

Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand

Autor(en): **Ammeter, Hans**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **45 (1945)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555279>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand

Von *Hans Ammeter*, Zürich

Für statistische Untersuchungen über die Sterblichkeit und für die immer noch umstrittene Frage, ob und wieweit die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Grundlage für die Lebensversicherungsmathematik betrachtet werden kann, ist es von ausschlaggebender Bedeutung, welchen Gesetzen die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen folgen. Wie *Jecklin* in seiner Arbeit «Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen» hervorhebt, ist es für die weitere Abklärung dieser Frage vor allem notwendig, dass durch statistische Untersuchungen die innere Berechtigung der gebräuchlichen Hypothesen überprüft wird. Richtungweisend für derartige Prüfungen ist die Arbeit von *Lange* «Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebensversicherung und in der Feuerversicherung». — Lange gelangt im ersten Teil seiner Arbeit zum Ergebnis, dass die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen von einzelnen Altersklassen der preussischen Bevölkerung Gaußschen Verteilungen folgen, aber übernormale Dispersion aufweisen. — Erfahrungsgemäss sind Beobachtungen über die Volkssterblichkeit nicht ohne weiteres auch für Versicherungsbestände schlüssig. Für die praktischen Anwendungen im Versicherungswesen dürften daher aus Versicherungsbeständen gewonnene Untersuchungsergebnisse über Sterblichkeitsschwankungen eine erwünschte Ergänzung der Langeschen Untersuchung bilden. Dank der in entgegenkommender Weise erteilten Erlaubnis der Rentenanstalt können die nachfolgend dargestellten Untersuchungen an einem Material durchgeführt werden, das wesentliche Teile der Beobachtungen über die Sterblichkeit im Bestande der Einzelkapitalversicherungen (Hauptzweig und Volksversicherung) der

Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt seit ihrer Gründung umfasst.

In erster Linie ist in der vorliegenden Arbeit die Frage geprüft worden, ob die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in den einzelnen Altersklassen normale Dispersion aufweisen. Diese Untersuchungen haben gezeigt, dass eine nichtnormale Dispersion vorliegt, die nicht durchwegs als zufällig, sondern zum Teil als wesentlich betrachtet werden muss. Es wurde daher noch versucht, die beobachteten Sterblichkeitsschwankungen durch erweiterte Urnenschemata zu erklären, um einen besseren Anschluss der Theorie an die Beobachtungen zu erreichen. Ausser diesen Untersuchungen über die Sterblichkeitsschwankungen in einzelnen Altersklassen wird noch die in der Arbeit von Lange nicht behandelte Frage untersucht, ob die oft angenommene Unabhängigkeit im Sterblichkeitsablauf von verschiedenen Altersklassen untereinander tatsächlich besteht, oder ob eine gewisse Abhängigkeit angenommen werden muss.

I. Das Beobachtungsmaterial

Den im folgenden dargestellten Untersuchungen liegen die Beobachtungen über die Personensterblichkeit in den Beständen der Einzelkapitalversicherungen des Hauptzweiges während der Jahre 1869—1938 und der Volksversicherungen während der Jahre 1908 bis 1938 zugrunde. Das aus der Zeit vor den Jahren 1869 und 1908 stammende Beobachtungsmaterial weist einen zu bescheidenen Umfang auf, als dass es sich gelohnt hätte, dasselbe in die Untersuchung einzubeziehen. Das aus der jüngsten Vergangenheit stammende Material kann leider nicht mitberücksichtigt werden, weil seit dem Jahre 1939 an Stelle der Personensterblichkeit die anderen Gesetzen folgende Policensterblichkeit laufend beobachtet wird.

In beiden Versicherungsbeständen dominiert die gemischte Versicherung. Dieser Umstand bringt es mit sich, dass nur die mittleren Altersstufen ($35 \leq x \leq 64$) eine für die vorliegende Untersuchung genügend starke Besetzung aufweisen. Das ausserhalb der angeführten Altersgrenzen liegende Material kann daher nur für einen kürzeren Zeitraum oder überhaupt nicht mitberücksichtigt werden. Dagegen können die höheren Altersstufen ($65 \leq x \leq 79$) im Bestand des Hauptzweiges immerhin für verhältnismässig lange Zeiträume

in das Untersuchungsmaterial einbezogen werden, weil die lebenslängliche Versicherung in den ersten Jahrzehnten der Geschäftstätigkeit der Anstalt häufiger zum Abschluss gelangte als später. Endlich ist noch zu erwähnen, dass das Grippejahr 1918 für die Altersklassen unter 50 Jahren ausgeschlossen werden muss, weil keine Gewähr dafür besteht, dass die Häufigkeit einer Übersterblichkeit, wie sie in diesem Jahr zu beobachten war, an Hand einer nur wenige Jahrzehnte umfassenden Beobachtungsreihe zuverlässig abgeschätzt werden kann.

Das Beobachtungsmaterial liegt nicht altersweise, sondern in Fünferaltersgruppen zusammengefasst vor. Durch diese Konzentration des Materials werden einerseits gewisse Unregelmässigkeiten zum vornherein ausgeglichen, anderseits ist zu befürchten, dass — bedingt durch Schwankungen in der Altersstruktur innerhalb einer Altersgruppe — eventuell eine leicht übernormale Dispersion entsteht, die jedoch nur bei den höchsten Altersstufen nennenswert ins Gewicht fallen dürfte.

Die nachfolgende Tabelle I gibt eine Übersicht über das gesamte verwendete Beobachtungsmaterial.

Der Umfang des Beobachtungsmaterials erscheint recht ansehnlich, insbesondere, wenn man berücksichtigt, dass es sich nur auf wenige Altersklassen verteilt. Trotzdem reicht es zur Abklärung mancher Fragen nicht aus.

II. Die säkuläre Sterblichkeitsveränderung

Aus den in Tabelle I angegebenen Wahrscheinlichkeiten ist ersichtlich, dass sich auch im vorliegenden Material die Sterblichkeit im Laufe der Jahre stark verbessert hat. Es darf heute als erwiesen angenommen werden, dass diese Sterblichkeitsverbesserung keineswegs nur zufällig ist, nachdem die in jüngster Zeit bekannt gewordenen Messungen diese Entwicklung ganz allgemein bestätigen. Wird die Sterblichkeit für einen längeren Zeitraum dennoch als fest angenommen, so ist zufolge der wesentlichen Veränderungen des Risikos mit übernormal verteilten Schwankungen zu rechnen. Diese übernormale Dispersion würde um so mehr in Erscheinung treten, je grösser der dem Beobachtungsmaterial zugrunde liegende Zeitraum ist. Vom Standpunkt der Risikotheorie und der mathematischen Statistik aus betrachtet

Tabelle I

| Altersgruppe | Anzahl der Beobachtungsjahre | Unter einjährigem Sterberisiko gestandene Personen | | | Anzahl der Sterbefälle | | | Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit in ‰ | |
|---------------------------|------------------------------|--|-------------|-------------|------------------------|-----------|-----------|--|-----------|
| | | 1869/1918 | 1919/1938 | 1869/1938 | 1869/1918 | 1919/1938 | 1869/1938 | 1869/1918 | 1919/1938 |
| <i>Hauptzweig:</i> | | | | | | | | | |
| 25-29. | 20 | — | 233 320,5 | 233 320,5 | — | 544 | 544 | — | 2,33 |
| 30-34. | 20 | — | 298 591,5 | 298 591,5 | — | 754 | 754 | — | 2,53 |
| 35-39. | 69 | 131 318,0 | 311 996,0 | 443 314,0 | 876 | 1 006 | 1 882 | 6,67 | 3,22 |
| 40-44. | 69 | 131 023,5 | 282 791,0 | 413 814,5 | 1 218 | 1 324 | 2 542 | 9,30 | 4,68 |
| 45-49. | 69 | 115 938,5 | 230 942,5 | 346 881,0 | 1 530 | 1 638 | 3 168 | 13,20 | 7,09 |
| 50-54. | 70 | 94 685,5 | 164 511,5 | 259 197,0 | 1 782 | 1 889 | 3 671 | 18,82 | 11,48 |
| 55-59. | 70 | 67 100,0 | 95 374,5 | 162 474,5 | 1 888 | 1 755 | 3 643 | 28,14 | 18,40 |
| 60-64. | 70 | 43 663,0 | 39 440,5 | 83 103,5 | 1 836 | 1 073 | 2 909 | 42,05 | 27,21 |
| 65-69. | 61 | 26 758,0 | 13 620,5 | 40 378,5 | 1 640 | 664 | 2 304 | 61,29 | 48,75 |
| 70-74. | 40 | 10 994,5 | 7 137,0 | 18 131,5 | 966 | 503 | 1 469 | 87,86 | 70,48 |
| 75-79. | 51 | 7 443,5 | 4 622,5 | 12 066,0 | 904 | 545 | 1 449 | 121,45 | 117,90 |
| Total. | 609 | 628 924,5 | 1 682 348,0 | 2 311 272,5 | 12 640 | 11 695 | 24 335 | | |
| <i>Volksversicherung:</i> | | | | | | | | | |
| 35-39. | 30 | 39 205,0 | 230 285,5 | 269 490,5 | 228 | 843 | 1 071 | 5,82 | 3,66 |
| 40-44. | 30 | 32 690,5 | 187 538,0 | 220 228,5 | 234 | 864 | 1 098 | 7,16 | 4,61 |
| 45-49. | 30 | 23 400,0 | 144 955,0 | 168 355,0 | 236 | 1 027 | 1 263 | 10,09 | 7,08 |
| 50-54. | 31 | 16 558,5 | 100 227,5 | 116 786,0 | 245 | 1 095 | 1 340 | 14,80 | 10,93 |
| 55-59. | 31 | 8 410,5 | 56 926,0 | 65 336,5 | 172 | 974 | 1 146 | 20,45 | 17,11 |
| 60-64. | 26 | 2 221,5 | 21 297,0 | 23 518,5 | 76 | 590 | 666 | 34,21 | 27,70 |
| Total. | 178 | 122 486,0 | 741 229,0 | 863 715,0 | 1 191 | 5 393 | 6 584 | | |
| Gesamttotal. | 787 | 751 410,5 | 2 423 577,0 | 3 174 987,5 | 13 831 | 17 088 | 30 919 | | |

bietet jedoch die durch die säkuläre Sterblichkeitsveränderung bewirkte übernormale Dispersion weiter kein Interesse. Den vorliegenden Untersuchungen wird daher nicht eine gleichbleibende, sondern eine mit der Zeit sich verändernde Sterblichkeit zugrunde gelegt. Zu diesem Zwecke muss für jede Altersgruppe ein die säkuläre Sterblichkeitsveränderung zum Ausdruck bringender Trend eingeführt werden. Gegenstand der weiteren Untersuchungen sind die Abweichungen der beobachteten Sterblichkeit von diesem Trend.

