Ein Multiplikationssatz für das Deckungskapital : näherungsweise Berechnung der Versicherungswerte für verbundene Leben

Ein Multiplikationssatz für das Deckungskapital

Näherungsweise Berechnung der Versicherungswerte für verbundene Leben

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

1. Eine Näherungsformel für das Deckungskapital der gemischten Versicherung auf das «erste» Leben

Zur näherungsweisen Berechnung der Prämie und des Deckungskapitals der gemischten Versicherung auf das «erste» Leben aus den entsprechenden Werten für *ein* Leben sind verschiedene Verfahren entwickelt worden. Am bekanntesten ist die Formel von *G. J. Lidstone* [1], wonach

$$P_{xy:\overline{n}|} \sim P_{x:\overline{n}|} + P_{y:\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}; \tag{1}$$

$P_{\overline{n}|}$ bedeutet die Prämie der Sparversicherung. Aus (1) folgt unmittelbar wegen $P_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} - d$ usw.,

$$\frac{1}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{\mathrm{a}_{y:\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}. \tag{2}$$

Zur Berechnung des Deckungskapitals hat *M. Jacob* [2] die Formel angegeben

$${}_tV_{xy:\overline{n}|} \sim {}_tV_{x:\overline{n}|} + {}_tV_{y:\overline{n}|} - {}_tV_{\overline{n}|}, \tag{3}$$

woraus auch

$$\frac{\mathrm{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} \sim \frac{\mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\mathrm{a}_{y+t:\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{y:\overline{n}|}} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}. \tag{4}$$

Der Anwendungsbereich von (3) lässt sich ähnlich wie derjenige von (1) durch die Theorie von *Cantelli* abgrenzen [2].

Schliesslich untersuchte *S. J. Bjoraa* [3] die Näherung

$$\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|} \sim \frac{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|} \cdot \mathrm{a}_{y:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\,, \tag{5}$$

ohne indessen näher auszuführen, aus welchen Überlegungen sie sich herleitet. Neben (5) wird in der Praxis auch die Approximation gebraucht

$$\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|} \sim \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} + \mathrm{a}_{y:\overline{n}|} - \mathrm{a}_{\overline{n}|}\,. \tag{6}$$

Im folgenden wollen wir zeigen, wie bei Gültigkeit von (1) sehr rasch eine für die praktische Berechnung geeignete Näherungsformel für das Deckungskapital abgeleitet werden kann, ohne dabei die Theorie von *Cantelli* zu verwenden.

An einer ursprünglichen Gesamtheit von $l_{xy}(o)$ Verbindungen der Alter x, y sollen die Elemente x und y nach Massgabe der Sterbeintensitäten $\mu_x(k)$ und $\mu_y(k)$ ausscheiden. Beim «ersten» Todesfall wird das Kapital «1» fällig; die gleiche Leistung ist zahlbar, wenn die Verbindung nach n Jahren noch besteht. Das Deckungskapital erfüllt alsdann die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d}{dk}\,{}_kV_{xy:\overline{n}|} - [\delta + \mu_x(k) + \mu_y(k)]\,{}_kV_{xy:\overline{n}|} - P_{xy:\overline{n}|} + \mu_x(k) + \mu_y(k) = 0\,, \tag{7}$$

wo δ die Zinsintensität ist.

Am Beispiel der Differentialgleichung des Rentenbarwertes hat *H. Hadwiger* [4] dargelegt, wie durch Auflösung nach der Ausscheideintensität und die nachfolgende Darstellung der Ausscheideordnung durch den Rentenbarwert ein fruchtbarer Ausgangspunkt für die Lösung des Zinsfussproblems gefunden werden kann. Den gleichen Weg beschreiten wir in (7), wenn auch mit einem andern Ziel.

Es ist vorerst ${}_kV_{xy:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{a_{x+k,\,y+k:\overline{n-k}|}}{a_{xy:\overline{n}|}}$ und $P_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{1}{a_{xy:\overline{n}|}} - \delta$ [1]. Wird in (7) eingesetzt und sodann nach der totalen Ausscheideintensität aufgelöst, so folgt

$$\mu_x(k) + \mu_y(k) = \frac{d}{dk}\,ln\,(1 - {}_kV_{xy:\overline{n}|}) - \delta + \frac{1}{a_{x+k,\,y+k:\overline{n-k}|}}\,. \tag{8}$$

---

[1]) Wir schreiben $a_{xy:\overline{n}|}$ und nicht $\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$ für den Barwert der während n Jahren kontinuierlich zahlbaren Leibrente «1» usw.

