

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 45 (1945)

Artikel: Über Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus

Autor: Hadwiger, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-555228>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus

Von *H. Hadwiger*, Bern

1. Problemstellung

Das für die mathematische Statistik grundlegende Poissonsche Gesetz

$$(1) \quad \Phi_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty; n = 0, 1, 2, \dots),$$

das jeder natürlichen Zahl $n = 0, 1, 2, \dots$ einen durch die Formel gegebenen Wahrscheinlichkeitswert zuweist, spielt in verschiedenen Teilen der Naturwissenschaft und Technik eine entscheidende Rolle. Wir erwähnen beispielsweise die Anwendung auf Dichteschwankungen in Kolloiden und Gasen¹⁾ und auf die Erscheinungen der Radioaktivität²⁾ sowie auf Fragen des Fernsprechwesens³⁾. In der Versicherungswissenschaft beherrscht dieses Verteilungsgesetz die Statistik der seltenen Ereignisse⁴⁾, wie sie etwa bei der Erfassung der Kinderselbstmorde Anwendung gefunden hat; hier tritt es ferner bei der mathematischen Behandlung verschiedener Risikoprobleme auf und hat in der neueren Theorie der Sachversicherung zum Beispiel grosse Bedeutung erhalten⁵⁾.

¹⁾ *R. Fürth*: Schwankungserscheinungen in der Physik. Braunschweig 1920 (Sammlung Vieweg, H. 48).

²⁾ *L. v. Bortkiewicz*: Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin 1913.

³⁾ *G. Rückle* und *F. Lubberger*: Der Fernsprechverkehr als Massenerscheinung mit starken Schwankungen. Berlin 1924.

⁴⁾ *L. v. Bortkiewicz*: Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig 1898.

⁵⁾ *P. Riebesell*: Einführung in die Sachversicherungsmathematik. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft 56, Berlin 1936. — *P. Riebesell*: Die mathematischen Grundlagen der Sachversicherung. Berichte des zwölften internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940. — *W. Günter Ackermann*: Eine Erweiterung des Poissonschen Grenzwertsatzes und ihre Anwendung auf die Risikoprobleme in der Sachversicherung. Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin 4 (8) 1939.

Die Vorzugsstellung, die das Verteilungsgesetz einnimmt, liegt einerseits darin begründet, dass es sich unmittelbar der Behandlung eines Grundschemas der Wahrscheinlichkeitsrechnung anschliesst, indem sich (1) in bekannter Weise durch Grenzübergang ¹⁾ aus der Newtonschen Formel gewinnen lässt, andererseits auch darin, dass es sich durch seine funktionalen Eigenschaften auszeichnet.

Indem wir die Haupteigenschaften des Poissonschen Gesetzes zusammenfassen, ergeben sich die vier grundlegenden Relationen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \Phi_n(x) \geq 0 \quad (0 \leq x < \infty; n = 0, 1, 2, \dots); \\ \text{(II)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) = 1; \\ \text{(III)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \Phi_n(x) = x; \\ \text{(IV)} \quad \Phi_n(x+y) = \sum_{\lambda=0}^n \Phi_{\lambda}(x) \Phi_{n-\lambda}(y). \end{array} \right.$$

Diese vier Beziehungen stehen mit geeigneten wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutungen im engen Zusammenhang. Eine im Hinblick auf die Gesetze (2) aufschlussreiche Interpretation des Verteilungsgesetzes (1) ist die folgende:

Man denke sich im zeitlichen Ablauf zufallsartig und unabhängig gleichartige Ereignisse verteilt, so dass im Mittel auf die Zeiteinheit ein Ereignis entfällt. In diesem Falle stellt (1) die Wahrscheinlichkeit dar, dass in einem beliebig gewählten Zeitintervall der Länge x genau n Ereignisse stattfinden ²⁾.

So ergeben sich die Bedingungen (I) und (II) in trivialer Weise. Die Relation (III) hängt mit der Voraussetzung über die Ereignisdichte zusammen. Betrachtet man endlich ein Zeitintervall der

¹⁾ *R. v. Mises*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien 1931, bes. S. 146—148. Betreffend allgemeinere Grenzübergänge vgl. auch: *H. Pollaczek-Geiringer*: Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Zeitschr. angew. Math. und Mechanik 8 1928. Ferner: *R. v. Mises*: Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Zeitschr. angew. Math. und Mechanik 1 1921.

