-1}}$$

Bezüglich (42) gilt mutatis mutandis alles, was wir von (36) gesagt haben. Durch Entwicklung des Schlussgliedes in eine Potenzreihe finden wir die Taylorsche Reihe mit einer Abschätzung des Restgliedes $R_{(n)}$, nämlich

$$I_{(n)} = -v_0 r \sum_{r=1}^n \frac{(v_0 \Delta)^{r-1}}{(r-1)!} {}^0M_r + R_{(n)}$$

wo

$$R_{(n)} = -v_0 r \frac{(v_0 \Delta)^{n-1}}{(n-1)!} {}^0M_n \sum_{r=1}^{\infty} (n-1)_{-r} \left(\frac{h_n}{1-h_n} \right)_r \left[\frac{(1-h_n) v_0 \Delta {}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^r$$

Die Näherungsformeln einzelner Präzisionsgrade $n = 0, 1, 2 \dots$ lauten:

$$I_{(0)} = -v_0 r {}^0M_1 \left[1 + \frac{k_0 v_0 \Delta {}^0M_0}{{}^0M_{-1}} \right]^{-2} = -v_0 r {}^0M_1 \left[1 - \frac{v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \right]^{-2}$$

$$I_{(1)} = -v_0 r {}^0M_1 \left[1 + \frac{(1-h_1) v_0 \Delta {}^0M_1}{{}^0M_0} \right]^{\frac{h_1}{1-h_1}}$$

$$I_{(2)} = -v_0 r {}^0M_1 \left[1 + \frac{(1-h_2) v_0 \Delta {}^0M_2}{{}^0M_1} \right]^{\frac{1}{1-h_2}}$$

.....

oder, wenn wir zu den k_n und ${}^0S_{x+1}$ zurückgreifen:

$$I_{(0)} = {}^0I v_0 r \left[1 + \frac{k_0 v_0 \Delta {}^0N_{x+1}}{{}^0D_{x+1}} \right]^{-2} = {}^0I v_0 r \left[1 + \frac{v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{-2}$$

$$I_{(1)} = {}^0I v_0 r \left[1 + \frac{(2k_2-1) v_0 \Delta {}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}} \right]^{\frac{2k_1}{1-2k_1}}$$

$$I_{(2)} = {}^0I v_0 r \left[1 + \frac{(3k_2-2) v_0 \Delta {}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0S_{x+1}} \right]^{\frac{2}{2-3k_2}}$$

.....

5. Höhere steigende Renten

Den Barwert der steigenden Rente n -ten Grades definieren wir:

$$\frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x} = (I^n a)_x = I^n$$

Dadurch können wir den Barwert der konstanten Rente (1) darstellen

$$a = \sum_{v=0}^n (-v_0 \Delta)^v {}^0I^v + R_n$$

Für I^n gilt zunächst folgende, aus (3) hergeleitete Formel:

$$I^n = \frac{k_{n-1}(x+1, i) (I^{n-1})^2}{I^{n-2}}$$

Wir können weiter für I^n Näherungsformeln aller Präzisionsgrade aufstellen, genau so, wie wir es für a und I getan haben. Wir sehen jedoch davon ab, weil I^2 in der Versicherungspraxis nur äusserst selten, $I^3 I^4 \dots$ dagegen überhaupt nicht vorkommen. In Folgendem werden wir nur einige einfachere, für das Zinsfussproblem nützliche Formeln herleiten. Aus (33, n) und (33, $n-1$) folgt

$$\frac{M_n}{{}^0M_n} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{h_n}{1-h_n}} \quad (43)$$

$$\frac{M_{n-1}}{{}^0M_{n-1}} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{1-h_n}} \quad (44)$$

(43) dividiert durch die h_n -te Potenz von (44) gibt

$$\frac{I^n v^n}{{}^0I^n v_0^n} \sim \left(\frac{I^{n-1} v^{n-1}}{{}^0I^{n-1} v_0^{n-1}}\right)^{h_n} \quad (45)$$

Für $n=1$ finden wir $\frac{I v}{{}^0I v_0} \sim \left(\frac{a}{{}^0a}\right)^{h_1} \quad (45, 1)$

Durch Rekursion finden wir weiter

$$\frac{I^n v^n}{{}^0I^n v_0^n} \sim \left(\frac{I^{n-\nu} v^{n-\nu}}{{}^0I^{n-\nu} v_0^{n-\nu}}\right)^{h_n h_{n-1} h_{n-2} \dots h_{n-\nu+1}}$$

und wenn $\nu = n$

$$\frac{I^n v^n}{{}^0I^n v_0^n} \sim \left(\frac{a}{{}^0a}\right)^{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}$$

Obige Formeln ermöglichen unter anderem eine leicht durchführbare Abschätzung der Barwerte der steigenden Renten bis zum n -ten Grade, sofern die Grundtafel die ${}^0S_{x+1}$, $\nu = 0, 1, 2 \dots n$, enthält.

6. Temporäre Renten

Bei temporären Renten $a_{x, \overline{m}|}$ wird der Ausscheidequotient nach m Jahren gleich 1 gesetzt und so die Ausscheideordnung abgeschlossen. Da unsere Ausführungen für alle möglichen Ausscheideordnungen gelten, folgt daraus, dass die Grundgleichung samt allem, was wir aus ihr hergeleitet haben, auch für die temporären Renten, mögen diese konstant oder steigend sein, volle Geltung hat. Es bleibt nur noch zu bemerken, wie die Summen der diskontierten Zahlen der temporären Rente ${}^0S_{x+1, \overline{m}|}^{(\nu)}$ aus den Summen der diskontierten Zahlen der lebenslänglichen Rente ${}^0S_{x+1}^{(\nu)}$ gebildet werden können. Es ist allgemein

$${}^0S_{x+1, \overline{m}|}^{(\nu)} = {}^0S_{x+1}^{(\nu)} - \sum_{t=0}^{\nu} \binom{m+t-1}{t} {}^0S_{x+m+1}^{(\nu-t)}$$

und speziell

$${}^0N_{x+1, \overline{m}|} = {}^0N_{x+1} - {}^0N_{x+m+1}$$

$${}^0S_{x+1, \overline{m}|} = {}^0S_{x+1} - {}^0S_{x+m+1} - m {}^0N_{x+m+1}$$

$${}^0S_{x+1, \overline{m}|}^{(2)} = {}^0S_{x+1}^{(2)} - {}^0S_{x+m+1}^{(2)} - m {}^0S_{x+m+1} - \binom{m+1}{2} {}^0N_{x+m+1}$$

Aus ${}^0S_{x+1, \overline{m}|}^{(\nu)}$ werden die k_n , h_n , M_n , ${}_n\pi_o$ nach den bereits erklärten Formeln berechnet. Praktischer ist jedoch die temporäre Rente als Differenz zwischen der unmittelbaren und der um m Jahre aufgeschobenen lebenslänglichen Rente zu berechnen

$$a_{x, \overline{m}|} = a_x - v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} a_{x+m} \quad (46)$$

Die Näherungsformel n -ten Präzisionsgrades einer temporären Rente können wir also auch aus den entsprechenden Näherungsformeln der lebenslänglichen Renten a_x und a_{x+m} herleiten. Der Diskontfaktor v^m ist leicht zu berechnen, wenn er schon den Zinstafeln nicht entnommen werden kann, und die l_x und l_{x+m} sind in der Grundtafel enthalten.

7. Variable Renten

Den Barwert der variablen nachschüssigen Leibrente können wir schreiben

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} \alpha_t D_{x+t}$$

wo α_t einen bestimmten Koeffizienten bedeutet, welchen wir jedoch mit dem Ausscheidequotienten vereinigen können, wenn wir schreiben

$$\alpha_t D_{x+t} = \underline{D}_{x+t}$$

Es ist also

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} \underline{D}_{x+t}$$

Weil unsere Ausführungen für alle Ausscheideordnungen gelten, gilt die Grundgleichung genau so wie für konstante, steigende, lebenslängliche, temporäre Renten, auch für variable Renten. Es ist allerdings meistens praktischer, den Näherungswert für \tilde{a}_x durch Zerlegen der variablen Rente in mehrere konstante oder steigende Renten zu berechnen.

* *

Hiermit haben wir gezeigt, dass die Grundgleichung des Zinsfussproblemcs für konstante, steigende, lebenslängliche, temporäre, variable, wie auch immer geartete Renten aller Ausscheideordnungen gilt.

8. Variation von k_1

Die Anwendung der Näherungsformel des 2-ten, 3-ten usw. Präzisionsgrades ist insofern unsympathisch, weil dadurch die höheren Summen der diskontierten Zahlen in die Rechnung gezogen werden, welche bekanntlich in der Grundtafel nicht enthalten sind und deshalb erst berechnet bzw. abgeschätzt werden müssen. Die Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades gibt aber bei niederen Altern und bei grösseren Zinsspannungen Δ nicht zu vernachlässigende Differenzen. Um diesem Übel abzukommen, werden wir die bisherige Annahme, k_1 sei eine Konstante, fallen lassen und k_1 nicht nur mit Rücksicht auf das Alter x , sondern auch mit Rücksicht auf den Zinsfuss i variieren. Nach verschiedenen Versuchsrechnungen, in welche wir hier nicht eingehen können, haben wir für die 3 %ige STM folgende Näherungsformel gefunden:

$$\begin{aligned} \underline{k}_1(x, i) &= k_1(x, 3\%) + Q_1 \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) \Delta + Q_2 \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^2 \Delta^2 \\ Q_1 &= 1.3082 \\ Q_2 &= -6.566 \\ \omega &= 85 \end{aligned} \tag{47}$$

Es wäre selbstverständlich natürlicher, $\omega = 100$ zu setzen, jedoch um bei niederen Altern — um die handelt es sich ja in erster Linie — genauere Resultate zu erzielen, haben wir für ω das Alter 85 gewählt und nach diesem Alter einfach $\underline{k}_1(x, i) = k_1(x, 3\%)$ gesetzt. Die Formel (47) gibt auch bei grösseren Zinsspannungen sehr gute Resultate, wie wir uns an etlichen zahlenmässigen Beispielen nicht nur an der STM, sondern auch an der ITM überzeugt haben. Daraus schliessen wir, dass die Güttingersche Näherungsformel (36,1), in welcher k_1 mit $\underline{k}_1(x, i)$ gemäss (47) zu ersetzen ist, auch bei 3%igen Grundtafeln anderweitiger Absterbeordnungen zu guten Näherungswerten führen dürfte.

9. Variation von k_0

Die *empirische* Variation von k_1 , die — wie wir oben bemerkt haben — zu sehr guten Näherungswerten führt, hat den Nachteil, dass die Koeffizienten Q_1 und Q_2 in (47) vom Grundzinsfusse und von der Ausscheideordnung abhängig sind. Wir wollen nun an k_0 eine *systematische*, d. h. allgemein anwendbare Variation versuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$k_0(x+1, i) = p_x \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1} (v+1) r^r$$

Dadurch geht (14—0) über in

$$-\frac{a'}{a^2} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1} (v+1) r^{r+1}$$

Nach Integration bekommen wir

$$\frac{1}{a} = C_0 + \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1} r^{r+1}$$

C_0 ist wohl eine Integrationskonstante, nicht aber andere C_r . Wir werden jedoch sowohl alle C_r als auch K_r in (49) schlechtweg «Integrationskonstanten» nennen, um so unsere Ausdrucksweise zu vereinfachen. Wenn wir nun beim Gliede $r = n$ stehenbleiben und die folgenden Glieder vernachlässigen, bekommen wir anstatt des exakten $\frac{1}{a}$ einen Näherungswert, welchen wir mit $\frac{1}{a_{[n]}}$ bezeichnen wollen. Dabei bedeutet $_{[n]}$ die Präzisionsordnung der Näherungsformel, also

$$\frac{1}{a_{[n]}} = \sum_{r=0}^{n+1} C_r r^r \quad (48)$$

Wir wollen (48) die *allgemeine Näherungsformel des reziproken Rentenbarwertes* nennen. Das Fehlen des Schlussgliedes bevorzugt (48) für parabolische Inter- und Extrapolation, welche deshalb immer nur an reziproken Rentenbarwerten und nicht an Rentenbarwerten selbst vorzunehmen ist. Die Näherungsformel n -ter Präzisionsordnung hat $(n+2)$ «Integrationskonstanten», nämlich $C_0, C_1, C_2 \dots C_{n+1}$, dafür ist sie aber frei von k_n . Durch Substitution $r = r_0 + \Delta$ geht (48) über in

$$\frac{1}{a_{[n]}} = \sum_{r=0}^{n+1} K_r \Delta^r \quad (49)$$

Zur Bestimmung von $K_0, K_1, K_2, \dots K_{n+1}$ brauchen wir $(n+2)$ Gleichung, die man durch $(n+1)$ -malige Differentiation von (49) nach r und nachherigen Umtausch von i mit i_0 und $a_{[n]}$ mit 0a bilden kann. Die μ -te Ableitung von (49) nach r lautet:

$$v^n \sum_{i=1}^{\mu} S_{\mu}^i \left(\frac{1}{a_{[n]}} \right)^{(i)} = \sum_{r=\mu}^{n+1} K_r (v)_{\mu} \Delta^{r-\mu}$$

wo S_{μ}^i die Stirlingschen Zahlen erster Art bedeutet. Setzen wir in letzter Gleichung $i = i_0$ und $a_{[n]}(i_0) = {}^0a = {}^0M_0$, so folgt allgemein

$$K_r = \frac{v_0^r}{r!} \sum_{i=1}^r S_r^i ({}^0M_0^{-1})^{(i)} \quad (50)$$

und speziell

$$K_0 = \frac{1}{{}^0M_0} \quad (50, 0)$$

$$K_1 = v_0 \left[-\frac{{}^0M_1}{{}^0M_0^2} \right] \quad (50, 1)$$

$$K_2 = \frac{v_0^2}{2!} \left[-\frac{{}^0M_2}{{}^0M_0^2} + \frac{2{}^0M_1^2}{{}^0M_0^3} \right] \quad (50, 2)$$

$$K_3 = \frac{v_0^3}{3!} \left[-\frac{{}^0M_3}{{}^0M_0^2} + \frac{6{}^0M_1{}^0M_2}{{}^0M_0^3} - \frac{6{}^0M_1^3}{{}^0M_0^4} \right] \quad (50, 3)$$

$$K_4 = \frac{v_0^4}{4!} \left[-\frac{{}^0M_4}{{}^0M_0^2} + \frac{8{}^0M_1{}^0M_3 + 6{}^0M_2^2}{{}^0M_0^3} - \frac{36{}^0M_1^2{}^0M_2}{{}^0M_0^4} + \frac{24{}^0M_1^4}{{}^0M_0^5} \right] \quad (50, 4)$$

Die allgemeine Näherungsformel des reziproken Rentenbarwertes der I. Gruppe lautet somit

$$\frac{1}{a_{[n]}} = \sum_{r=0}^{n+1} \sum_{\lambda=1}^r \frac{(v_0 \Delta)^r}{r!} S_r^\lambda ({}^0M_0^{-1})^{(\lambda)} \quad (51)$$