Das Ergebnis (8) führen wir weiter in die Gleichung für die Abfallsordnung der Verbindungen ein; dabei ist, weil die Beziehung $P_{xy:\overline{n}} = \dfrac{1}{a_{xy:\overline{n}|}} - \delta$ verwendet worden ist, das Ausgangsdeckungskapital ${}_0V_{xy:\overline{n}|} = 0$ zu setzen; also wird

$$\frac{l_{xy}(t)}{l_{xy}(o)} = e^{-\int\limits_0^t [\mu_x(k)+\mu_y(k)]\,dk} = \frac{e^{\delta t}}{1 - {}_tV_{xy:\overline{n}|}}\, e^{-\int\limits_0^t \frac{dk}{a_{x+k,\,y+k:\overline{n-k}|}}}. \qquad (9)$$

In gleicher Weise hätte man aus der Differentialgleichung für das Deckungskapital der gemischten Versicherung auf das Leben x gefunden

$$\frac{l_x(t)}{l_x(o)} = \frac{e^{\delta t}}{1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}}\, e^{-\int\limits_0^t \frac{dk}{a_{x+k:\overline{n-k}|}}} \qquad (10)$$

und ähnlich für die Sparversicherung

$$1 = \frac{e^{\delta t}}{1 - {}_tV_{\overline{n}|}}\, e^{-\int\limits_0^t \frac{dk}{a_{\overline{n-k}|}}}. \qquad (11)$$

Wir nehmen weiter an, die Näherung (2) gelte auch bei kontinuierlicher Betrachtungsweise; alsdann folgt aus (9) mit (10) und (11), weil $\dfrac{l_{xy}(t)}{l_{xy}(o)} = \dfrac{l_x(t)}{l_x(o)}\,\dfrac{l_y(t)}{l_y(o)}$,

$$1 - {}_tV_{xy:\overline{n}|} \sim \frac{(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|})\,(1 - {}_tV_{y:\overline{n}|})}{1 - {}_tV_{\overline{n}|}} \qquad (12)$$

und bei Zurückführung auf die Rentenbarwerte

$${}_tV_{xy:\overline{n}|} \sim 1 - \frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{a_{x:\overline{n}|}}\,\frac{a_{y+t:\overline{n-t}|}}{a_{y:\overline{n}|}}\,\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n-t}|}}. \qquad (13)$$

Die Güte der Näherung (12) bei unmittelbarer Übertragung der Formel auf diskontinuierliche Werte ist für die Summe «1000» mit SM 1921/30, $2\frac{3}{4}\,\%$, aus den folgenden Beispielen ersichtlich:

Deckungskapital

x	y	n	t	${}_tV_{xy:\overline{n}\rvert}$ genau	Nach Formel (12)		Zum Vergleich nach Formel (3)	
					${}_tV_{x:\overline{n}\rvert}$	Fehler ‰	${}_tV_{xy:\overline{n}\rvert}$	Fehler ‰
30	30	35	5	102.73	102.85	1	102.88	1
			10	216.46	216.39	(—) 0	216.51	0
			15	338.55	337.87	(—) 2	338.03	(—) 2
			20	468.05	466.38	(—) 4	466.44	(—) 3
			25	608.82	606.38	(—) 4	606.40	(—) 4
			30	773.99	771.66	(—) 3	772.19	(—) 2
30	30	25	5	146.65	146.40	(—) 2	146.40	(—) 2
			10	313.73	313.20	(—) 2	313.22	(—) 2
			15	503.51	502.74	(—) 2	502.85	(—) 1
			20	724.35	723.57	(—) 1	723.90	(—) 1
30	38	35	5	112.36	112.85	4	112.95	5
			10	231.31	231.75	2	232.06	3
			15	354.38	353.72	(—) 2	354.13	(—) 1
			20	481.11	478.84	(—) 5	479.04	(—) 4
			25	615.57	611.75	(—) 6	611.73	(—) 6
			30	771.55	767.62	(—) 5	768.34	(—) 4
30	38	25	5	150.38	149.89	(—) 3	149.89	(—) 3
			10	316.84	315.77	(—) 3	315.78	(—) 3
			15	502.56	501.16	(—) 3	501.30	(—) 3
			20	719.53	718.27	(—) 2	718.79	(—) 1

