Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 45 (1945)

Artikel: Réflexions sur le calcul du bénéfice de mortalité et sur celui des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques

Autor: Urech, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555429

Réflexions sur le calcul du bénéfice de mortalité et sur celui des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques

Par *Aug. Urech*, Berne

Durant les dix années écoulées, les sociétés d'assurances sur la vie ont été amenées à modifier complètement leurs bases techniques. Le recul de la mortalité et celui du taux de l'intérêt ont nécessité une adaptation aux nouvelles conditions, d'abord des tarifs et des réserves mathématiques des assurances de rentes, adaptation qui s'est faite en plusieurs fois, au fur et à mesure que les nouvelles observations précisaient et montraient à quel point la chute de la mortalité et celle de l'intérêt étaient importantes. En 1942, les tarifs des assurances en cas de décès des sociétés suisses furent également fondés sur des bases techniques nouvelles. La plupart des sociétés n'avaient pas attendu ce moment-là pour renforcer leurs réserves mathématiques des assurances en cas de décès de l'ancien portefeuille, afin de passer aussitôt que possible au calcul d'après les nouvelles bases. La participation aux bénéfices, elle aussi, a fait l'objet de nombreuses recherches. Elle a dû être abaissée de façon très sensible.

Dans la présente étude, nous nous proposons d'examiner deux problèmes sur lesquels l'unité ne s'est pas encore faite au sein des actuaires: le mode de calcul du bénéfice de mortalité et la constitution des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques. Il n'est pas certain du reste que les opinions pourront toujours se rencontrer. Dans beaucoup de questions d'assurance, et même dans celles qui ne paraissent relever au premier abord que de déductions mathématiques, il y a une part souvent importante d'appréciation personnelle. C'est que les formules font intervenir les bases techniques, tables de mortalité, taux d'intérêt, tables d'invalidité, etc., sur lesquelles les opinions varient. Parfois, il est assez difficile de s'affranchir complètement d'habitudes prises, d'analyser les hypothèses qu'on fait implicitement, et cela non seulement dans la pratique, mais aussi dans le raisonnement pur. Longtemps, la plupart des actuaires estimaient que les bases techniques utilisées pour établir un tarif devaient servir au calcul des réserves mathématiques jusqu'à l'extinction du portefeuille. Si ces bases se révélaient insuffisantes au cours des années, on pouvait bien modifier le tarif, mais les réserves mathématiques des assurances conclues aux anciennes primes étaient encore calculées pendant des dizaines d'années d'après les anciennes bases techniques. Il a fallu les modifications profondes enregistrées dans la mortalité et dans l'intérêt au cours de la dernière décennie pour qu'on se rende nettement compte que ce mode de faire peut conduire à des situations extrêmement difficiles.

Le calcul des tarifs, celui des réserves mathématiques, reposent sur des bases techniques de premier ordre qu'on choisit de manière qu'à vues humaines elles représentent aussi bien que possible les événements futurs, tout en maintenant une marge de sécurité. Lorsqu'on sent le besoin de modifier les bases techniques, on a en somme le sentiment qu'elles diffèrent trop des faits tels qu'ils se dérouleront probablement. C'est en nous pénétrant bien de cette remarque, que nous devons examiner les questions suivantes, dont l'importance est plus grande qu'il ne paraît peut-être à première vue. Le tableau 1, ainsi que le graphique 1, donnent les tables de mortalité utilisées dans ce travail.

Nous considérons un portefeuille composé uniquement d'assurances mixtes $30:\overline{30}|$, conclues le 1er janvier d'une même année, à l'âge de 30 ans et pour une durée de 30 ans. Le tarif a été calculé à l'aide de la table de mortalité des 23 compagnies allemandes MWI et le taux d'intérêt de $3\frac{1}{2}\,\%$. Nous admettons qu'à partir du début de la $(t+1)^{e}$ année d'assurance, la mortalité effective est donnée par la table de la Société suisse d'Assurances générales sur la vie humaine, à Zurich, RAH $\frac{1894/1930}{1921/1931}$ [1]) que nous désignerons dans la suite pour simplifier par RAH.

---

[1]) Société suisse d'Assurances générales sur la vie humaine, Zurich, Soixante-quinze ans d'activité, 1857—1932.

Taux annuels de mortalité

Tableau 1

x	MWI	RAH	N 1939	A 1924–29	0,75 RAH	(0,60➤0,90)RAH	(0,90➤0,60)RAH
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
30	0,00 882	0,00 225	0,00 507	0,00 241	0,00 169	0,00 135	0,00 203
31	901	231	514	246	173	141	206
32	924	239	521	253	179	148	210
33	944	248	530	262	186	156	216
34	970	256	539	273	192	164	220
35	0,00 999	0,00 265	0,00 550	0,00 286	0,00 199	0,00 172	0,00 225
36	0,01 027	277	561	302	208	183	233
37	1 058	293	575	320	220	196	243
38	1 095	311	589	341	233	211	255
39	1 133	330	606	364	248	228	267
40	0,01 176	0,00 347	0,00 624	0,00 388	0,00 260	0,00 243	0,00 278
41	1 228	383	644	413	287	272	303
42	1 279	423	667	439	317	305	330
43	1 331	468	693	466	351	342	360
44	1 386	518	721	495	389	383	394
45	0,01 437	0,00 573	0,00 753	0,00 527	0,00 430	0,00 430	0,00 430
46	1 488	634	788	563	476	482	469
47	1 549	703	828	604	527	541	513
48	1 621	779	872	651	584	608	561
49	1 705	863	921	704	647	682	613
50	0,01 814	0,00 958	0,00 976	0,00 764	0,00 719	0,00 766	0,00 671
51	1 931	0,01 062	0,01 038	831	797	860	733
52	2 060	1 179	1 106	906	884	967	802
53	2 200	1 309	1 183	990	982	0,01 086	877
54	2 349	1 453	1 268	0,01 084	0,01 090	1 221	959
55	0,02 506	0,01 613	0,01 364	0,01 190	0,01 210	0,01 371	0,01 048
56	2 681	1 791	1 470	1 311	1 343	1 540	1 146
57	2 866	1 990	1 589	1 450	1 493	1 731	1 254
58	3 073	2 210	1 721	1 608	1 658	1 945	1 370
59	3 288	2 454	1 868	1 783	1 841	2 184	1 497
60	0,03 535	0,02 726	0,02 033	0,01 973	0,02 045	0,02 453	0,01 636

Nous examinons comment il convient de calculer le bénéfice de mortalité au cours de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année d'assurance.

Partons de la formule de récurrence

$$(1) \qquad (1+i)\left[{}_tV^{(\mathrm{MWI})} + P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30|}}\right] - q^{(\mathrm{MWI})}_{30+t} - p^{(\mathrm{MWI})}_{30+t}\ {}_{t+1}V^{(\mathrm{MWI})} = 0\,,$$

qui exprime que la réserve mathématique à la fin de la t^{e} année, augmentée de la prime et des intérêts, permet de payer les décès qui se produisent au cours de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année et de constituer à la fin de l'année les réserves mathématiques pour les survivants, sans qu'il y ait ni bénéfice ni perte. Les notations se comprennent facilement; nous pouvons nous dispenser de les définir à nouveau. La formule suppose que les événements se produisent suivant les données de la table MWI.