Um die säkuläre Sterblichkeitsveränderung rechnerisch zu erfassen, erweist es sich zunächst als notwendig, für die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit $q_{x,t}$ der x Jahre alten Versicherten im Kalenderjahr t einen geeigneten analytischen Ausdruck zu wählen. Die einfache lineare Beziehung

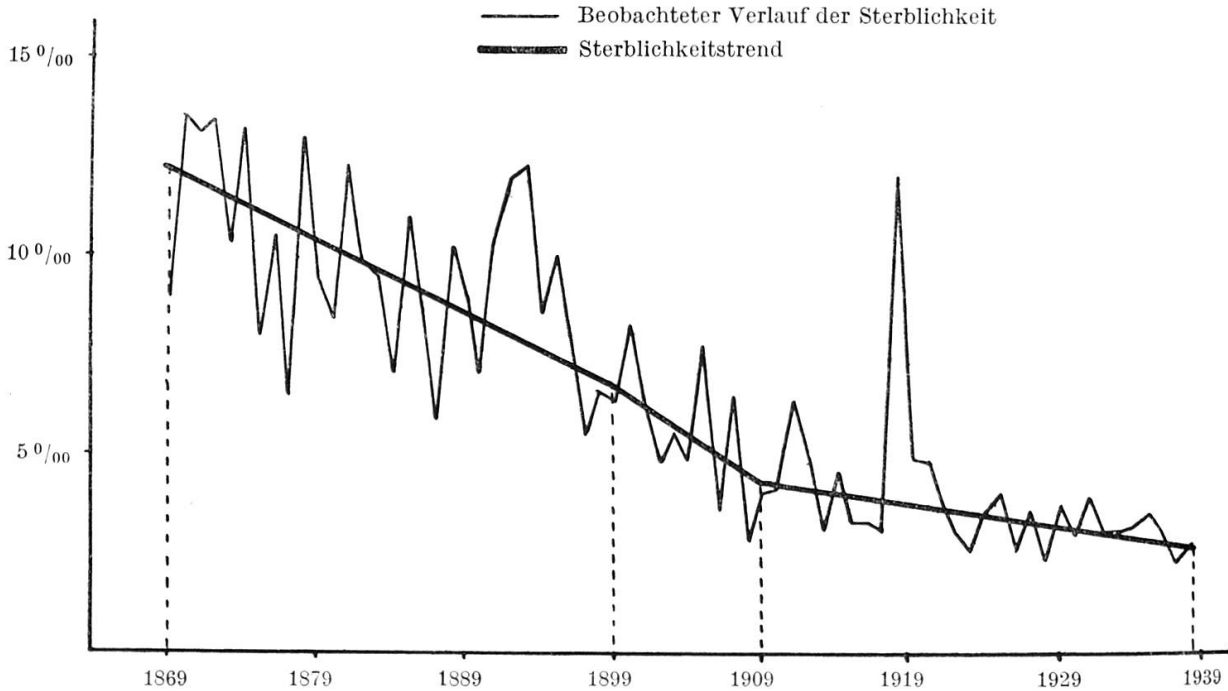
$$q_{x,t} = a_x - b_x t \quad (1)$$

hat sich für die Darstellung des Sterblichkeitstrends bewährt. Eine nähere Prüfung zeigt allerdings, dass die im vorliegenden Fall beobachtete Sterblichkeitsabnahme nicht durchwegs als gleichbleibend angenommen werden darf. Um trotzdem die rechnerisch einfache Formel (1) anwenden zu können, ist es notwendig, die Trendfunktionen durch verschiedene aufeinanderfolgende Teilstücke darzustellen. Die Konstanten a_x und b_x in (1) werden dabei zunächst für zwei geeignet gewählte Zeitabschnitte für den Anfang und das Ende der Beobachtungsreihe bestimmt; das fehlende Mittelstück der Trendfunktion ist dann noch passend zu ergänzen. Durch dieses Vorgehen kann die Rechnung durchwegs einfach gestaltet und trotzdem ein befriedigender Anschluss des Trends an die Beobachtungen erreicht werden. Die nachstehende graphische Darstellung 1 veranschaulicht den Verlauf der Trendfunktion an einem Beispiel für die *Altersgruppe mit* $35 \leq x \leq 39$ (Hauptzweig).

Die Konstanten a_x und b_x in (1) erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate aus der Bedingung

$$\sum_t [T_{x,t} - R_{x,t}(a_x - b_x t)]^2 = \text{Minimum}, \quad (2)$$

wobei $T_{x,t}$ die beobachtete Zahl der Gestorbenen und $R_{x,t}$ die Zahl der unter einjährigem Sterberisiko gestandenen Versicherten im



Kalenderjahr t und im Altersjahr x bedeuten. Der Bedingung (2) wird der Vorzug gegeben vor der etwas einfacheren

$$\sum_t [q_{x,t} - a_x + b_x t]^2 = \text{Minimum}, \quad (2a)$$

weil zufolge des starken Anwachsens der beobachteten Versicherungsbestände im Verlauf der Jahre das in den einzelnen Jahren stark verschiedene Gewicht der Beobachtungen berücksichtigt werden muss. Für die Konstanten a_x und b_x ergibt sich

$$a_x = \frac{\sum T_{x,t} R_{x,t} t \sum R_{x,t}^2 t - \sum T_{x,t} R_{x,t} \sum R_{x,t}^2 t^2}{(\sum R_{x,t}^2 t)^2 - \sum R_{x,t}^2 \sum R_{x,t}^2 t^2}, \quad (3a)$$

$$b_x = \frac{\sum T_{x,t} R_{x,t} t \sum R_{x,t}^2 - \sum T_{x,t} R_{x,t} \sum R_{x,t}^2 t}{(\sum R_{x,t}^2 t)^2 - \sum R_{x,t}^2 \sum R_{x,t}^2 t^2}. \quad (3b)$$

Die in diesen Formeln auftretenden Summen werden jeweilen über sämtliche Kalenderjahre t des in Frage stehenden Zeitabschnittes gebildet. Ein Vergleich der auf Grund der gewählten Trendfunktionen berechneten mit der beobachteten Anzahl der Sterbefälle zeigt befriedigende Übereinstimmung.

Über den Verlauf des Sterblichkeitstrends in den verschiedenen Altersklassen orientiert die nachstehende Tabelle.

Tabelle II

| Alters- gruppe | Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit für das Kalenderjahr | | | | | | | |
|---|--|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1869 | 1878 | 1888 | 1898 | 1908 | 1918 | 1928 | 1938 |
| | in ‰ | | | | | | | |
| <i>Einzelkapitalversicherungen des Hauptzweiges</i> | | | | | | | | |
| 25–29 | — | — | — | — | — | — | 2,38 | 1,89 |
| 30–34 | — | — | — | — | — | — | 2,61 | 2,28 |
| 35–39 | 12,27 | 10,62 | 8,79 | 6,96 | 4,52 | 3,85 | 3,37 | 2,89 |
| 40–44 | 15,57 | 13,77 | 11,77 | 9,66 | 7,43 | 5,63 | 4,83 | 4,03 |
| 45–49 | 17,53 | 16,39 | 15,12 | 13,36 | 10,87 | 8,89 | 7,65 | 6,41 |
| 50–54 | 25,71 | 24,00 | 22,10 | 20,20 | 15,69 | 13,70 | 12,02 | 10,34 |
| 55–59 | 22,77 | 27,31 | 32,35 | 33,87 | 26,38 | 20,83 | 18,84 | 16,85 |
| 60–64 | 46,19 | 46,19 | 46,19 | 42,26 | 37,88 | 33,52 | 29,15 | 24,78 |
| 65–69 | — | 66,33 | 64,33 | 62,33 | 60,33 | 56,08 | 49,58 | 43,09 |
| 70–74 | — | — | — | — | 87,79 | 79,56 | 71,32 | 63,08 |
| 75–79 | — | — | 124,66 | 123,45 | 122,23 | 121,02 | 116,92 | 112,83 |
| <i>Volksversicherungen</i> | | | | | | | | |
| 35–39 | — | — | — | — | 5,72 | 4,85 | 3,98 | 3,11 |
| 40–44 | — | — | — | — | 8,01 | 6,48 | 4,95 | 3,41 |
| 45–49 | — | — | — | — | 9,79 | 8,61 | 7,44 | 6,26 |
| 50–54 | — | — | — | — | 15,30 | 13,37 | 11,43 | 9,50 |
| 55–59 | — | — | — | — | 23,03 | 20,41 | 17,79 | 15,16 |
| 60–64 | — | — | — | — | — | 36,31 | 29,52 | 22,73 |

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass — entgegen der Erwartung — im allgemeinen die Sterblichkeit bei den ohne ärztliche Untersuchung abgeschlossenen Volksversicherungen etwas günstiger verläuft als in der gleichen Altersklasse bei den mit ärztlicher Untersuchung abgeschlossenen Versicherungen des Hauptzweiges. Diese Erscheinung dürfte im wesentlichen darauf zurückzuführen sein, dass im Bestande der Volksversicherten mehr Frauen vertreten sind als in dem des Hauptzweiges. Mit zwei Ausnahmen hat die Sterblichkeit durchwegs ständig abgenommen. Für die Altersklasse 60—64 des Hauptzweiges ergibt sich hingegen für die Jahre 1869—1888 ein gleichbleibender und für die Altersklasse 55—59 für die Jahre 1869 bis 1894 sogar ein steigender Trend.

Abschliessend sei noch festgestellt, dass die verwendeten Trendfunktionen nur für die Beschreibung des Sterblichkeitsverlaufes während der Beobachtungszeit berechnet worden sind. Dass eine Extrapolation des Trends nur mit Vorsicht vorgenommen werden dürfte, ist schon daraus ersichtlich, dass die vorliegenden Beobachtungen zu Trendfunktionen mit nicht einheitlichem Sterblichkeitsgefälle geführt haben.

III. Jährliche Sterblichkeitsschwankungen und Normalverteilung

Nimmt man an, dass für die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen die aus dem Bernoullischen Urnenschema folgenden Zufallsgesetze gelten, so sind aus einem homogenen Versicherungsbestand von N unter einjährigem Sterberisiko stehenden Personen r Todesfälle mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$w(r) = \binom{N}{r} q^r (1 - q)^{N-r} \quad (4)$$

zu erwarten, wobei q die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit bedeutet. Eine nähere Prüfung der Annahmen, welche zur Gleichung (4) führen, zeigt jedoch, dass für eine befriedigende Beschreibung der jährlichen Sterblichkeitsschwankungen noch andere Gesichtspunkte erfasst werden müssen. Vor allem ist darauf hinzuweisen, dass über Eintritt oder Nichteintritt eines Todesfalles nicht wie beim Urnenschema durch eine einzige Handlung (Ziehung) entschieden wird. Dem Wesen der Sterblichkeit kommt man näher, wenn man eine kontinuierliche Folge von Elementarspielen, welche der Wahrscheinlichkeitsverteilung (4) folgen, annimmt.

Durch den Grenzübergang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{nN}{r} \left(\frac{q}{n}\right)^r \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{nN-r}$$

und unter der weitem Annahme, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{Nq}{n} = T$$

endlich bleibt, gelangt man an Stelle von (4) zur Poissonschen Verteilung

$$w(r) = \frac{e^{-T} T^r}{r!} . \quad (5)$$

Es ist bekannt, dass bei genügend grossem T die Poissonsche Verteilung (5) durch die Gauss-Laplacesche Normalverteilung

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(r-T)^2}{2T}} dr \quad (6)$$

dargestellt werden kann.

Um die Gültigkeit der Verteilungsgesetze (5) und (6) am Beobachtungsmaterial zu überprüfen, empfiehlt es sich, die von der mathematischen Statistik entwickelten Methoden heranzuziehen. Zum besseren Verständnis dieser Methoden seien einige erläuternde Bemerkungen vorausgeschickt.