2. Näherungsformeln für das Deckungskapital und die Prämie der gemischten Versicherung auf das «zweite» Leben

Überlegungen gleicher Art wie unter Ziffer 1 führen auf Näherungsformeln für das Deckungskapital und die Prämie der gemischten Versicherung auf das «zweite» Leben.

Wird angenommen, das Kapital «1» sei erst beim «zweiten» Todesfall fällig, so ist die Zahl der «Verbindungen» (in dem Sinne, dass mindestens noch die eine der beiden Personen lebt) im Zeitpunkte t gleich

$$l_{xy}(o)\left[\frac{l_{x+t}}{l_x}\left(1-\frac{l_{y+t}}{l_y}\right)+\frac{l_{y+t}}{l_y}\left(1-\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)+\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\right]=$$

$$=l_{xy}(o)\left[\frac{l_x(t)}{l_x(o)}+\frac{l_y(t)}{l_y(o)}-\frac{l_x(t)}{l_x(o)}\,\frac{l_y(t)}{l_y(o)}\right]=l_{\overline{xy}}(t)\,.$$

Von $l_{\overline{xy}}(t)$ «Verbindungen» werden im Zeitabschnitt t bis $t+dt$ durch Tod («letzter» Tod) aufgelöst

$$l_{xy}(o)\left[\frac{l_{x+t}}{l_x}\left(1-\frac{l_{y+t}}{l_y}\right)\mu_x(t)\,dt+\frac{l_{y+t}}{l_y}\left(1-\frac{l_{x+t}}{l_x}\right)\mu_y(t)\,dt+\frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}\,\mu_x(t)\,\mu_y(t)\,dt^2\right]$$

und wiederum in der Schreibweis von Ziffer 1 unter Vernachlässigung von kleinen Grössen zweiter Ordnung

$$l_{xy}(o)\left[\frac{l_x(t)}{l_x(o)}\mu_x(t)+\frac{l_y(t)}{l_y(o)}\mu_y(t)-\frac{l_x(t)}{l_x(o)}\,\frac{l_y(t)}{l_y(o)}\left(\mu_x(t)+\mu_y(t)\right)\right]dt;$$

dafür schreiben wir $l_{\overline{xy}}(t)\,\mu_{\overline{xy}}(t)\,dt$.

Sofern wir voraussetzen, es werde für eine «Verbindung» stets das gleiche Deckungskapital gestellt, unbekümmert darum, ob beide oder nur noch eine der beiden Personen leben [1]), erfüllt dieses Deckungskapital die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d}{dk}\,{}_kV_{\overline{xy}:\overline{n}|}-\left[\delta+\mu_{\overline{xy}}(k)\right]{}_kV_{\overline{xy}:\overline{n}|}-P_{\overline{xy}:\overline{n}|}+\mu_{\overline{xy}}(k)=0\,. \qquad (14)$$

Wird nach $\mu_{\overline{xy}}(k)$ aufgelöst und beachtet, dass

$${}_kV_{\overline{xy}:\overline{n}|}=1-\frac{a_{\overline{x+k,y+k}:\overline{n-k}|}}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}} \quad \text{und} \quad P_{\overline{xy}:\overline{n}|}=\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}-\delta\,,$$

so folgt

$$\mu_{\overline{xy}}(k)=\frac{d}{dk}\,ln\,(1-{}_kV_{\overline{xy}:\overline{n}|})-\delta+\frac{1}{a_{\overline{x+k,y+k}:\overline{n-k}|}} \qquad (15)$$

---

[1]) Diese Annahme ist plausibel, weil das Ableben der «ersten» Person keine Leistung auslöst und die Prämienzahlung nicht beeinflusst, die Versicherungsnehmer daher in der Regel erst den «zweiten» Tod anzumelden haben.