Si la mortalité effective n'est pas égale à la mortalité présumée, on a à la fin de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année un bénéfice ou une perte. Nous avons admis que la mortalité effective dès le début de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année d'assurance est donnée par la table RAH. Pour déterminer le bénéfice B, positif ou négatif, durant la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année, on remplace dans la formule de récurrence les décès de la table MWI par ceux de la table RAH, et de même les vivants MWI à la fin de l'année par ceux de la table RAH. On a alors,

$$(2) \qquad B = (1+i)\left[{}_tV^{(\mathrm{MWI})} + P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30|}}\right] - q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t} - p^{(\mathrm{RAH})}_{30+t}\ {}_{t+1}V^{(\mathrm{MWI})}\,.$$

En tenant compte de la relation (1), on peut écrire:

$$(3) \qquad B = \left(q^{(\mathrm{MWI})}_{30+t} - q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t}\right)\left(1 - {}_{t+1}V^{(\mathrm{MWI})}\right).$$

C'est la formule qu'on utilise souvent pour déterminer le bénéfice de mortalité. Elle conduit pour une assurance mixte $30:\overline{30|}$ de 10 000 francs aux bénéfices indiqués dans le tableau 2 ci-après, colonne (2), ainsi que dans le graphique 2. Ce bénéfice diminue très rapidement avec les années, ce qui présente les inconvénients que nous avons signalés dans une étude précédente [1]).

[1]) *Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses* n° 31, 1er avril 1936, pages 78—83.

Bénéfices de mortalité et d'intérêt sur une assurance mixte $30:\overline{30|}$ *de 10 000 francs au cours de l'année* $(t+1)$, *valeur à la fin de l'année*

Tableau 2

$t+1$ (1)	MWI ➤ RAH (2)	MWI 3½% ➤ MWI 4% (3)	Total (2) + (3) (4)	N 1939 ➤ RAH (5)	A 1924-29 ➤ RAH (6)
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1	64,47	1,32	65,79	27,68	1,57
2	64,45	2,25	66,70	27,22	1,44
3	64,53	3,22	67,75	26,56	1,31
4	64,13	4,22	68,35	25,97	1,28
5	64,26	5,25	69,51	25,46	1,52
6	64,44	6,32	70,76	25,00	1,83
7	64,13	7,42	71,55	24,25	2,12
8	63,61	8,56	72,17	23,41	2,22
9	63,28	9,75	73,03	22,38	2,39
10	62,79	10,97	73,76	21,51	2,62
11	62,66	12,23	74,89	20,85	3,05
12	61,59	13,53	75,12	18,92	2,15
13	60,01	14,88	74,89	16,99	1,10
14	58,00	16,27	74,27	15,00	— 0,13
15	55,74	17,71	73,45	12,91	— 1,44
16	52,81	19,21	72,02	10,87	— 2,73
17	49,43	20,76	70,19	8,79	— 3,98
18	46,12	22,38	68,50	6,71	— 5,22
19	42,96	24,06	67,02	4,66	— 6,29
20	39,89	25,81	65,70	2,69	— 7,24
21	37,32	27,63	64,95	0,77	— 8,09
22	34,46	29,52	63,98	— 0,93	— 8,73
23	31,31	31,49	62,80	— 2,52	— 9,21
24	27,83	33,55	61,38	— 3,81	— 9,41
25	23,95	35,70	59,65	— 4,76	— 9,26
26	19,63	37,96	57,59	— 5,25	— 8,68
27	15,10	40,33	55,43	— 5,19	— 7,56
28	10,21	42,84	53,05	— 4,43	— 5,81
29	5,20	45,49	50,69	— 2,77	— 3,32
30	0	48,31	48,31	0	0

Nous aurions pu aussi partir de la formule de récurrence

$$(1') \qquad (1+i)\left[{}_tV^{(\mathrm{RAH})} + P^{(\mathrm{RAH})}_{30:\overline{30}|}\right] - q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t} - p^{(\mathrm{RAH})}_{30+t}\ {}_{t+1}V^{(\mathrm{RAH})} = 0,$$

qui lie les valeurs actuarielles relatives à la table RAH. Dès le début de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année d'assurance, la mortalité effective est égale, suivant nos hypothèses, à celle de la table RAH. En revanche, la prime de l'assurance a été fixée d'après la table MWI; la prime pure est égale à 264 fr. 10, tandis que d'après la table RAH, elle ne serait que de 213 fr. 90.

Comme nous avons remplacé ci-dessus dans la formule de récurrence (1), écrite pour la table MWI, les éléments $q^{(\mathrm{MWI})}_{30+t}$ et $p^{(\mathrm{MWI})}_{30+t}$ par les éléments correspondants de la table RAH, nous pouvons, dans la formule (1'), remplacer la prime $P^{(\mathrm{RAH})}_{30:\overline{30}|}$ par $P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|}$. Le résultat n'est plus égal à zéro, mais à une quantité

$$(2') \qquad B' = (1+i)\left[{}_tV^{(\mathrm{RAH})} + P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|}\right] - q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t} - p^{(\mathrm{RAH})}_{30+t}\ {}_{t+1}V^{(\mathrm{RAH})}.$$

Nous pouvons l'écrire, en tenant compte de (1'),

$$(3') \qquad B' = (1+i)\left[P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|} - P^{(\mathrm{RAH})}_{30:\overline{30}|}\right].$$

Nous avons dit que l'expression (3) $B = \left(q^{(\mathrm{MWI})}_{30+t} - q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t}\right)\left(1 - {}_{t+1}V^{(\mathrm{MWI})}\right)$ donne le bénéfice de mortalité durant la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année. Nous pourrions aussi être tentés de considérer comme bénéfice de mortalité la quantité B' résultant de (3'). Toutefois, cela supposerait que la réserve mathématique MWI à la fin de la t^{e} année a été, au préalable, complétée de façon à avoir la réserve RAH. Pour réaliser les bénéfices annuels B' à partir de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année, la société aurait dû fournir, de ses propres deniers, la différence entre la réserve RAH et la réserve MWI. Pendant quelques années, les bénéfices B' seraient utilisés pour restituer à la société son avance. Ensuite, seulement, les assurés auraient un droit à faire valoir et le bénéfice serait égal, chaque année, à la différence des primes MWI et RAH, augmentée des intérêts, jusqu'à la fin de l'assurance.

Le bénéfice B donné par la formule (3) n'est pas du tout le même. Il est égal au produit de la somme sous le risque, mesurée d'après la table MWI, par la différence entre les taux de mortalité MWI et RAH. Cette formule a quelque chose de séduisant, de même que les interprétations qu'on peut en donner. Cependant, lorsqu'on approfondit la question, on a quelque peine à admettre que le bénéfice de mortalité soit calculé et distribué suivant la formule (3). Elle contient la réserve MWI. Or, depuis la $(t+1)^{e}$ année d'assurance, la mortalité par hypothèse se déroule suivant la table RAH; dès lors, la réserve MWI est un élément étranger.

Mais un inconvénient plus grand dans la pratique, c'est que par suite de l'allure des tables MWI et RAH, le bénéfice de mortalité B diminue très fortement avec les années. Pour une assurance mixte $30:\overline{30|}$ de 10 000 francs, il est de 62 fr. 79 durant la 10e année d'assurance, de 39 fr. 89 durant la 20e année, et il décroît ensuite jusqu'à zéro, ainsi qu'il ressort du tableau 2, colonne (2). Sans doute, lorsqu'on considère un portefeuille entier d'assurances et que la production est très forte, comme ce fut le cas en Suisse depuis bien des années, le recul du bénéfice de mortalité ne se manifeste pas aussi brutalement; les nouvelles entrées le freinent, le retardent, mais elles ne peuvent pas empêcher qu'il se produise. Dans le portefeuille des assurances de l'action de secours instituée en 1924 en faveur des assurés auprès de compagnies allemandes d'assurances sur la vie, on a constaté au cours des années une diminution extrêmement forte du bénéfice de mortalité. Depuis vingt ans, ce portefeuille n'a plus été alimenté par de nouvelles assurances. L'effet que nous signalons ci-dessus se fait certainement sentir et cause en bonne partie sans doute ce recul, dont l'ampleur a parfois surpris.