Die Ergebnisse von statistischen Erhebungen weisen in der Regel mehr oder weniger stark hervortretende Unregelmässigkeiten auf, von denen angenommen wird, dass sie zur Hauptsache durch den begrenzten Umfang des zur Verfügung stehenden Zahlenmaterials bedingt sind. Diese Annahme folgt aus der Hypothese, dass das verwendete statistische Material als eine Stichprobe aus einer unendlich-grossen Gesamtheit zu betrachten ist, die von *Anderson* als Gesamtheit höherer Ordnung bezeichnet wird. Bei sterblichkeitsstatistischen Untersuchungen im Gebiete des Versicherungswesens erweist sich diese Stichprobenhypothese oft deshalb als fruchtbar, weil nicht die Beschreibung des statistischen Materials im Vordergrund des Interesses steht, sondern die Übertragung der aus dem Material gewonnenen Erfahrungen auf andere Bestände.

Fasst man eine gegebene Statistik im Sinne dieser Hypothese als eine Stichprobe aus einer Gesamtheit höherer Ordnung auf, so stellt sich die Frage, was für Resultate bei anderen gleichartig ausgewählten Stichproben, die aus derselben Gesamtheit höherer Ordnung entnommen würden, zu erwarten wären. Betrachtet man schliesslich die Gesamtheit aller derartigen Stichproben, so lässt sich ein Verteilungsgesetz ableiten, aus dem die relative Häufigkeit der Stichproben, die ein bestimmtes Ergebnis aufweisen, entnommen werden kann. Bei der

Ableitung dieses Verteilungsgesetzes müssen bestimmte Annahmen über die Struktur der Gesamtheit höherer Ordnung und über die Methode zur Auswahl der Stichproben getroffen werden. Bei praktischen Anwendungen ist stets zu prüfen, ob diese Annahmen als angemessen betrachtet werden dürfen.

Die Stichprobenverteilung $w(x)$ für den zum Element der Zählung gewählten Parameter x wird oft nur durch ihren Mittelwert

$$\bar{x} = \int w(x) x dx$$

— den sogenannten Erwartungswert $E(x)$ — und ihre Streuung

$$\sigma_{(x)}^2 = \int w(x) [x - \bar{x}]^2 dx$$

gekennzeichnet; dabei sind die Integrale über den ganzen Definitionsbereich von $w(x)$ zu erstrecken. Die Quadratwurzel σ aus der Streuung wird gewöhnlich als mittlerer Fehler bezeichnet.

Bei praktischen Anwendungen stellt sich in der Regel die Frage, ob die Hypothese, dass eine bestimmte Statistik, welche ein Ergebnis x' geliefert hat, eine Stichprobe aus einer gegebenen Gesamtheit höherer Ordnung mit dem Erwartungswert \bar{x} (x' sei $> \bar{x}$) ist, zutreffe oder nicht. Aus der Verteilung $w(x)$ ist zu entnehmen, dass Stichproben mit Resultaten, welche um mehr als $|x' - \bar{x}| = \delta$ vom Erwartungswert abweichen, mit der Wahrscheinlichkeit

$$P \{ |x - \bar{x}| \geq |x' - \bar{x}| \} = \int_{\bar{x} + \delta}^{\infty} w(x) dx + \int_{-\infty}^{\bar{x} - \delta} w(x) dx$$

erwartet werden müssen. Die zur Diskussion gestellte Hypothese — sie sei als Hypothese H bezeichnet — erscheint um so plausibler, je grösser die Wahrscheinlichkeit P ausfällt, und um so unwahrscheinlicher, je mehr P sich der Grenze Null nähert. Ist P sehr klein, so ist kaum anzunehmen, dass die gegebene Statistik eine Stichprobe aus der betrachteten Gesamtheit höherer Ordnung ist, und die Hypothese H kann nicht aufrecht erhalten bleiben.

Es muss betont werden, dass umgekehrt die Schlussfolgerung, die zu prüfende Hypothese H treffe zu, mit Hilfe der Stichprobenverteilung allein nicht gezogen werden kann, und zwar selbst dann nicht, wenn P nahezu gleich Eins ausfällt. In einem solchen Fall darf höchstens geschlossen werden, dass Theorie und Beobachtung, soweit

die Grösse x in Betracht fällt, miteinander harmonieren. Die Möglichkeit bleibt stets offen, dass es sich um Stichproben aus einer andern Gesamtheit höherer Ordnung handelt. Das mit Hilfe eines statistischen Kriteriums gefundene Urteil über die Hypothese H kann daher nicht lauten «richtig oder falsch», sondern etwas bescheidener «möglich (plausibel) oder unwahrscheinlich». Will man weitergehen und die Hypothese H als falsch erklären, so muss, um das Risiko eines Fehlurteils möglichst zu verkleinern, der Grenzwert für P entsprechend klein gewählt werden. Wie klein dieser Grenzwert angesetzt werden muss, kann leider nicht eindeutig entschieden werden. Es bleibt weitgehend dem freien Ermessen vorbehalten, welcher Wert mit Rücksicht auf die besonderen Umstände des zur Diskussion stehenden Problems angezeigt erscheint. Die aus der Fehlertheorie bekannte «Dreisigmaegel» fusst beispielsweise auf dem Wert $P = 0,0027$. In der modernen statistischen Literatur werden andererseits oft die Werte $P = 0,01$, $0,02$ und, besonders für kleine Stichproben, $P = 0,05$ bevorzugt. Wird der Grenzwert für P gross gewählt, so geht man ein verhältnismässig grosses Risiko ein, richtige Hypothesen abzulehnen; verwendet man hingegen einen sehr kleinen Wert für P , so wird man nur noch in seltenen Fällen eine Hypothese verwerfen können. Wie *Anderson* hervorhebt, empfiehlt es sich, den Grenzwert für P je nach den Folgen, welche ein Fehlurteil nach sich ziehen könnte, von Fall zu Fall festzusetzen. Steht zum Beispiel Leben und Tod oder der Ruin einer Versicherungseinrichtung auf dem Spiel, so wird man für P vorsichtigerweise einen sehr kleinen Wert wählen; stehen jedoch wie in der vorliegenden Arbeit nur verschiedene Theorien einander gegenüber, so kann man sich mit dem Wert von $0,05$ für P begnügen. Diesem Wert entspricht bei Normalverteilung eine maximal zulässige Abweichung in der Grössenordnung des zweifachen mittleren Fehlers.

Schliesslich muss noch darauf hingewiesen werden, dass ein Urteil, welches an Hand der Stichprobenverteilung des Parameters x gewonnen wurde, unter Umständen nicht bestätigt wird, wenn an Stelle von x ein anderer Parameter $y = \varphi(x)$ substituiert und zum Element der Statistik gewählt wird. So wird zum Beispiel nach dem Pearsonschen Kriterium χ^2 das Vorzeichen von Abweichungen nicht berücksichtigt, so dass kleine, aber systematisch verlaufende Abweichungen nicht als wesentlich erkannt werden; ein anderes Kriterium, zum Beispiel die von *v. Mises* behandelte ω^2 -Methode, wird daher in

gewissen Fällen zu einem andern Urteil führen als das Kriterium χ^2 . Um ein zuverlässiges Urteil über eine bestimmte Statistik abgeben zu können, empfiehlt es sich unter diesen Umständen, nicht nur auf ein einziges Kriterium abzustellen, sondern verschiedene statistische Prüfungsmethoden zu Rate zu ziehen.

Zusammenfassend sei festgestellt, dass die verschiedenen in der mathematischen Statistik benützten Kriterien leider keine eindeutigen Schlussfolgerungen erlauben und zufolge der besonderen Annahmen hinsichtlich der Stichprobenverteilung, auf denen sie beruhen, nicht ohne weiteres in allen Fällen angewendet werden dürfen. Trotz dieser Einschränkungen darf nicht ausser acht gelassen werden, dass die Theorie der Stichproben dennoch wertvolle Anhaltspunkte zur Beurteilung von statistischen Ergebnissen liefert. Wenn auch die Rechnungsergebnisse nicht zu absolut eindeutigen Schlüssen berechtigen, so können doch durch sorgfältig ausgewählte Kriterien gewissermassen Indizienbeweise geführt werden.

Angesichts der Willkür, welche bei der Anwendung dieser Kriterien nicht ausgeschlossen werden kann, ist es vertretbar, auf eine ganz strenge Rechnung zu verzichten und nach Möglichkeit vereinfachende Näherungen zuzulassen. So empfiehlt es sich beispielsweise oft, die aus einer bestimmten Hypothese abgeleitete Verteilung durch eine passende Grenzverteilung zu ersetzen, die streng genommen nur für sehr grosse Stichproben gelten würde.

Im Sinne dieser allgemeinen Erwägungen ist in der vorliegenden Untersuchung zunächst zu prüfen, ob die beobachteten Sterblichkeitschwankungen mit den Verteilungsgesetzen (5) und (6) im Einklang stehen. Ein direkter Vergleich der beobachteten und theoretischen Häufigkeit von bestimmten Abweichungen wäre nur möglich, wenn die Anzahl der erwarteten Sterbefälle während der Beobachtungszeit annähernd konstant bleiben würde. Da diese Bedingung nicht in genügender Weise erfüllt ist, müssen indirekte Prüfungsmethoden herangezogen werden.

Kriterium a): Die Fehlerquadratsumme.

Ist T'_t die beobachtete und T_t die nach der Trendfunktion erwartete Anzahl der Sterbefälle im Kalenderjahr t , so ist

$$\sum_t \Delta T_t^2 = \sum_t (T'_t - T_t)^2 \quad (7)$$

die bei der Trendrechnung auftretende Fehlerquadratsumme. Unter der Annahme der Gültigkeit des Verteilungsgesetzes (5) lässt sich für (7) ein Erwartungswert berechnen. Wird dieser Erwartungswert mit der aus den Beobachtungen hervorgegangenen Fehlerquadratsumme verglichen, so erhält man unter Berücksichtigung des mittleren Fehlers ein Urteil darüber, ob die Annahmen über die massgebende Verteilungsfunktion, welche zu diesem Erwartungswert und mittleren Fehler führen, mit der Wirklichkeit harmonieren oder nicht. Um den gesuchten Erwartungswert und seinen mittleren Fehler bestimmen zu können, müssen vorerst die Potenzmomente der Verteilung (5) ermittelt werden. Für das auf den Wert $r = 0$ bezogene Moment k -ter Ordnung der Poissonschen Verteilung

$$m_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-T} T^r}{r!} r^k$$

erhält man für $k = 0, 1, 2, 3$ und 4 :

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 1 \\ m_1 &= T \\ m_2 &= T^2 + T \\ m_3 &= T^3 + 3T^2 + T \\ m_4 &= T^4 + 6T^3 + 7T^2 + T. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Ferner ergeben sich für die auf den Mittelwert $r = T$ bezogenen Momente von (5)

$$m'_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-T} T^r}{r!} (r - T)^k$$

die Formeln

$$\left. \begin{aligned} m'_0 &= 1 \\ m'_1 &= 0 \\ m'_2 &= T \\ m'_3 &= T \\ m'_4 &= T + 3T^2. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Den Erwartungswert von $\sum_t \Delta T_t^2$ berechnet man schliesslich zu

$$E\left(\sum_t \Delta T_t^2\right) = \sum_t E(\Delta T_t^2) = \sum_t m'_2 = \sum_t T_t. \quad (9a)$$

Formel (9a) gilt für den Fall, dass die Erwartungswerte T_t a priori bekannt sind. Sind diese Werte dagegen durch k Parameter bestimmt, welche aus n Beobachtungen ermittelt werden, so ist, wie aus der Fehlertheorie bekannt ist, Formel (9a) zu modifizieren in

$$E\left(\sum_t \Delta T_t^2\right) = \frac{n-k}{n} \sum_t T_t. \quad (9b)$$

Im vorliegenden Fall setzt sich die für n Beobachtungsjahre bestimmte Trendfunktion aus \varkappa linearen Teilstücken zusammen, die durch $\varkappa + 1$ Parameter bestimmt sind; daher ist sinngemäss $k = \varkappa + 1$ zu setzen.