Aus (51) bekommen wir spezielle Näherungsformeln aller Präzisionsordnungen, wenn wir der Reihe nach $n = 0, 1, 2 \dots \infty$ setzen. Aus $\frac{1}{a_{[n]}}$ bekommt man $\frac{1}{a_{[n+1]}}$, wenn man zur Potenzreihe von $\frac{1}{a_{[n]}}$ das Glied $K_{n+2} \Delta^{n+2}$ hinzufügt usw. Es ist also

$$\frac{1}{a_{[n]}} = \frac{1}{{}^0M_0} + v_0 \Delta \left[-\frac{{}^0M_1}{{}^0M_0^2} \right] + \frac{(v_0 \Delta)^2}{2!} \left[-\frac{{}^0M_2}{{}^0M_0^2} + \frac{2{}^0M_1^2}{{}^0M_0^3} \right] + \dots K_{n+1} \Delta^{n+1} \quad (51^*)$$

oder

$$a_{[n]} = {}^0M_0 \left\{ 1 - v_0 \Delta \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0} + \frac{(v_0 \Delta)^2}{2!} \left[-\frac{{}^0M_2}{{}^0M_0} + \frac{2{}^0M_1^2}{{}^0M_0^2} \right] + \dots {}^0M_0 K_{n+1} \Delta^{n+1} \right\}^{-1} \quad (51^{**})$$

(51*) stellt die Taylorsche Entwicklung der Funktion $\frac{1}{a}$ bis zur

$(n+1)$ -ten Potenz von Δ dar, jedoch ohne Restglied, welches hier nicht so wichtig ist wie bei $a_{(n)}$. Der Vergleich von (51**) mit (36—0) rechts zeigt, dass wir durch die systematische Variation von k_0 nur zu einer Verbesserung des Schlussgliedes von $a_{(0)}$ um n weitere Glieder gelangt sind. Daher $a_{[0]} = a_{(0)}$, sonst ist aber $a_{[n]} \neq a_{(n)}$. Jedoch die Annäherungskraft vor $a_{[n]}$ ist im grossen und ganzen ungefähr dieselbe wie die von $a_{(n)}$. Zu bemerken ist noch, dass die Konvergenz der Reihe

von $\frac{1}{a_{[n]}}$ nicht immer monoton ist, speziell bei niederen Zinsfüssen,

d. h. durch Hinzufügung eines neuen Gliedes der Reihe kann sich der Näherungswert manchmal vorübergehend verschlechtern.

Bestimmung der Integrationskonstanten der allgemeinen Näherungsformel des Rentenbarwertes mittels Summen der diskontierten Zahlen

${}^{\mu}S_{x+1}^{(\nu)}$ **zweier oder mehrerer Grundtafeln (II. Gruppe)**

Die allgemeinen Näherungsformeln der Barwerte der konstanten und der steigenden Renten können geschrieben werden.

$$a_{(n)} - \sum_{r=0}^{n-2} C_r r^r = (A + Br)^{g_n} \quad (52-0)$$

$$I_{(n)} + \sum_{r=1}^{n-2} C_r r r^r = -Br g_n (A + Br)^{g_{n-1}} \quad (52-1)$$

$$I_{(n)}^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{n-2} C_r (r)_2 r^r = \frac{1}{2} B^2 r^2 (g_n)_2 (A + Br)^{g_{n-2}} \quad (52-2)$$

.

Daraus schliessen wir:

Aus $(n + 1)$ Grundtafeln, welche nur die 0-ten Summen der diskontierten Zahlen ${}^{\mu}N_x$, $\mu = 0, 1, 2 \dots n$ enthalten, können Näherungsformeln n -ten Präzisionsgrades gebildet werden. Dazu brauchen wir die Werte r_{μ} und ${}^{\mu}a$ in (52—0) einzusetzen und die $(n + 1)$ Gleichungen in bezug auf $A, B, C_0, C_1 \dots C_{n-2}$ aufzulösen.

Aus $(n + 1)$ Grundtafeln, welche ausser den 0-ten Summen ${}^{\mu}N_x$ auch die 1-ten Summen der diskontierten Zahlen ${}^{\mu}S_x$ enthalten, können Näherungsformeln $(2n + 1)$ -ten Präzisionsgrades gebildet werden. Dazu brauchen wir die Werte r_{μ} , ${}^{\mu}a$, ${}^{\mu}I$ in (52—0) und (52—1) einzusetzen und die $(2n + 2)$ Gleichungen in bezug auf $A, B, C_0, C_1, \dots C_{2n-1}$ aufzulösen usw.

Ähnlich kann man leicht den Präzisionsgrad der Näherungsformel ermitteln und das zugehörige Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten aufstellen, wenn ein Teil der Grundtafeln nur die N_x , der andere Teil die N_x und zugleich S_x usw. enthält. Aus ITM z. B., die N_x und S_x für zehn Zinsfüsse und ausserdem die mittlere Lebenserwartung e_x enthalten, können Näherungsformeln 20-sten Präzisionsgrades und aus STM, die $N_x, S_x, S_x^{(2)} \dots S_x^{(6)}$ für sieben Zinsfüsse 0%, 1%, 2% ... 6% enthalten, können sogar Näherungsformeln 48-sten Präzisionsgrades gebildet werden. Für den Bedarf der Versicherungspraxis reichen jedoch schon die $a_{(2)}$ und $a_{(3)}$, höchstens $a_{(4)}$ aus.

Obige Sätze gelten selbstverständlich nicht nur für lebenslängliche konstante, sondern auch für steigende temporäre, variable, wie auch immer geartete Renten aller Ausscheideordnungen.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten bei der II. Gruppe brauchen wir nur das obige Gleichungssystem aufzulösen. Da wir jedoch mit *transzedenten* Gleichungen zu tun haben, sind wir nicht imstande, allgemeine Formeln für die A , B , C , aufzustellen, wie z. B. bei der I. Gruppe (35, A), (35, B) (35, C). Eine allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes wie z. B. (36) existiert bei der II. Gruppe leider nicht. Infolgedessen können wir die Lösungsmethoden der II. Gruppe nicht einheitlich behandeln, so etwa wie die der I. Gruppe. Wir können zwar in jedem konkreten Falle die Integrationskonstanten durch verschiedene Näherungsverfahren (regula falsi, Newtonsmethode, Iterationsverfahren usw.) bestimmen, jedoch solche Berechnungen sind meistens so zeitraubend, dass sich die Arbeit durchaus nicht lohnt. Deshalb empfiehlt es sich, von verschiedenen Kunstgriffen Gebrauch zu machen, bei welchen zwar die Präzision der Formel einbüsst, jedoch gelangen wir so auf einfacherem Wege zu praktisch ausreichend genauen Näherungsformeln. Diese Kunstgriffe können wir einteilen wie folgt:

1. *Variation der Integrationskonstanten.* Eine oder mehrere Integrationskonstanten können beim Übergange des Zinsfusses i aus der Umgebung des einen Grundzinsfusses in die Umgebung des anderen Grundzinsfusses variiert werden.

2. *Heranziehung von höheren Summen der diskontierten Zahlen.*

3. *Spezielle Näherungsverfahren.*

4. *Abschaffung der Potenz des Schlussgliedes.*

Der Vorgang kann am besten an konkreten Beispielen gezeigt werden. Vorher ist jedoch eine Bemerkung bezüglich des Wertes g_n bzw. k_n notwendig. Der Wert von g_n könnte zunächst auf Kosten eines Präzisionsgrades aus dem Gleichungssystem bestimmt werden, d. h. anstatt C_v mit dem höchsten Index kann g_n berechnet werden. Dies ist aber sehr umständlich, und ausserdem ist es besser, g_n bzw. k_n nach den Grundzinsfüßen zu variieren, d. h. wenn $i \leq 0.5 (i_0 + i_1)$, ist $k_n(x + 1, i_0)$, sonst aber $k_n(x + 1, i_1)$ zu nehmen.

Gegeben sind zwei Grundtafeln mit 0-ten Summen der diskontierten Zahlen. In diesem Falle kann nur eine Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades (20) gebildet werden. Das Gleichungssystem lautet

$${}^0a = (A + Br_0)^{\frac{1}{1-h_1}}$$

$${}^1a = (A + Br_1)^{\frac{1}{1-h_1}}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1 {}^0a^{1-h_1} - r_0 {}^1a^{1-h_1}}{i_1 - i_0} \\ B &= \frac{{}^1a^{1-h_1} - {}^0a^{1-h_1}}{i_1 - i_0} \end{aligned} \quad (53)$$

Nach Einsetzen von A und B in (20) bekommen wir folgende Näherungsformel

$$\frac{a_{(1)}}{{}^0a} = \left[\frac{i_1 - i}{i_1 - i_0} + \frac{i - i_0}{i_1 - i_0} \left(\frac{{}^1a}{{}^0a} \right)^{1-h_1} \right]^{\frac{1}{1-h_1}} \quad (54)$$

In diesem einfachen Falle sind also keine Kunstgriffe nötig.

1. Gegeben sind zwei Grundtafeln mit den 0-ten und 1-ten Summen der diskontierten Zahlen. Es könnte eine Näherungsformel des 3-ten Präzisionsgrades gebildet werden, wenn wir das Gleichungssystem in allgemeiner Form auflösen könnten. Weil dies nicht der Fall ist, nehmen wir lieber die Näherungsformel des 2-ten Präzisionsgrades, welche wir schreiben

$$a_{(2)} = C_0 + \frac{1}{g_2 B} (A + Br)^{g_2} \quad (55)$$

Die erste Ableitung ist

$$a'_{(2)} = r(A + Br)^{g_2-1}$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung von A und B lautet

$${}^0M_1 v_0 = (A + Br_0)^{g_2-1}$$

$${}^1M_1 v_1 = (A + Br_1)^{g_2-1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1({}^0M_1 v_0)^{1-h_2} - r_0({}^1M_1 v_1)^{1-h_2}}{i_1 - i_0} \\ B &= \frac{({}^1M_1 v_1)^{1-h_2} - ({}^0M_1 v_0)^{1-h_2}}{i_1 - i_0} \end{aligned} \quad (56)$$

Die Integrationskonstante C_0 kann so bestimmt werden, dass die Kurve (55) entweder durch den Punkt 0a oder aber durch den Punkt 1a gehe. Im ersten Falle ist

$${}^0C_0 = {}^0a - \frac{1}{g_2 B} (A + Br_0)^{g_2}$$

im zweiten Falle aber

$${}^1C_0 = {}^1a - \frac{1}{g_2 B} (A + Br_1)^{g_2}$$

Die Integrationskonstante C_0 wird also hier variiert. Wenn $i \leq 0.5(i_0 + i_1)$, wird 0C_0 , sonst aber 1C_0 berechnet. Infolge der Variation von C_0 geht die Kurve (55), obwohl sie nur drei Integrationskonstanten hat, durch vier Punkte, nämlich durch 0a , 1a , 0I , 1I . Durch Einsetzen von A , B , C_0 in (55) gelangen wir zu zwei Näherungsformeln, von denen die erste lautet

$$a_{(2)} = {}^0a + \frac{{}^0I v_0}{g_2} \frac{i_1 - i_0}{1 - \left(\frac{{}^1I v_1}{{}^0I v_0}\right)^{1-h_2}} \left\{ \left[\frac{i_1 - i}{i_1 - i_0} + \frac{i - i_0}{i_1 - i_0} \left(\frac{{}^1I v_1}{{}^0I v_0} \right)^{1-h_2} \right]^{g_2} - 1 \right\} \quad (57)$$

Die zweite Formel bekommt man aber durch Umtausch der Indizes «0» und «1» bei den Grundwerten.

2. Gegeben sind zwei Grundtafeln mit den 0-ten, 1-ten und 2-ten Summen der diskontierten Zahlen. Es könnte eine Näherungsformel des 5-ten Präzisionsgrades gebildet werden, wenn wir das Gleichungssystem in allgemeiner Form auflösen könnten. Weil dies nicht der Fall ist, nehmen wir lieber die Näherungsformel des 3-ten Präzisionsgrades, welche wir schreiben

$$a_{(3)} = C_0 + C_1 r + \frac{1}{(g_3)_2 B^2} (A + Br)^{g_3} \quad (58)$$

Durch Differentiation bekommen wir

$$a''_{(3)} - a'_{(3)} = r^2 (A + Br)^{g_3-2}$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung von A und B ist

$${}^0M_2 v_0^2 = (A + Br_0)^{g_3-2}$$

$${}^1M_2 v_1^2 = (A + Br_1)^{g_3-2}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1 ({}^0M_2 v_0^2)^{1-h_3} - r_0 ({}^1M_2 v_1^2)^{1-h_3}}{i_1 - i_0} \\ B &= \frac{({}^1M_2 v_1^2)^{1-h_3} - ({}^0M_2 v_0^2)^{1-h_3}}{i_1 - i_0} \end{aligned} \quad (59)$$

Die Integrationskonstanten C_0 und C_1 werden so bestimmt, dass die Kurve (58) sowohl durch 0a als auch durch 1a geht. Es ist also

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{r_1 ({}^0a - \Phi_0) - r_0 ({}^1a - \Phi_1)}{i_1 - i_0} & \Phi_0 &= \frac{(A + Br_0)^{g_3}}{(g_3)_2 B^2} \\ C_1 &= \frac{({}^1a - \Phi_1) - ({}^0a - \Phi_0)}{i_1 - i_0} & \Phi_1 &= \frac{(A + Br_1)^{g_3}}{(g_3)_2 B^2} \end{aligned}$$

Hier haben wir also keine Variation der Integrationskonstanten, sondern wir haben anstatt zu den ersten gleich zu den zweiten Summen der diskontierten Zahlen gegriffen. Die Kurve (58) geht durch die Punkte 0a , 1a und ${}^0I^2$, ${}^1I^2$, jedoch nicht, wenigstens streng nicht, durch die Punkte 0I und 1I . Die endgültige Näherungsformel des 3-ten Präzisionsgrades bekommt man durch Einsetzen der Integrationskonstanten A , B , C_0 , C_1 in (58), jedoch wegen der Ausdehnung der Formel sehen wir davon ab. Wir können C_0 und C_1 selbstverständlich auch so bestimmen, dass die Kurve (58) durch 0a , 0I , ${}^0I^2$, ${}^1I^2$, oder durch 1a , 1I , ${}^1I^2$, ${}^0I^2$ geht. Im ersten Falle ist

$${}^0C_1 = {}^0M_1 v_0 - \frac{1}{(g_3-1)B} (A + Br_0)^{g_3-1}$$

$${}^0C_0 = {}^0a - {}^0C_1 r_0 - \Phi_0$$

Die Integrationskonstanten 1C_0 und 1C_1 für den zweiten Fall bekommen wir einfach durch Umtausch der Indizes «0» und «1» bei den Grundwerten.

3. Einige Beispiele von *speziellen Näherungsverfahren*, welche die Auflösung des Gleichungssystems auf Kosten der Präzision erleichtern, geben wir später bei den Näherungsformeln von *Frucht-Vellat* (63), (65), und *Crosato* (66).