Nous ne nions pas que le bénéfice de mortalité peut diminuer tout naturellement, en même temps que le capital sous le risque. Ce qui nous paraît en revanche inadmissible, c'est la chute trop rapide, provenant de ce que la table MWI ne convient plus du tout. Lorsque les conditions de rendement des placements sont favorables, lorsqu'elles sont stables, le bénéfice d'intérêt augmente avec les années parallèlement à la réserve mathématique. L'augmentation compense plus ou moins la diminution du bénéfice de mortalité; elle en atténue les conséquences, mais elle ne les élimine pas. Nous avons calculé, à titre de comparaison, le bénéfice d'intérêt auquel conduit l'assurance mixte envisagée, $30:\overline{30|}$, en supposant que le taux effectif de placement est de 4 %. La formule

$$B^{(i)} = 0{,}05\left[{}_tV^{(\mathrm{MWI})} + P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|}\right], \tag{4}$$

que l'on obtient en partant de la relation de récurrence (1), conduit au résultat qui est donné dans le tableau 2, colonne (3). Ce bénéfice d'intérêt, d'un demi pour-cent, augmente avec les années, toutefois moins rapidement que ne diminue le bénéfice de mortalité, si bien que le total des deux bénéfices décroît comme l'indique la colonne (4) du tableau 2.

La conclusion nous paraît claire. A partir du moment où les changements dans la mortalité nécessitent une modification radicale des bases techniques, il n'est pas de bonne politique, il n'est même pas juste de faire ressortir dans les comptes et de distribuer les forts bénéfices de mortalité qui découlent de l'application de la formule (1), d'autant moins, comme nous le verrons encore, que le changement dans la mortalité a pour conséquence un découvert dans les réserves mathématiques.

Nous choisissons encore d'autres couples de tables de mortalité représentant, l'une la mortalité présumée, l'autre, la mortalité effective. Admettons qu'on avait adopté au début comme table de mortalité de premier ordre la table norvégienne N 1939 [1]) représentée sur le graphique (1) en petits traits fins, et que la mortalité effective dès le commencement de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année soit celle de la table RAH.

Les courbes représentant ces tables se coupent entre 50 et 51 ans. Jusque-là, comme le montrent le tableau 2 et le graphique 2, le bénéfice de mortalité calculé d'après la formule (3) — la table N étant substituée à MWI — est positif. Ensuite, il est négatif. Si l'on se place à l'âge de 47 ans, on continue avec la formule (3), à comptabiliser et à distribuer des bénéfices pendant quatre ans, bien qu'en réalité l'assurance doive conduire pour les treize dernières années à une perte. En effet, la valeur actuelle des moyens dont on dispose encore,

$${}_{17}V^{(\mathrm{N})}_{30:\overline{30}|} + P^{(\mathrm{N})}_{30:\overline{30}|}\,\mathrm{a}^{(\mathrm{RAH})}_{47:\overline{13}|} = 0{,}6590\,,$$

est plus petite que la prime unique $A^{(\mathrm{RAH})}_{47:\overline{13}|} = 0{,}6596\,.$

Cet exemple fait bien ressortir ce qu'il y a d'artificiel dans certaines circonstances, à calculer le bénéfice de mortalité par la formule (3).

[1]) J. Burmann-Moe, Die neuen norwegischen Rechnungsgrundlagen für Rentenversicherung, R 1939, und für Lebensversicherung, N 1939. «Skandinavisk Aktuarietidskrift», Uppsala 1939, page 161.

On aboutirait encore à la même conclusion en choisissant pour la mortalité présumée la table anglaise A 1924—1929 [1]).

On arrive ainsi à des résultats qu'on a de la peine à accepter. Il faut en chercher la cause dans la définition qu'on donne du bénéfice de mortalité et spécialement dans le fait que la table choisie pour la mortalité présumée ne peut pas convenir.

Le bénéfice annuel de mortalité durant la $(t+1)^e$ année, défini par la formule (3), ne dépend pas seulement des événements qui se produisent durant cette année-là, mais encore des hypothèses qu'on fait en ce qui concerne la mortalité au cours des années qui suivront; la réserve mathématique ${}_tV^{(MWI)}$ intervient dans la formule et avec elle la mortalité présumée jusqu'à la fin de l'assurance. Si cette mortalité présumée n'est plus du tout conforme aux hypothèses qu'on est raisonnablement en droit de faire à la fin de la t^e année, il n'est pas sage de la conserver encore dans les calculs. On ne doit pas le perdre de vue lorsqu'on établit l'excédent bénéficiaire, sinon les comptes annuels sont faussés; on fait apparaître et on distribue aux dépens des exercices futurs des bénéfices qui ne se réaliseront peut-être jamais. La formule (3) pouvait être admise tant qu'on avait de bonnes raisons de croire que la table MWI, choisie comme base technique de premier ordre, représentait la mortalité future avec suffisamment d'exactitude. Dès qu'on reconnaît que ce n'est plus le cas, MWI n'est plus une mesure appropriée pour le calcul du bénéfice; la formule (3) doit être abandonnée.

Nous avons supposé que la mortalité effective, à partir de la $(t+1)^e$ année d'assurance, était donnée par la table RAH. Nous nous rapprocherons davantage de la réalité en admettant qu'à partir de la $(t+1)^e$ année, la table RAH peut être choisie à bon droit comme table de mortalité de premier ordre, c'est-à-dire qu'à vues humaines, elle doit représenter convenablement la mortalité future effective, tout en laissant une marge de sécurité raisonnable. Cela nous permettra aussi d'arriver à une conclusion positive pour notre premier sujet.

Nous divisons dès la fin de la t^e année le bénéfice de mortalité en deux composantes: la première, B_1, résulte du passage de la mortalité MWI à la mortalité RAH, comme si RAH donnait pour l'avenir la

[1]) Continuous investigation into the mortality of assured lives, vol. I, Cambridge 1934, page XXXVIII.

mortalité effective; la deuxième, B_2, est le bénéfice qu'on réalisera encore par rapport à la table RAH choisie comme base de premier ordre.

Examinons la première de ces composantes. A la fin de la t^e année, lorsqu'on abandonne la table MWI comme base de premier ordre pour adopter RAH, nous calculons le bénéfice positif ou négatif B_1 que réalise la compagnie du fait de ce changement. La compagnie complète la réserve MWI, pour avoir à disposition la réserve RAH, après quoi elle aura chaque année un bénéfice égal à la différence des primes MWI et RAH, valeur au début de l'année. La valeur actuelle des bénéfices de mortalité futurs par rapport à la table RAH, diminuée de la somme avancée par la société pour compléter la réserve mathématique peut s'écrire:

$$(5) \qquad B_1 = \left[P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|} - P^{(\mathrm{RAH})}_{30:\overline{30}|}\right] \mathrm{a}^{(\mathrm{RAH})}_{30+t:\overline{30-t}|} - \left[{}_tV^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV^{(\mathrm{MWI})}\right],$$

ou bien,

$$B_1 = {}_tV^{(\mathrm{MWI})} + P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|}\,\mathrm{a}^{(\mathrm{RAH})}_{30+t:\overline{30-t}|} - A^{(\mathrm{RAH})}_{30+t:\overline{30-t}|},$$

expression dont l'interprétation est aisée. Le bénéfice B_1 sera réparti d'une manière satisfaisante sur les années d'assurance qui restent, par exemple uniformément, suivant la formule,

$$(6) \qquad B_1 = (1+i)\left[P^{(\mathrm{MWI})}_{30:\overline{30}|} - P^{(\mathrm{RAH})}_{30:\overline{30}|} - \frac{{}_tV^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV^{(\mathrm{MWI})}}{\mathrm{a}^{(\mathrm{RAH})}_{30+t:\overline{30-t}|}}\right],$$

valeur à la fin de l'année. Dans notre exemple de l'assurance mixte $30:\overline{30}|$ de 10 000 francs, ce bénéfice annuel constant est égal à 41 fr. 32 si le passage à la nouvelle table de mortalité se fait après dix ans. On pourrait du reste aussi amortir entièrement la somme fournie à titre de renforcement de la réserve mathématique avant de répartir un bénéfice.