Es ist nicht zu erwarten, dass die beobachteten Fehlerquadratsummen mit dem aus Gleichung (9b) folgenden Erwartungswert genau übereinstimmen. Vielmehr ist mit gewissen Schwankungen im Rahmen des mittleren Fehlers zu rechnen. Allgemein gilt für den mittleren Fehler $\sigma_{(m'_k)}$ des auf den Mittelwert bezogenen Momentes k -ter Ordnung bei grossen Stichproben die Formel

$$n \sigma_{(m'_k)}^2 = m'_{2k} - m_k'^2 + k^2 m'_2 m'_{k-1} - 2k m'_{k-1} m'_{k+1}, \quad (10)$$

wobei n den Umfang der Stichprobe kennzeichnet. Für das im vorliegenden Problem auftretende zweite Moment von (5) gilt im besonderen bei einer einzigen Beobachtung

$$\sigma_{m'_2}^2 = \sigma_{(\Delta T_t^2)}^2 = 2T_t^2 + T_t \quad (10a)$$

und, mit Rücksicht darauf, dass die einzelnen ΔT_t^2 als unabhängige Beobachtungen aufgefasst werden dürfen,

$$\sigma_{(\sum_t \Delta T_t^2)}^2 = 2 \sum_t T_t^2 + \sum_t T_t. \quad (10b)$$

In Tabelle III sind die Ergebnisse des Vergleichs der beobachteten Fehlerquadratsumme mit den aus den Gleichungen (9b) und (10b) folgenden theoretischen Werten zusammengestellt. Bei diesem Vergleich

ist vor allem darauf zu achten, ob die beobachtete Fehlerquadratsumme $\sum_t \Delta T_t^2$ grösser oder kleiner ausfällt als der nach Formel (9b) berechnete Erwartungswert. Je nachdem die in Kolonne (3) angeführte Differenz

$$\sum_t \Delta T_t^2 - \frac{n-k}{n} \sum_t T_t$$

positiv oder negativ ausfällt, liegt über- oder unternormale Dispersion vor. Nach den weiter oben angegebenen, für diese Untersuchung gewählten Grundsätzen kann diese Differenz noch als zufällig betrachtet werden, solange sie den zweifachen mittleren Fehler nicht übersteigt. Theorie und Beobachtung stehen also im Einklang miteinander, wenn der unter Kolonne (4) angeführte Vergleichsquotient

$$\frac{\sum_t \Delta T_t^2 - \frac{n-k}{n} \sum_t T_t}{\sqrt{2 \sum_t T_t^2 + \sum_t T_t}} 100$$

kleiner als 200 % ausfällt. Andernfalls liegt eine wesentliche Abweichung vor, das heisst eine Abweichung, die kaum durch den Zufall erklärt werden kann. Aus dem Auftreten von Vergleichsquotienten, welche den kritischen Wert von 200 % übersteigen, muss geschlossen werden, dass die bei der obigen Ableitung vorausgesetzte Poissonsche Verteilung (5) die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen nicht genügend zu beschreiben vermag.

Aus dem Vorzeichen der in den Kolonnen (3) und (4) angeführten Werte ist zu entnehmen, dass die Altersklassen mit $x < 65$ durchwegs übernormale Dispersion aufweisen, während in den höhern Altersstufen unternormale Dispersion vorherrscht. Die Abweichungen der beobachteten Fehlerquadratsummen gegenüber ihren unter der Annahme der Gültigkeit des Verteilungsgesetzes (5) berechneten Erwartungswerten liegen jedoch fast durchwegs noch im Bereich von zufallsmässigen Schwankungen, indem der Vergleichsquotient in Kolonne (4) nur in wenigen Fällen den kritischen Wert 200 % erreicht. Mit Rücksicht auf die ausgesprochene Einseitigkeit der Abweichungen ist trotzdem eine nichtnormale Dispersion zu vermuten.

Tabelle III

| Alters- gruppe | n | $n-k$ | Be- obachtete | Erwartete | Differenz (1) — (2) | |
|-------------------------|-----|-------|--------------------|-----------|------------------------|---------------------------------|
| | | | Fehlerquadratsumme | | absolut | in % des mitt- leren Fehlers |
| | | | (1) | (2) | (3) | (4) |
| <i>Hauptzweig</i> | | | | | | |
| 25–29 | 20 | 18 | 583 | 483 | + 100 | + 58 |
| 30–34 | 20 | 18 | 700 | 682 | + 18 | + 7 |
| 35–39 | 69 | 65 | 1989 | 1778 | + 211 | + 55 |
| 40–44 | 69 | 65 | 2478 | 2393 | + 85 | + 17 |
| 45–49 | 69 | 65 | 3736 | 2982 | + 754 | + 118 |
| 50–54 | 70 | 66 | 3980 | 3461 | + 519 | + 71 |
| 55–59 | 70 | 65 | 4238 | 3378 | + 860 | + 121 |
| 60–64 | 70 | 66 | 3353 | 2735 | + 618 | + 133 |
| 65–69 | 61 | 58 | 1295 | 2191 | — 896 | — 204 |
| 70–74 | 40 | 38 | 692 | 1395 | — 703 | — 203 |
| 75–79 | 51 | 48 | 1397 | 1368 | + 29 | + 9 |
| <i>Volkversicherung</i> | | | | | | |
| 35–39 | 30 | 28 | 1214 | 1001 | + 213 | + 71 |
| 40–44 | 30 | 28 | 1608 | 1026 | + 582 | + 196 |
| 45–49 | 30 | 28 | 1332 | 1173 | + 159 | + 45 |
| 50–54 | 31 | 29 | 1379 | 1249 | + 130 | + 35 |
| 55–59 | 31 | 29 | 1470 | 1078 | + 392 | + 118 |
| 60–64 | 26 | 24 | 1031 | 615 | + 416 | + 206 |

Zur weiteren Abklärung dieser Frage empfiehlt es sich, die Beobachtungen zu grösseren Gruppen zusammenzufassen. Bei normaler Dispersion müsste ein gewisser Ausgleich zwischen den in den einzelnen Altersgruppen auftretenden Schwankungen erfolgen, so dass die für die zusammengefassten Gruppen berechneten Vergleichsquotienten noch eher als jene der einzelnen Altersgruppen unterhalb des kritischen Wertes verbleiben sollten. Vergleichsquotienten, die grösser als 200 % ausfallen, sind somit wiederum ein Anzeichen dafür, dass die vorausgesetzte normale Dispersion nicht zutrifft.

Die Vergleichsquotienten in Tabelle IV sind durchwegs grösser als bei den entsprechenden Untergruppen in Tabelle III. Mit Ausnahme der Altersgruppen 25–44 des Hauptzweiges stellt man überdies wesentliche Abweichungen von der normalen Dispersion fest.

Tabelle IV

| Alters- gruppe | Beobachtete | Erwartete | Differenz (1) — (2) | |
|-------------------------|--------------------|-----------|------------------------|---------------------------------|
| | Fehlerquadratsumme | | absolut | in % des mitt- leren Fehlers |
| | (1) | (2) | (3) | (4) |
| <i>Hauptzweig</i> | | | | |
| 25-44 | 5 750 | 5 336 | + 414 | + 59 |
| 45-64 | 15 307 | 12 556 | + 2751 | + 214 |
| 65-79 | 3 384 | 4 954 | — 1570 | — 246 |
| <i>Volkversicherung</i> | | | | |
| 35-64 | 8 034 | 6 142 | + 1892 | + 246 |

Grundsätzlich ist zur Anwendung des Kriteriums *a)* noch folgende Bemerkung anzubringen: Aus der Kenntnis des mittleren Fehlers von $\sum_t \Delta T_t^2$ lässt sich leider nicht ohne weiteres angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine gegebene Abweichung vom Erwartungswert erwartet werden muss, weil das Verteilungsgesetz von $\sum_t \Delta T_t^2$ nicht normal ist, und zwar auch dann nicht, wenn ΔT und $\Sigma \Delta T$ der Normalverteilung folgen würden. Durch die im Abschnitt IIIc dargestellten Untersuchungen wird diese Frage noch abgeklärt.

Kriterium b): Die ω^2 -Methode für die χ -Verteilung.

Aus Gleichung (6) folgt, dass für $\Delta T = r - T$ die Normalverteilung

$$w(\Delta T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\Delta T^2}{2T}} d(\Delta T) \quad (11a)$$

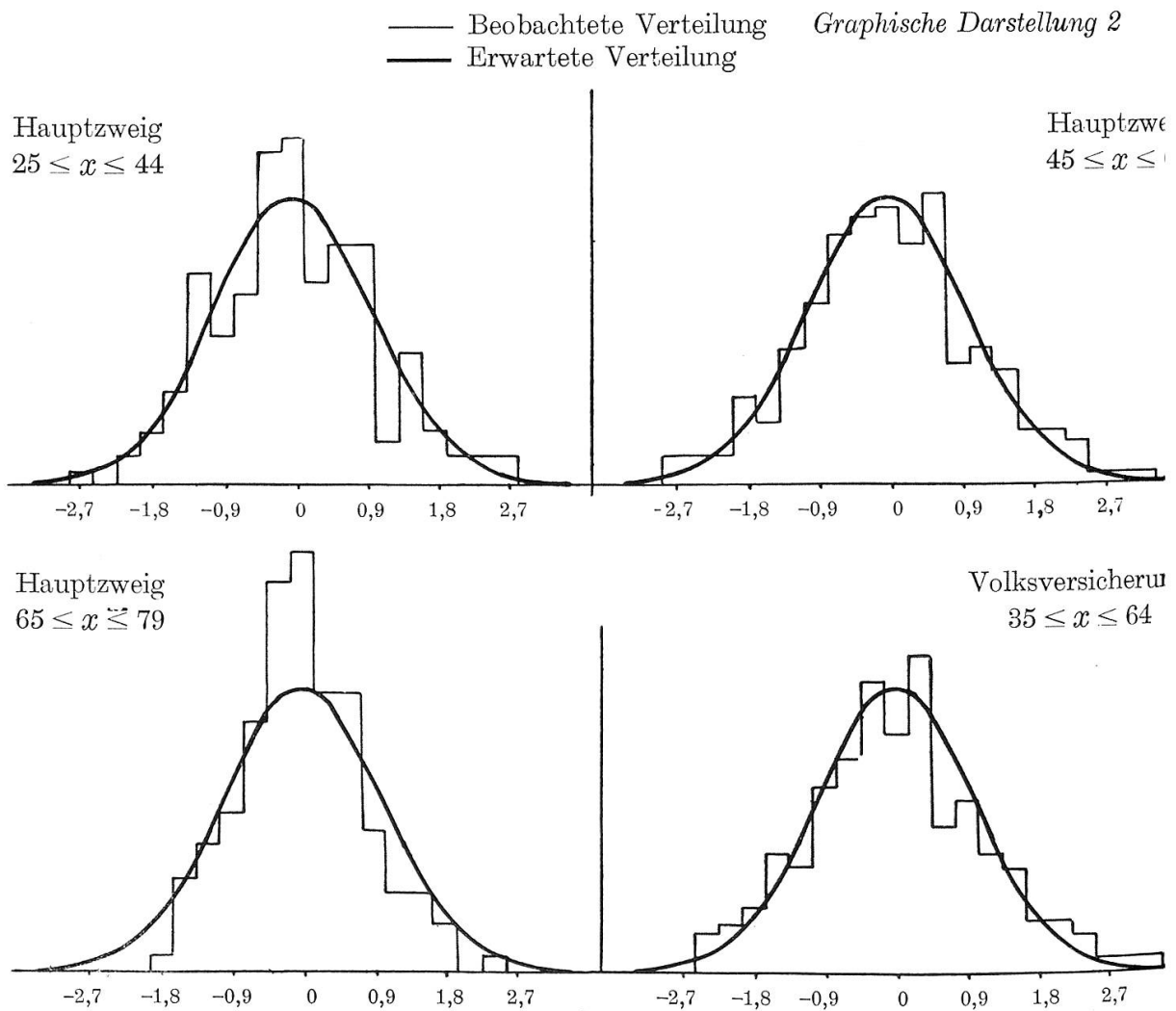
gilt. Die Gleichungen (6) und (11a) weisen den Nachteil auf, dass in ihnen der Erwartungswert T als Parameter auftritt. Die Hilfsgrösse