4. Die Schwierigkeit der Auflösung des Gleichungssystems steckt in der *Potenz des Schlussgliedes*. Wenn die Grundtafeln ausser N_x auch S_x , oder weiter noch $S_x^{(2)}$ usw. enthalten, kann diese Schwierigkeit abgeschafft werden, jedoch wie immer nur auf Kosten der Präzision. Durch Division von (52—0) mit (52—1), weiter von (52—1) mit (52—2) usw. bekommen wir

$$\varphi_{(n)} + \frac{A}{B} \alpha_{(n)} + \sum_{v=0}^{n-2} C_v r^v \left[\frac{A}{B} v v - (g_n - v) \right] = 0 \quad (60, 1)$$

$$\psi_{(n)} + \frac{A}{B} \beta_{(n)} - \sum_{v=1}^{n-2} C_v r^v \left[\frac{A}{B} v(v)_2 - v(g_n - v) \right] = 0 \quad (60, 2)$$

.

wo

$$\begin{aligned} \varphi_{(n)} &= a_{(n)} g_n + I_{(n)} & \alpha_{(n)} &= I_{(n)} v \\ \psi_{(n)} &= I_{(n)} (g_n - 1) + 2I_{(n)}^2 & \beta_{(n)} &= 2I_{(n)}^2 v \\ & \end{aligned} \quad (60^*)$$

Wenn wir nun $r, a_{(n)}, I_{(n)}, I_{(n)}^2, \dots$ mit $r_\mu, {}^\mu a, {}^\mu I, {}^\mu I^2, \dots$ vertauschen, bekommen wir ein System von algebraischen Gleichungen mit den Unbekannten $\frac{A}{B}, C_0, C_1, C_2, \dots$, welches wir ohne weiteres auflösen können. So gelangen wir zum Quotienten $\frac{A}{B}$, nicht aber zu A und B .

Es bleibt uns also noch ein Freiheitsgrad übrig, welchen wir so ausnützen können, dass die Näherungskurve durch alle ${}^\mu a$ hindurchgeht. Dieser Bedingung genügt folgende Gleichung

$$\frac{a_{(n)} - \sum_{v=0}^{n-2} {}^\mu C_v r^v}{{}^\mu a - \sum_{v=0}^{n-2} {}^\mu C_v r_\mu^v} = \left[\frac{\left(\frac{A}{B} \right)_\mu + r}{\left(\frac{A}{B} \right)_\mu + r_\mu} \right]^{\mu g_n} \quad (61)$$

in welcher wir $\frac{A}{B}$, C , g_n nach den Grundzinsfüßen variieren können, um so grössere Genauigkeit zu erzielen. Allgemeine Formeln für die Unbekannten sind sehr umständlich, besonders wenn die Grundzinsfüße nicht äquidistant sind, deshalb geben wir lieber zwei einfache Beispiele.

Gegeben sind zwei Grundtafeln mit den 0-ten und 1-ten Summen der diskontierten Zahlen. Aus (60, 1) folgt

$$\varphi_{(2)} - C_0 g_2 + \frac{A}{B} \alpha_{(2)} = 0$$

Dabei bedeutet

$$\varphi_{(2)} = a_{(2)} g_2 + I_{(2)}$$

$$\alpha_{(2)} = I_{(2)} v$$

Wir setzen nun

$$\alpha_0 = {}^0I v_0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = {}^1I v_1$$

und weiter, wenn sich i befindet in der Umgebung

von i_0	von i_1
${}^0\varphi_0 = {}^0a {}^0g_2 + {}^0I$	${}^0\varphi_1 = {}^0a {}^1g_2 + {}^0I$
${}^1\varphi_0 = {}^1a {}^0g_2 + {}^1I$	${}^1\varphi_1 = {}^1a {}^1g_2 + {}^1I$

So bekommen wir folgende vier Gleichungen

$$\begin{aligned} {}^0\varphi_0 - {}^0C_0 {}^0g_2 + \left(\frac{A}{B}\right)_0 \alpha_0 &= 0 & {}^0\varphi_1 - {}^1C_0 {}^1g_2 + \left(\frac{A}{B}\right)_1 \alpha_0 &= 0 \\ {}^1\varphi_0 - {}^0C_0 {}^0g_2 + \left(\frac{A}{B}\right)_0 \alpha_1 &= 0 & {}^1\varphi_1 - {}^1C_0 {}^1g_2 + \left(\frac{A}{B}\right)_1 \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B}\right)_0 &= -\frac{{}^1\varphi_0 - {}^0\varphi_0}{\alpha_1 - \alpha_0} & \left(\frac{A}{B}\right)_1 &= -\frac{{}^1\varphi_1 - {}^0\varphi_1}{\alpha_1 - \alpha_0} \\ {}^0C_0 &= \frac{1}{{}^0g_2} \left[{}^0\varphi_0 + \left(\frac{A}{B}\right)_0 \alpha_0 \right] & {}^1C_0 &= \frac{1}{{}^1g_2} \left[{}^1\varphi_1 + \left(\frac{A}{B}\right)_1 \alpha_1 \right] \end{aligned}$$

Die Näherungsformel des 2-ten Präzisionsgrades lautet somit

$$\frac{a_{(2)} - {}^{\mu}C_0}{{}^{\mu}a - {}^{\mu}C_0} = \frac{\left[\left(\frac{A}{B} \right)_{\mu} + r \right]^{{}^{\mu}g_2}}{\left[\left(\frac{A}{B} \right)_{\mu} + r_{\mu} \right]}, \quad \mu = 0, 1 \quad (61-2)$$

Obige Formel haben wir an der ITM, $i_0 = 4\%$, $i_1 = 5\%$ zahlenmässig überprüft. Die nach Altern und Grundzinsfüßen abgestufte $k_2(x+1, i_{\mu})$ haben wir der Tafel der verallgemeinerten Poukkaschen Zahlen im Anhang unserer Abhandlung entnommen. Obwohl sich die $k_2(x+1, i_{\mu})$ auf die STM beziehen, sind wir dennoch zu vorzüglichen Näherungswerten gelangt, welche mit den exakten Rentenbarwerten für alle Alter $x = 0$ bis 100 und für alle $i = 3\%$ bis 6.5% — abgesehen von den Differenzen, welche von den vernachlässigten Dezimalen herrühren — bis zur dritten Dezimalstelle übereinstimmen.

Auf ähnliche Art und Weise kann man leicht aus drei, vier, fünf ... Grundtafeln, die N_x und S_x enthalten, $a_{(3)}$, $a_{(4)}$, $a_{(5)}$, ... berechnen; wir sehen jedoch davon ab, weil diesbezügliche Formeln zu viel Raum in Anspruch nehmen würden.

Gegeben sind zwei Grundtafeln mit den 0-ten, 1-ten und 2-ten Summen der diskontierten Zahlen. Die Näherungsformel des 4-ten Präzisionsgrades schreiben wir in diesem Falle

$$\frac{a_{(4)} - C_0 - C_1 r - C_2 r^2}{{}^{\mu}a - C_0 - C_1 r_{\mu} - C_2 r_{\mu}^2} = \frac{\left[\frac{A}{B} + r \right]^{g_4}}{\left[\frac{A}{B} + r_{\mu} \right]} \quad (61-4)$$

Wegen des hohen Präzisionsgrades brauchen wir keine Variation der Integrationskonstanten, was die Rechnung wesentlich vereinfacht. Zur Berechnung von $\frac{A}{B}$, C_0 , C_1 , C_2 , haben wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} {}^{\mu}\varphi - C_0 g_4 - C_1 r_{\mu} (g_4 - 1) - C_2 r_{\mu}^2 (g_4 - 2) + \frac{A}{B} [\alpha_{\mu} + C_1 + 2C_2 r_{\mu}] &= 0 \\ {}^{\mu}\psi + C_1 r_{\mu} (g_4 - 1) + 2C_2 r_{\mu}^2 (g_4 - 2) + \frac{A}{B} [\beta_{\mu} - 2C_2 r_{\mu}] &= 0, \quad \mu = 0, 1 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Integrationskonstanten ist sehr einfach. Weil die Formeln etwas weitläufig sind, schreiben wir dieselben nicht nieder, sondern wir bemerken nur, dass sie zu vorzüglichen Näherungswerten führen.

Verschiedene Bemerkungen zur II. Gruppe

1. Beziehung zu den bekannten Interpolationsformeln

Frucht [1] hat folgende Interpolationsformel gefunden

$$a_x(i + \Delta i) = a_x(i) \left(1 + [a_x(i)]^{0.68} \frac{\Delta i}{h} \{ [a_x(i+h)]^{-0.68} - [a_x(i)]^{-0.68} \} \right)^{-\frac{1}{0.68}}$$

Wenn wir sinngemäss setzen

$$\begin{aligned} a_x(i) &= {}^0a & i &= i_0 & h &= i_1 - i_0 \\ a_x(i+h) &= {}^1a & i+h &= i_1 & \Delta i &= i - i_0 \\ a_x(i+\Delta i) &= a_{(1)} & i+\Delta i &= i \end{aligned}$$

bekommen wir nach einigen Umformungen

$$\frac{a_{(1)}}{{}^0a} = \left[\frac{i_1 - i}{i_1 - i_0} + \frac{i - i_0}{i_1 - i_0} \left(\frac{{}^1a}{{}^0a} \right)^{-0.68} \right]^{-\frac{1}{0.68}} \quad (62)$$

Das ist aber nichts anderes als (54) für den Spezialfall $k_1 = 0.84$.

* * *

Bei $i_0 = 0$ geht (54) über

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= e \left\{ 1 - \frac{i}{i_1} \left[1 - \left(\frac{{}^1a}{e} \right)^{1-h_1} \right] \right\}^{\frac{1}{1-h_1}} \\ e &= e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t} \end{aligned}$$

Wir können weiter schreiben

$$\frac{{}^1a}{e} = 1 - \frac{e - {}^1a}{e}$$

Wenn wir den Wert von $\frac{{}^1a}{e}$ in obige Formel für $a_{(1)}$ einsetzen und die Potenzen in Reihen entwickeln, bekommen wir

$$a_{(1)} = e \left(1 - \frac{i}{i_1} \frac{e - {}^1a}{e} + \dots \right)$$

Es ist also

$$a \sim e \left(1 - \frac{e - {}^1a}{e} \right)^{\frac{i}{i_1}} = e \left(\frac{{}^1a}{e} \right)^{\frac{i}{i_1}}$$

oder, wenn wir noch die Zinsfüsse mit den Zinsintensitäten vertauschen,

$$a_x \sim e_x \left(\frac{{}^1a_x}{e_x} \right)^{\frac{\delta}{\delta_1}} \quad (62^*)$$

Das ist aber die Formel, welche *Meidell* aus gewissen Ungleichungen von Jensen hergeleitet hat.

* * *

Gegeben sind drei Grundtafeln mit 0-ten Summen der diskontierten Zahlen für äquidistante Zinsfüsse i_0 , $i_1 = i_0 + d$, $i_2 = i_0 + 2d$. Gesucht wird eine Näherungsformel für ${}^\mu a$, wenn $i_\mu = i_0 + \mu d$. Die Näherungsformel des 1-ten Präzisionsgrades können wir schreiben

$$a_{(1)} = A(1 + Br)^{g_1}$$

Wenn $i_{\mu-1} = i_0 + (\mu - 1)d$, ist der Quotient

$$\frac{{}^\mu a}{{}^{\mu-1}a} \sim \left(1 + \frac{Bd}{1 + Br_{\mu-1}} \right)^{g_1} \sim 1 + Bg_1 d \frac{1}{1 + Br_{\mu-1}}$$

oder in weiterer Näherung, weil der absolute Wert von B nicht gross sein kann, wenn i_μ nicht allzusehr von i_0 entfernt ist, was ja in der Versicherungspraxis nicht vorkommt,

$$\frac{{}^\mu a}{{}^{\mu-1}a} \sim 1 + Bg_1 d (1 - Br_{\mu-1})$$

und weiter nach einigen Umformungen, wenn $r_{\mu-1} = r_0 + d + (\mu - 2)d$ eliminiert wird

$$\frac{{}^\mu a}{{}^{\mu-1}a} \sim [1 + Bg_1 d - B^2 g_1 r_0 d - B^2 g_1 d^2] + (\mu - 2) [-B^2 g_1 d^2]$$

Der Ausdruck in der linken eckigen Klammer ist aber annähernd gleich $\frac{{}^2a}{{}^1a}$ und der Ausdruck in der rechten eckigen Klammer aber annähernd gleich $\frac{{}^2a}{{}^1a} - \frac{{}^1a}{{}^0a}$, also

$$\frac{{}^\mu a}{{}^{\mu-1}a} \sim \frac{{}^2a}{{}^1a} + (\mu - 2) \left(\frac{{}^2a}{{}^1a} - \frac{{}^1a}{{}^0a} \right) \quad (63)$$

Das ist aber die Formel, welche *Frucht* und *Vellat* [10] auf anderem Wege gefunden und mit «*metodo dei quozienti*» benannt haben. Diese Autoren haben zwar ihre Quotientenmethode an den vorschüssigen Rentenbarwerten a_x entwickelt, jedoch zahlenmässige Beispiele haben die theoretischen Vermutungen bestätigt, dass sie bei nachschüssigen Rentenbarwerten a_x bessere Näherungswerte liefert.

* * *

Den vorausgehenden Fall wollen wir noch mit der Näherungsformel des 2-ten Präzisionsgrades behandeln. Diese kann geschrieben werden

$$a_{(2)} - C_0 = A(1 + Br)^{g_2} \quad (64)$$

Bilden wir nun die Quotienten

$$\frac{{}^1a - C_0}{{}^0a - C_0} \sim \left[1 + \frac{Bd}{1 + Br_0} \right]^{g_2} \sim \left[1 + \frac{Bg_2}{1 + Br_0} \right]^d = Q_0$$

$$\frac{{}^2a - C_0}{{}^1a - C_0} \sim \left[1 + \frac{Bd}{1 + B(r_0 + d)} \right]^{g_2} \sim \left[1 + \frac{Bg_2}{1 + B(r_0 + d)} \right]^d = Q_1$$

Wenn $d = i_1 - i_0$ hinreichend klein ist, dürfen wir näherungsweise $Q_0 = Q_1 = Q$ setzen. So wird

$$\frac{{}^1a - C_0}{{}^0a - C_0} = \frac{{}^2a - C_0}{{}^1a - C_0} = Q$$

Daraus folgt

$$C_0 = \frac{{}^0a {}^2a - {}^1a^2}{{}^2a - 2 {}^1a + {}^0a} \quad \text{und} \quad Q = \frac{{}^2a - {}^1a}{{}^1a - {}^0a}$$

Die Näherungsformel lautet also

$$\frac{a - C_0}{{}^0a - C_0} \sim \left[1 + \frac{B\Delta}{1 + Br_0} \right]^{g_2} \sim \left[1 + \frac{Bg_2}{1 + Br_0} \right]^A = Q^{\frac{A}{d}} \quad (65)$$

oder auch
$$\frac{a - C_0}{{}^1a - C_0} \sim Q^{\frac{A}{d}} \quad \text{und} \quad \frac{a - C_0}{{}^2a - C_0} \sim Q^{\frac{A}{d}} \quad (65)$$

Diese Näherungsformel haben ebenfalls *Frucht* und *Vellat* [10] gefunden und mit «*metodo dei quozienti ragguagliati*» genannt. Diese Methode gilt genau so für a_x wie für a_x .