La deuxième composante du bénéfice, celle qu'on réalisera du fait que la mortalité effective est inférieure à la mortalité donnée par la table RAH pourra être calculée, chaque année, en partant de la formule de récurrence (1) écrite pour la table RAH. Elle est égale à

$$(7) \qquad B_2 = \left(q^{(\mathrm{RAH})}_{30+t} - q^{(\mathrm{eff.})}_{30+t}\right)\left(1 - {}_{t+1}V^{(\mathrm{RAH})}_{30}\right)$$

où $q^{(\mathrm{eff.})}_{30+t}$ désigne le taux effectif de mortalité.

La somme des valeurs actuelles, au moment t, des composantes B_1 et B_2 n'est pas rigoureusement égale au bénéfice total. L'introduction d'un élément intermédiaire, la table RAH, qui ne correspond à aucun fait réel, entraîne une erreur qui n'a cependant pas d'importance pratique. Elle provient de ce que dans la formule (5), la valeur $a_{30+t:\overline{30-t|}}$ de la rente est fondée sur la table RAH et non pas sur la mortalité future effective, qu'on ne connaît pas.

En admettant que la mortalité effective soit inférieure d'un quart, à la mortalité de la table RAH, et que le changement des bases techniques ait lieu après 10 ans, on obtient le tableau 3 qui suit:

Décomposition du bénéfice de mortalité de l'assurance mixte $30:\overline{30|}$ de 10 000 francs en ses deux composantes B_1 et B_2

Tableau 3

$t+1$ (1)	Bénéfice B_1 (Passage de MWI à RAH) (2)	Bénéfice B_2 (Passage de RAH à la mortalité effective 0,75 RAH) (3)	Total (4)
	Fr.	Fr.	Fr.
11	41,32	6,44	47,76
12	41,32	6,83	48,15
13	41,32	7,23	48,55
14	41,32	7,63	48,95
15	41,32	8,01	49,33
16	41,32	8,42	49,74
17	41,32	8,78	50,10
18	41,32	9,18	50,50
19	41,32	9,49	50,81
20	41,32	9,73	51,05
21	41,32	9,87	51,19
22	41,32	9,92	51,24
23	41,32	9,86	51,18
24	41,32	9,56	50,88
25	41,32	9,05	50,37
26	41,32	8,22	49,54
27	41,32	7,03	48,35
28	41,32	5,34	46,66
29	41,32	3,05	44,37
30	41,32	0	41,32

Le bénéfice annuel total, ainsi calculé, varie peu avec les années comme le montre la colonne (4); le recul si accentué que nous constations dans la colonne (2) du tableau 2 est évité.

Notre conclusion sera la suivante. Le bénéfice de mortalité durant la $(t+1)^{e}$ année ne peut être calculé par la formule

$$B = \left(q_{x+t}^{(\mathrm{pr.})} - q_{x+t}^{(\mathrm{eff.})}\right)\left(1 - {}_{t+1}V^{(\mathrm{pr.})}\right),$$

où l'indice (pr.) signifie qu'on calcule avec la mortalité présumée, que si la table de mortalité faisant fonction de table de premier ordre pour la mortalité présumée convient aux conditions dans lesquelles on se trouve. Si ce n'est pas le cas, si la mortalité effective s'écarte par trop de la mortalité présumée, on adoptera une nouvelle table de mortalité convenant comme table de premier ordre, puis on divisera le bénéfice de mortalité en deux composantes qu'on calculera comme il est dit ci-dessus.

Il resterait à examiner quelles qualités une table de mortalité doit avoir pour convenir comme table de premier ordre. C'est dans une grande mesure une question d'appréciation à laquelle nous ne nous arrêterons pas ici. Nous nous contenterons d'indiquer dans le tableau 4 le bénéfice de mortalité qu'on réaliserait dans trois circonstances différentes, où RAH pourrait, à notre avis, être adoptée à titre de table de mortalité de premier ordre, soit:

a) si l'on a de bonnes raisons d'admettre que la mortalité sera à l'avenir inférieure d'un quart à celle de la table RAH;

b) si l'on admet que la mortalité sera à l'avenir inférieure à celle de la table RAH, de 10 % à l'âge de 30 ans, de 11 % à 31 ans, de 12 % à 32 ans, et ainsi de suite, de 39 % à 59 ans et de 40 % à 60 ans; on escompterait donc une amélioration très grande dans les âges avancés, ce qui rapprocherait la mortalité suisse de celle d'autres pays;

c) si l'on admet enfin que la mortalité sera à l'avenir inférieure à celle de la table RAH, de 40 % à 30 ans, de 39 % à 31 ans, de 38 % à 32 ans, et ainsi de suite, de 11 % à 59 ans et de 10 % à 60 ans.

Bénéfice de mortalité sur une assurance mixte $30:\overline{30|}$ *de 10 000 francs*

Tableau 4

$t+1$ (1)	*a)* RAH ➤ 0,75 RAH (2)	*b)* RAH ➤ (0,90 – 0,60) RAH (3)	*c)* RAH ➤ (0,60 – 0,90) RAH (4)
	Fr.	Fr.	Fr.
1	5,49	2,16	8,82
2	5,57	2,40	8,64
3	5,63	2,72	8,54
4	5,68	2,93	8,43
5	5,72	3,22	8,22
6	5,74	3,48	8,09
7	5,83	3,72	7,95
8	5,99	4,10	7,96
9	6,20	4,45	7,94
10	6,29	4,84	7,83
11	6,44	5,11	7,69
12	6,83	5,69	7,90
13	7,23	6,34	8,05
14	7,63	7,04	8,21
15	8,01	7,70	8,38
16	8,42	8,42	8,42
17	8,78	9,17	8,45
18	9,18	9,91	8,45
19	9,49	10,61	8,32
20	9,73	11,26	8,15
21	9,87	11,85	7,93
22	9,92	12,31	7,56
23	9,86	12,60	7,08
24	9,56	12,64	6,52
25	9,05	12,31	5,78
26	8,22	11,53	4,94
27	7,03	10,12	3,94
28	5,34	7,90	2,78
29	3,05	4,64	1,46
30	0	0	0

Dans chaque cas, nous adopterons RAH comme table de mortalité de premier ordre. Si la mortalité se déroule effectivement comme nous l'avons admis, le bénéfice de mortalité sur l'assurance mixte $30:\overline{30}|$ de 10 000 francs, calculé d'après la formule

$$B = \left(q_{30+t}^{(\mathrm{RAH})} - q_{30+t}^{(\mathrm{eff.})}\right)\left(1 - {}_{t+1}V_{30}^{(\mathrm{RAH})}\right),$$

est donné dans le tableau 4 ainsi que sur la représentation graphique 2.