²⁾ *A. Khintchine*: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2 (4), Berlin 1933.

Länge $x + y$, so führt die Berücksichtigung aller Möglichkeiten, in welcher die n Ereignisse auf die Teilintervalle x und y aufgeteilt werden können, durch Anwendung des Multiplikations- und Additionssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Additionstheorem (IV).

Eine vom theoretischen Standpunkt aus gesehen naheliegende, für die praktische Statistik nicht überflüssige Frage kann so formuliert werden: Ist das Poissonsche Gesetz (1) die einzige Lösung der vier Bedingungen (2), oder gibt es noch weitere Verteilungsgesetze dieser Art?

Um die Antwort auf die gestellte Frage vorwegzunehmen, bemerken wir, dass es das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Wege zur Gewinnung anderer Lösungen vorzuzeigen, die Eigenschaften aller dieser Lösungen anzugeben und ihre Gesamtheit zu charakterisieren. Jede Lösung, die also die vier Bedingungen von (2) simultan erfüllt, wollen wir ein Verteilungsgesetz vom Poissonschen Typ nennen.

2. Eigenschaften der Lösungen

Bevor wir an die Bildung neuer Lösungen oder also an die Konstruktion von Verteilungsgesetzen vom Poissonschen Typus herantreten, wollen wir untersuchen, welche Eigenschaften sich allein aus den vier Postulaten (I) bis (IV) von (2) ableiten lassen. Die durch diese vier Bedingungen gegebene Bindung wird, wie wir unten sehen werden, die Natur der zulässigen Funktionen wesentlich vorbestimmen, andererseits ist sie nicht stark genug, um das Poissonsche Gesetz (1) allein als Lösung hervorgehen zu lassen.

Zunächst folgt aus (I) und (II), dass

$$(3) \quad 0 \leq \Phi_n(x) \leq 1$$

sein wird. Ähnlich folgt aus (III) ausserdem

$$(4) \quad 0 \leq \Phi_n(x) \leq \frac{x}{n} \quad (n \geq 1).$$

Aus (I) und (III) allein schliesst man auf

$$(5) \quad \Phi_n(0) = 0 \quad (n \geq 1),$$

während sich jetzt im Hinblick auf (II) noch

$$(6) \quad \Phi_n(0) = 1 \quad (n = 0)$$

ergibt.

Für $n = 0$ bedeutet (IV) das Bestehen der Funktionalgleichung

$$(7) \quad \Phi_0(x + y) = \Phi_0(x) \Phi_0(y),$$

die mit Rücksicht auf die durch (3) gegebene Beschränktheit nach einem bekannten Satz ¹⁾ nur die Lösung

$$(8) \quad \Phi_0(x) = e^{-ax} \quad (a > 0)$$

zulässt. Wir beweisen jetzt, dass

$$(9) \quad \Phi_n(x) = e^{-ax} P_n(x)$$

ist, wo $P_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades von x bezeichnet. Durch (9) ist also die Form der in Betracht fallenden Lösungen unseres Problems wesentlich eingeschränkt. Den Beweis führen wir durch das Verfahren der Induktion: Wir nehmen an, dass (9) für $n = 0, 1, \dots, m-1$ bereits bewiesen sei. Nach (8) trifft dies in der Tat für $m = 1$ zu, indem ja $P_0(x) = 1$ ist. Zeigen wir jetzt, dass (9) auch für $n = m$ richtig ist! Machen wir auch für $n = m$ den Ansatz (9), so ist offenbar zu beweisen, dass dann $P_n(x)$ tatsächlich ein Polynom n -ten Grades ist. Die Verwertung des erwähnten Ansatzes lässt nun aus (IV) die für die unbekannte Funktion $P_n(x)$ gültige Funktionalgleichung

$$(10) \quad P_n(x + y) = P_n(x) + P_n(y) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_\lambda(x) P_{n-\lambda}(y)$$

hervorgehen. Mit Rücksicht auf die aus (4) entspringende Ungleichung

$$0 \leq P_n(x) \leq \frac{x}{n} e^{ax} \quad (n \geq 1)$$

¹⁾ Über diese durch (7) dargestellte, insbesondere aber auch über die durch Logarithmierung hervorgehende Funktionalgleichung besteht eine grosse Spezialliteratur. Eine der letzten Behandlungen der (komplexen, multiplikativen) Gleichung vgl. man bei *L. Vietoris*: Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen. *Journal reine angew. Math.* 186 1—14, 1944.