* * *

Infolge (64) können wir schreiben

$$\frac{a - {}^0a}{a - {}^1a} \sim \left(\frac{1 + Br_0}{1 + Br_1} \right)^{g_2} \frac{\left[1 + \frac{B(i - i_0)}{1 + Br_0} \right]^{g_2} - 1}{\left[1 + \frac{B(i - i_1)}{1 + Br_1} \right]^{g_2} - 1}$$

Wenn wir beide Ausdrücke in den eckigen Klammern in Reihen entwickeln und nur die beiden ersten Glieder der Entwicklung behalten, finden wir

$$\frac{a - {}^0a}{a - {}^1a} \sim \left(\frac{1 + Br_0}{1 + Br_1} \right)^{g_2-1} \frac{i - i_0}{i - i_1}$$

und ähnlich

$$\frac{{}^1a - {}^2a}{{}^0a - {}^2a} \sim \left(\frac{1 + Br_1}{1 + Br_0} \right)^{g_2-1} \frac{i_1 - i_2}{i_0 - i_2}$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Näherungen gelangen wir zur Formel von *Crosato*

$$\frac{a - {}^0a}{a - {}^1a} \frac{{}^1a - {}^2a}{{}^0a - {}^2a} \sim \frac{i - i_0}{i - i_1} \frac{i_1 - i_2}{i_0 - i_2} \quad (66)$$

* * *

Die Näherungsformeln der II. Gruppe, welche verschiedene Autoren gefunden haben, sind also entweder spezielle Integrale der Grundgleichung des Zinsfußproblems oder aber Funktionen, die sich diesen Integralen annähern.

2. Variation von k_1

Wenn die Grundtafeln ausser N_x noch S_x enthalten, kann k_1 systematisch nach Zinsfüssen und Altern variiert werden. Aus (45, 1) folgt nämlich

$${}^{\mu}h_1(x+1, i_{\mu+1} - i_{\mu}) = \log \frac{{}^{\mu+1}I v_{\mu+1}}{{}^{\mu}I v_{\mu}} : \log \frac{{}^{\mu+1}a}{{}^{\mu}a} \quad (67, 1)$$

Wenn die Grundtafeln auch höhere $S_x^{(v)}$ enthalten, können auch weitere k_n variiert werden. Aus (45) folgt allgemein

$${}^{\mu}h_n(x+1, i_{\mu+1} - i_{\mu}) = \log \frac{{}^{\mu+1}I^n v_{\mu+1}^n}{{}^{\mu}I^n v_{\mu}^n} : \log \frac{{}^{\mu+1}I^{n-1} v_{\mu+1}^{n-1}}{{}^{\mu}I^{n-1} v_{\mu}^{n-1}} \quad (67, n)$$

Solche Bestimmung von k_n ist besonders wichtig bei kurzen Renten, die grössere k_n als lebenslängliche Renten haben, und bei Ausscheideordnungen, die sich wesentlich von den Absterbeordnungen unterscheiden (z. B. Ausscheideordnungen der Aktiven, Ledigen, Verheirateten usw.), bei welchen die in der Tafel im Anhang gegebenen verallgemeinerten Poukkaschen Zahlen nicht ohne weiteres angewendet werden dürfen.

3. Variation von k_0

Die systematische Variation von k_0 hat uns zu Näherungsformeln einzelner Präzisionsordnungen (48) geführt. Wir haben also

$$\frac{1}{a_{[n]}} = \sum_{r=0}^{n+1} C_r r^r \quad (68, 0)$$

$$\frac{I_{[n]}}{a_{[n]}^2} = \sum_{r=1}^{n+1} C_r r r^r \quad (68, 1)$$

$$\frac{2(I_{[n]})^2 - a_{[n]}(2I_{[n]}^2 - I_{[n]})}{a_{[n]}^3} = \sum_{r=1}^{n+1} C_r r^2 r^r \quad (68, 2)$$

.

Durch Umtausch von $r, a_{[n]}, I_{[n]}, I_{[n]}^2, \dots$ mit $r_{\mu}, {}^{\mu}a, {}^{\mu}I, {}^{\mu}I^2, \dots$ bekommen wir ein System von *linearen* Gleichungen mit den Unbekannten C_0, C_1, C_2, \dots , welches wir allgemein z. B. mit Deter-

minanten auflösen können. Im Falle äquidistanter Zinsfüsse können wir aus ${}^{\mu}a$ die $a_{[n]}$ unmittelbar, d. h. ohne Kenntniss von C_v , einfach durch Differenzenbildung von $\frac{1}{{}^{\mu}a}$ berechnen.

* *

Die lineare Interpolation zwischen 0a und 1a

$$\frac{{}^0a(i_1 - i) + {}^1a(i - i_0)}{i_1 - i_0} = a_{(0)}$$

liefert zu grosse, die lineare Interpolation zwischen $\frac{1}{{}^0a}$ und $\frac{1}{{}^1a}$

$$\frac{{}^0a {}^1a(i_1 - i_0)}{{}^1a(i_1 - i) + {}^0a(i - i_0)} = a_{[0]}$$

dagegen etwas zu kleine Näherungswerte. Folgende Kombination

$$a_{(0)} [1 - k_1(x + 1, i)] + a_{[0]} k_1(x + 1, i) \sim a \quad (69)$$

in welcher k_1 die Poukkasche Funktion bedeutet, führt aber wiederum zu vorzüglichen Näherungswerten, wie man sich durch Reihenentwicklungen überzeugen kann. Wegen der Einfachheit ist (69) für praktische Berechnungen ganz besonders geeignet.

4. Gegenseitige Beziehungen zwischen der I. und II. Gruppe

Die Integrationskonstanten haben wir bei der I. Gruppe so bestimmt, dass die Näherungskurve durch mehrere unendlich nahe liegende Punkte (mehrfachen Punkt), bei der II. Gruppe aber durch Punkte, die alle oder wenigstens zum Teil in endlichen Entfernungen voneinander liegen, hindurchgeht. Daraus schliessen wir, dass sowohl die Integrationskonstanten als auch alle anderen Grössen und Formeln der II. Gruppe in diejenigen der I. Gruppe übergehen müssen, wenn man die diskret liegenden Punkte so verschiebt, dass sie alle zu einem mehrfachen Punkt zusammenschrumpfen — und umgekehrt, dass alle Grössen und Formeln der I. Gruppe in diejenigen der II. Gruppe übergehen müssen, wenn man aus dem mehrfachen Punkt einen oder mehrere Punkte in eine endliche Entfernung herauszieht.

Der Übergang von der II. zur I. Gruppe erfolgt rechnerisch durch den Grenzübergang

$$\lim (\delta_\mu - \delta_0) \rightarrow 0$$

Bei nur zwei Punkten, δ_0, δ_1 , haben wir

$$\delta_1 = \delta_0 + d\delta$$

$${}^1a = {}^0a + {}^0a' d\delta$$

Da wir bei der II. Gruppe keine allgemeinen Formeln der Integrationskonstanten haben, werden wir diesen Grenzübergang am einfachsten Beispiel, und zwar an der Formel der Integrationskonstante B von $a_{(1)}$ (53) zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_0} B^{II} &= \frac{{}^1a^{1-h_1} - {}^0a^{1-h_1}}{r_1 - r_0} = \frac{({}^0a + {}^0a' d\delta)^{1-h_1} - {}^0a^{1-h_1}}{e^{\delta_0 + d\delta} - e^{\delta_0}} = \frac{{}^0a^{1-h_1}}{r_0} \frac{\left(1 + \frac{{}^0a'}{{}^0a} d\delta\right)^{1-h_1} - 1}{e^{d\delta} - 1} = \\ &= {}^0M_0^{1-h_1} v_0 (1 - h_1) \frac{{}^0M_1}{{}^0M_0} = B^I, \text{ wie in (30)} \end{aligned}$$

Ähnlich können wir nicht nur alle anderen Integrationskonstanten $A, B, C,$ von $a_{(n)}$ und «Integrationskonstanten» $C,$ von $a_{[n]}$ der II. Gruppe in diejenigen der I. Gruppe umwandeln, sondern auch die k_n bzw. die h_n . Die Formel für 0h_n (67, n) können wir schreiben

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_0} {}^0h_n^{II} = \frac{l_n {}^1M_n v_1^n - l_n {}^0M_n v_0^n}{l_n {}^1M_{n-1} v_1^{n-1} - l_n {}^0M_{n-1} v_0^{n-1}}$$

Setzen wir nun

$${}^1M_n = {}^0M_n + {}^0M'_n d\delta$$

$${}^1M_{n-1} = {}^0M_{n-1} + {}^0M'_{n-1} d\delta$$

$$v_1 = v_0 + v'_0 d\delta$$

in obige Gleichung, entwickeln wir nachher die logarithmischen Funktionen in Reihen, so finden wir nach einigen Umformungen

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_0} {}^0h_n^{II} = \frac{{}^0M_{n+1} {}^0M_{n-1}}{{}^0M_n^2} = {}^0h_n^I, \text{ wie in (14*)}$$

Der Fall dreier oder mehrerer diskret liegender Punkte braucht keiner besonderen Erklärung. Es wird nämlich zuerst ein Punkt nach der eben erklärten Weise verschoben und die anderen Punkte dabei stehen gelassen. Nachdem dies geschehen ist, wird der zweite Punkt verschoben und so der Reihe nach alle diskret liegenden Punkte. Man kann aber auch alle Punkte auf einmal verschieben. So eine simultane Verschiebung wollen wir an der Formel (60, 1) zeigen. Die in dieser Formel auftretenden n Doppelpunkte verschieben wir so, dass sie alle im Punkte 0a zusammenschrumpfen, durch welchen selbstverständlich die Näherungskurve $a_{(n)}$ hindurchgehen muss. Infolgedessen wird $\varphi_{(n)} = \varphi_0$, $\alpha_{(n)} = \alpha_0$, und so können wir (60, 1) schreiben

$$\varphi_0 + \frac{A}{B} \alpha_0 + \sum_{v=0}^{n-2} C_v r_0^v \left[\frac{A}{B} v_0 v - (g_n - v) \right] = 0 \quad (70)$$

Die λ -te Ableitung von (70) nach r_0 lautet:

$$\frac{d^\lambda \varphi_0}{dr_0^\lambda} + \frac{A}{B} \frac{d^\lambda \alpha_0}{dr_0^\lambda} + v_0^\lambda \sum_{v=\lambda}^{n-2} C_v r_0^v (v)_\lambda \left[\frac{A}{B} v_0 (v - \lambda) - (g_n - v) \right] = 0 \quad (70^*)$$

Es ist aber zufolge (60*), (17) und (16)

$$\frac{d^\lambda \varphi_0}{dr_0^\lambda} = \frac{d^\lambda (g_n {}^0M_0 - {}^0M_1)}{dr_0^\lambda} = \frac{(g_n - \lambda) {}^0M_\lambda - {}^0M_{\lambda+1}}{r_0^\lambda} \quad (71)$$

$$\frac{d^\lambda \alpha_0}{dr_0^\lambda} = \frac{d^\lambda (-{}^0M_1 v_0)}{dr_0^\lambda} = - \frac{{}^0M_{\lambda+1}}{r_0^{\lambda+1}} \quad (71^*)$$

Wenn $\lambda = n - 1$, bekommen wir aus (70*)

$$\lim_{\delta u \rightarrow \delta_0} \left(\frac{A}{B} \right)^{II} = - \frac{\frac{d^{n-1} \varphi_0}{dr_0^{n-1}}}{\frac{d^{n-1} \alpha_0}{dr_0^{n-1}}} = \frac{1 - (1 - h_n) \frac{{}^0M_n}{{}^0M_{n-1}}}{v_0 (1 - h_n) \frac{{}^0M_n}{{}^0M_{n-1}}} = \left(\frac{A}{B} \right)^I \quad (72)$$

also genau denselben Wert wie durch die Division von (35, A) mit (35, B). Wenn wir nun $\frac{d^\lambda \varphi_0}{dr_0^\lambda}$, $\frac{d^\lambda \alpha_0}{dr_0^\lambda}$, $\frac{A}{B}$ in (70*) eliminieren, finden wir nach einer Umformung, wenn wir einfachheitshalber schreiben

$$N = \frac{{}^0M_{n-1}}{{}^0M_n}$$

$${}_{n-\lambda}\sigma_1 = (n-\lambda) - (n-\lambda-1) h_n$$

folgende Gleichung

$$\sum_{r=\lambda}^{n-2} C_r r_0^r(\nu)_\lambda \left[1 - \frac{(\nu-\lambda)N}{{}_{n-\lambda}\sigma_1} \right] = {}^0M_\lambda - \frac{N {}^0M_{\lambda+1}}{{}_{n-\lambda}\sigma_1}$$

aus welcher man zunächst C_{n-2} , nachher C_{n-3} usw. der Reihe nach alle C_r von $r = n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0$ berechnen kann. Wir können aber C_r auch allgemein berechnen (z. B. mittels Determinanten, unvollständiger Induktion usw.), jedoch wegen der Umständlichkeit der Berechnung müssen wir davon absehen und schreiben gleich das Resultat nieder, nämlich

$$C_r = \frac{v_0^r}{r!} \sum_{\lambda=0}^{n-2-r} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \left[{}^0M_{r+\lambda} - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-r-\lambda}}{{}_n\pi_{n-r-\lambda} {}^0M_n^{n-r-\lambda-1}} \right]$$

Das ist aber die Formel (35, C). Es ist also tatsächlich

$$\lim_{\delta_\mu \rightarrow \delta_0} C_r^{II} = C_r^I$$

Durch Einsetzen von $\frac{A}{B}$ und C_r in (61) geht diese Formel der II. Gruppe in die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes der I. Gruppe (36) über.

* * *

Eine endliche Verschiebung ist nichts anderes als die Summe unendlich kleiner Verschiebungen, welche bekanntlich durch bestimmte Integration berechnet wird. Die Auseinanderziehung der unendlich naheliegenden Punkte erfolgt rechnerisch also durch Integration der Differentialgleichungen, die wir aus den Formeln der I. Gruppe durch Umtausch von δ_0 mit δ erhalten. Wir nehmen an, dass die k_n, A, B, C_r so wenig vom Grundzinsfusse abhängen, dass wir über diese Ungenauigkeit hinweggehen dürfen.