* * *

Une autre question importante qui se pose à la suite de la modification des bases techniques est celle des réserves mathématiques.

Si nous affectons les symboles relatifs aux anciennes bases techniques de l'indice I, et ceux qui concernent les nouvelles bases de l'indice II, la réserve mathématique de toute assurance peut se calculer d'après les formules suivantes:

$$(8) \qquad {}_tV_x^{\mathrm{I}} = A_{x+t}^{\mathrm{I}} - P_x^{\mathrm{I}}\,\mathrm{a}_{x+t}^{\mathrm{I}}.$$

$$(8') \qquad {}_tV_x^{\mathrm{II}} = A_{x+t}^{\mathrm{II}} - P_x^{\mathrm{II}}\,\mathrm{a}_{x+t}^{\mathrm{II}}.$$

Nous utilisons la méthode prospective qui est tout indiquée en cas de changement des bases techniques. La formule (8) donne la réserve mathématique calculée d'après les anciennes bases; la formule (8′), celle qui est déterminée d'après les nouvelles bases techniques.

Mais, au cours de l'assurance, un élément important, la prime, ne peut cependant pas être modifié; la prime commerciale est fixée par contrat. D'où la possibilité d'envisager encore une formule pour le calcul de la réserve mathématique,

$$(8'') \qquad {}_tV_x^{\mathrm{I,\,II}} = A_{x+t}^{\mathrm{II}} - P_x^{\mathrm{I}}\,\mathrm{a}_{x+t}^{\mathrm{II}}.$$

La valeur actuelle des prestations de l'assuré est déterminée d'après la prime pure qui correspond à la prime du contrat. L'indice supérieur I, II signifie que le calcul de la réserve est fondé sur les nouvelles bases en ce qui concerne A et a, et sur les anciennes en ce qui concerne la prime P. Nous n'étudions ici que le calcul de la réserve sur primes pures. La question qui se pose est celle de savoir s'il convient, lorsqu'on change de bases techniques, d'utiliser la formule (8′) qui fait intervenir la nouvelle prime, ou bien la formule (8″) qui est fondée sur l'ancienne prime.

Lorsque la prime suivant les nouvelles bases techniques est plus grande que celle qui résulte des anciennes bases,

Lorsque $$P_x^{\mathrm{II}} > P_x^{\mathrm{I}},$$

on est généralement d'accord qu'il convient d'utiliser la formule (8''). alors P^{I}
A et a sont fondés sur les nouvelles bases, et P sur les anciennes; sinon, on surestimerait le terme soustractif $P \,.\, \mathsf{a}$, c'est-à-dire la valeur actuelle des primes futures; la réserve portée au bilan serait trop faible. Cette situation s'est présentée pour les assurances de rentes différées et les capitaux différés. Le recul de la mortalité et celui du taux de l'intérêt ayant agi dans le même sens, les anciennes primes se sont révélées souvent beaucoup trop faibles. Les sociétés ont renforcé leurs réserves mathématiques en conséquence. *

Dans les assurances en cas de décès, en revanche, le recul de la mortalité a pour effet une diminution de la prime; celui du taux de l'intérêt, une augmentation. La nouvelle prime est souvent plus petite que l'ancienne

$$P_x^{\mathrm{II}} < P_x^{\mathrm{I}}.$$

A-t-on le droit d'utiliser la formule (8''), ou bien convient-il plutôt de calculer d'après la formule (8')? Les avis sont partagés. En faveur de la formule (8''), on invoque le fait que le contrat stipule le paiement de l'ancienne prime. La société a le droit, explique-t-on, d'estimer la valeur actuelle des primes de l'assuré sur la base de l'ancienne prime, comme elle avait le devoir de le faire lorsque P_x^{I} était plus petit que P_x^{II}. Examinons d'un peu plus près ce qui se passe lorsqu'on est amené à changer les bases techniques, dans l'hypothèse $P_x^{\mathrm{II}} < P_x^{\mathrm{I}}$. ?

Supposons par exemple que les anciennes bases techniques soient la table MWI 3½ % et les nouvelles, RAH 3½ %. Les réserves mathématiques d'une assurance mixte $30 \colon \overline{30}|$ de 10 000 francs conclue à l'âge de 30 ans pour une durée de 30 ans, calculées d'après les formules (8), (8') et (8''), sont données dans le tableau 5, colonnes (2), (3) et (4) et sur la représentation graphique 3.

* Logischerweise: Wenn P'' < P' gilt bei Formel 8' also P'' in den Einnahmen:
„La réserve portée au bilan serait trop grande"

Réserve mathématique d'une assurance mixte $30:\overline{30}|$ *de* ***10 000*** *francs*

Tableau 5

t (1)	MWI 3½% ($P = 264{,}10$) (2)	RAH 3½% ($P = 213{,}90$) (3)	$\left.\begin{matrix}A_{x+t}\\ a_{x+t}\end{matrix}\right\}$ RAH 3½% $P = 264{,}10$: MWI 3½% (4)	$\left.\begin{matrix}A_{x+t}\\ a_{x+t}\end{matrix}\right\}$ RAH 3½% ${}_{10}P^* = 224{,}20$ (form. 10) (5)	RAH 3% ($P = 230{,}30$) (6)	$\left.\begin{matrix}A_{x+t}\\ a_{x+t}\end{matrix}\right\}$ RAH 3% $P = 264{,}10$: MWI 3½% (7)	$\left.\begin{matrix}A_{x+t}\\ a_{x+t}\end{matrix}\right\}$ RAH 3% $P = 213{,}90$: RAH 3½% (8)
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
0	0	0	— 910		0	— 648	315
1	187	199	— 693		215	— 419	523
2	380	405	— 468		437	— 182	738
3	580	618	— 235		665	60	959
4	786	839	5		899	310	1186
5	1000	1067	254		1141	567	1420
6	1221	1302	511		1389	832	1661
7	1449	1546	776		1646	1105	1909
8	1685	1797	1050		1908	1383	2162
9	1929	2056	1334		2179	1672	2424
10	2181	2324	1626	2181	2456	1967	2693
11	2442	2601	1928	2463	2741	2272	2970
12	2711	2887	2239	2753	3034	2583	3253
13	2990	3180	2559	3052	3334	2903	3544
14	3279	3482	2889	3360	3642	3231	3843
15	3578	3793	3228	3677	3957	3565	4147
16	3888	4114	3578	4003	4280	3910	4460
17	4212	4444	3938	4339	4612	4263	4781
18	4548	4784	4310	4687	4952	4625	5111
19	4898	5135	4692	5044	5301	4997	5449
20	5262	5497	5088	5413	5660	5378	5796
21	5640	5871	5496	5794	6029	5771	6153
22	6035	6258	5918	6188	6409	6177	6522
23	6446	6659	6355	6596	6801	6593	6901
24	6876	7075	6809	7020	7205	7024	7293
25	7327	7508	7282	7462	7624	7470	7699
26	7802	7960	7774	7921	8059	7933	8120
27	8303	8431	8288	8402	8511	8414	8557
28	8834	8926	8828	8906	8983	8917	9015
29	9398	9448	9398	9438	9478	9445	9495
30	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000

Les trois courbes sont assez voisines. Cependant, pour un portefeuille d'assurances, les différences relatives de même que les différences absolues sont importantes.

