

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	45 (1945)
Artikel:	L'évolution des collectivités
Autor:	Franckx, E.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-555229

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'évolution des collectivités

Par *E. Franckx* (Bruxelles)

Le problème de l'évolution des collectivités a été l'objet d'études intéressantes dans le courant des dix dernières années. Il a même été proposé comme sujet au dernier congrès des actuaires de Zurich. Ce fait ne doit pas nous étonner puisque les actuaires suisses se sont particulièrement occupés de cette question.

On considère un ensemble d'éléments qui peuvent être éliminés en raison de causes diverses. Cette disparition est régie par une loi de probabilité connue ou dont les modalités sont déterminables par l'observation statistique du matériel étudié.

Cette loi d'élimination sera supposée définie par la suite des

$$q_1 \ q_2 \ \dots \ q_i \ \dots \ q_n$$

avec la condition

$$\sum_1^n q_i = 1 \quad (1)$$

qui suppose que chaque élément doit être éliminé dans un laps de temps comportant un nombre fini de périodes unitaires.

La collectivité ainsi considérée n'est pas fermée en ce sens qu'on admet qu'elle se renouvelle par l'introduction de

$$A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n \ A_{n+1} \ \dots \ A_p \ \dots$$

éléments nouveaux à la fin de la 1^e, 2^e... p^e période.

Il en résulte que le nombre probable des éléments éliminés à la fin de la p^e période sera

$$A_{p-1} q_1 + A_{p-2} q_2 + \dots + A_{p-i} q_i + \dots A_{p-n} q_n.$$

Si l'on se fixe la condition d'un ensemble total invariable, il faut admettre que le nombre probable des éléments à ajouter à la fin de la p^e période devra répondre à la condition d'invariance:

$$(2) \quad A_p = A_{p-1} q_1 + A_{p-2} q_2 + \dots + A_{p-n} q_n$$

Les nombres A sont appelés *nombres de renouvellement*. Partant d'un nombre initial A_0 , la relation (2) définit par récurrence une séquence infinie de ces nombres. On se rend compte immédiatement que ceux-ci ne dépendent que de la loi d'élimination et du nombre initial A_0 d'éléments constituant la collectivité.

Le comportement asymptotique des nombres A_n est un problème qui a été très discuté. Si ces nombres tendent vers une limite constante, la collectivité tend vers un état d'équilibre, nous dirons que l'on a le *cas régulier*. Dans le cas contraire l'état de déséquilibre sera certain et l'on a alors le *cas singulier*.

M. Hadwiger¹⁾, dans un article récent a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'obtention du cas régulier. Nous croyons cependant qu'il y a intérêt à pouvoir discerner, par le simple examen de la loi d'élimination, si le cas régulier est réalisé. Le problème n'est pas sans analogie avec le problème des probabilités en chaîne de Markoff. En transposant dans le domaine de l'évolution d'une collectivité la méthode élémentaire que nous avons utilisée dans l'étude des chaînes de Markoff²⁾, on atteint non seulement le but recherché mais aussi des résultats définitifs, même dans l'étude du cas singulier.

§ 1

Condition d'obtention du cas régulier

Avant d'établir le théorème principal nous pouvons d'abord observer que la formule (2) définit A_p comme moyenne pondérée des n nombres $A_{p-1} \dots A_{p-n}$ qui le suivent. A_p se trouve donc compris entre le plus petit et le plus grand de ces n nombres de renouvellement. Appelons les respectivement $a^{(p)}$ et $A^{(p)}$

$$(3) \quad a^{(p)} \leq A_p \leq A^{(p)}.$$

¹⁾ *Hadwiger*: Ein Konvergenzkriterium für Erneuerungszahlen. Skandinavisk Aktuarieidschrift 1938-3-4 page 226.

²⁾ *Franckx*: La théorie des chaînes de Markoff. Skandinavisk Aktuarieidschrift 1939-3-4 page 200.

Lemme I.

La succession des nombres $A^{(k)}$ et $a^{(k)}$ définissent deux suites monotones non décroissante et non croissante.

Car on doit avoir $A^{(p+1)} \leq A^{(p)}$. Les deux suites de n nombres définissant $A^{(p)}$ et $A^{(p+1)}$ ne diffère que par A_p et A_{p-n} . Si A_{p-n} est le plus grand des n nombres définissant $A^{(p)}$ en le supprimant pour passer à $A^{(p+1)}$, on diminue la limite supérieure. S'il n'est pas le plus grand, on a nécessairement $A^{(p)} = A^{(p+1)}$. La démonstration pour la limite inférieure est identique. On obtient ainsi les deux suites monotones

$$\dots A^{(p+1)} \leq A^{(p)} \leq A^{(p-1)} \dots$$

$$\dots a^{(p-1)} \leq a^{(p)} \leq a^{(p+1)} \dots$$

Inégalité fondamentale

Désignons par ε le plus petit des termes non nuls q_i qui définissent la loi d'élimination. L'existence d'un tel terme est assuré par la relation (1). On aura par conséquent

$$q_l - \varepsilon \leq 0$$

q_l désignant un terme non nul de la loi d'élimination.