Um die Umwandlung von h_n der I. Gruppe in h_n der II. Gruppe zu vollziehen, schreiben wir (14*)

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = h_n^I \frac{M_n}{M_{n-1}}$$

oder mit Rücksicht auf (16)

$$\frac{M'_n}{M_n} - n = h_n^I \left[\frac{M'_{n-1}}{M_{n-1}} - (n-1) \right]$$

Bei der Annahme $h_n^I = \text{konstant}$, was der Wirklichkeit nur annähernd entspricht, bekommen wir durch Integration

$$M_n v^n = B (M_{n-1} v^{n-1}) h_n^I \quad (73)$$

wo B eine Integrationskonstante darstellt. Wenn $\delta = \delta_\mu, \delta_{\mu+1}$, bekommen wir aus letzter Formel zwei Gleichungen, aus welchen folgt

$${}^\mu h_n^{II} = \log \frac{{}^{\mu+1} M_n v_{\mu+1}^n}{{}^\mu M_n v_\mu^n} : \log \frac{{}^{\mu+1} M_{n-1} v_{\mu+1}^{n-1}}{{}^\mu M_{n-1} v_\mu^{n-1}}$$

Wir haben so aus h_n^I durch Integration ${}^\mu h_n^{II}$ gefunden. Siehe (67, n)! Der Wert von ${}^\mu h_n^{II}$ ist hier durch zwei Grundzinsfüsse bestimmt. Wir können aber (73) mit Hilfe von (17) noch weiter integrieren und so weitere Formeln aufstellen, die ${}^\mu h_n^{II}$ durch drei, vier, ... n Grundzinsfüsse ausdrücken, nämlich

$$\begin{aligned} M_{n-1} v^{n-1} &= (A + Br)^{\frac{1}{1-h_n}} & (73, n-1) \\ M_{n-2} v^{n-2} &= (A + Br)^{\frac{2-h_n}{1-h_n}} + C_{n-2} \\ &\dots \dots \dots \\ M_0 &= (A + Br)^{g_n} + \sum_{r=0}^{n-2} C_r r^r \end{aligned}$$

Damit haben wir aber nichts anderes als die Grundgleichung neuerdings, jedoch auf eine andere Art wie früher integriert und die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes (26) samt ihren Ableitungen gefunden, aus welchen sowohl k_n als auch die Integrationskonstanten A, B, C_r berechnet werden können, vorausgesetzt, wenn hinreichend Ausgangswerte bekannt sind. Explizite Formeln für ${}^\mu h_n$,

wenn $\mu \geq 3$, können wir jedoch nicht geben, weil wir die Gleichungen in allgemeiner Form nicht auflösen können.

Wenn wir endlich noch δ_0 mit δ in den Formeln der Integrationskonstanten A, B, C_v der I. Gruppe, d. h. in $(35, A), (35, B), (35, C)$ vertauschen, erhalten wir drei Differentialgleichungen von $a', a'', a''', \dots a^{(n)}$. Um die Integration von A und B zu erleichtern, dividieren wir $(35, A)$ durch $(35, B)$

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - (1 - h_n) \frac{M_n}{M_{n-1}}}{v(1 - h_n) \frac{M_n}{M_{n-1}}}$$

Daraus folgt

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{M'_{n-1}}{M_{n-1}} - (n-1) = \frac{1}{1 - h_n} \frac{r}{\frac{A}{B} + r} \quad (74)$$

Bei der Annahme $\frac{A}{B} = \text{konstant}$, was der Wirklichkeit nur annähernd entspricht, können wir (74) integrieren. Wir finden so

$$M_{n-1} v^{n-1} = (A + Br)^{\frac{1}{1-h_n}} \quad (74^*)$$

Wenn $r = r_0, r_1$, bekommen wir aus (74^*) zwei Gleichungen, aus welchen folgt

$$A = \frac{r_1 ({}^0M_{n-1} v_0^{n-1})^{1-h_n} - r_0 ({}^1M_{n-1} v_1^{n-1})^{1-h_n}}{i_1 - i_0}$$

$$B = \frac{({}^1M_{n-1} v_1^{n-1})^{1-h_n} - ({}^0M_{n-1} v_0^{n-1})^{1-h_n}}{i_1 - i_0} \quad (75)$$

Für $n = 1, 2, 3$ bekommen wir aus (75) die bereits oben gefundenen Werte von A und B der II. Gruppe, nämlich (53), (56), (59). Durch weitere Integration von (74^*) bekommen wir wieder die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes (26) samt ihren Ableitungen, weil (74^*) mit $(73, n-1)$ identisch ist. Zu demselben Resultat gelangen wir auch durch die Integration der Differentialgleichung von C_v . Durch die Auseinanderziehung einzelner Punkte aus dem mehrfachen Punkt sind wir also zu unserem Ausgangspunkte, nämlich

zum Gleichungssystem (52—0), (52—1), (52—2) usw. zurückgekehrt, aus welchem die Integrationskonstanten der II. Gruppe zu bestimmen sind. Wir können die Differentialgleichungen von A , B , C_r auch einzeln, d. h. ohne Kombination mit den anderen zwei Gleichungen, integrieren, jedoch das hätte keinen praktischen Wert.

**Bestimmung der Integrationskonstanten
der allgemeinen Näherungsformel des Rentenbarwertes mittels
Parameter der Ausscheideformen (III. Gruppe)**

Einige Ausscheideordnungen lassen sich bekanntlich wenigstens in gewissen Altersintervallen durch mathematische Formeln darstellen, welche eine bestimmte Anzahl von Parametern α , β , γ ... enthalten. Es ist also

$$l_x = l_x(\alpha, \beta, \gamma \dots)$$

Infolgedessen sind sowohl die diskontierten Zahlen 0D_x als auch alle Summen derselben ${}^0S_x^{(\nu)}$ ebenfalls Funktionen dieser Parameter. Daraus folgt, dass nicht nur die k_n , h_n , 0M_n , sondern letzten Endes auch alle Integrationskonstanten A , B , C_r bzw. \underline{A} , \underline{B} , \underline{C}_r Funktionen der Parameter α , β , γ , ... sein müssen. Man kann also bei solchen Ausscheideordnungen anstatt der Summen der diskontierten Zahlen die Parameter der Ausscheideformeln zur Berechnung der Integrationskonstanten heranziehen. Als Beispiel wollen wir die Ausscheideformel von *Dormoy*

$$l_x = K S^x$$

nehmen. Einfachheitshalber setzen wir den Proportionalitätsfaktor $K = 1$, so dass die Ausscheideformel

$$l_x = S^x$$

nur ein einziges Parameter « S » enthält. Es ist bei dieser Ausscheideformel

$${}^0S_{x+1}^{(\nu)} = \frac{(S v_0)^{x+1}}{(1 - S v_0)^{\nu+1}}, \quad \nu = -1, 0, 1, 2, \dots \infty$$

$$k_n(x, i) = 1, \quad n = 0, 1, 2 \dots \infty$$

Die Ausscheideformel von *Dormoy* hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass alle k_n vom Alter x und Zinsfusse i unabhängige Kon-

stanten sind. Deshalb müssen die Formeln, welche wir im folgenden für die Rentenbarwerte herleiten werden, keine Näherungswerte, sondern exakte Resultate liefern. Es ist weiter

$${}^0M_v = \frac{(-1)^v v! S v_0}{(1 - S v_0)^{v+1}}$$

$$h_n = \frac{n+1}{n}$$

$$g_n = -1$$

$${}_n\pi_{n-e} = \frac{(n)_{n-e}}{n^{n-e}}$$

Wenn wir nun obige Werte in (35, A), (35, B), (35, C) bzw. in (28) einsetzen, finden wir folgende Ausdrücke für die Integrationskonstanten

$$\begin{array}{ll} A = -1 & \underline{A} = -(-S)^{\frac{1}{2}} \\ B = \frac{1}{S} & \underline{B} = -(-S)^{-\frac{1}{2}} \\ C_v = 0 & \underline{C}_v = 0 \end{array} \quad (76)$$

Der Barwert der konstanten und der steigenden Rente ist also bei der Ausscheideordnung von Dormoy

$$a = \sum_{v=0}^{n-2} C_v r^v + (A + Br)^{g_n} = \left(-1 + \frac{r}{S}\right)^{-1} = \frac{Sv}{1 - Sv} \quad (77)$$

$$I = - \sum_{v=1}^{n-2} \underline{C}_v r^v - r(\underline{A} + \underline{B}r)^{g_{n-1}} = -r \left[-(-S)^{\frac{1}{2}} - r(-S)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2} = \frac{Sv}{(1 - Sv)^2}$$

Die Formeln der III. Gruppe können wir in Präzisionsgrade und Präzisionsordnungen einteilen, genau so wie die Formeln der I. und der II. Gruppe. Die Ausscheideordnung von Dormoy hat eine Ausnahme, weil bei ihr die Näherungsformeln aller Präzisionsgrade und Präzisionsordnungen wegen $k_n = 1$ exakte Werte geben, was bei anderen Ausscheideformeln selbstverständlich nicht der Fall ist.

Der Unterschied zwischen der I. und der II. Gruppe einerseits und der III. Gruppe andererseits besteht nur in der Formalität der

Berechnung der Summen der diskontierten Zahlen, mit welchen die Integrationskonstanten bestimmt werden. Bei der I. und II. Gruppe werden die ${}^{\mu}S_x^{(v)}$ «arithmetisch», d. h. zahlenmässig durch wiederholtes Addieren der diskontierten Zahlen der Grundtafeln, bei der III. Gruppe dagegen «algebraisch», d. h. durch die Analyse der Ausscheideformel ermittelt, weiter nichts. Die Verwandtschaft der III. Gruppe mit der I. und der II. Gruppe ist also noch grösser als die Verwandtschaft zwischen der I. und der II. Gruppe. Es ist klar, dass die Methoden der I. und der II. Gruppe ohne weiteres auch bei den formelmässigen Ausscheideordnungen angewendet werden dürfen.

Bis jetzt wurde die III. Gruppe als ein corpus separatum des Zinsfussproblemcs betrachtet und diese Ansicht mit folgenden zwei Argumenten motiviert:

1. Die Formeln der I. und II. Gruppe geben nur Näherungswerte, die Formeln der III. Gruppe dagegen mathematisch exakte Resultate.

2. Bei der I. Gruppe reicht eine einzige Grundtafel, bei der II. Gruppe nur einige wenige (zwei, drei, vier ...) Grundtafeln aus, bei der III. Gruppe ist dagegen eine sogenannte «Standardtafel», d. h. ein ganzes System von sehr vielen, z. B. auf einen Hundertstel des Prozentes abgestuften Grundtafeln nötig.

Diese Ansicht ist nicht richtig. Die Formeln der I. und der II. Gruppe können ebenfalls zu exakten Werten führen, wenn wir nur den Präzisionsgrad bzw. die Präzisionsordnung hinreichend wachsen lassen. In der Praxis reichen schon die Näherungsformeln des 3-ten oder des 4-ten Präzisionsgrades bzw. Präzisionsordnung aus. Andererseits bekommen wir auch bei der III. Gruppe nur Näherungswerte, wenn wir nur einige, jedoch nicht alle Integrationskonstanten durch die Parameter ausdrücken. Die Ausscheideformel von Dormoy bildet dabei, wie bereits bemerkt, wegen $k_n = 1$ eine Ausnahme.

Bei der III. Gruppe ist keine Grundtafel und noch weniger eine Standardtafel nötig, weil wir ja von der Annahme ausgegangen sind, dass sich alle in Betracht kommenden Hilfsgrössen durch die Parameter der Ausscheideformel ausdrücken lassen, wie wir ja übrigens an dem konkreten Beispiele der Ausscheideformel von Dormoy gesehen haben. Die Standardtafeln dienen zur Berechnung der Rentenbarwerte, wenn sich auch die Parameter, also die Ausscheideordnung selbst, nicht aber der Zinsfuss allein ändert.

Obwohl die III. Gruppe durch ihre systematische Eingliederung in das Zinsfussproblem theoretisch sehr interessant erscheint, hat sie an und für sich jedoch keinen praktischen Wert. Abgesehen davon, dass die praktisch brauchbarsten Ausscheideformeln so kompliziert sind, dass eine formelmässige Berechnung der Hilfsgrössen $k_n, h_n, {}^uM_n$ meistens nicht leicht möglich ist, hat keinen Sinn, die Summen der diskontierten Zahlen ${}^0S_{x+1}^{(\nu)}$ bis zur n -ten Ordnung zu berechnen, um einen Näherungswert des n -ten Präzisionsgrades (Präzisionsordnung) zu ermitteln, da wir schon aus der 0-ten Summe N_{x+1} den exakten Wert leicht herleiten können. Einen praktischen Wert bekommt diese Gruppe in folgenden drei Fällen:

1. in Verbindung mit der Änderung der Parameter der Ausscheideformel, wie *Blaschke* an dem Makehamschen Sterbegezet gezeigt hat,
2. wenn sich Zinsfussänderungen durch Altersänderungen ersetzen lassen, was bei der Ausscheideformel von *Achard* der Fall ist,
3. bei der Umkehrung des Zinsfussproblem.

Die Autoren, welche verschiedene Formeln der III. Gruppe aufgestellt haben, interessierten sich nie für Näherungswerte dieser Gruppe, sondern sie trachteten ausnahmslos für einzelne Ausscheideformeln die Summation

$$\sum_{t=0}^{\omega-x} v^t l_{x+t}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$$

«algebraisch» durchzuführen, um so zu exakten N_x zu gelangen, was ihnen allerdings nur bei einfacheren Ausscheideformeln (*Moivre*, *Dormoy* usw.) gelungen ist. Bei komplizierten Ausscheideformeln (*Achard*, *Gompertz*, *Makeham* usw.) mussten sie aber die kontinuierliche Behandlung anwenden. So z. B. kann man bekanntlich bei der Makehamschen Ausscheideformel den Barwert der kontinuierlichen Leibrente mittels der Gammafunktion darstellen usw. Einen ganz originellen Weg hat aber *Hadwiger* [11] eingeschlagen. Er versuchte — ebenfalls in kontinuierlicher Weise —, das Zinsfussproblem ohne Kenntnis der Ausscheideformel in allgemeinsten Art exakt zu lösen, d. h. aus gegebenen ${}^0\bar{a}_{x+t}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ den genauen Wert von $\bar{a}_x(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ unmittelbar zu bestimmen. Seine «Universallösung des Zinsfussproblem» lautet in unserer Schreibweise

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{{}^0\bar{a}_x}{{}^0\bar{a}_{x+t}} e^{-\Delta t - \int_x^{x+t} \frac{d\xi}{{}^0\bar{a}_\xi}} dt$$

Universal ist diese Lösung allerdings nur im Bereiche unserer III. Gruppe. Ihre praktische Auswertung hängt offenbar von der Integrierbarkeit der unter den Integralzeichen stehenden Funktionen. Durchsichtlicher wird Hadwigers Methode in der diskontinuierlichen Behandlung. Wenn man in seinen Verfahren die Integrale « \int » mit den Summen « Σ », die Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}$ mit der Differenzenbildung $\Delta_x = f(x+1) - f(x)$, die Differentialgleichungen mit den Differenzengleichungen usw. vertauscht, so gelangt man zu folgendem Gegenstück der obigen Formel

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} \prod_{\xi=0}^{t-1} \left(\frac{v}{v_0} \right)^t \frac{{}^0a_{x+\xi}}{1 + {}^0a_{x+\xi+1}}$$

Die letzte Formel ist in gewisser Beziehung noch universaler als die vorausgehende, denn sie ist auch dann auswertbar, wenn sich die angedeuteten Multiplikationen und Summationen nicht «algebraisch» erledigen lassen. Eine «arithmetische» Berechnung einzelner Produkte bzw. einzelner Summanden (I. Gruppe) erfordert jedenfalls viel Zeit und Arbeit. Diese Formel ist übrigens identisch mit der wohlbekannten Reihenentwicklung des Leibrentenbarwertes

$$a_x = v p_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \dots$$

Nur wenige bereits bekannte Formeln der III. Gruppe, welche verschiedene Autoren bisher gefunden haben, können wir als spezielle Integrale der Grundgleichung (14) auffassen. Einen solchen konkreten Spezialfall stellt eben die von uns behandelte Ausscheideformel von Dormoy. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die meisten Ausscheideformeln für die «algebraische» Berechnung der Summen ${}^\mu S_x^{(v)}$ nicht geeignet erscheinen, weshalb die Autoren — im Gegensatze zu den Lösungsmethoden der anderen Gruppen — durchwegs bestrebt waren, aus den Ausscheideformeln nur exakte, aber keine Näherungswerte herzuleiten, da die letzten mehr Arbeit erfordern als die ersten.