Si, à partir de la $(t+1)^{e}$ année, la mortalité effective est celle de la table RAH et qu'on constitue dès ce moment-là la réserve suivant cette table — trait fort continu du graphique —, la prime RAH suffira exactement, avec les intérêts sur la réserve et sur cette prime, à payer les décès et à constituer la réserve RAH. On aura chaque année un bénéfice de mortalité égal à la différence entre la prime MWI et la prime RAH, plus les intérêts sur cette différence. Cependant, cela suppose qu'à la fin de la t^{e} année d'assurance la réserve mathématique MWI a été complétée au moyen des deniers de la société afin de disposer de la réserve RAH. L'assureur prête, en quelque sorte, le montant nécessaire, qui sera amorti comme nous l'avons déjà vu.

La courbe de la réserve MWI — trait fin continu du graphique — croît d'abord plus lentement que la courbe RAH — dans notre exemple jusqu'à $t=19$ —, ensuite plus rapidement; la différence dans la croissance s'accentue avec les années. Si donc l'on continuait après la t^{e} année à constituer la réserve mathématique suivant la table MWI, cela absorberait les premières années, tant que la croissance de la courbe MWI est inférieure à celle de la courbe RAH, une plus petite partie de la prime que la constitution de la réserve RAH; en revanche, plus tard, lorsque la courbe MWI croît plus rapidement que la courbe RAH, la constitution de la réserve MWI exigerait plus que celle de la réserve RAH, et le surplus augmenterait d'année en année. Les décès effectifs à indemniser sont les mêmes, que la réserve soit calculée d'après MWI ou d'après RAH. En alimentant la réserve d'après MWI, on fait ressortir dans les comptes et on distribue des bénéfices trop élevés durant les premières années, aux dépens des années ultérieures. Nous retrouvons par une voie un peu différente des résultats que nous avions obtenus dans la première partie de l'exposé. La réserve MWI ne peut pas convenir.

Enfin, si l'on constituait, après la t^{e} année, la réserve suivant la courbe en petits traits fins, c'est-à-dire en faisant usage de la table RAH pour les valeurs A_{x+t} et $\ddot{a}_{x+t}$ et en prenant pour P la prime MWI, cette dernière prime serait absorbée entièrement ainsi que les intérêts pour couvrir le risque et constituer la réserve. La société pourrait faire face à ses engagements à condition que la mortalité ne s'aggrave pas dans la suite, mais il n'y aurait plus à l'avenir de bénéfice de mortalité. Au moment où l'on passerait de la réserve MWI à la réserve suivant la courbe en question, ainsi que nous l'avons figuré sur le graphique 3 pour $t = 10$, on considérerait comme bénéfice immédiat le bénéfice de mortalité qui est contenu dans la prime du tarif. On escompterait les bénéfices de mortalité des exercices futurs; ils apparaîtraient dans les comptes avant qu'ils ne soient effectivement réalisés. On pourrait objecter que ces bénéfices compensent dans une certaine mesure les pertes que la société fait sur les assurances de rentes et les capitaux différés en calculant les réserves comme il est dit ci-dessus d'après la formule (8''), du moins si le passage à de nouvelles bases techniques se fait à la même époque. Cela ne nous paraît pas admissible non plus. Chaque catégorie d'assurance doit avoir des réserves suffisantes. La formule (8'') pour le calcul de la réserve mathématique doit ainsi être exclue lorsque $P_x^{\mathrm{II}} < P_x^{\mathrm{I}}$.

Nous pouvons encore présenter la question sous un angle un peu différent. Dans l'assurance sur la vie, on a l'habitude de conclure les contrats en stipulant une prime constante; on dit aussi une prime nivelée pour bien marquer qu'elle doit garder pendant toute la durée de l'assurance le même niveau. Cette prime se calcule d'après des bases techniques de premier ordre convenablement choisies. On désire surtout éviter les primes croissantes. Cette remarque étant faite, reprenons notre question.

A la fin de la t^{e} année d'assurance, nous adoptons de nouvelles bases techniques, les anciennes ne pouvant plus convenir. Il est tout naturel de calculer quelle prime annuelle constante ${}_tP^*$ permettrait, dans les nouvelles circonstances, de continuer l'assurance à partir de la $(t+1)^{\mathrm{e}}$ année. La mortalité effective est, par hypothèse, égale à la mortalité RAH. La société dispose de la réserve mathématique MWI. La prime pure cherchée ${}_tP^*$ découle de la relation

$$(9) \qquad {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})} + {}_tP^* \, \mathrm{a}_{x+t}^{(\mathrm{RAH})} = A_{x+t}^{(\mathrm{RAH})},$$

d'où nous tirons:

$$(10) \qquad {}_tP^* = P_x^{(\mathrm{RAH})} + \frac{{}_tV_x^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})}}{\mathrm{a}_{x+t}^{(\mathrm{RAH})}}.$$

Siehe 440/41, un élément important, la prime ne peut cependant pas être modifiée

Gemerkt. für P'' > P'

La prime ${}_tP^*$ est égale à la prime RAH augmentée de la quote d'amortissement annuel dont il a déjà été question, qui doit permettre le passage de la réserve mathématique MWI à la réserve RAH. Si nous voulons respecter le principe de la prime constante, nous pourrons considérer comme bénéfice et répartir la différence entre la prime MWI et la prime ${}_tP^*$, soit, avec les intérêts,

$$B_1 = (1+i)\left[P_x^{(\mathrm{MWI})} - P_x^{(\mathrm{RAH})} - \frac{{}_tV_x^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})}}{\mathrm{a}_{x+t}^{(\mathrm{RAH})}}\right]. \tag{11}$$

C'est le bénéfice que nous avons trouvé plus haut, sous formule (6), par un autre raisonnement. Dans l'exemple de l'assurance mixte $30:\overline{30}|$ de 10 000 francs, lorsque le passage des anciennes bases techniques aux nouvelles se fait après 10 ans, nous avions d'après le tableau 3, $B_1 = 41$ fr. 32. C'est moins que le bénéfice indiqué dans le tableau 2, colonne (2), qu'on réaliserait les premières années après le passage des anciennes bases aux nouvelles si l'on continuait à constituer la réserve d'après MWI. Le surplus peut servir à compléter peu à peu ladite réserve. Les moyens à disposition permettent d'alimenter une réserve plus forte que la réserve MWI. Dès lors, nous ne pouvons pas considérer la réserve calculée d'après la formule (8) comme suffisante, et encore moins celle qui résulte de la formule (8″).

Nous réservons donc une partie de la prime MWI pour la distribuer aux assurés, à titre de participation aux bénéfices. La société dispose du solde, soit de la prime constante ${}_tP^*$ définie par la relation (10) pour couvrir le risque et constituer la réserve mathématique. En conséquence, la réserve mathématique qu'on doit avoir τ années après le passage aux nouvelles bases techniques peut s'écrire:

$$_{t+\tau}V_x^* = A_{x+t+\tau}^{(\mathrm{RAH})} - {}_tP^*\,\mathrm{a}_{x+t+\tau}^{(\mathrm{RAH})}, \quad \tau \geqq 0, \tag{12}$$

d'où l'on déduit:

$$_{t+\tau}V_x^* = {}_{t+\tau}V_x^{(\mathrm{RAH})} - \frac{{}_tV_x^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})}}{\mathrm{a}_{x+t}^{(\mathrm{RAH})}}\,\mathrm{a}_{x+t+\tau}^{(\mathrm{RAH})}. \tag{12'}$$

Au moment $\tau = 0$, elle est égale à la réserve MWI, puis elle est comprise entre les réserves MWI et RAH. Elle est plus petite que la réserve RAH calculée d'après la formule (8′). La différence est égale au montant de la dette que la société devrait encore amortir après τ années, si au moment t du passage aux nouvelles bases techniques, elle avait emprunté la somme nécessaire pour compléter la réserve MWI de manière à disposer de la réserve RAH et qu'elle ait prélevé chaque année sur la prime la quantité fixe $\dfrac{{}_tV_x^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})}}{\mathrm{a}_{x+t}^{(\mathrm{RAH})}}$ pour l'amortissement. Si le passage aux nouvelles bases techniques a lieu après $t = 10$ années, on obtient pour la réserve mathématique ${}_{t+\tau}V_x^*$ de l'assurance mixte $30:\overline{30}|$ les valeurs qui figurent dans la colonne (5) du tableau 5, la prime ${}_{10}P^*$ étant de 224 fr. 20.