D'autre part en vertu du lemme précédent et de l'inégalité (3)

$$a^{(r-n)} \leq A_{r+k-j} \leq A^{(r-n)}$$

à condition que $k-j \geq -n$ et par suite

$$a^{(r-n)} q_j \leq A_{r+k-j} q_j \leq A^{(r-n)} q_j \quad (4)$$

de même on pourra écrire

$$a^{(r-n)} (q_l - \varepsilon) \leq A_{r+k-l} (q_l - \varepsilon) \leq A^{(r-n)} (q_l - \varepsilon) \quad (5)$$

pour $k-l \geq -n$.

En sommant (4) pour $j=1, 2 \dots l-1, l+1 \dots n$ et en ajoutant (5) on obtient

$$a^{(r-n)} \sum_1^n q_j - \varepsilon a^{(r-n)} \leq \sum_1^n A_{r+k-j} q_j - \varepsilon A_{r+k-l} \leq A^{(r-n)} \sum_1^n q_j - \varepsilon A^{(r-n)}$$

d'où en vertu des relations (1) et (2)

$$a^{r-n} (1 - \varepsilon) \leq A_{r+k} - \varepsilon A_{r+k-l} \leq A^{(r-n)} (1 - \varepsilon)$$

$$(6) \quad \text{pour} \quad k \geq l - n.$$

Cette condition sera toujours réalisée pour $k \geq 0 \quad l \leq n$.

Théorème I. Pour obtenir le cas régulier il suffit que la loi d'élimination, si elle comprend plus d'un terme, en contienne au moins deux termes positifs q_k et q_l dont les indices k et l soient premiers entre eux.

Le cas où il n'y a qu'un seul terme exige $q_1 = 1$ est banal. La collectivité se renouvelle entièrement à chaque période et par conséquent le cas régulier est acquis dès l'origine.

Si plusieurs termes existent, supposons que q_k et q_l répondent à ces conditions

a) Soit x_0 et y_0 un système de solutions entières de l'équation.

$$xk + yl = 1.$$

On pourra pour α et β suffisamment grands écrire

$$(7) \quad N + i = \alpha_i k + \beta_i l \quad i = 0, 1, 2 \dots n-1 \quad \alpha_i \geq 0 \quad \beta_i \geq 0$$

en posant $\alpha_i = \alpha + ix_0 \quad \beta_i = \beta + iy_0 \quad N = \alpha k + \beta l$.

Dès lors en vertu de l'inégalité fondamentale (6)

$$a^{(r-n)} (1 - \varepsilon) \leq A_{r+\alpha_i k + \beta_i l} - \varepsilon A_{r+\alpha_i k + (\beta_i-1)l} \leq A^{(r-n)} (1 - \varepsilon)$$

de même

$$a^{(r-n)} (1 - \varepsilon) \leq A_{r+\alpha_i k + (\beta_i-1)l} - \varepsilon A_{r+\alpha_i k + (\beta_i-2)l} \leq A^{(r-n)} (1 - \varepsilon)$$

jusque

$$a^{(r-n)} (1 - \varepsilon) \leq A_{r+\alpha_i k + l} - \varepsilon A_{r+\alpha_i k} \leq A^{(r-n)} (1 - \varepsilon)$$

en éliminant les termes intermédiaires on obtient :

$$a^{(r-n)}(1 - \varepsilon^{\beta i}) \leq A_{r+a_i k + \beta_i l} - \varepsilon^{\beta i} A_{r+a_i k} \leq A^{(r-n)}(1 - \varepsilon^{\beta i}).$$

Puisque $q_k > 0$ on peut reprendre le même processus d'élimination, et on obtient ainsi

$$a^{(r-n)}(1 - \varepsilon^{\alpha_i + \beta_i}) \leq A_{r+a_i k + \beta_i l} - \varepsilon^{\alpha_i + \beta_i} A_r \leq A^{(r-n)}(1 - \varepsilon^{\alpha_i + \beta_i}). \quad (8)$$

b) L'inégalité (8), nous pouvons l'écrire pour $i = 0, 1 \dots (n-1)$, c'est-à-dire en vertu de (7) pour les nombres

$$A_{r+N} \quad A_{r+N+1} \quad \dots \quad A_{r+N+n-1}.$$

Posons $m_i = \alpha_i + \beta_i$, on pourra écrire quelque soit i , M le maximum de ces termes