und

$$\frac{l_{\overline{xy}}(t)}{l_{\overline{xy}}(o)} = e^{-\int\limits_0^t \mu_{\overline{xy}}(k)\,dk} = \frac{e^{\delta t}}{1 - {}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|}} e^{-\int\limits_0^t \frac{dk}{a_{\overline{x+k,y+k}:\overline{n-k}|}}} . \tag{16}$$

Nun ist $a_{\overline{x+k,y+k}:\overline{n-k}|} = a_{x+k:\overline{n-k}|} + a_{y+k:\overline{n-k}|} - a_{x+k,y+k:\overline{n-k}|}$; ferner darf man für nicht zu grosse Altersdifferenzen $x - y$ und nicht zu lange Dauern n setzen,

$$\frac{1}{a_{\overline{x+k,y+k}:\overline{n-k}|}} \sim \frac{1}{a_{x+k:\overline{n-k}|}} + \frac{1}{a_{y+k:\overline{n-k}|}} - \frac{1}{a_{x+k,y+k:\overline{n-k}|}} . \tag{17}$$

Aus (16) ist dann unter Beachtung von (17), (9) und (10)

$$\frac{l_{\overline{xy}}(t)}{l_{\overline{xy}}(o)} \sim \frac{(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|})\,(1 - {}_tV_{y:\overline{n}|})}{(1 - {}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|})\,(1 - {}_tV_{xy:\overline{n}|})} \tag{18}$$

und in weiterer Näherung

$$1 - {}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} \sim \frac{(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|})\,(1 - {}_tV_{y:\overline{n}|})}{1 - {}_tV_{xy:\overline{n}|}} \tag{19}$$

und schliesslich bei Zurückführung auf die Rentenbarwerte

$${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} \sim 1 - \frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{a_{x:\overline{n}|}} \, \frac{a_{y+t:\overline{n-t}|}}{a_{y:\overline{n}|}} \, \frac{a_{xy:\overline{n}|}}{a_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}} . \tag{20}$$

Führt man in (19) noch (12) ein, so erhalten wir

$${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} \sim {}_tV_{\overline{n}|} ; \tag{21}$$

der Einfluss der Sterblichkeit ist in der Näherung ausgeschaltet, es bleibt nur die Einwirkung des Zinses.

Die Approximation aus (20)

$$a_{\overline{xy}:\overline{n}|} \sim \frac{a_{x:\overline{n}|} \cdot a_{y:\overline{n}|}}{a_{xy:\overline{n}|}} \tag{22}$$

kann sodann in eine gute Näherungsformel für die Prämie $P_{\overline{xy}:\overline{n}|}$ abgewandelt werden. In

$$\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}+\delta^2\sim\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}+\delta^2>0 \tag{23}$$

fügen wir

$$-\delta\left[\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}\right]\sim-\delta\left[\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}\right] \tag{24}$$

hinzu. Wenn[1]) $\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}>\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}$, ist $\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}>$ $>\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}$; bei der Addition von (23) und (24) erfolgt also ein Ausgleich in dem Sinne, dass vom grössern Glied ein grösserer Abzug vorgenommen wird. Aus (23) und (24) folgt dann

$$\left[\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}-\delta\right]\left[\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}-\delta\right]\sim\left[\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}-\delta\right]\left[\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}-\delta\right],$$

oder

$$P_{\overline{xy}:\overline{n}|}\sim\frac{P_{x:\overline{n}|}\cdot P_{y:\overline{n}|}}{P_{xy:\overline{n}|}} \tag{25}$$

und mit (1)

$$P_{\overline{xy}:\overline{n}|}\sim\frac{P_{x:\overline{n}|}\cdot P_{y:\overline{n}|}}{P_{x:\overline{n}|}+P_{y:\overline{n}|}-P_{\overline{n}|}}. \tag{26}$$

Die Güte der Näherungen (19), (25) und (26) bei unmittelbarer Übertragung der Formeln auf diskontinuierliche Werte geht aus den folgenden, für die Summe «1000» mit SM 1921/30, $2\frac{3}{4}$ %, berechneten Zahlen hervor:

---

[1]) Es ist $\frac{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}+a_{xy:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}\cdot a_{y:\overline{n}|}}=\frac{a_{x:\overline{n}|}+a_{y:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}\cdot a_{y:\overline{n}|}}$.