schliessen wir auf

$$0 \leq \frac{P_n(x+y) - P_n(x)}{y} \leq \frac{e^{ay}}{n} + x e^{a(x+y)} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(n-\lambda)}.$$

Aus dieser Beschränktheit der Differenzenquotienten folgt nun zunächst, dass $P_n(x)$ stetig sein muss. Wenn wir jetzt (10) nach y von 0 bis 1 integrieren, was im Hinblick auf die soeben erwiesene Stetigkeit zulässig ist, so können wir die Darstellung

$$P_n(x) = \int_x^{x+1} P_n(t) dt - \sum_{\lambda=0}^{n-1} C_{n-\lambda} P_\lambda(x)$$

folgern, wobei wir noch die Integrale

$$C_\nu = \int_0^1 P_\nu(y) dy$$

eingeführt haben. Die rechte Seite enthält neben Polynomen (induktive Voraussetzung!) ein Integral über einer stetigen Funktion, so dass wir nun schliessen können, dass $P_n(x)$ differenzierbar ist. — Wenn wir also jetzt (10) nach y differenzieren und dann $y = 0$ setzen, so geht die Beziehung

$$(11) \quad P'_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} P'_{n-\lambda}(0) P_\lambda(x)$$

hervor. Auf der rechten Seite steht ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades. Also ist $P_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Wenn die Ableitungswerte

$$(12) \quad P'_\nu(0) = a_\nu$$

besonders bezeichnet werden, so lässt sich die Beziehung (11) mit Berücksichtigung von (5) als Integralrekursion

$$(13) \quad P_n(x) = a_n x + \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_{n-\lambda} \int_0^x P_\lambda(t) dt \quad (n \geq 1)$$

anschreiben. Da wegen (I) und (5) offenbar

$$(14) \quad a_\nu \geq 0 \quad (\nu \geq 1); \quad a_0 = 0$$

sein muss, schliesst man auf Grund der Rekursion (13) induktiv leicht, dass die Polynome $P_n(x)$ nur positive Koeffizienten haben.

Die Integralrekursion (13) gestattet übrigens, die Polynome durch die Ableitungswerte (12) darzustellen; rekursiv ergeben sich die Formeln

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = a_1 x;$$

$$(15) \quad P_2(x) = \frac{1}{2} \{a_1^2 x^2 + 2a_2 x\};$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6} \{a_1^3 x^3 + 6a_1 a_2 x^2 + 6a_3 x\};$$

$$P_4(x) = \frac{1}{24} \{a_1^4 x^4 + 12a_1^2 a_2 x^3 + (24a_1 a_3 + 12a_2^2) x^2 + 24a_4 x\}.$$