Bestimmung der Integrationskonstanten der allgemeinen Näherungsformel des Rentenbarwertes bei Heranziehung von Zeitrentenbarwerten (IV. Gruppe)

Den Zeitrenten liegt eine mathematische Ausscheideformel zugrunde, welche wir definieren

$$l_{x+t} = 1 \text{ bzw. } 0, \text{ wenn } t \leq m \text{ bzw. } > m$$

Die Zeitrenten an und für sich sind also schon in der III. Gruppe begriffen, jedoch wegen der Eigenartigkeit, mit welcher sie zur Lösung des Zinsfussproblemcs der Leibrenten herangezogen werden, wird eine besondere Gruppe gebildet. Im Falle $m = \infty$ haben wir die sogenannte «ewige Rente». Die Integrationskonstanten finden wir, wenn wir in (76) $S = 1$ setzen, also

$$\begin{aligned} A &= -1 & \underline{A} &= -\sqrt{-1} \\ B &= +1 & \underline{B} &= +\sqrt{-1} \\ C_v &= 0 & \underline{C}_v &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Der Barwert der konstanten und der steigenden ewigen Rente ist daher exakt (77)

$$a_\infty = (-1 + r)^{-1} = \frac{1}{i} \quad (78^*)$$

$$I_\infty = -r(-\sqrt{-1} + r\sqrt{-1})^{-2} = \frac{r}{i^2}$$

Hat m einen endlichen Wert, d. h. die Zeitrente wird nur m Jahre nachhinein gezahlt, dann bestimmen wir am einfachsten die exakten Rentenbarwerte aus der Differenz zwischen der unmittelbaren und der um m Jahre aufgeschobenen ewigen Rente (46), also

$$a_{\overline{m}|} = \frac{1}{i} - v^m \frac{1}{i} = \frac{1 - v^m}{i} \quad (79)$$

$$I_{\overline{m}|} = \frac{r}{i^2} - v^m \left(\frac{r}{i^2} + \frac{m}{i} \right) = \frac{a_{\overline{m}|} - m v^{m+1}}{1 - v}$$

Wir können selbstverständlich aber auch für die $a_{\overline{m}|}$, $I_{\overline{m}|}$ usw. die Näherungsformeln aller Präzisionsgrade und Präzisionsordnungen

nach den Methoden der I., II., III. Gruppe aufstellen, genau so wie für die Leibrenten. Die Summen der diskontierten Zahlen können nach der folgenden Rekursionsformel berechnet werden

$$S_m^{(n)} = \frac{S_m^{(n-1)} - \binom{m+n-1}{n} v^{m+1}}{1-v} \quad (80)$$

Daraus folgt

$$M_n = \frac{-n M_{n-1} - (-1)^n (m+n-1)_n v^{m+1}}{1-v} \quad (81)$$

Speziell ist

$$\begin{aligned} M_0 &= a_{\overline{m}|} \\ M_1 &= \frac{-M_0 + m v^{m+1}}{1-v} \\ M_2 &= \frac{-2M_1 - (m+1)_2 v^{m+1}}{1-v} \\ M_3 &= \frac{-3M_2 + (m+2)_3 v^{m+1}}{1-v} \\ &\dots \end{aligned}$$

Aus M_n findet man leicht noch h_n und ${}_n\pi_\rho$. Die Berechnung von Näherungswerten der Zeitrentenbarwerte erfordert aber offenbar bedeutend mehr Arbeit als die Berechnung von exakten Werten. Einen praktischen Wert bekommen die Näherungsformeln der Zeitrentenbarwerte erst bei der Umkehrung des Zinsfussproblemcs, wie wir später sehen werden.

Die Tatsache, dass sich die exakten Zeitrentenbarwerte für alle Zinsfüsse i und alle Dauer m leicht berechnen lassen, hat einige Autoren dazu bewogen, dass sie die Zeitrentenbarwerte zur Herleitung von Näherungsformeln der Leibrentenbarwerte herangezogen haben, und zwar vor allem zur Berechnung von Barwerten der temporären Leibrenten $a_{x, \overline{m}|}$. Der Unterschied zwischen $a_{x, \overline{m}|}$ und $a_{\overline{m}|}$, besonders wenn m klein ist, ist bekanntlich nicht gross, so dass $a_{\overline{m}|}$ bereits als eine ein wenig überschätzte Näherung von $a_{x, \overline{m}|}$ betrachtet werden kann. Diesbezügliche Lösungsmethoden können in zwei Untergruppen zusammengefasst werden.

Erste Untergruppe

Bei der ersten Untergruppe werden $a_{x, \overline{m}|(n)}$ und $a_{\overline{m}|}$ in eine passend gewählte funktionelle Beziehung gesetzt, also

$$F(a_{x, \overline{m}|(n)}, a_{\overline{m}|}) = 0$$

Die Funktion F ist auf Grund besonderer Erwägungen zu bestimmen. Als einfaches Beispiel wollen wir schreiben

$$Ha_{x, \overline{m}|(n)} = \frac{a_{\overline{m}|}}{a_{x, \overline{m}|(n)}} \quad (82)$$

$\frac{1}{a_{x, \overline{m}|(n)}}$ bedeutet den Näherungswert der jährlich nachhinein zahlbaren Annuität, welche eine x -jährige Person lebenslänglich, jedoch höchstens m Jahre, zu zahlen hat, um die Schuld «1» zu tilgen. Der Quotient $\frac{a_{\overline{m}|}}{a_{x, \overline{m}|(n)}}$ stellt daher den Barwert dieser Zahlungen (wenn die Annuitäten auch im Ablebensfalle der Person gezahlt werden) dar, welcher einem Leibrentenbarwerte $Ha_{x, \overline{m}|(n)}$ annähernd gleichgesetzt werden kann. Der Rentenbetrag H ist selbstverständlich so zu bestimmen, dass das Gleichheitszeichen in (82) berechtigt erscheint. Übrigens wird H mit den Integrationskonstanten einverleibt. Ist $n = 1$, bekommen wir aus (82)

$$(A + Br)^{\frac{1}{1-h_1}} = \frac{a_{\overline{m}|}}{a_{x, \overline{m}|(1)}} \quad (83)$$

Die Integrationskonstanten A und B können nach den Methoden der einzelnen Gruppen bestimmt werden. Haben wir z. B. zwei Grundtafeln zu Zinsfüßen i_0 und i_1 (II. Gruppe), so heisst es, folgendes Gleichungssystem aufzulösen:

$$A + Br_0 = \left(\frac{{}^0a_{\overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1}$$

$$A + Br_1 = \left(\frac{{}^1a_{\overline{m}|}}{{}^1a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1}$$

Daraus folgt

$$A = \frac{r_1 \left(\frac{{}^0a_{\overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1} - r_0 \left(\frac{{}^1a_{\overline{m}|}}{{}^1a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1}}{i_1 - i_0} \quad (84)$$

$$B = \frac{\left(\frac{{}^1a_{\overline{m}|}}{{}^1a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1} - \left(\frac{{}^0a_{\overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1}}{i_1 - i_0}$$

Nach Einsetzen von A und B in (83) bekommen wir folgende Näherungsformel des 1. Präzisionsgrades

$$\frac{a_{x\overline{m}|(1)}}{a_{\overline{m}|}} = \frac{{}^0a_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|}} \left[\frac{i_1 - i}{i_1 - i_0} + \frac{i - i_0}{i_1 - i_0} \left(\frac{{}^1a_{\overline{m}|} {}^0a_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|} {}^1a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1} \right]^{\frac{1}{h_1-1}} \quad (85)$$

Die Grösse $a_{\overline{m}|}$ ist nach (79) zu berechnen, wenn sie schon den Zins-
tafeln nicht entnommen werden kann. Wenn wir in (85) $h_1 = 2$ und
 $i_0 = 0$ setzen, bekommen wir folgende Näherungsformel von *Borch*

$$\frac{a_{x\overline{m}|(1)}}{a_{\overline{m}|}} = \left(1 - \frac{i}{i_1} \right) \frac{\sum_{t=1}^m l_{x+t}}{m l_x} + \frac{i}{i_1} \frac{{}^1a_{x, \overline{m}|}}{{}^1a_{\overline{m}|}} \quad (85^*)$$

Haben wir dagegen nur eine einzige Grundtafel zum Zinsfusse i_0
(I. Gruppe), dann müssen wir den Punkt δ_1 so verschieben, dass er
unendlich nahe dem Punkte δ_0 zu liegen kommt, d. h. wir haben zu
setzen

$$\delta_1 = \delta_0 + d\delta$$

$${}^1a_{\overline{m}|} = {}^0a_{\overline{m}|} - {}^0I_{\overline{m}|} d\delta$$

$${}^1a_{x\overline{m}|} = {}^0a_{x, \overline{m}|} - {}^0I_{x, \overline{m}|} d\delta$$

Durch diese Substitution bekommen wir aus (84) folgende Werte der
Integrationskonstanten:

$$A = \left(\frac{{}^0a_{\overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1} \left[1 - (1-h_1) \left(\frac{{}^0I_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} - \frac{{}^0I_{\overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|}} \right) \right]$$

$$B = \left(\frac{{}^0a_{\overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} \right)^{1-h_1} v_0 (1-h_1) \left(\frac{{}^0I_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} - \frac{{}^0I_{\overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|}} \right)$$

Nach Einsetzen von A und B in (83) bekommen wir

$$\frac{a_{x, \overline{m}|(1)}}{a_{\overline{m}|}} = \frac{{}^0a_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|}} \left[1 + (1 - h_1) r_0 \Delta \left(\frac{{}^0I_{x, \overline{m}|}}{{}^0a_{x, \overline{m}|}} - \frac{{}^0I_{\overline{m}|}}{{}^0a_{\overline{m}|}} \right) \right]^{\frac{1}{h_1-1}} \quad (86)$$

Wenn wir in (86) $h_1 = 2$ und $i_0 = 0$ setzen, bekommen wir eine zweite Näherungsformel von *Borch*

$$\frac{a_{x, \overline{m}|(1)}}{a_{\overline{m}|}} = \frac{\sum_{t=1}^m l_{x+t}}{m l_x} \left[1 + i \left(\frac{m+1}{2} - \frac{\sum_{t=1}^m t l_{x+t}}{\sum_{t=1}^m l_{x+t}} \right) \right] \quad (86^*)$$

Eine weitere, recht einfache Formel von *Borch* bekommen wir, wenn wir in (83) rein schablonenhaft setzen

$$A = \frac{l_x + \vartheta_m}{l_x}, \quad B = 0, \quad h_1 = 2$$

nämlich

$$\frac{a_{x, \overline{m}|(1)}}{a_{\overline{m}|}} = \frac{l_x + \vartheta_m}{l_x} \quad (86^{**})$$

Nach *Borch* ist

$$\vartheta = \frac{I_{\overline{m}|}}{a_{\overline{m}|}}$$

Die Integrationskonstanten können auch nach den Methoden der III. Gruppe, d. h. mit Hilfe von Parametern der Ausscheideformeln, bestimmt werden, was jedoch keinen praktischen Wert hat, weil $a_{x, \overline{m}|}$ leichter als $a_{x, \overline{m}|(n)}$ zu berechnen ist. Wenn z. B. im Altersintervalle $(x, x+m)$ die l_{x+t} nach dem Gesetze von *Dormoy* abnehmen, haben wir exakt

$$a_{x, \overline{m}|} = \sum_{t=1}^m (Sv)^t = a_{\overline{m}|}(i), \quad i = \frac{r-S}{S}, \quad S = \left(\frac{l_{x+m}}{l_x} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Im Falle linearer Abnahme von l_{x+t} ist exakt

$$a_{x, \overline{m}|} = a_{\overline{m}|} - \frac{l_x - l_{x+m}}{m l_x} I_{\overline{m}|}$$

usw.

Die Näherungsformeln der ersten Untergruppe der IV. Gruppe, welche verschiedene Autoren gefunden haben, sind also spezielle Integrale der Grundgleichung des Zinsfussproblemcs oder aber Funktionen, die sich diesen Integralen annähern.

Die Näherungsformeln der ersten Untergruppe können also genau so in einzelne Präzisionsgrade und Präzisionsordnungen eingeteilt werden wie die Näherungsformeln der drei vorausgehenden Gruppen. Die Integrationskonstanten können also nach den Methoden der I., II., III. Gruppe bestimmt werden. Schon deshalb muss für die Lösungsverfahren, welche Zeitrentenbarwerte heranziehen, eine besondere, d. h. die IV. Gruppe gebildet werden.

Zweite Untergruppe

Bei der zweiten Untergruppe werden die Leibrentenbarwerte in Zeitrentenbarwerte umgewandelt und die notwendigen Rechnungen an den Zeitrentendauern vorgenommen. Nach der Bestimmung der passenden Zeitrentendauern kehrt man von den Zeitrentenbarwerten zu den Leibrentenbarwerten zurück. Hieher gehören die Formeln von *Lenzi* und *Steffensen*. Diesbezügliche Verfahren sind aber ihrem Wesen nach nichts anderes als eine Umgehung des Zinsfussproblemcs, welches ja nur auf die Interpolation in bezug auf den Zinsfuss, nicht aber in bezug auf die Rentendauer absieht — so etwa, wie man eine Wurzelziehung aus einer Zahl durch die Division des entsprechenden Logarithmus umgehen kann. Bei dieser Untergruppe erscheint eine Bestimmung der Integrationskonstanten überflüssig, und daher fällt sie aus dem Rahmen unserer Betrachtungen heraus.