En résumé, si l'on constitue la réserve mathématique d'après la formule (8), on a pratiquement une assurance à primes croissantes. En utilisant la formule (8″), on considère déjà au moment du passage aux nouvelles bases techniques comme bénéfices effectivement réalisés les bénéfices qu'on escompte faire durant les années futures; on les comptabilise en une fois et l'assuré doit ensuite payer pendant toute la durée de l'assurance la prime élevée MWI. Ces formules doivent être rejetées. En revanche, la réserve peut être constituée sur la base de la table RAH, la prime utilisée pour le calcul étant ${}_tP^*$, définie par la formule (10). Dans la pratique, lorsqu'il s'agit d'un portefeuille d'assurances, le calcul de la réserve ${}_{t+\tau}V_x^*$ serait malaisé; il faudrait déterminer la prime ${}_tP^*$ pour chaque police. On utilisera de préférence la formule (8′) qui fait intervenir la prime P_x^{II} suivant les nouvelles bases. Nous n'avons pas examiné les différences qui en résultent pour des portefeuilles entiers, notre but étant plutôt de montrer que les formules (8) et (8″) ne conduisent pas à des résultats satisfaisants.

Les problèmes sur les réserves mathématiques sont souvent assez délicats à résoudre. Les variations de la réserve sous l'influence d'un changement dans la mortalité sont encore mal connues; il s'agit d'un problème avec un grand nombre de variables. Dans nos raisonnements, nous nous sommes appuyés à diverses reprises sur des résultats valables lorsqu'on passe de la table MWI à la table RAH; ils sont vrais sans doute pour beaucoup de tables, en particulier pour celles qu'on utilise en Suisse; cependant, ils ne se vérifient pas toujours. En examinant par exemple comment il convient de constituer la réserve mathématique lorsque la nouvelle prime P^{II} est plus petite que l'ancienne, P^{I}, nous avons fait implicitement quelques hypothèses.

La différence des réserves RAH et MWI, ${}_tV_x^{(\mathrm{RAH})} - {}_tV_x^{(\mathrm{MWI})}$, est toujours positive dans l'exemple considéré. Nous en avons déduit, entre autres, que la réserve MWI doit être complétée et que la prime ${}_tP^*$ est plus grande que la prime RAH. Cependant, de $P^{\mathrm{II}} < P^{\mathrm{I}}$, nous ne pouvons pas déduire que la réserve ${}_tV_x^{\mathrm{II}}$ est nécessairement plus grande que ${}_tV_x^{\mathrm{I}}$. Nous savons au contraire que ce n'est pas toujours le cas. Le théorème du changement de signe de Moser nous en fournit des exemples.

Nous pourrions limiter davantage le problème; nous pourrions par exemple supposer que la nouvelle table de mortalité II satisfait à la condition

$$A^{\mathrm{II}}_{x+t:\overline{n-t|}} < A^{\mathrm{I}}_{x+t:\overline{n-t|}},$$

pour toutes les valeurs des paramètres x, t et n. On en déduit certaines conclusions intéressantes. Cependant, il n'en résulte pas que la réserve mathématique ${}_tV_x^{\mathrm{II}}$ déterminée d'après les nouvelles bases techniques, formule (8'), est toujours plus grande que la réserve calculée suivant les anciennes bases, formule (8). Ce n'est du reste pas nécessairement le cas; il suffit de considérer l'exemple de l'assurance mixte $40:\overline{25|}$ pour le démontrer, en choisissant pour les anciennes bases techniques la table SM 1921—1930 $3\frac{1}{2}$ % et pour les nouvelles une table extrême donnant à tous les âges des taux de mortalité nuls, le taux d'intérêt étant également de $3\frac{1}{2}$ %. Pendant 10 ans, la réserve ${}_t\mathrm{V}^{\mathrm{II}}$ est plus petite que ${}_tV^{\mathrm{I}}$, puis elle est plus grande.

Les développements qui précèdent ne s'appliquent donc pas toujours; il y a lieu d'examiner le problème dans chaque cas. Cependant, les résultats obtenus ont de la valeur pour les tables qui sont utilisées le plus souvent en Suisse, et nous espérons que nos considérations pourront servir à d'autres recherches.

Dans notre exemple, seule la table de mortalité a été modifiée. Cela n'a pas d'importance pour le raisonnement. Quelques sociétés ont encore abaissé le taux technique d'intérêt ou s'apprêtent à le faire, celui de $3\frac{1}{2}$ % qui avait été choisi pour les anciens tarifs paraissant maintenant trop élevé. Pour fixer les idées, choisissons un nouveau taux technique de 3 %. Nous avons reporté dans le tableau 5, colonnes (6) et (7), et sur le graphique 3, la réserve RAH 3 % établie d'après la formule (8'), ainsi que la réserve calculée d'après (8''), la table RAH 3 % étant utilisée pour A_{x+t} et a_{x+t}, tandis que la prime est celle de la table MWI 3½ %. Cette dernière réserve est négative lorsque t est petit, mais elle augmente rapidement et surpasse à partir de $t = 16$ la réserve MWI 3½ %. Elle est, à tous les âges, inférieure à la réserve RAH 3 %, la prime RAH 3 % étant plus petite que la prime MWI 3½ %.

Enfin, nous avons encore indiqué dans le tableau 5, colonne (8), et sur le graphique 3, les valeurs de la réserve calculée d'après la formule (8″), A_{x+t} et a_{x+t} étant fondés sur la table RAH 3 % et la prime sur RAH 3½ %. Cela facilitera les considérations sur le passage à de nouvelles bases techniques lorsque le taux d'intérêt seul est modifié.

Notre conclusion sera qu'après la modification des bases techniques, il convient en général de calculer les réserves mathématiques en adoptant dans la formule

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x\, a_{x+t} $$

les nouvelles bases techniques pour déterminer les valeurs actuelles A_{x+t} et a_{x+t}, tandis qu'on choisira comme prime P_x la plus petite des primes P_x^{I} et P_x^{II} résultant respectivement des anciennes et des nouvelles bases.

Je tiens à remercier encore ici deux de mes collègues du Bureau fédéral des assurances de leur collaboration dans la présente étude: Mlle Leuba, qui a eu l'obligeance de faire les calculs, et M. Zaugg, qui a dessiné les graphiques.