$$\chi = \frac{\Delta T}{\sqrt{T}}$$

hingegen folgt der Normalverteilung

$$w(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi, \quad (11b)$$

welche T nicht mehr enthält¹⁾. Für die Hilfsgrößen χ gilt somit für alle Beobachtungen das gleiche Verteilungsgesetz, so dass die Möglichkeit besteht, die beobachtete Häufigkeitsverteilung von χ dem Verteilungsgesetz (11b) gegenüberzustellen. Die nachstehende graphische Darstellung zeigt den Verlauf der beobachteten Verteilung von χ und der theoretischen Kurve (11b) für vier Altersgruppen.



¹⁾ Die in der Arbeit von Lange verwendete Hilfsgröße $f = \frac{\Delta T}{T}$ folgt dem Verteilungsgesetz $w(f) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{f^2 T}{2}} df$, das den Erwartungswert T enthält, so dass die beobachtete Verteilung von f von der Struktur des Beobachtungsmaterials abhängig ist; diesem Umstand dürften gewisse Unregelmäßigkeiten in den Ergebnissen von Lange zuzuschreiben sein.

Vergleicht man die erwartete und die beobachtete Häufigkeitsverteilung von χ anhand der graphischen Darstellung 2, so ist man geneigt, eine befriedigende Übereinstimmung anzunehmen. Um diese Vermutung zu überprüfen, verwendet man mit Vorteil das ω^2 -Verfahren. Nach diesem Testverfahren werden die Summenlinien

$$W(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} w(\chi) d\chi \quad \text{und} \quad W'(\chi) = \sum_{\chi=-\infty}^{\chi} w'(\chi)$$

der theoretischen und der beobachteten Verteilung mit Hilfe des Ausdruckes

$$\omega^2 = \sum \lambda (W'(\chi) - W(\chi))^2 \tag{12}$$

miteinander verglichen, wobei λ so gewählt wird, dass der Erwartungswert $E(\omega^2) = 1$ wird. Nach *R. v. Mises* beträgt der mittlere Fehler von ω^2 , wenn die theoretische Kurve eine Normalverteilung ist, annähernd

$$\sigma_{(\omega^2)} = \sqrt{0,06303 - \frac{0,1190}{n}}, \tag{12 b}$$

worin n die Anzahl der berücksichtigten Werte von χ bedeutet.

Gegenüber dem Erwartungswert 1 ergaben sich folgende aus den Beobachtungen errechnete Werte von ω^2 :

| | <i>Altersgruppe</i> | ω^2 |
|--------------------|---------------------|------------|
| Hauptzweig: | 25—44 | 0,329 |
| | 45—64 | 1,246 |
| | 65—79 | 2,333 |
| Volksversicherung: | 35—64 | 0,877 |

Ein Vergleich mit dem zweifachen mittleren Fehler, welcher für alle Altersgruppen rund 0,500 beträgt, zeigt, dass nach dem ω^2 -Test in den Altersgruppen 45—64 des Hauptzweiges und 35—64 der Volksversicherung für χ die Normalverteilung (11 b) als plausibel erscheinen könnte. Für die Altersgruppe 25—44 und noch mehr 65—79 des Hauptzweiges ist dagegen die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ungenügend.

Kriterium c): Die χ^2 -Methode.

Aus der Verteilung (11b) erhält man nach *Steffensen* in einfacher Weise das Verteilungsgesetz $w_1(\chi^2)$ für eine einzelne Stichprobe der Grösse χ^2 durch die Substitution $\chi = \sqrt{y}$. Es ist dann

$$w_1(\chi^2) = c_1 e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy, \quad (13)$$

worin c_1 die Normierungskonstante angibt.

Aus (13) lassen sich ferner die Verteilungsgesetze $w_2(\chi^2), \dots, w_n(\chi^2)$ für $y = \sum_{i=1}^n \chi_i^2$ durch fortgesetzte Anwendung der Summenformel

$$w_n(y) = \int_0^y w_{n-1}(y-y_1) w_1(y_1) dy_1$$

nacheinander berechnen. Diese Verteilungsgesetze lauten:

$$\begin{aligned} w_2(\chi^2) &= c_2 e^{-\frac{y}{2}} y^0 dy \\ w_3(\chi^2) &= c_3 e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy \\ &\vdots \\ w_n(\chi^2) &= c_n e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n-2}{2}} dy. \end{aligned} \quad (14a)$$

Die Gültigkeit von (14a) für beliebige n kann durch Berechnung von $w_{n+1}(\chi^2)$ aus $w_n(\chi^2)$ nachgewiesen werden. Setzt man noch $y = \chi^2 = \sum_{i=1}^n \chi_i^2$ und $\chi = \sqrt{\sum_{i=1}^n \chi_i^2}$, so hat man für $w_n(\chi^2)$ das Verteilungsgesetz

$$w_n(\chi^2) = c_n e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{n-1} d\chi, \quad (14b)$$

wobei die Normierungskonstante c_n den Wert

$$c_n = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{n-1} d\chi} = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

aufweist. Der Erwartungswert von χ^2 berechnet sich aus (14b) zu

$$E(\chi^2) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{n-1} \chi^2 d\chi}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = n.$$

Für grosse n ($n \geq 30$) kann nach *R. A. Fisher* die seminormale Verteilung (14b) mit genügender Annäherung durch die Normalverteilung für $\sqrt{2\chi^2}$

$$w(\sqrt{2\chi^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1})^2}{2}} d(\sqrt{2\chi^2}) \quad (15)$$

ersetzt werden. Aus (15) berechnet man schliesslich die Wahrscheinlichkeit, bei einer andern Stichprobe einen noch mehr vom Mittelwert divergierenden Wert zu erhalten, als die vorliegende Stichprobe ergeben hat, zu

$$P_n \{ |\chi^2 - n| \geq |\chi^{2'} - n| \} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\chi^{2'} - \sqrt{2n-1}}}^{\infty} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi. \quad (15a)$$

In den obigen Formeln bedeutet n jeweils die Anzahl der Beobachtungsjahre, wenn die Mittelwerte der Verteilungen (6) und (11a) a priori bekannt sind. Im vorliegenden Fall sind diese Mittelwerte jedoch durch k Parameter bestimmt, welche aus n Beobachtungsjahren ermittelt werden; für n ist deshalb sinngemäss die Anzahl der Freiheitsgrade $n - k$ zu nehmen.

Ein Vergleich der beobachteten Werte von $\Sigma \chi^2$ mit dem Erwartungswert $n - k$ liefert in Verbindung mit der Wahrscheinlichkeit P_{n-k} wiederum ein Urteil darüber, ob die jährlichen Sterblichkeitschwankungen dem normalen Verteilungsgesetz (11a) genügen, dessen Gültigkeit bei der Ableitung der χ^2 -Verteilung (14b) vorausgesetzt wird. Je nachdem der aus den Beobachtungen berechnete Wert von $\Sigma \chi^2$ grösser oder kleiner ausfällt als der Erwartungswert $n - k$, liegt über- oder unternormale Dispersion vor. Wesentliche Abweichungen von der normalen Dispersion liegen nach den für diese Untersuchung gewählten Grundsätzen vor, sobald P_{n-k} kleiner als 5% ausfällt.

In der nachstehenden Tabelle V sind die aus den einzelnen Beobachtungen berechneten Summen von χ^2 samt den zugehörigen nach Formel 15a berechneten Wahrscheinlichkeiten P_{n-k} altersgruppenweise zusammengestellt.

Tabelle V

| Alters- gruppe | Anzahl der Freiheitsgrade $n-k$ | $\Sigma \chi^2$ | P_{n-k} in % |
|--------------------------|---------------------------------------|-----------------|-------------------|
| <i>Hauptzweig</i> | | | |
| 25-29 | 18 | 21,409 | 53,6 |
| 30-34 | 18 | 19,294 | 77,2 |
| 35-39 | 65 | 69,662 | 66,1 |
| 40-44 | 65 | 61,146 | 76,4 |
| 45-49 | 65 | 81,363 | 16,2 |
| 50-54 | 66 | 72,507 | 55,5 |
| 55-59 | 65 | 82,508 | 13,6 |
| 60-64 | 66 | 81,128 | 19,7 |
| 65-69 | 58 | 30,961 | 0,4 |
| 70-74 | 38 | 18,330 | 0,9 |
| 75-79 | 48 | 44,112 | 71,9 |
| <i>Volksversicherung</i> | | | |
| 35-39 | 28 | 37,643 | 20,6 |
| 40-44 | 28 | 43,227 | 6,0 |
| 45-49 | 28 | 38,016 | 19,4 |
| 50-54 | 29 | 28,335 | 97,6 |
| 55-59 | 29 | 35,602 | 37,4 |
| 60-64 | 24 | 39,337 | 4,4 |

Zu einem eindeutigeren Ergebnis gelangt man wiederum, wenn mehrere Altersgruppen zusammengefasst werden:

Tabelle VI

| Alters- gruppe | Freiheits- grade $n-k$ | $\Sigma \chi^2$ | P_{n-k} in % |
|--------------------------|------------------------------|-----------------|-------------------|
| <i>Hauptzweig</i> | | | |
| 25-44 | 166 | 171,511 | 74,2 |
| 45-64 | 262 | 317,506 | 2,0 |
| 65-79 | 144 | 93,403 | 0,1 |
| <i>Volksversicherung</i> | | | |
| 35-64 | 166 | 222,160 | 0,4 |

Die Tabellen V und VI bestätigen im wesentlichen das beim Kriterium *a)* gewonnene Urteil. Die Altersstufen unter 65 Jahren weisen übernormale, die höheren Altersstufen dagegen unternormale Dispersion auf. Die Abweichung von der normalen Dispersion wird bei der Betrachtung der einzelnen Altersklassen (Tabelle V) nur in wenigen Fällen als wesentlich beurteilt. Bei den zusammengefassten Altersgruppen ergeben sich jedoch mit Ausnahme der Altersklasse 25—44 des Hauptzweiges durchwegs wesentliche Abweichungen von der normalen Dispersion.