Andere Versicherungswerte

Nehmen wir einen Versicherungswert $V_x(i) = V$, welcher sich als eine Funktion eines einzigen Rentenbarwertes a darstellen lässt, also $V = V(a)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a &= f(V) \\ a' &= \frac{df}{dV} V' \\ a'' &= \frac{d^2f}{dV^2} V'^2 + \frac{df}{dV} V'' \\ &\dots \end{aligned}$$

Wenn wir mit Hilfe obiger Gleichungen den Rentenbarwert a bzw. seine Ableitungen $a^{(v)}$ in (14) eliminieren, so geht die Grundgleichung über in

$$G(V, V', V'', \dots V^{(n+1)}) = 0$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung stellt die allgemeine Näherungsformel des Versicherungswertes $V_x(i)$ dar. Die Integrationskonstanten können nach den Methoden der vier Gruppen bestimmt werden, genau so wie bei den Rentenbarwerten. Das vollständige Integral bekommen wir aber auch viel einfacher, wie leicht einzusehen ist, wenn man schlechtweg in $V(a)$ den Rentenbarwert a mit dem Näherungswerte $a_{(n)}$ vertauscht. Deshalb wollen wir den Näherungswert eines Versicherungswertes n -ten Präzisionsgrades bzw. n -ter Präzisionsordnung definieren

$$\begin{aligned} V_{(n)} &= V(a_{(n)}) \\ V_{[n]} &= V(a_{[n]}) \end{aligned} \tag{87}$$

und zwar auch dann, wenn V eine Funktion von mehreren Rentenbarwerten (verschiedener Alter) ist.

Umkehrung des Zinsfussproblemcs

Bei der Umkehrung des Zinsfussproblemcs haben wir aus einem gegebenen Versicherungswerte $V_x(i) = V$ den Zinsfuss i zu bestimmen. Zu diesem Ziele gelangen wir so, dass wir in (87) die Näherungswerte $V_{(n)}$ bzw. $V_{[n]}$ mit exakten V , weiter i mit $i_{(n)}$ bzw. $i_{[n]}$ vertauschen und die so entstandenen Gleichungen nach $i_{(n)}$ bzw. $i_{[n]}$ auflösen. Infolgedessen können wir diesbezügliche Lösungen in Präzisionsgrade $i_{(0)}, i_{(1)}, i_{(2)} \dots$ bzw. in Präzisionsordnungen $i_{[0]}, i_{[1]}, i_{[2]} \dots$ einteilen. Desgleichen können wir die verschiedenen Lösungsmethoden mit Rücksicht auf die uns bekannten Ausgangswerte wiederum in vier Gruppen zusammenfassen. Damit erscheint die Umkehrung des Zinsfussproblemcs bereits als erledigt. Wir wollen dennoch einige einfachere, für die Praxis wichtige Formeln samt zahlenmässigen Beispielen geben.

I. Gruppe

Aus (36) bekommen wir nach Umtausch von $a_{(n)}$ mit a und i mit $i_{(n)}$ folgende Gleichung

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{1}{\nu!} [v_0(i_{(n)} - i_0)]^\nu \left[{}^0M_\nu - \frac{{}^0M_{n-1}^{n-\nu}}{{}_n\pi_{n-\nu} {}^0M_n^{n-\nu-1}} \right] + \frac{{}^0M_{n-1}^n}{{}_n\pi_n {}^0M_n^{n-1}} \left[1 + \frac{(1-h_n)v_0(i_{(n)} - i_0){}^0M_n}{{}^0M_{n-1}} \right]^{g_n}$$

aus welcher $i_{(n)}$ zu berechnen ist. Wenn $n = 0, 1, 2$, können wir $i_{(n)}$ (88) explicite darstellen, nämlich

$$i_{(0)} = i_0 + r_0 \frac{{}^0M_0}{{}^0M_1} \left(1 - \frac{{}^0M_0}{a} \right) \quad (88-0)$$

$$i_{(1)} = i_0 + \frac{\left(\frac{a}{{}^0M_0} \right)^{1-h_1} - 1}{{}_0M_1 \frac{(1-h_1)v_0}{{}^0M_0}} \quad (88-1)$$

$$i_{(2)} = i_0 + \frac{\left[(a - {}^0M_0) \frac{{}_2\pi_2 {}^0M_2}{{}^0M_1^2} + 1 \right]^{\frac{1-h_2}{2-h_2}} - 1}{{}_0M_2 \frac{(1-h_2)v_0}{{}^0M_1}} \quad (88-2)$$

Ähnlich kann man $i_{(n)}$ aus I (42) und $i_{[n]}$ aus a (51) usw. berechnen.

Wenn ausser a noch I bekannt ist, gestaltet sich die Berechnung von $i_{(1)}$ infolge (45, 1) sehr einfach. Es ist nämlich

$$i_{(1)} = \frac{r_0 I}{{}_0I} \left(\frac{{}_0a}{a} \right)^{h_1} - 1$$

Wie $i_{(n)}$ aus $V_x(i)$ berechnet wird, werden wir an einem konkreten Beispiele zeigen. Die Prämienreserve einer lebenslänglichen Ablebensversicherung ist bekanntlich

$${}_tV_x = 1 - \frac{1 + a_{x+t}}{1 + a_x}$$

x = Beitrittsalter, t = die zurückgelegte Versicherungszeit. Wenn wir $i_{(n)}$ bestimmen wollen, haben wir a_x und a_{x+t} mit der Näherungsformel von $a_{(n)}$ zu ersetzen, in welcher i mit $i_{(n)}$ vertauscht ist. Für $x = 20$, $t = 20$ haben wir z. B. nach der STM ${}_tV_x = 0.14724$. Bei Anwendung der 3 %-igen Grundtafel haben wir so zur Bestimmung von $i_{(0)}$, $i_{(1)}$, $i_{(2)}$ folgende drei Gleichungen gefunden:

$$0.85276 = \frac{1 + 17.810 [0.59552 + 13.483 i_{(0)}]^{-1}}{1 + 22.775 [0.45535 + 18.182 i_{(0)}]^{-1}}$$

$$0.85276 = \frac{1 + 17.810 [0.74114 + 8.62881 i_{(1)}]^{-1.5625}}{1 + 22.775 [0.65142 + 11.6193 i_{(1)}]^{-1.5625}}$$

$$0.85276 = \frac{3.5086 + 15.3014 [0.82142 + 5.95252 i_{(2)}]^{-2.63636}}{4.5071 + 19.2679 [0.75580 + 8.13991 i_{(2)}]^{-2.63636}}$$

Daraus folgt auf fünf Stellen genau

$$i_{(0)} = 5.1513 \%$$

$$i_{(1)} = 4.9511 \%$$

$$i_{(2)} = 4.9999 \%$$

Weitere Näherungen haben keine wesentlichen Verbesserungen zur Folge. Der exakte Wert ist nämlich $i = 5 \%$.

II. Gruppe

Da wir bei der II. Gruppe keine allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes haben, müssen wir zunächst mit Rücksicht auf die vorhandenen Ausgangswerte eine passende Formel aufsuchen. Sind z. B. zwei Grundtafeln nur mit N_x gegeben, dann haben wir die Formel (54) anzuwenden, aus welcher folgt

$$i_{(1)} = \frac{i_0 1a^{1-h_1} - i_1 0a^{1-h_1} + (i_1 - i_0) a^{1-h_1}}{1a^{1-h_1} - 0a^{1-h_1}}$$

Sind in den beiden Grundtafeln nebst N_x auch S_x gegeben, dann ist (57) oder (61—2) zu nehmen, aus welchen $i_{(2)}$ berechnet werden kann. Sind mehrere Grundtafeln, die nur N_x , aber keine S_x enthalten, vorhanden, dann können die Interpolationsformeln von Newton oder Lagrange jedoch an reziproken Rentenbarwerten $\frac{1}{\mu a}$, nicht aber an Rentenbarwerten μa mit Vorteil angewendet werden. In diesem Falle gelangen wir zu $i_{[n]}$ usw.

Wie $i_{[n]}$ aus $V_x(i)$ berechnet wird, werden wir an einem konkreten Beispiele zeigen. Gegeben ist wiederum die Prämienreserve der lebenslänglichen Ablebensversicherung nach der ITM für $x = 20$, $t = 20$, und zwar

$${}_{20}V_{20} = 1 - \frac{1 + a_{40}}{1 + a_{20}} = 0.10733$$

Als Grundtafeln stehen uns die 4 %-ige und 5 %-ige ITM zur Verfügung. Die a_{20} und a_{40} wollen wir mittels (61—2) ersetzen, also

$$a = {}^1C_0 + ({}^1a - {}^1C_0) \left[\frac{\left(\frac{A}{B} \right)_1 + 1 + i_{(2)}}{\left(\frac{A}{B} \right)_1 + 1.05} \right]^{1g_2}$$

Um grössere Genauigkeit zu erzielen, nehmen wir $\left(\frac{A}{B} \right)_1$, 1C_0 , $g(x + 1,5 \%)$, die sich auf $i_1 = 5 \%$ beziehen, weil $i_{(2)}$ offenbar in der Umgebung von i_1 liegt. Wir gelangen so zur folgenden Gleichung

$$0.89267 = \frac{3.2077 + 12.1813 [0.70841 + 5.832 i_{(2)}]^{-2.39386}}{3.6880 + 14.2241 [0.59494 + 8.101 i_{(2)}]^{-2.18715}}$$

Daraus folgt $i_{(2)} = 6.4994 \%$

Der exakte Wert ist $i = 6.5 \%$. Die Differenz von $+ 0.0006 \%$ stammt eher von der Ungenauigkeit der Ausgangswerte in der Publikation [4] als von der Ungenauigkeit der Näherungsformel. Das Risikokapital, berechnet mit a_{20} und a_{40} , macht 0.89267 aus, wie oben, mit den diskontierten Zahlen dagegen 0.89262, also um 0.00005 weniger.

III. Gruppe

Bei der III. Gruppe können wir schon wegen der Verschiedenheit der Ausscheideformeln keine allgemeine Lösung für $i_{(n)}$ geben. Es ist vielmehr zur Bestimmung von $i_{(n)}$ eine besondere Behandlung bzw. Analyse jeder einzelnen Ausscheideformel notwendig. Wir müssen jedoch davon absehen und bemerken nur noch, dass zur Berechnung von i aus den Zeitrentenbarwerten bereits einige Näherungsformeln bestehen, z. B. die von *Achar*, *Bayley*, *De Morgan*, die man in den

Lehrbüchern der politischen Arithmetik und Zinsrechnung, z. B. in der Arbeit von Förster [12], findet. Analoge Formeln für andere formelmässige Ausscheideordnungen wären sehr erwünscht. In Mangel solcher Formeln bleibt uns nichts anderes übrig, als die Methoden der I. und der II. Gruppe bei Berechnung von i zu benützen auch bei Versicherungswerten, welchen eine formelmässige Ausscheideordnung zugrunde liegt. An folgendem Beispiele wollen wir zeigen, mit welchem Erfolg die Formeln (88—0), (88—1), (88—2) bei Bestimmung von $i_{(n)}$ aus $a_{m|}$ angewendet werden können. Gegeben sind z. B. folgende Zeitrentenbarwerte:

m	$a_{m }$
10	8.4760 4377
20	14.7069 8385
40	22.6547 3726
60	26.9497 5689
80	29.2708 1451

aus welchen $i_{(n)}$ zu bestimmen ist. Der Zinsfuss i befindet sich offenbar in der Umgebung von $i_{(0)} = 3\%$. Wir haben deshalb die 3 %-igen 0M_n nach (81) und nachher h_n und ${}_n\pi_e$ berechnet und diese Hilfsgrössen in (88—0) ... eingesetzt und so folgende Näherungswerte gefunden:

m	$i_{(0)}$	$i_{(1)}$	$i_{(2)}$
10	3.125 204 %	3.125 002 %	3.125 000 %
20	3.125 386 %	3.125 006 %	3.124 999 %
40	3.125 018 %	3.124 994 %	3.125 001 %
60	3.125 705 %	3.124 998 %	3.125 000 %
80	3.125 689 %	3.124 991 %	3.125 001 %

Der exakte Wert ist $i = 3.125\%$. Die Differenzen der letzten Dezimale bei $i_{(2)}$ dürften eher von den vernachlässigten Dezimalen als von der Ungenauigkeit der Näherungsformeln abstammen, da wir ja nur mit 7-stelligen Logarithmen von Vega gearbeitet haben.

Unsere Formeln können selbstverständlich mit demselben Erfolg auch zur Berechnung des effektiven Zinsfusses (Rentabilität) bei Anleihen verwendet werden.

Mit diesem Problem, natürlich von ganz anderem Gesichtspunkte aus, hat sich eingehend Birger Meidell [13] befasst.

IV. Gruppe

Die IV. Gruppe kommt bei der Umkehrung des Zinsfussproblemcs nicht in Betracht. Es müsste nebst $a_{x, \overline{m}}$ auch $a_{\overline{m}}$ bekannt sein, was in der Praxis so gut wie nicht vorkommt, wenn es aber schon vorkommen sollte, dann könnte man i am einfachsten aus $a_{\overline{m}}$ nach den unter der III. Gruppe erwähnten Formeln berechnen. Im Falle, dass nur der Quotient $\frac{a_{x, \overline{m}}}{a_{\overline{m}}}$ bekannt sein sollte, könnte man i aus (85) oder (86) berechnen usw.

Zusammenfassung und Schlussbemerkungen

Bevor wir eine Antwort auf die vier eingangs gestellten prinzipiellen Fragen des Zinsfussproblemcs geben, wollen wir übersichtshalber unsere Ausführungen kurz zusammenfassen.

Aus der *verallgemeinerten Poukkaschen Formel* (3) haben wir zunächst eine homogene quadratische Differentialgleichung mit den Stirlingschen Zahlen erster Art und der Funktion $k_n(x+1, i)$ als Koeffizienten — die sogenannte *Grundgleichung des Zinsfussproblemcs* (14) — hergeleitet. Unter der Annahme $k_n(x+1, i) = \text{konstant}$ haben wir die Grundgleichung integriert und so die *allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes* $a_{(n)}$ (26) gefunden. Unter einer anderen Annahme, nämlich $k_0(x+1, i)$ lasse sich durch eine unendliche Potenzreihe des Aufzinsungsfaktors r darstellen, haben wir ebenfalls mittels Integration die *allgemeine Näherungsformel des reziproken Rentenbarwertes* $\frac{1}{a_{[n]}}$ (48) gefunden. Die in diesen beiden allgemeinen

Näherungsformeln erscheinenden *Integrationskonstanten* können nur durch Ausgangswerte bestimmt werden, und zwar bei der I. Gruppe durch die ${}^0S_x^{(r)}$ einer Grundtafel, bei der II. Gruppe durch die ${}^{\mu}S_x^{(r)}$ zweier oder mehrerer Grundtafeln, bei der III. Gruppe durch die Parameter der Ausscheideformeln, bei der IV. Gruppe unter Zuhilfenahme von Zeitrentenbarwerten. Die Grössen k_n können aus denselben Gleichungen wie die Integrationskonstanten berechnet werden. Die Näherungsformeln, welche bis jetzt verschiedene Autoren aufgestellt haben, sind entweder spezielle Integrale der Grundgleichung, so z. B. die Formeln der

- I. Gruppe: Steffensen (39–1), van Dorsten (39–2), Poukka (40–2),
Christen-Frucht (41–2), Palmqvist (41*), Güttinger (36, 1),
II. Gruppe: Frucht (62),
III. Gruppe: Dormoy (77), Barwert der ewigen Zeitrente (78*),
IV. Gruppe: Borch (85*), (86*), (86**),

oder aber Funktionen, welche sich den speziellen Integralen der Grundgleichung annähern, so z. B. die Formeln der

- I. Gruppe: Poukka (40*), Berger (40**), Frucht (41–I), Evans (41–II),
Franckx-Frucht (41–III), Hantsch (41–IV), Meidell (41–V),
II. Gruppe: Meidell (62*), Frucht-Vellat (63,) (65), Crosato (66).