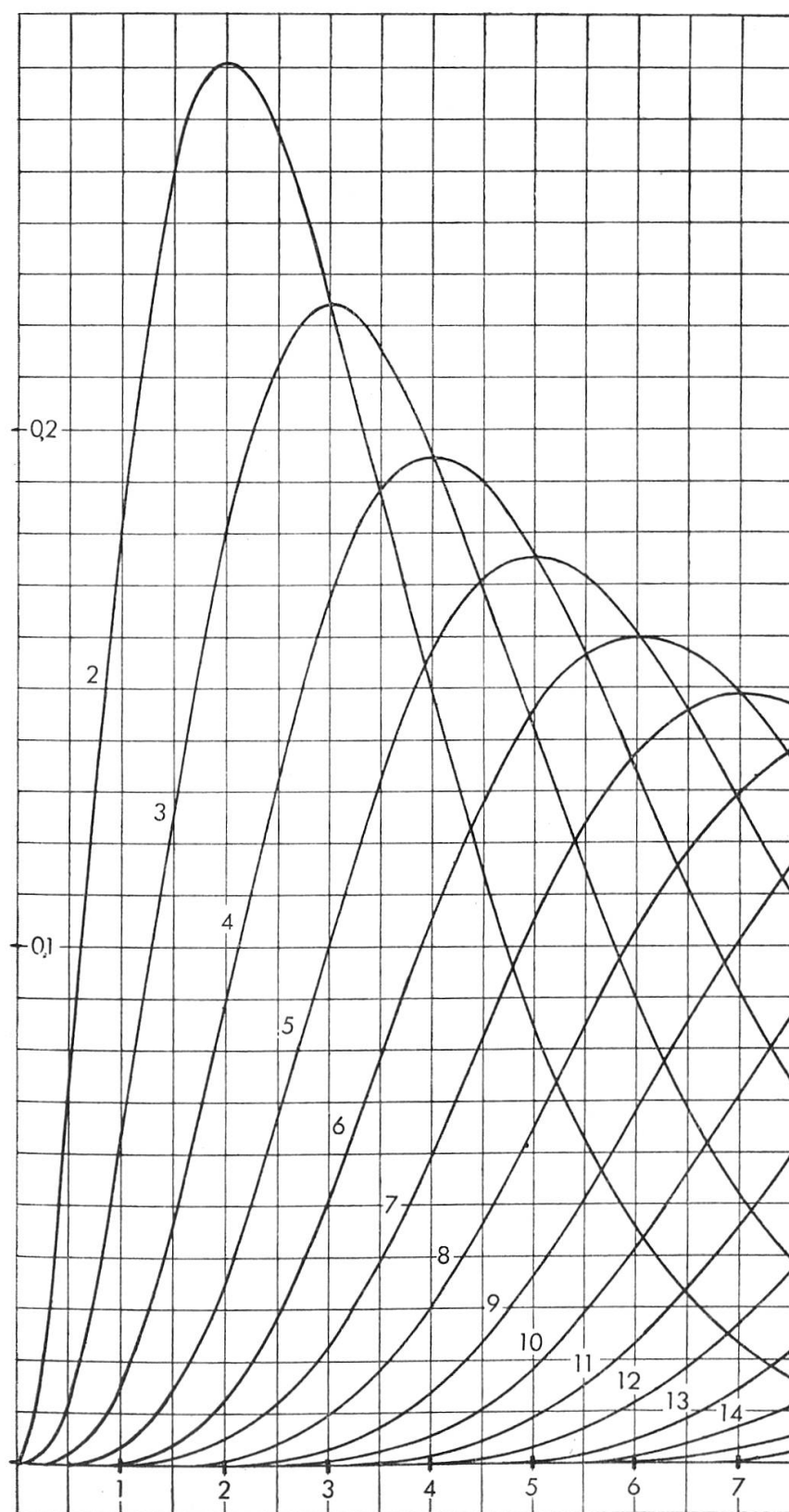
Es ist indessen zu beachten, dass die Zahlenfolge (12) neben (14) noch weiteren Bedingungen zu genügen hat, wenn die Polynome (15) zu einer Lösung des hier zugrunde gelegten Problems gehören sollen. Die hier massgebenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden sich später in einem anderen Zusammenhang noch ergeben (vgl. Formel 26).

Eine elementare Diskussion lehrt, dass die sich auf Grund der Polynome (15) ergebenden Funktionen (9) einen einfachen glockenförmigen Verlauf zeigen, indem sie für $n \geq 1$ bei 0 beginnen, bei einem Abszissenwert x_n ein Maximum erreichen, und dann wieder asymptotisch gegen 0 abnehmen (vgl. Figur¹). Diese wohlbekannte gestaltliche Eigenschaft des Poissonschen Gesetzes in Abhängigkeit vom Parameter x ist also allen Verteilungsgesetzen von dem von uns betrachteten Typus gemeinsam.