Zusammenfassung

Für die Altersgruppen 65—79 des Hauptzweiges ergeben die nach drei verschiedenen Methoden durchgeführten Untersuchungen übereinstimmend, dass eine wesentlich unternormale Dispersion vorliegt.

Bei den übrigen Altersgruppen stellt man durchwegs übernormale Dispersion fest, die jedoch nicht nach allen drei Methoden einheitlich als wesentlich beurteilt wird. So wird nach dem Kriterium *b)* nur bei der Altersgruppe 25—44 des Hauptzweiges eine wesentlich übernormale Dispersion festgestellt, während andererseits nach den Kriterien *a)* und *c)* nur bei den übrigen Altersgruppen die übernormale Dispersion als wesentlich betrachtet wird. Dieses unterschiedliche Urteil ist in erster Linie bedingt durch den etwas bescheidenen Umfang des Beobachtungsmaterials und die besonderen Eigenschaften der drei Testverfahren. Mit Rücksicht auf die einheitlich übernormale Dispersion in allen Altersgruppen mit $x < 65$, und weil die übernormale Dispersion durchwegs wenigstens nach einem Kriterium als wesentlich beurteilt wird, muss die Dispersion für die unteren und mittleren Altersstufen allgemein als wesentlich übernormal angenommen werden.

IV. Sterblichkeitsschwankungen und Wahrscheinlichkeitsansteckung

Die im Kapitel III dargestellten Untersuchungen haben gezeigt, dass die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen nicht der Normalverteilung (6) folgen. Es stellt sich nunmehr die Frage nach einem Verteilungsgesetz, welches einen bessern Anschluss der Theorie an die Beobachtung gewährleistet. Im folgenden wird versucht, die fest-

gestellte nichtnormale Dispersion der jährlichen Sterblichkeitsschwankungen durch Wahrscheinlichkeitsansteckung zu erklären.

a) *Theorie der Wahrscheinlichkeitsansteckung*

Nach dem von *Eggenberger* und *Polya* entwickelten Urnenschema für Wahrscheinlichkeitsansteckung besteht für das Auftreten von r Versicherungsfällen in einem Bestand von N unter Risiko stehenden Versicherungen die Wahrscheinlichkeit:

$$w_N(r) = \binom{N}{r} \frac{q(q+\delta)(q+2\delta)\dots(q+(r-1)\delta)(1-q)(1-q+\delta)(1-q+2\delta)\dots[1-q+(N-r-1)\delta]}{1 \cdot (1+\delta)(1+2\delta)\dots[1+(N-1)\delta]} \quad (16)$$

In dieser Formel bedeuten q die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Versicherungsfalles und δ die Ansteckungswahrscheinlichkeit. Durch eine analoge Überlegung, welche im Kapitel III von der Bernoullischen Verteilung (4) zur Poissonschen Verteilung (5) geführt hat, gelangt man von (16) zur erweiterten Poissonschen Verteilung

$$w(r) = \frac{T(T+d)(T+2d)\dots[T+(r-1)d]}{r!(1+d)^{\frac{T}{d}+r}}, \quad (17)$$

die umgeformt werden kann in

$$w(r) = \frac{T^r \lambda^r \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + r\right)}{r!(1+\lambda T)^{\frac{1}{\lambda}+r} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}, \quad (17a)$$

worin T wiederum die erwartete Anzahl der Sterbefälle und $d = \lambda T$ die Ansteckung bedeuten. Für die auf den Mittelwert bezogenen Momente der Verteilung (17) gelten die nachstehenden Formeln

$$\left. \begin{aligned} m'_1 &= 0 \\ m'_2 &= T + \lambda T^2 \\ m'_3 &= T + 3\lambda T^2 + 2\lambda^2 T^3 \\ m'_4 &= T + (3 + 7\lambda) T^2 + (6\lambda + 12\lambda^2) T^3 + (3\lambda^2 + 6\lambda^3) T^4. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Summenfunktion der Poissonschen Verteilung (5) strebt mit wachsendem T gegen die Summenfunktion der Normalverteilung (6). Diese Eigenschaft erlaubt es, für grosse T an Stelle der arithmetischen Verteilung (5) die geometrische Verteilung (6) zu verwenden. Die Summenfunktion der erweiterten Poissonschen Verteilung (17) strebt für positive λ mit wachsendem T gegen die Summenfunktion der erweiterten Normalverteilung

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T(1+\lambda T)}} e^{-\frac{(r-T)^2}{2T(1+\lambda T)}} dr. \quad (19)$$

Für negative λ ergibt sich keine Grenzverteilung für grosse T , weil die Verteilung (17) nur existiert, solange $T < |\lambda^{-1}|$ ist. Immerhin darf Formel (19) vielfach auch bei negativer Ansteckung an Stelle von (17) verwendet werden.

b) Versuche zur Erklärung der nichtnormalen Dispersion der Sterblichkeitsschwankungen durch Wahrscheinlichkeitsansteckung

Die Formeln (18) zeigen, dass sich nichtnormale Dispersion durch Wahrscheinlichkeitsansteckung erklären lässt, und zwar entsprechen der unternormalen und übernormalen Dispersion negative und positive Ansteckung.

Die in den höheren Altersstufen auftretende unternormale Dispersion lässt sich dadurch erklären, dass der Alterungsprozess bei den einzelnen Versicherten verschieden intensiv verläuft. Eine kurzfristig auftretende Unter- oder Übersterblichkeit bewirkt deshalb vorübergehend eine Anreicherung des Bestandes mit Risiken, welche über- oder unterdurchschnittliche Sterblichkeit aufweisen. Ähnlich wie beim Urnenschema mit negativer Ansteckung ergibt sich somit ein stärkerer Ausgleich der Schwankungen, als er bei einem homogenen Bestand zu erwarten wäre. Der Umstand, dass unternormale Dispersion nur bei den höheren Altersstufen in Erscheinung tritt, erklärt sich daraus, dass bei der bedeutend niedrigeren Sterblichkeit in den unteren Altersstufen die Inhomogenität des Bestandes nicht so stark ins Gewicht fällt wie bei den höheren Altersstufen und daher durch andere Einflüsse leicht überkompensiert wird.

Die in den Altersstufen mit $x < 65$ zu beobachtende übernormale Dispersion dürfte teilweise mit epidemisch auftretenden Krankheiten

zusammenhängen. Sie kann aber auch durch kurzfristige wesentliche Sterblichkeitsschwankungen entstehen. Derartige Schwankungen können bedingt sein durch die besonderen Witterungsverhältnisse eines Jahres, ferner durch Veränderungen in der wirtschaftlichen und politischen Lage. Bei Versicherungsbeständen ist schliesslich noch mit der Möglichkeit zu rechnen, dass solche Schwankungen nur durch eine veränderte Zusammensetzung des Versicherungsbestandes entstehen. So wird zum Beispiel ein hoher Neuzugang vorübergehend zu einer Senkung der durchschnittlichen Sterblichkeit führen. In Versicherungsbeständen ist ferner ein wesentlich stärkerer Wechsel in der Bestandeszusammensetzung gegeben als etwa in der gesamten Bevölkerung, weil die in diesen Beständen überwiegend vertretenen gemischten Versicherungen in der Regel schon in der Alterszone zwischen 50 und 65 Jahren ablaufen.

Für die statistische Erfassung dieser kurzfristigen wesentlichen Schwankungen hat *Nolfi* in seiner Kongressarbeit «Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung» den Weg gewiesen. Dem Gedankengang Nolfis folgend sei angenommen, dass die wesentlichen Schwankungen einer Verteilung $w_w(\varphi)$ folgen, wobei $w_w(\varphi)$ die Wahrscheinlichkeit für eine relative Übersterblichkeit $\varphi - 1$ angibt. Die Verteilung $w_w(\varphi)$ sei im übrigen durch ihre auf den Mittelwert $\varphi = 1$ bezogenen Momente μ'_k gegeben. Die Verteilung der zufälligen Schwankungen um den Mittelwert φT sei mit $w_z^{\varphi T}(r)$ bezeichnet; im folgenden wird für $w_z^{\varphi T}(r)$ die Poissonsche Verteilung (5) angenommen; eine analoge Ableitung wäre ohne weiteres auch für die erweiterte Poissonsche Verteilung (17) möglich. Aus den Verteilungen $w_w(\varphi)$ und $w_z^{\varphi T}(r)$ kann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von r Versicherungsfällen zu

$$w(r) = \int_0^{\infty} w_w(\varphi) w_z^{\varphi T}(r) d\varphi \quad (20)$$

berechnet werden. Diese Formel kann in der Regel nicht weiter vereinfacht werden; doch ist es möglich, die Momente der Verteilung (20) durch die Momente von $w_w(\varphi)$ und $w_z^{\varphi T}(r)$ auszudrücken. Man erhält für

$$m'_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} w_w(\varphi) w_z^{\varphi T}(r) (r - T)^k d\varphi \quad (21)$$

mit Hilfe der Formeln (8a) und (8b):

$$\left. \begin{aligned} m'_1 &= 0 \\ m'_2 &= T + \mu'_2 T^2 \\ m'_3 &= T + 3\mu'_2 T^2 + \mu'_3 T^3 \\ m'_4 &= T + (3 + 7\mu'_2) T^2 + (6\mu'_2 + 6\mu'_3) T^3 + \mu'_4 T^4 \end{aligned} \right\} \quad (21 a)$$

Ein Vergleich der Formeln (18) und (21a) zeigt, dass für positive λ die Verteilung (17) als ein Spezialfall der Verteilung (20) aufgefasst werden darf, indem bei geeigneter Wahl der Konstanten μ'_k die Momente von (17) und (20) identisch sind. Es muss demnach eine Verteilungsfunktion $w_w(\varphi)$ existieren, welche in Verbindung mit der Poissonschen Verteilung (5) für $w_z^{\varphi T}(r)$ die Verteilung (20) in die erweiterte Poissonsche Verteilung (17) überführt. Durch Gleichsetzen der in den Formeln (18) und (21a) für die Verteilungen (17) und (20) gegebenen ersten vier Momente erhält man die entsprechenden Momente der Verteilung $w_w(\varphi)$:

$$\left. \begin{aligned} \mu'_2 &= \lambda \\ \mu'_3 &= 2\lambda^2 \\ \mu'_4 &= 6\lambda^3 + 3\lambda^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Diesen Momentenbeziehungen genügt beispielsweise die Pearson-Kurve Typ III

$$w_w(\varphi) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} e^{-\frac{\varphi}{\lambda}} \varphi^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} d\varphi. \quad (23)$$

Setzt man (23) in Formel (20) ein, so erhält man nach Auswertung des Integrals

$$w(r) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\varphi}{\lambda}} \varphi^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} e^{-\varphi T} (\varphi T)^r d\varphi}{\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) r!} = \frac{T^r \lambda^r \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + r\right)}{r! (1 + \lambda T)^{\frac{1}{\lambda} + r} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Dies ist die erweiterte Poissonsche Verteilung (17a). Die nur aus den ersten vier Momenten (22) gefundene Funktion (23) führt

somit die Verteilung (20) in die Verteilung (17) über, so dass auch die Übereinstimmung der höheren Momente von (17) und (20) gesichert ist.