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Integrationskonstanten bzw. der Ausgangswerte werden die Näherungsformeln in Präzisionsgrade bzw. in Präzisionsordnungen eingeteilt. Je mehr Ausgangswerte vorliegen, desto mehr Integrationskonstanten können bestimmt werden, und desto grösser wird die Präzision des Näherungswertes. Die Präzision kann bei ausreichender Anzahl von Ausgangswerten beliebig, ja sogar bis zur Exaktheit gesteigert werden. Dem Mangel an Ausgangswerten kann durch die Werte der Funktion $k_n(x, i)$ in der Tafel im Anhang abgeholfen werden. Die Grundgleichung gilt für alle wie auch immer geartete Renten aller Ausscheideordnungen. Näherungsformeln anderer Versicherungswerte $V_x(i)$ können mit Hilfe von $a_{(n)}$ bzw. $a_{[n]}$ aufgestellt werden (87). Die zur Berechnung von i (Umkehrung des Zinsfussproblem) notwendigen Gleichungen bekommt man aus den Näherungsformeln durch Umtausch von $V_{(n)}$ bzw. $V_{[n]}$ mit dem exakten $V_x(i)$.

Auf Grund dieser Ausführungen können somit alle vier prinzipiellen Fragen des Zinsfussproblem bejahend beantwortet werden.

* * *

Schliesslich wollen wir die Grundgleichung des Zinsfussproblem noch unter der Annahme, k_n sei eine Funktion des Zinsfusses, d. h.

$$h_n = h_n(r)$$

integrieren. In diesem Falle muss das vollständige Integral der Grundgleichung den exakten Rentenbarwert darstellen. Die Grundgleichung (14*) können wir schreiben

$$\frac{M_{n+1} v^{n+1}}{(M_n v^n)^2} M_{n-1} v^{n-1} = h_n(r)$$

Mittels teilweiser Integration (17) findet man leicht

$$-\frac{1}{M_n v^n} M_{n-1} v^{n-1} + r = A + \int h_n(r) dr$$

Daraus folgt

$$\frac{M_n v^n}{M_{n-1} v^{n-1}} = \frac{1}{r - A - \int h_n(r) dr}$$

und nach weiterer Integration

$$\begin{aligned} M_{n-1} v^{n-1} &= B e^{\int \frac{dr}{r-A-\int h_n(r) dr}} \\ M_{n-2} v^{n-2} &= C_{n-2} + B \int e^{\int \frac{dr}{r-A-\int h_n(r) dr}} dr \\ &\dots \dots \dots \\ a &= \sum_{r=0}^{n-2} C_r r^r + B \int \int \dots \int \int e^{\int \frac{dr}{r-A-\int h_n(r) dr}} dr^{n-1} \end{aligned} \quad (89)$$

Wenn wir in (89) h_n als Konstante betrachten, bekommen wir die allgemeine Näherungsformel des Rentenbarwertes (26). Um anstatt Näherungswerte $a_{(n)}$ exakte a zu erhalten, müssen $h_1, h_2, h_3 \dots$ als Funktionen des Aufzinsungsfaktors r dargestellt werden. Das können wir aber nicht, wenigstens nicht exakt. Ausserdem erfordern solche Berechnungen so viel Arbeit, dass es praktischer erscheint, bei der Annahme $k_n = \text{konstant}$ zu verbleiben, obwohl die Analyse des Schlussgliedes in (89) interessante Erkenntnisse über das Zinsfussproblem zeitigen kann. Wenn z. B. die Gleichung

$$r - A - \int h_1(r) dr = 0$$

v verschiedene reelle Wurzeln $r = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_v$ hat, so ist exakt

$$a = {}^0a \prod_{\mu=1}^v \left(\frac{r - \alpha_\mu}{r_0 - \alpha_\mu} \right)^{\frac{1}{1-h_1(\alpha_\mu)}}$$

Die letzte Gleichung geht im Falle einer einzigen Wurzel $r = \frac{A}{1-h_1}$ in $a_{(1)}$ über. Analoge Formeln für den Fall imaginärer, komplexer und mehrfacher Wurzeln sind leicht nachzubilden. Mit Hilfe des Schlussgliedes (89) kann man unter anderem auch das Restglied R_n der Taylorschen Reihe (1) exakt berechnen, wo auch immer diese Reihe abgebrochen wird. (Die dritte Voraussetzung der Taylorschen Reihe.)

Das Zinsfussproblem in obiger Fassung erinnert an verschiedene Probleme aus anderen Gebieten der Wissenschaft. So eine Analogie wäre z. B. die klassische Herleitung der Keplerschen Gesetze aus der Gravitationsformel von Newton. Bei diesem Vergleiche entspricht die verallgemeinerte Poukkasche Funktion — der Gravitationsformel; die Grundgleichung des Zinsfussproblem — den Differentialgleichungen der Bewegung; die bereits bekannten Näherungsformeln des Zinsfussproblem — den vorher entdeckten Keplerschen Gesetzen usw. Eine weitere Analogie aus einem naheliegenden Gebiete wäre die Quiquetsche [14] Generalisierung der Sterbegesetze. Bei diesem Vergleiche entspricht die verallgemeinerte Poukkasche Funktion — der Bedingung, dass sich in der Versicherung eine Gruppe von N Personen mit einer anderen Gruppe von nur $n < N$ Personen ersetzen lässt; die Grundgleichung des Zinsfussproblem — der wohlbekannten homogenen linearen Differentialgleichung der Sterbeintensität

$$\sum_{v=1}^{n+1} C_v \mu_x^{(v)} = 0$$

die bereits bekannten Näherungsformeln des Zinsfussproblem — den vorher gefundenen Sterbegesetzen usw. Zwei solche Sterbegesetze als partikuläre Integrale obiger Differentialgleichung wollen wir wegen weiterer Analogien an dieser Stelle erwähnen, nämlich die Gesetze von Dormoy und Gompertz:

$$l_x = K S^x \quad \text{und} \quad l_x = K g^{e^x}$$

Im Falle $k_1 = \frac{1}{2}$, haben wir folgendes partikuläres Integral der Grundgleichung des Zinsfussproblem (41)

$$a_{(1)} = A B^r = A B^{e^\delta}$$

Zwischen dem Aufzinsungsfaktor r und dem Rentenbarwerte a besteht somit bis auf die Parameter dieselbe funktionelle Beziehung wie zwischen dem Alter x und der Zahl der Lebenden l_x des Sterbegesetzes von Dormoy, oder, zwischen der Zinsintensität δ und dem Rentenbarwerte a besteht bis auf die Parameter dieselbe funktionelle Beziehung wie zwischen dem Alter x und der Zahl der Lebenden l_x des Sterbegesetzes von Gompertz. Aus dieser Tatsache können selbstverständlich keine Folgerungen gezogen werden. Wir erwähnen sie nur nebenbei als curiosum.

Anhang

Die Tafel der verallgemeinerten Poukkaschen Zahlen

$$k_n(x, i) = \frac{S_x^{(n+1)} S_x^{(n-1)}}{(S_x^{(n)})^2}$$

berechnet auf Grund der slowenischen Volkssterbetafel, männliches Geschlecht, Beobachtungsperiode 1931—1933, für die Alter $x = 1, 6, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$, für die Präzisionsgrade $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und für die Zinsfüsse $i = 0 \%, 1 \%, 2 \%, 3 \%, 4 \%, 5 \%, 6 \%$.

x	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	x
0 %							
1	0.59	0.71	0.78	0.83	0.86	0.88	1
6	0.57	0.71	0.79	0.83	0.86	0.88	6
11	0.57	0.71	0.79	0.83	0.86	0.88	11
21	0.58	0.72	0.79	0.84	0.86	0.89	21
31	0.59	0.73	0.80	0.84	0.87	0.89	31
41	0.61	0.74	0.81	0.85	0.88	0.90	41
51	0.63	0.76	0.82	0.86	0.89	0.90	51
61	0.68	0.79	0.84	0.88	0.90	0.92	61
71	0.75	0.83	0.88	0.90	0.92	0.93	71
81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.94	0.95	0.96	91
1 %							
1	0.70	0.75	0.80	0.84	0.87	0.88	1
6	0.67	0.75	0.80	0.84	0.87	0.89	6
11	0.66	0.75	0.81	0.84	0.87	0.89	11
21	0.66	0.75	0.81	0.84	0.87	0.89	21
31	0.66	0.75	0.81	0.85	0.87	0.89	31
41	0.66	0.76	0.82	0.85	0.88	0.90	41
51	0.67	0.77	0.83	0.86	0.89	0.91	51
61	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	61
71	0.77	0.84	0.88	0.90	0.92	0.93	71
81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91

x	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	x
2 %							
1	0.79	0.80	0.83	0.85	0.87	0.89	1
6	0.75	0.79	0.83	0.85	0.87	0.89	6
11	0.74	0.79	0.83	0.85	0.87	0.89	11
21	0.73	0.78	0.82	0.85	0.88	0.89	21
31	0.72	0.78	0.83	0.86	0.88	0.90	31
41	0.71	0.78	0.83	0.86	0.88	0.90	41
51	0.71	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	51
61	0.73	0.81	0.86	0.88	0.91	0.92	61
71	0.78	0.85	0.88	0.91	0.92	0.93	71
81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91
3 %							
1	0.86	0.84	0.85	0.87	0.88	0.90	1
6	0.82	0.83	0.85	0.87	0.88	0.90	6
11	0.81	0.83	0.85	0.87	0.88	0.90	11
21	0.79	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	21
31	0.77	0.81	0.84	0.87	0.88	0.90	31
41	0.75	0.80	0.84	0.87	0.89	0.90	41
51	0.74	0.81	0.85	0.88	0.90	0.91	51
61	0.75	0.82	0.86	0.89	0.91	0.92	61
71	0.80	0.85	0.89	0.91	0.93	0.94	71
81	0.88	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91
4 %							
1	0.91	0.87	0.87	0.88	0.89	0.90	1
6	0.87	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	6
11	0.86	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	11
21	0.84	0.84	0.86	0.88	0.89	0.90	21
31	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89	0.90	31
41	0.79	0.82	0.85	0.88	0.89	0.91	41
51	0.77	0.82	0.86	0.88	0.90	0.91	51
61	0.77	0.83	0.87	0.89	0.91	0.92	61
71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	71
81	0.88	0.91	0.93	0.94	0.94	0.95	81
91	0.93	0.94	0.94	0.95	0.95	0.96	91

x	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	x
5 %							
1	0.95	0.90	0.90	0.90	0.90	0.91	1
6	0.91	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	6
11	0.89	0.89	0.89	0.89	0.90	0.91	11
21	0.88	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	21
31	0.85	0.85	0.87	0.88	0.90	0.91	31
41	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.91	41
51	0.80	0.83	0.86	0.89	0.90	0.92	51
61	0.79	0.84	0.87	0.90	0.91	0.93	61
71	0.82	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	71
81	0.89	0.91	0.93	0.94	0.95	0.95	81
91	0.93	0.94	0.94	0.95	0.96	0.96	91
6 %							
1	0.98	0.93	0.92	0.91	0.92	0.92	1
6	0.93	0.92	0.91	0.91	0.91	0.92	6
11	0.92	0.91	0.90	0.91	0.91	0.92	11
21	0.91	0.89	0.89	0.90	0.91	0.91	21
31	0.88	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	31
41	0.85	0.86	0.87	0.89	0.90	0.91	41
51	0.82	0.85	0.87	0.89	0.91	0.92	51
61	0.81	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	61
71	0.83	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	71
81	0.89	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	81
91	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	0.96	91

Literatur

Nachstehend zitieren wir nur die Arbeiten, welche uns in der Kriegszeit zugänglich waren. Im übrigen verweisen wir auf die umfangreichen Literaturangaben Fischers [2].

- [1] *Frucht, R.*: «Sulle relazioni che esistono fra due tipi di formule proposte per il calcolo approssimato delle rendite vitalizie», Estratto dal Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno VII, n. 4, ottobre 1936.
- [2] *Fischer, Ernst*: «Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 42. Band, Heft 2, 31. Oktober 1942.
- [3] *Lah, Ivo*: «Bases techniques pour les assurances sur la vie, établies d'après la statistique de mortalité de la population du territoire de l'ancienne banovine de la Drave au cours des années 1931–1933 pour les hommes, les femmes, deux têtes et pour les taux d'intérêt 0 %, 1 %, 2 %, 3 %, 4 %, 5 %, 6 %» (in serbo-kroatischer, russischer und französischer Sprache), Verlag Državni zavod za socijalno osiguranje, Direkcija Zagreb, 1947.
- [4] *Istituto Previdenza Sociale*: «Tavole demografico-finanziarie», Roma, 1939.
- [5] *Jordan, Charles*: «On Stirling's Numbers.» Extracted from The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 37, First Memorial Volume on the Occasion of the 60th birthday of the Editor T. Hayashi, Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan, June 1933.
- [6] *Frucht, Roberto*: «Contributo matematico al problema della variazione della rendita vitalizia al variare del tasso d'interesse», Extrait du XI^e Congrès International d'Actuaires, Paris 1937.
- [7] *Jordan, Charles*: «Statistique mathématique», Paris, Gauthier-Villars et C^{ie}, éditeurs, 1927, pp. 36–40, etc.
- [8] *Güttinger, Paul*: «Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 30. Heft, Oktober 1935.
- [9] *Frucht, R.*: «Sul metodo d'interpolazione del Franckx», Estratto dal Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno VIII, n. 4, Ottobre 1937.
- [10] *R. Frucht e A. Vellat*: «Un modo semplice di estrapolare le rendite vitalizie secondo il tasso d'interesse», Estratto dal Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno II, n. 4, ottobre 1931.
- [11] *Hadwiger, H.*: «Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 45. Band, Heft 1, 21. April 1945, S. 31–35.
- [12] *Emil Förster*: «Politische Arithmetik (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung)», Sammlung Göschel, Berlin und Leipzig, 1924.
- [13] *Birger Meidell*: «Über verschiedene explizite Lösungen des Problems von der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen», Sonderabdruck aus der Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1938, und «Zur Theorie und Praxis der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen», Sonderabdruck aus der Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1939, Uppsala.
- [14] *Quiquet*: «Représentation algébrique des tables de survie et de mortalité. Généralisation des lois de Gompertz et de Makeham», Paris 1893, Gauthier-Villars.