Für die Abszisse x_n des Maximums von $\Phi_n(x)$ gilt die algebraische Bestimmungsgleichung

$$P'_n(x) - aP_n(x) = 0,$$

¹) Die nebenstehende Darstellung der normalen Poissonschen Verteilungsfunktionen wurde dem Verfasser von Herrn P. Glur, Bern, zur Verfügung gestellt.



$$\Phi_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}, n = 2, 3, \dots, 14;$$

welche wir in der Form

$$(16) \quad \frac{x P'_n(x)}{P_n(x)} = a x$$

schreiben wollen; so erkennt man nämlich, dass sich die linke Seite als ein gewogenes arithmetisches Mittel der Zahlen $1, 2, \dots, n$ deuten lässt, so dass sich die Beziehung

$$(17) \quad \frac{1}{a} \leq x_n \leq \frac{n}{a}$$

ergibt. Man beachte, dass beispielsweise beim normalen Poissonschen Gesetz (1) $x_n = n$ und $a = 1$ ist, so dass in (17) also das Gleichheitszeichen auf der rechten Seite in Betracht kommt.

3. Komposition von Lösungen

In dem nachfolgenden Abschnitt zeigen wir, wie man aus bereits vorgegebenen Verteilungsgesetzen vom Poissonschen Typus neue Lösungen gewinnen kann. Die in diesem Zusammenhang erwähnten Kompositionen stellen funktionale Operationen dar, die also, auf Lösungen angewendet, nicht aus der Klasse der Lösungen hinausführen. — Insofern unendliche Reihen in Betracht fallen, wollen wir uns darauf beschränken, die Rechnungen nur formal durchzuführen; es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die Durchführung mit strikten Konvergenzbetrachtungen usw. wohl möglich ist, immerhin aber Umstände verursacht, die dem bescheidenen gesteckten Ziel dieses Abschnittes nicht recht angemessen sind.

Wir besprechen drei Kompositionen dieser Art, nämlich die Intermittierung, die Faltung und die Entwicklung.

1. Die Intermittierung:

Es sei $\Phi_n(x)$ eine Lösung und k eine natürliche Zahl, dann ist auch

$$(18) \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0 & (n \neq m k) \\ \Phi_m\left(\frac{x}{k}\right) & (n = m k) \end{cases}$$

eine Lösung.

Der Beweis ist sehr einfach: Postulat (I) gilt trivialerweise. (II) gilt, da offenbar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m\left(\frac{x}{k}\right) = 1$$

ist. Ebenso ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \chi_n(x) = k \sum_{m=0}^{\infty} m \Phi_m\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \frac{x}{k} = x,$$

so dass auch (III) erfüllt wird. Endlich rechnet man aus, dass

$$\sum_{\lambda=0}^n \chi_{\lambda}(x) \chi_{n-\lambda}(y) = 0$$

ist, falls $n \neq mk$ ist, da dann in der Summe nie gleichzeitig $\lambda = \nu k$ und $n - \lambda = \mu k$ ausfällt. Ist dagegen $n = mk$, so ergibt sich für die oben angeschriebene Summe der Ausdruck

$$\sum_0^m \Phi_{\nu}\left(\frac{x}{k}\right) \Phi_{m-\nu}\left(\frac{y}{k}\right) = \Phi_m\left(\frac{x+y}{k}\right) = \chi_n(x+y),$$

womit auch die Geltung von (IV) verifiziert ist.

2. Die Faltung:

Es sei sowohl $\Phi_n(x)$ als auch $\Psi_n(x)$ eine Lösung. Dann ist auch

$$(19) \quad \chi_n(x) = \sum_{\lambda=0}^n \Phi_{\lambda}(\alpha x) \Psi_{n-\lambda}(\beta x) \quad \begin{pmatrix} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

Beweis: Postulat (I) ist trivialerweise erfüllt. Die Verifikation von (II) ergibt sich aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda=0}^n \Phi_{\lambda}(\alpha x) \Psi_{n-\lambda}(\beta x) \right) = \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Phi_{\lambda}(\alpha x) \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \Psi_{\mu}(\beta x) \right) = 1.$$

Zur Verifikation von (III) haben wir einen Kunstgriff anzuwenden, indem wir in der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\sum_{\lambda=0}^n \Phi_{\lambda}(\alpha x) \Psi_{n-\lambda}(\beta x) \right)$$

auf der rechten Seite n durch $\lambda + (n - \lambda)$ ersetzen. So lässt sich dann die Summe umschreiben in

$$\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda \Phi_{\lambda}(\alpha x) \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \Psi_{\mu}(\beta x) \right) + \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Phi_{\lambda}(\alpha x) \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \mu \Psi_{\mu}(\beta x) \right),$$

woraus sich der Wert $\alpha x + \beta x = x$ ergibt.