Die Verteilung (20) darf somit als eine Erweiterung der Verteilungsgesetze für positive Wahrscheinlichkeitsansteckung betrachtet werden, wobei unter Umständen durch eine geeignete Wahl der Konstanten μ'_k eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen erreicht werden kann als nach den Verteilungen (16), (17) oder (19). Die Verteilungsgesetze für negative Wahrscheinlichkeitsansteckung können dagegen nicht auf die Verteilung (20) zurückgeführt werden, weil μ'_2 als eine Summe positiver Grössen nicht negativ sein kann.

c) Numerische Untersuchungen

Nimmt man an, die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen folgen der Verteilung (17), so hat man für den Erwartungswert von $\sum_t \Delta T_t^2$

$$E\left(\sum_t \Delta T_t^2\right) = \frac{n-k}{n} \left(\sum_t T_t + \lambda \sum_t T_t^2\right).$$

Die Konstante λ ergibt sich somit unter der Annahme, dass der Erwartungswert $E\left(\sum_t \Delta T_t^2\right)$ mit dem beobachteten Wert $\sum_t \Delta T_t^2$ identisch ist, aus der Formel

$$\lambda = \frac{\frac{n}{n-k} \sum_t \Delta T_t^2 - \sum_t T_t}{\sum_t T_t^2}. \tag{24}$$

Für die Konstante μ'_2 gilt genau die gleiche Formel. Den mittleren Fehler von λ bestimmt man mit Hilfe von Gleichung (10) und mit Rücksicht darauf, dass in (24) nur $\sum_t \Delta T_t^2$ von den beobachteten Sterblichkeitsschwankungen abhängt, zu ^t

$$\sigma_{(\lambda)} = \frac{\sqrt{\sum T + (2 + 7\lambda) \sum T^2 + (4\lambda + 12\lambda^2) \sum T^3 + (2\lambda^2 + 6\lambda^3) \sum T^4}}{\sum T^2}. \tag{25}$$

Diese Beziehung ist für die Auswertung umzuformen. Nach Weglassung der numerisch nicht ins Gewicht fallenden Glieder gelangt man zur Näherungsbeziehung

$$\sigma_{(\lambda)} \sim \sqrt{\frac{2}{n} \frac{\Sigma T + \lambda \Sigma T^2}{\Sigma T^2}}. \quad (25 a)$$

Die Auswertung von (24) und (25a) anhand des vorliegenden Beobachtungsmaterials zeigt folgendes Ergebnis:

Tabelle VII

| Altersgruppe | λ oder μ'_2 in ‰ | $\sigma_{(\lambda)}$ |
|-------------------------|---------------------------------|----------------------|
| <i>Hauptzweig</i> | | |
| 25-29 | 7,6 | 14,0 |
| 30-34 | 0,7 | 8,1 |
| 35-39 | 3,1 | 5,0 |
| 40-44 | 0,7 | 3,6 |
| 45-49 | 4,0 | 3,4 |
| 50-54 | 2,1 | 2,7 |
| 55-59 | 3,7 | 3,1 |
| 60-64 | 4,7 | 4,3 |
| 65-69 | -10,4 | 2,5 |
| 70-74 | -12,4 | 2,7 |
| 75-79 | 1,4 | 6,5 |
| 25-44 | 1,9 | 2,7 |
| 45-64 | 3,4 | 1,6 |
| 65-79 | - 8,3 | 2,0 |
| <i>Vollversicherung</i> | | |
| 35-39 | 4,4 | 7,5 |
| 40-44 | 14,4 | 10,2 |
| 45-49 | 2,8 | 6,0 |
| 50-54 | 2,0 | 5,4 |
| 55-59 | 7,6 | 7,3 |
| 60-64 | 22,4 | 15,5 |
| 35-64 | 6,8 | 3,1 |

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass der mittlere Fehler $\sigma_{(\lambda)}$ wieder von der gleichen Grössenordnung ist wie der Parameter λ selbst; oft übertrifft er diese noch. Der Umfang des Beobachtungsmaterials erlaubt somit nicht, die Konstanten λ oder μ'_2 mit genügender Sicherheit zu bestimmen. Diese Feststellung gilt in noch erhöhtem Masse

für die höheren Momente der Verteilung $w_w(\varphi)$, so dass auf ihre Berechnung verzichtet werden muss.

Bemerkenswert ist, dass die Konstanten λ für die Volksversicherten in der Regel etwas grösser ausfallen als für die Versicherten des Hauptzweiges, das heisst, dass im Bestande des Hauptzweiges ein stärkerer Risikoausgleich zustande kommt als bei der Volksversicherung. Dieses unterschiedliche Verhalten der beiden Bestände dürfte damit zusammenhängen, dass der Bestand des Hauptzweiges sich aus einer Reihe von Ländern rekrutiert, während die Volksversicherten nur aus dem schweizerischen Geschäftsgebiet stammen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass für die Konstanten λ ungefähr der Betrag von $\pm 0,005$ genommen werden muss. Bei dieser Grössenordnung von λ tritt die nichtnormale Dispersion für kleine Werte von T nur schwach in Erscheinung. So kann zum Beispiel im vorliegenden Beobachtungsmaterial die nichtnormale Dispersion nur nachgewiesen werden, wenn mehrere Altersgruppen zusammengefasst werden, weil die mittlere Anzahl der rechnungsmässigen Toten pro Beobachtungsjahr und Altersgruppe nur etwa 40 beträgt. Für kleine Werte von T (etwa $T < 20$) kann daher ohne nennenswerten Fehler die gewöhnliche Poissonsche Verteilung (5) angenommen werden. Die Normalverteilung (6) sollte dagegen für kleine Versicherungsbestände nicht verwendet werden, weil die Poissonsche Verteilung für kleine T eine nicht unbeträchtliche Schiefe aufweist. Bei mittleren Beständen (etwa $20 \leq T \leq 50$) empfiehlt es sich, auf die erweiterte Poissonsche Verteilung (17) abzustellen. Für grosse Bestände mit etwa $T > 50$ folgen die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen annähernd der erweiterten Normalverteilung (19). Eine statistische Überprüfung der erweiterten Normalverteilung (19) könnte vorteilhaft mit Hilfe der Grösse

$$\xi = \frac{\Delta T}{\sqrt{T + \lambda T^2}}$$

vorgenommen werden, die dem von T und λ unabhängigen Verteilungsgesetze

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (26)$$

genügen müsste. Für die Altersgruppe mit $65 \leq x \leq 79$ erhält man zum Beispiel nach dem ω^2 -Test, wenn $\lambda = -0,01$ gesetzt wird,

$\omega^2 = 0,403$, ein Resultat, welches wesentlich besser mit dem Erwartungswert 1 harmoniert als das für die Grösse χ berechnete ω^2 für die gleiche Altersgruppe. Eine analoge Rechnung für weitere Altersgruppen kann jedoch mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Konstanten λ , und weil grosse Teile des Beobachtungsmaterials nicht genügend grosse T aufweisen, zu keinem befriedigenden Ergebnis führen.

Wie bereits einleitend erwähnt worden ist, haben die Untersuchungen von Lange übernormale Dispersion und ein normales Verteilungsgesetz für die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen ergeben. Dieses Resultat steht im Einklang mit der Gültigkeit der erweiterten Normalverteilung (19). Leider sind in der Arbeit von Lange keine näheren Angaben über den Umfang des verwendeten Beobachtungsmaterials zu finden, doch ist zu vermuten, dass es einen Umfang aufweist, welcher ohne weiteres die Anwendung von (19) gestattet.

V. Die Abhängigkeit zwischen den Sterblichkeitsschwankungen in verschiedenen Altersklassen

In der Risikotheorie wird in der Regel angenommen, es bestehe keine Abhängigkeit zwischen den Sterblichkeitsschwankungen in verschiedenen Altersklassen. Zur Prüfung dieses Sachverhaltes sollen die Korrelationskoeffizienten $r_{\chi_1 \chi_2}$ berechnet werden, wobei χ_1 und χ_2 die im Kapitel IIIb eingeführten Hilfsgrössen bedeuten, welche jeweils für das gleiche Kalenderjahr aus zwei Altersklassen genommen werden. Die Hilfsgrössen χ werden an Stelle der direkt beobachteten Werte ΔT gewählt, weil der Korrelationskoeffizient zwischen ΔT_1 und ΔT_2 nicht nur eine allfällige Abhängigkeit der jährlichen Sterblichkeitsschwankungen erfassen würde, sondern auch die Abhängigkeit zwischen den Bestandesentwicklungen in den beiden Beobachtungsreihen. Für den Korrelationskoeffizient $r_{\chi_1 \chi_2}$ gilt die Formel

$$r_{\chi_1 \chi_2} = \frac{\sum \chi'_1 \chi'_2}{\sqrt{\sum \chi_1'^2 \sum \chi_2'^2}}, \quad (27)$$

wobei $\sum \chi'_1 \chi'_2 = \sum \chi_1 \chi_2 - \frac{1}{n} \sum \chi_1 \sum \chi_2$ und

$$\sum \chi_1'^2 = \sum \chi_1^2 - \frac{1}{n} (\sum \chi_1)^2$$

ist und sämtliche Summen über alle zur Verfügung stehenden Kalenderjahre zu nehmen sind.

Ergibt die Rechnung einen Wert für $r_{z_1 z_2}$, der sich nur im Rahmen von zufälligen Schwankungen von Null unterscheidet, so erscheint die Annahme, dass die Sterblichkeit von zwei Altersklassen unabhängig voneinander verläuft, als plausibel; andernfalls gibt der berechnete Wert $r_{z_1 z_2}$ ein gewisses Mass für die Abhängigkeit des Sterblichkeitsverlaufes. Die Abgrenzung des für zufällige Schwankungen gültigen Wertebereiches könnte anhand des mittleren Fehlers von $r_{z_1 z_2}$ nach der für Normalkorrelation geltenden Formel

$$\sigma_{(r_{z_1 z_2})} = \frac{1 - r_{z_1 z_2}^2}{\sqrt{n}} \quad (28)$$

erfolgen, wobei n die Anzahl der Beobachtungspaare bedeutet. In Anbetracht dessen, dass (28) nur für grosse Stichproben gilt, empfiehlt es sich, das nachfolgend beschriebene, auch für kleine Stichproben geltende Verfahren anzuwenden.

Das Verteilungsgesetz $w(r)$ des Korrelationskoeffizienten r , der durch eine n Beobachtungspaare umfassende Stichprobe aus einer nicht korrelierten normalen Gesamtheit höherer Ordnung bestimmt wird, genügt der Formel

$$w(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dr. \quad (29)$$

Durch die Substitution

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \quad (30)$$

geht (29) in das Verteilungsgesetz von «Student» über

$$w(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n-2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (31)$$

Das Integral von (31) liegt in berechneten Tabellen vor, so dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes von t , welcher noch mehr von Null divergiert als der beobachtete, zu

$$P\{|t| \geq |t'|\} = 2 \int_{t'}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n-2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \quad (32)$$

berechnet werden kann. Fällt P grösser aus als 5 %, so ist die bei der Ableitung getroffene Annahme, dass in der Gesamtheit höherer Ordnung $r = 0$ ist, als plausibel zu betrachten. Bei der praktischen Anwendung dieses Testes auf das vorliegende Material ist zu beachten, dass die Verteilungen von χ , wie die Untersuchungen unter IIIb gezeigt haben, nicht normal sind. Trotzdem kann für das vorliegende Problem χ als annähernd normalverteilt angenommen werden, weil die Abweichung von der Normalverteilung besonders für kleine T nicht so stark ins Gewicht fällt, als dass die aus dem Test sich ergebende Schlussfolgerung in Frage gestellt wäre.