* Bei Stabl. nach neuen Grundlagen

I $P'' > P'$, also Verwendung von P'

Stabl.-gew. = 0

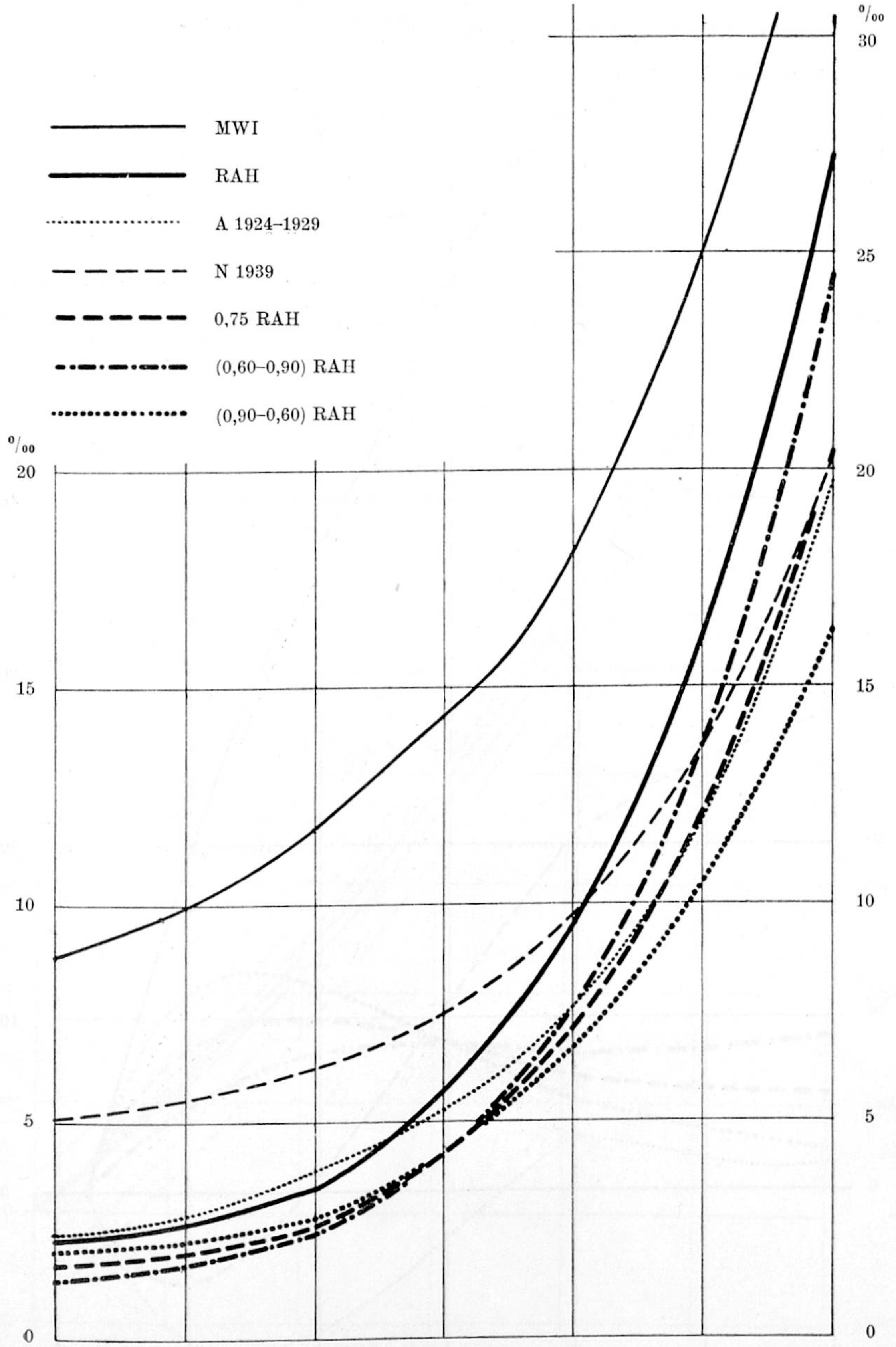
II $P'' < P'$, also Verw. von P''

Stabl. Gew. = positiv, besser gesagt

Zuschlags-Gewinn

Graphique 1

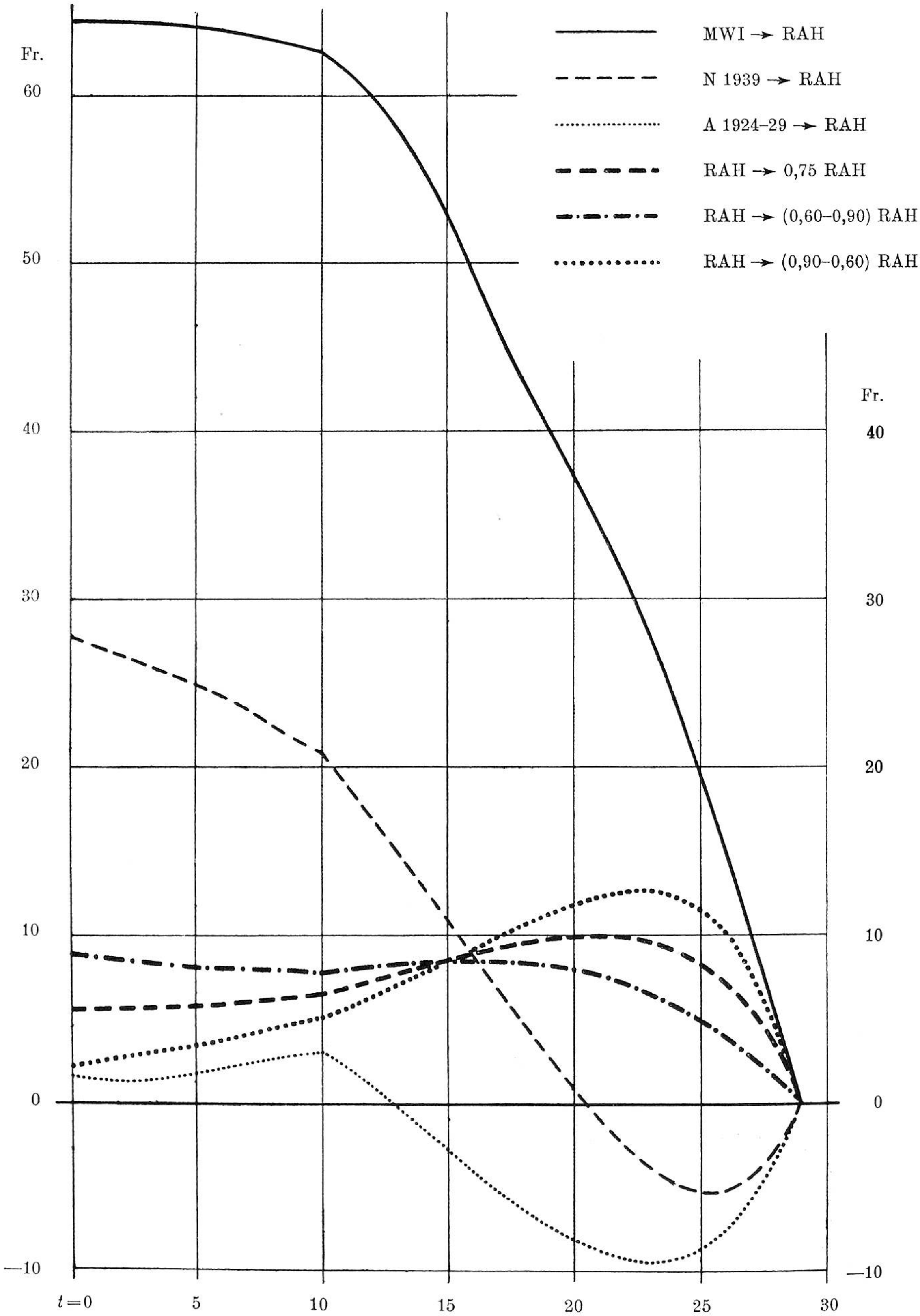
Taux de mortalité



Graphique 2

Bénéfice de mortalité

sur une assurance mixte $30:\overline{30|}$ de fr. 10 000



Graphique 3

Réserve mathématique

d'une assurance mixte $30:\overline{30}|$ de fr. 10 000