Endlich haben wir

$$\sum_{r=0}^n \chi_r(x) \chi_{n-r}(y) = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{\lambda=0}^r \Phi_{\lambda}(\alpha x) \Psi_{r-\lambda}(\beta x) \right) \left(\sum_{\mu=0}^{n-r} \Phi_{\mu}(\alpha y) \Psi_{n-r-\mu}(\beta y) \right).$$

Die Transformation $\mu = \varrho - \lambda$; $r = \lambda + \sigma$ ergibt für diese Summe

$$\sum_{\varrho=0}^n \left(\sum_{\lambda=0}^{\varrho} \Phi_{\lambda}(\alpha x) \Phi_{\varrho-\lambda}(\alpha y) \right) \left(\sum_{\sigma=0}^{n-\varrho} \Psi_{\sigma}(\beta x) \Psi_{n-\varrho-\sigma}(\beta y) \right),$$

oder also

$$\sum_{\varrho=0}^n \Phi_{\varrho}(\alpha x + \alpha y) \Psi_{n-\varrho}(\beta x + \beta y) = \chi_n(x + y),$$

wodurch auch Postulat (IV) verifiziert ist.

3. Die Entwicklung:

Es sei sowohl $\Phi_n(x)$ als auch $\Psi_n(x)$ eine Lösung. Dann ist auch

$$(20) \quad \chi_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi_n(\lambda) \Phi_{\lambda}(x)$$

eine Lösung.

Es ist hier zu beachten, dass es sich um eine Reihenentwicklung der neuen Lösung nach den Funktionen der gegebenen Lösung $\Phi_n(x)$ handelt, wobei die Koeffizienten der Entwicklung durch die Funktionen der zweiten gegebenen Lösung $\Psi_n(x)$ geliefert werden!

Beweis: Postulat (I) ist trivialerweise erfüllt. Zur Verifikation von (II) rechnen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi_n(\lambda) \Phi_{\lambda}(x) \right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\lambda) \right) \Phi_{\lambda}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Phi_{\lambda}(x) = 1,$$

und analog zu derjenigen von (III)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \chi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi_n(\lambda) \Phi_{\lambda}(x) \right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \Psi_n(\lambda) \right) \Phi_{\lambda}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda \Phi_{\lambda}(x) = x.$$

Um endlich auch (IV) zu bestätigen, schreiben wir

$$\sum_{r=0}^m \chi_r(x) \chi_{m-r}(y) = \sum_{r=0}^m \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi_r(\lambda) \Phi_{\lambda}(x) \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \Psi_{m-r}(\mu) \Phi_{\mu}(y) \right),$$

oder

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^m \Psi_r(\lambda) \Psi_{m-r}(\mu) \right) \Phi_{\lambda}(x) \Phi_{\mu}(y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Psi_m(\lambda + \mu) \Phi_{\lambda}(x) \Phi_{\mu}(y).$$

Setzen wir noch $\lambda + \mu = \varrho$, so erhält die Summe die Gestalt

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \Psi_m(\varrho) \left(\sum_{\lambda=0}^{\varrho} \Phi_{\lambda}(x) \Phi_{\varrho-\lambda}(y) \right) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \Psi_m(\varrho) \Phi_{\varrho}(x+y) = \chi_m(x+y),$$

was zu zeigen war.

4. Erzeugung von Lösungen

Nachfolgend werden wir ein Verfahren besprechen, das einerseits Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus in beliebiger Anzahl zu liefern imstande ist, andererseits auch eine vollständige Charakterisierung aller möglichen Lösungen gestattet. — Das bekannte Verfahren, dessen wir uns bedienen wollen, besteht darin, die Funktionen als Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung einer geeigneten analytischen Funktion einzuführen. Wie wir sogleich sehen werden, erlauben die in Betracht fallenden erzeugenden Funktionen eine einfache funktionentheoretische Charakterisierung, so dass die Gesamtheit aller Lösungen leicht überblickt werden kann.