In der umstehenden Tabelle VIII sind die Werte von $r_{\chi_1\chi_2}$, t und P für einige Altersgruppenpaare zusammengestellt.

Aus Tabelle VIII ist zu entnehmen, dass P durchwegs mehr als 5 % beträgt und daher in keinem Fall klein genug ausfällt, als dass die angenommene Unabhängigkeit zwischen χ_1 und χ_2 als unwahrscheinlich gelten müsste. Die Werte $r_{\chi_1\chi_2}$ können daher nicht als wesentlich betrachtet werden. Immerhin ist festzustellen, dass negative Korrelationskoeffizienten vorherrschend auftreten und dass positive Werte in der Regel nur zwischen gleichaltrigen und benachbarten Altersgruppenpaaren auftreten. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass eine schwache Korrelation vorliegt; diese ist jedoch anhand des Beobachtungsmaterials nicht mit genügender Sicherheit nachzuweisen.

Ob eine Korrelation zwischen den Sterblichkeitsschwankungen in verschiedenen Altersklassen vorliegt oder nicht, und wie hoch die Korrelationskoeffizienten allenfalls anzusetzen sind, ist für die Berechnung der Streuung eines ganzen Versicherungsbestandes σ_{Σ}^2 aus den Streuungen von Teilbeständen σ_i^2 (zum Beispiel von einzelnen

Tabelle VIII

| 1. Alters- gruppe | 2. Alters- gruppe | $r_{z_1 z_2}$ | t | P % |
|----------------------|--------------------------------|---------------|---------|----------|
| <i>Hauptzweig</i> | <i>Hauptzweig</i> | | | |
| 75-79 | 70-74 | — 0,058 | — 0,358 | 71 |
| 75-79 | 65-69 | — 0,077 | — 0,540 | 58 |
| 70-74 | 65-69 | — 0,107 | — 0,663 | 50 |
| 65-69 | 60-64 | — 0,170 | — 1,322 | 19 |
| 60-64 | 55-59 | + 0,017 | + 0,142 | 89 |
| 55-59 | 50-54 | — 0,071 | — 0,593 | 55 |
| 50-54 | 45-49 | + 0,084 | + 0,698 | 48 |
| 45-49 | 40-44 | + 0,095 | + 0,794 | 42 |
| 40-44 | 35-39 | + 0,133 | + 1,061 | 29 |
| 60-64 | 50-54 | — 0,190 | — 1,598 | 11 |
| 60-64 | 45-49 | — 0,176 | — 1,486 | 14 |
| 50-54 | 40-45 | — 0,180 | — 1,498 | 13 |
| 45-49 | 35-39 | — 0,093 | — 0,779 | 44 |
| 60-64 | 40-44 | + 0,057 | + 0,468 | 64 |
| | <i>Volks- versicherung</i> | | | |
| 60-64 | 60-64 | + 0,272 | + 1,911 | 6 |
| 60-64 | 55-59 | + 0,054 | + 0,293 | 77 |
| 55-59 | 55-59 | — 0,076 | — 0,169 | 86 |
| 50-54 | 50-54 | — 0,006 | — 0,033 | 97 |

Altersklassen) von ausschlaggebender Bedeutung. Zwischen diesen Streuungen gilt die Beziehung

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sum_i \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{k \\ i \neq k}} r_{ik} \sigma_i \sigma_k. \quad (33)$$

Besteht zwischen den Sterblichkeitsschwankungen von verschiedenen Altersklassen keine Korrelation, so vereinfacht sich (33) in den oft verwendeten Ausdruck

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sum_i \sigma_i^2. \quad (33 a)$$

Die Streuung für den Gesamtbestand fällt grösser oder kleiner aus als nach Formel (33 a), je nachdem die Korrelationskoeffizienten r_{ik}

überwiegend positiv oder negativ sind. Zur Überprüfung dieses Sachverhaltes am Beobachtungsmaterial sollen die Grössen

$$\sum_t \left(\sum_i \Delta T_{t,i} \right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_i \sum_t \Delta T_{t,i}^2$$

miteinander verglichen werden. Nach Gleichung (33a) ist zu erwarten, dass diese Grössen bis auf Differenzen, die sich im Rahmen von zufällmässigen Schwankungen bewegen, übereinstimmen.

Das Resultat dieser Prüfung ist aus der nachstehenden Tabelle IX zu entnehmen.

Tabelle IX

| Alters- gruppe | $\sum_t \left(\sum_i \Delta T_{t,i} \right)^2$ | $\sum_t \sum_i \Delta T_{t,i}^2$ | $\sigma \left[\sum_t \left(\sum_i \Delta T_{t,i} \right)^2 \right]$ |
|-------------------------|---|----------------------------------|---|
| <i>Hauptzweig</i> | | | |
| 25–44 | 6725 | 5750 | 1254 |
| 45–64 | 13811 | 15307 | 2566 |
| 65–79 | 3008 | 3384 | 1054 |
| 25–79 | 26682 | 24441 | 4672 |
| <i>Volkversicherung</i> | | | |
| 35–64 | 7598 | 8034 | 1835 |

Mit Rücksicht auf den nach Formel (10b) berechneten mittleren Fehler darf die Übereinstimmung zwischen den nach Formel (33a) und den direkt berechneten Fehlerquadratsummen als genügend gelten. Es ist daher vertretbar, bei der Berechnung der Streuung für einen Versicherungsbestand die gegenüber Formel (33) bedeutend einfachere Formel (33a) zu verwenden.

Die in Kapitel III für die einzelnen Altersklassen nachgewiesene nichtnormale Dispersion tritt bei der Betrachtung von ausgedehnteren Altersklassen in der Regel nicht mehr so stark in Erscheinung wie bei den einzelnen Altersklassen, weil bei der Verbindung von unabhängigen nichtnormalen Kollektivs eine gewisse Angleichung an die Normalverteilung erfolgt. Diese Erwartung bestätigend, zeigt das Kriterium χ^2 , dass, mit Ausnahme der Altersgruppe $65 \leq x \leq 79$, die erweiterten Altersgruppen nahezu normal verteilte Sterblichkeitsschwankungen aufweisen.

Die in der nachstehenden Tabelle X angeführten Werte für $\Sigma \chi^2$ sind nach der Formel

$$\Sigma \chi^2 = \sum_t \frac{\left(\sum_i \Delta T_{t,i}\right)^2}{\sum_i T_{t,i}}$$

berechnet, während die in Tabelle VI zusammengestellten Werte nach der Formel

$$\Sigma \chi^2 = \sum_t \sum_i \frac{(\Delta T_{t,i})^2}{T_{t,i}}$$

bestimmt worden sind.

Tabelle X

| Altersgruppe | Beobachteter Wert von $\Sigma \chi^2$ | Erwartungswert |
|-------------------------|--|----------------|
| <i>Hauptzweig</i> | | |
| 25-44 | 71,050 | 68 |
| 45-64 | 68,568 | 69 |
| 65-79 | 29,241 | 60 |
| 25-79 | 72,423 | 69 |
| <i>Volkversicherung</i> | | |
| 35-64 | 28,811 | 30 |

Bei Sterblichkeitsmessungen wird in der Regel nicht nur auf die Beobachtungen von einzelnen Kalenderjahren abgestellt, sondern es werden die Beobachtungen für längere Zeiträume zusammengefasst. Für die Beurteilung von derart gewonnenen Ergebnissen wäre es wichtig zu wissen, ob zwischen den Sterblichkeitsschwankungen von aufeinanderfolgenden Jahren eine Abhängigkeit besteht. Der Umfang des vorliegenden Beobachtungsmaterials erlaubt es leider nicht, auch diese Frage noch abzuklären. Es lässt sich immerhin vermuten, dass zwischen den Sterblichkeitsschwankungen in aufeinanderfolgenden Kalenderjahren eine schwache Abhängigkeit besteht; für längere Zeiträume dagegen darf in der Hauptsache Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Jahressterblichkeiten angenommen werden. Trifft diese Annahme zu, so wird die nichtnormale Dispersion auch bei der Ausdehnung der Beobachtungsdauer nach und nach abgeschwächt, und es tritt eine Annäherung an die normale Dispersion ein.

Zusammenfassung

Die vorliegenden Untersuchungen haben ergeben, dass die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einzelnen Altersklassen keine normale Dispersion aufweisen. Werden Bestände beobachtet, die nicht nur einzelne, sondern möglichst viele Altersklassen umfassen, so ist die nichtnormale Dispersion nicht mehr so ausgeprägt wie bei den einzelnen Altersklassen. Normale Dispersion darf daher am ehesten angenommen werden, wenn ein Bestand vorliegt, der möglichst viele Altersklassen umfasst. Diese Voraussetzung dürfte im allgemeinen bei den in der Risikotheorie auftretenden Fragen zutreffen. Es lässt sich ferner vermuten, dass auch bei der Vereinigung von Beobachtungen, die aus verschiedenen Beobachtungsjahren stammen, eine Angleichung an die normale Dispersion eintritt.

Einleitend ist die Frage berührt worden, ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Grundlage für die Mathematik der Lebensversicherung betrachtet werden darf. Wird unter «Wahrscheinlichkeitsrechnung» nur die auf dem Bernoullischen Urnenschema fussende Theorie verstanden, so muss, soweit die vorliegende Untersuchung in Betracht kommt, die gestellte Frage verneint werden, weil normale Dispersion als eine grundlegende Voraussetzung dieser Theorie zu betrachten ist. Immerhin darf festgestellt werden, dass die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Modell liefert, das in gewissen Fällen die Wirklichkeit mit befriedigender Annäherung beschreibt.

Der Verfasser geht jedoch mit der Auffassung nicht einig, dass nur die aus dem Bernoullischen Urnenschema folgende Theorie als «Wahrscheinlichkeitsrechnung» gelten darf. Auch die aus dem Urnenschema für Wahrscheinlichkeitsansteckung und andern erweiterten Urnenschemata abgeleiteten Theorien müssen als Bestandteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelten, wenn eine Weiterentwicklung dieser mehr und mehr an Bedeutung gewinnenden Disziplin nicht verunmöglicht werden soll. Die in diesem Sinne aufgefasste Wahrscheinlichkeitsrechnung darf zweifellos als ein Fundament der Lebensversicherungsmathematik angesehen werden.

Literaturverzeichnis

- C. Lange*: Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebensversicherung und in der Feuerversicherung. (Wirtschaft und Recht der Versicherung 64/2, 1932.)
- H. Jecklin*: Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen. (Mitteilungen, Band 41/1, 1941.)
- P. Nolfi*: Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung. (Berichte des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940.)
— Wahrscheinlichkeit un stetiger Ereignisse bei kontinuierlich wirkenden Ursachen. (Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 15, fasc. 1.)
- F. Eggenberger*: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. (Mitteilungen, Heft 19, 1924.)
- J. F. Steffensen*: Factorial Moments and Discontinuous Frequency-Functions. (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1923.)
— Free Functions and the «Student» — Fisher Theorem. (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1936.)
- R. v. Mises*: Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Leipzig 1931.)
- G. U. Yule* and *M. G. Kendall*: An Introduction to the Theorie of Statistics. (London 1937.)
- W. P. Elderton*: Frequency-Curves and Correlation. (London 1906.)
- Rietz-Baur*: Handbuch der mathematischen Statistik. (Leipzig 1930.)
- O. Anderson*: Einführung in die mathematische Statistik. (Wien 1935.)
- Rechenschaftsberichte der *Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt* für die Jahre 1869—1938.