$$A_{r+N+i} \leq A^{(r-n)} - \varepsilon^{m_i} [A^{(r-n)} - A_r]$$

et par conséquent

$$A^{(r+N+n)} \leq A^{(r-n)} - \varepsilon^M [A^{(r-n)} - A_r]$$

de même

$$a^{(r-n)} + \varepsilon^{m_i} [A_r - a^{(r-n)}] \leq A_{r+N+i}$$

et en particulier

$$a^{(r-n)} + \varepsilon^M [A_r - a^{(r-n)}] \leq a^{(r+N+n)}$$

et par soustraction

$$A^{(r+N+n)} - a^{(r+N+n)} \leq (1 - \varepsilon^M) (A^{(r-n)} - a^{(r-n)}).$$

c) On aura de même

$$A^{(r+N+2n)} - a^{(r+N+2n)} \leq (1 - \varepsilon^M) (A^{(r)} - a^{(r)})$$

et plus généralement

$$A^{[r+k(N+2n)]} - a^{[r+k(N+2n)]} < (1 - \varepsilon^M)^k [A^{(r)} - a^{(r)}]$$

par suite cette différence décroît au moins aussi rapidement que le terme général d'une série convergente, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{[r+k(N+2n)]} - a^{[r+k(N+2n)]} = 0$$

ce qui assure le cas régulier.

Remarques: Le théorème comprend quelques cas particuliers pratiques :

1^o le théorème est toujours vérifié lorsque tous les termes de la loi d'élimination sont positifs;

2^o plus généralement il suffit que le premier terme q_1 , soit positif, car 1 est premier avec tous les nombres entiers. Il s'en suit que le cas singulier ne peut s'introduire que si $q_1 = 0$.

Dans le démonstration l'inégalité (6) joue un rôle fondamental; on peut d'ailleurs sans difficulté démontrer directement à partir de cette inégalité, les deux cas particuliers précédents. Nous n'insisterons pas sur cet aspect de la question.

Théorème II. *La limite \bar{A} vers laquelle tendent les nombres de renouvellement dans le cas régulier vaut*

$$\bar{A} = \frac{A_0}{q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + nq_n}$$

qui est toujours différent de zéro si A_0 n'est pas nul.

Pour le démontrer il suffit de reprendre la méthode d'exposition de M. Hadwiger.

La probabilité pour qu'un élément ne soit pas éliminé à la fin de la i^{e} période après son entrée dans la collectivité sera d'après le théorème des probabilités totales

$$p_i = 1 - [q_1 + q_2 + \dots + q_i].$$

Par suite $A_{r-i} p_i$ représente le nombre probable des «non éliminés» i périodes après leur entrée dans la collectivité à la fin de la $(r-i)^{\text{e}}$ période.

Or, après r années, la collectivité a gardé sont effectif au complet par suite les nombres de renouvellement doivent obéir à la relation

$$A_0 = A_r + A_{r-1} p_1 + A_{r-2} p_2 + \dots + A_{r-n_1} p_{n-1}$$

et à la limite dans le cas régulier lorsque r tend vers l'infini.

$$A_0 = \bar{A} [1 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}]$$

d'où par une transformation immédiate

$$\bar{A} = \frac{A_0}{q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n}.$$

On constate que ce nombre est toujours différent de zéro.

§ 2

Condition d'obtention du cas singulier

Au paragraphe précédent nous avons obtenu une condition très simple pour l'obtention du cas régulier. Nous allons démontrer que cette condition est également nécessaire. Il suffit pour cela de démontrer que si le théorème I n'est pas vérifié on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [A^{(n)} - a^{(n)}] \neq 0.$$

Simultanément nous mettrons en lumière quelques propriétés caractéristiques du cas singulier.

Lorsque la loi d'élimination ne contient aucun terme q_k et q_l positifs, dont les indices sont premiers entre eux, il faut et il suffit que les indices des termes non nuls soient des multiples d'un même nombre. Soit ω le plus grand commun diviseur de tous ces indices. Ce nombre possède des propriétés caractéristiques, nous l'appellerons *l'ordre* de la loi d'élimination.

Nous avons vu que si l'ordre de la loi est égal à l'unité on a le cas régulier. Nous avons pour but de démontrer que si l'ordre n'est pas unitaire, le cas singulier sera certain.

Lemme I.

Si ω est l'ordre de la loi $A_1 A_2 \dots A_{\omega-1}$ sont nuls. En effet $q_1 q_2 \dots q_{\omega-1}$, sont nécessairement nuls sinon ω ne serait pas le plus petit commun multiple, de tous les indices et ne serait pas l'ordre de la loi d'élimination.

Lemme II.

Si ω est l'ordre de la loi, on peut subdiviser l'ensemble de tous les nombres de renouvellement en ω ensembles disjoints,

$$A_{i+k\omega} \quad i = 1 \dots \omega - 1 \text{ et } k \text{ quelconque,}$$

tel que les nombres de renouvellement de l'ensemble $i \neq \omega$ soient nuls.