Wir beweisen nämlich den folgenden Erzeugungssatz:

Notwendig und hinreichend dafür, dass die Funktionen $\Phi_n(x)$ ein Verteilungsgesetz vom Poissonschen Typus, das die Bedingungen (I) bis (IV) erfüllt, darstellt, ist das Bestehen einer Identität der Form

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) z^n = e^{x\varphi(z)},$$

wobei $\varphi(z)$, der erzeugende Exponent, eine analytische Funktion bezeichnet, die den nachstehend aufgeführten vier Bedingungen genügt:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I}^0\text{)} \quad \varphi(z) \text{ in } |z| < 1 \text{ regulär;} \\ \text{(II}^0\text{)} \quad \varphi^{(n)}(0) \geq 0 \quad (n \geq 1); \\ \text{(III}^0\text{)} \quad \varphi(1) = 0^*); \\ \text{(IV}^0\text{)} \quad \varphi'(1) = 1^*). \end{array} \right.$$

*) Zu den Bedingungen (III⁰) und (IV⁰) ist noch die folgende Zusatzbemerkung zu machen: Wenn der Punkt $z = 1$ eine Singularität von $\varphi(z)$ darstellt, was nach dem Satz von Vivanti-Dienes ¹⁾ sicher dann der Fall ist, wenn der Konvergenzradius der Potenzreihe in (21) 1 ist, so sollen $\varphi(1)$ und $\varphi'(1)$ die Grenzwerte

$$\varphi(1) = \lim_{z \rightarrow 1-0} \varphi(z) \quad \text{und} \quad \varphi'(1) = \lim_{z \rightarrow 1-0} \varphi'(z)$$

bezeichnen. Dass sich dieser Fall tatsächlich einstellen kann, lehrt das Beispiel

$$\varphi(z) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n - 1}{n^3}.$$

Zur Illustration des Erzeugungssatzes diene noch die Bemerkung, dass dem normalen Poissonschen Gesetz (1) als erzeugender Exponent die Funktion

$$(23) \quad \varphi(z) = z - 1$$

zugeordnet ist.

¹⁾ Vgl. E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916, bes. S. 65.

Wir beweisen nun den Erzeugungssatz:

a) Notwendig. Es sei ein Verteilungsgesetz $\Phi_n(x)$ vom Poisson-schen Typ vorgegeben. Wir bilden

$$\omega[x; z] = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) z^n.$$

Im Hinblick auf (3) ist $\omega[x; z]$ sicher im Kreise $|z| < 1$ regulär. Durch Multiplikation der im Einheitskreis absolut konvergenten entsprechenden Potenzreihen, gefolgt von der Anwendung des Additionstheorems (IV), leitet man die Funktionalgleichung

$$\omega[x; z] \omega[y; z] = \omega[x + y; z]$$

ab. Nach bekannten Sätzen ¹⁾ ist also

$$\omega[x; z] = e^{x\varphi(z)}.$$

Die hier auftretende Funktion $\varphi(z)$ muss nach der oben gemachten Feststellung auch in $|z| < 1$ regulär sein. Damit ist (I^o) verifiziert.

Nach (21) gilt

$$\Phi'_n(0) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d}{dx} \frac{d^n}{dz^n} e^{x\varphi(z)} \right]_{\substack{x=0 \\ z=0}} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Bedenken wir, dass wegen (I) und (5) für $n \geq 1$ offenbar $\Phi'_n(0) \geq 0$ sein muss, so ist damit (II^o) verifiziert.

Nun gilt weiter nach dem Abelschen Stetigkeitssatz ²⁾

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) = \lim_{z \rightarrow 1-0} e^{x\varphi(z)} = e^{x\varphi(1)} = 1,$$

und ebenso

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \Phi_n(x) = \lim_{z \rightarrow 1-0} \frac{d}{dz} e^{x\varphi(z)} = x\varphi'(1) e^{x\varphi(1)} = x.$$

¹⁾ Siehe Fussnote Seite 242.