Sofern $\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}>\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}\,\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}$,

wird $\frac{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}+a_{xy:\overline{n}|}}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}\cdot a_{xy:\overline{n}|}}>\frac{a_{x:\overline{n}|}+a_{y:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}\cdot a_{y:\overline{n}|}}$,

also $\frac{1}{a_{\overline{xy}:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{xy:\overline{n}|}}>\frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}+\frac{1}{a_{y:\overline{n}|}}$.

a) Deckungskapital

x	y	n	t	${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}\|}$ genau	Nach Formel (19) *)		Nach Formel (21)	
					${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}\|}$	Fehler $^0/_{00}$	${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}\|}$	Fehler $^0/_{00}$
30	30	35	5	92.76	91.80	(—) 10	91.68	(—) 12
			10	198.40	196.60	(—) 9	196.67	(—) 9
			15	318.30	316.25	(—) 6	316.95	(—) 4
			20	454.33	452.96	(—) 3	454.68	1
			25	609.90	610.00	0	612.42	4
			30	789.84	790.98	1	793.11	4
30	30	25	5	149.31	149.47	1	149.72	3
			10	320.28	320.65	1	321.18	3
			15	516.13	516.78	1	517.53	3
			20	741.03	741.73	1	742.46	2
30	38	35	5	94.06	92.18	(—) 20	91.68	(—) 25
			10	200.49	197.13	(—) 17	196.67	(—) 19
			15	320.15	316.25	(—) 12	316.95	(—) 10
			20	455.21	452.30	(—) 6	454.68	(—) 1
			25	609.14	608.57	(—) 1	612.42	5
			30	788.09	789.55	2	793.11	6
30	38	25	5	149.24	149.23	(—) 0	149.72	3
			10	319.84	320.12	1	321.18	4
			15	515.32	516.18	2	517.53	4
			20	740.25	741.30	1	742.46	3

*) ${}_tV_{xy:\overline{n}\|}$ genau berechnet

b) Prämien

x	y	n	$P_{\overline{xy}:\overline{n}\rceil}$ genau	Nach Formel (25)		Nach Formel (26)	
				$P_{\overline{xy}:\overline{n}\rceil}$	Fehler $^0/_{00}$	$P_{\overline{xy}:\overline{n}\rceil}$	Fehler $^0/_{00}$
20	20	45	11.93	12.11	15	12.06	11
30	30	35	17.81	17.88	4	17.83	1
40	40	25	28.84	28.70	(—) 5	28.76	(—) 3
50	50	15	54.93	54.42	(—) 9	54.70	(—) 4
20	20	35	17.22	17.27	3	17.30	5
30	30	25	27.93	27.90	(—) 1	27.95	1
40	40	15	53.70	53.57	(—) 2	53.65	(—) 1
30	38	35	18.39	18.45	3	18.33	(—) 3
40	48	25	29.72	29.46	(—) 9	29.50	(—) 7
50	58	15	56.12	55.28	(—) 15	55.68	(—) 8
30	38	25	28.17	28.11	(—) 2	28.16	(—) 0
40	48	15	54.00	53.77	(—) 4	53.91	(—) 2

Literaturnachweis

[1] *G. J. Lidstone:* On a method of approximately calculating net premiums for endowment assurances of two joint lives. Journal of the Institute of Actuaries *33* 1898, S. 354—356.

[2] *M. Jacob:* Approximationsmethoden in der Versicherungsmathematik. Ungarische Rundschau für Versicherungswissenschaft *7* 1937, S. 1—19.

— Sul calcolo dei premi su due teste. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari *2* 1931, S. 185—198.

[3] *S. J. Bjoraa:* Eine angenäherte Methode zur Berechnung von Verbindungsrenten. Skandinavisk Aktuarietidskrift *12* 1929, S. 182—190.

[4] *H. Hadwiger:* Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker *45* 1945, S. 31—35.

[5] *G. Krausmüller:* Versicherung verbundener Leben. Ihre wirtschaftliche Bedeutung und rechnerische Gestaltung. Diss. Frankfurt am Main, 1932, S. 1—87.