Il est évident que les ensembles sont disjoints puisqu'un nombre quelconque ne peut être congru qu'à une seule valeur de i dans la congruence de module ω .

D'autre part on aura par définition

$$A_{i+k\omega} = q_{r_1\omega} A_{i+(k-r_1)\omega} + q_{r_2\omega} A_{i+(k-r_2)\omega} + \dots + q_{r_m\omega} A_{i+(k-r_m)\omega}$$

avec

$$n = r_m \omega$$

et cette relation de récurrence permet de proche en proche de démontrer que $A_{i+k\omega}$ est proportionnel à A_i . Or d'après le lemme I ces nombres sont tous nuls.

Lemme III.

Les nombres de renouvellement de l'ensemble ω tendent vers une limite.

En effet prenons ω comme période unitaire

$$q_{\omega k+1} = q_{\omega k+2} = \dots = q_{\omega k+\omega-1} = 0$$

car sinon ω ne serait pas l'ordre de la loi mais plus petit. Par conséquent la probabilité d'élimination dans une période de durée ω est définie par la valeur de $q_{\omega(k+1)}$ et d'autre part puisque $A_{\omega k+1} = \dots = A_{\omega k+\omega-1}$ sont nuls, on constate que pour une période de durée ω il faut introduire précisément $A_{\omega(k+1)}$ éléments nouveaux. En d'autres termes les nombres de renouvellement de l'ensemble ω sont ceux que l'on obtient en prenant ω comme période unitaire.

Mais alors le cas régulier est certain car si ω est l'ordre il y a au moins deux indices $q_{\omega k}$ et $q_{\omega(k+1)}$ qui sont non nuls car sinon cet ordre serait un multiple de ω . k et $(k+1)$ étant premiers entre eux le cas régulier est acquis.

Théorème III. Si ω est plus grand que l'unité, le cas singulier est acquis.

En vertu de lemme II

$$A_{i+k\omega} = 0 \quad i = 1, 2 \dots \omega - 1$$

et par suite $a^{(n)}$ est toujours nul quel que soit n

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = 0$.

D'autre part, en vertu du lemme II la suite $A_{k\omega}$ tend vers une limite \bar{A}_ω , qui en vertu du théorème II n'est pas nulle, par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} = \bar{A}_\omega \neq 0.$$

Il en résulte que les deux suites ne convergent pas, ce qui entraîne le cas singulier.

Théorème IV. Dans le cas singulier la moyenne arithmétique

$$M_n = \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n}$$

tend vers une limite déterminée lorsque n croît.

Nous avons vu que $A_{i+k\omega} = 0$ pour $i = 1, 2 \dots \omega - 1$ on a donc

$$M_n = \frac{A_0 + A_\omega + A_{2\omega} + \dots + A_{\lambda\omega}}{\lambda\omega} \frac{\lambda\omega}{n}$$

$\lambda\omega$ étant le plus grand multiple de ω compris dans n .

Or la moyenne de Cesaro $\frac{A_0 + A_\omega + \dots + A_{\lambda\omega}}{\lambda}$ tend vers \bar{A}_ω .

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{\bar{A}_\omega}{\omega}.$$

Conclusions

Arrivés au terme de cette étude, nous croyons utile de rassembler les résultats importants.

Pour obtenir:

1^o Le cas régulier, il faut et il suffit que la loi d'élimination comprenne deux termes positifs q_k et q_l dont les indices k et l sont premiers entre eux ou plus brièvement il faut et il suffit que l'ordre de la loi d'élimination soit unitaire.

Dans ce cas la limite est donnée par

$$\bar{A} = \frac{A_0}{q_1 + 2q_2 + \dots + nq_n}.$$

2^o Pour obtenir le cas singulier il faut et il suffit que la loi d'élimination soit d'ordre supérieur.

Mais si on prend comme période d'observation l'ordre de la loi, la collectivité tend toujours vers l'état d'équilibre et le cas régulier est acquis.

Ainsi la question de savoir dans quelle condition l'état d'équilibre à la limite est certain est complètement vidée, mais nous avons pu par cette méthode simple établir une condition que l'on peut vérifier immédiatement à la simple observation de la loi d'élimination.

Dans cet ordre d'idée nous croyons avoir fait un grand pas.

Quoiqu'il en soit le problème sous cet aspect entre dans le champ d'application du «principe ergodique»¹⁾ «qui proclame que l'effet capricieux d'une opération dépendant du hasard se trouve régularisé par une répétition suffisante de cette opération».

Ici l'opération considérée est le renouvellement d'une collectivité constante et la conclusion de cette étude est la suivante:

«Par le choix convenable de la période d'observation du renouvellement d'une collectivité constante, le principe ergodique ne se trouve jamais en défaut à priori.»

¹⁾ Fréchet: Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités, tome II.