²⁾ Vgl. K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. Aufl., Berlin 1931, S. 179.

Auf diese Weise folgt $\varphi(1) = 0$ und $\varphi'(1) = 1$, also (III^o) und (IV^o). Vgl. hierzu auch die Zusatzbemerkung zu diesen beiden Bedingungen.

b) Hinreichend. Es sei $\varphi(z)$ eine Funktion, die den gestellten Bedingungen (22) genügt. Die Potenzreihenentwicklung (21) konvergiert sicher im Kreis $|z| < 1$. Durch Multiplikation zweier entsprechender Reihen gewinnt man für die Funktionen $\Phi_n(x)$ das Additionstheorem (IV). Aus der Darstellung

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [e^{x\varphi(z)}]_{z=0}$$

folgt man weiter leicht, dass wegen (II^o) auch (I) erfüllt ist. Mit Rücksicht auf (I) kann nun aus der durch (III^o) und (IV^o) geforderten Existenz der entsprechenden Grenzwerte über die Umkehrung des *Abelschen* Stetigkeitssatzes auf Konvergenz und Summe der Reihen in (II) und (III) geschlossen werden, womit auch diese Postulate verifiziert sind.

Während des Beweises des Erzeugungssatzes ergab sich die Beziehung

$$(24) \quad \Phi'_n(0) = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!},$$

welche eine Relation zwischen der Lösung und ihrem erzeugenden Exponenten herstellt. Beachten wir, dass für $n \geq 1$

$$(25) \quad \Phi'_n(0) = P'_n(0) = a_n$$

gilt, wobei wir wieder die mit (12) eingeführten Ableitungswerte in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

Der Erzeugungssatz gibt uns nun die Möglichkeit, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die mit den Polynomen (15) gebildeten Funktionen (9) eine Lösung darstellen, zu formulieren. Diese lauten offenbar

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n \geq 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = 1, \end{array} \right.$$

da ja die Identität

$$(27) \quad \varphi(z) = -a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

besteht. Der Bedingung (26) entnimmt man noch, dass Lösungen nur für

$$(28) \quad 0 < a \leq 1$$

möglich sind.

Mit (23) haben wir einen erzeugenden Exponenten $\varphi(z)$, der die Bedingungen (22) erfüllt, angegeben. Um auf methodische Weise möglichst viele neue Erzeugungen zu gewinnen, ist es von Interesse, Operationen zu kennen, die aus bereits vorliegenden erzeugenden Exponenten neue ebensolche hervorgehen lassen.

Wie man leicht nachrechnet, sind mit $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ auch die nachfolgend angeführten Funktionen erzeugende Exponenten:

1. $\frac{1}{k} \varphi(z^k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$
2. $\alpha \varphi(z) + \beta \psi(z), \quad \alpha \geq 0; \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1;$
3. $\varphi[e^{\psi(z)}].$

Wir möchten noch darauf hinweisen, dass die drei angeführten Bildungen der Reihe nach den drei betrachteten Kompositionen der Lösungen entsprechen, nämlich der Intermittierung, der Faltung und der Entwicklung.

5. Integralrelationen

Zum Abschluss der vorstehend entwickelten Theorie der Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus treten wir noch kurz auf die Integrale

$$(29) \quad J_n = \int_0^{\infty} \Phi_n(x) dx$$

ein. Zunächst soll eine Abschätzung für die Integralwerte abgeleitet werden. Nach der Integralrekursion (13) kann im Hinblick auf (26) auf die Ungleichung

$$0 \leq P_n(x) \leq a \int_0^x \left\{ \sum_{\lambda=0}^{n-1} P_\lambda(t) \right\} dt \quad (n \geq 1)$$

geschlossen werden, aus der sich induktiv die Abschätzung

$$(30) \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sum_{v=1}^n \binom{n-1}{v-1} \frac{a^v x^v}{v!} \quad (n \geq 1)$$

gewinnen lässt. Durch Integration von (9) ergibt sich jetzt

$$(31) \quad 0 \leq J_n \leq \frac{2^{n-1}}{a} \quad (n \geq 1).$$

Durch die Abschätzung (31) wird jedenfalls sichergestellt, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n z^n$$

in einem Kreis von positivem Radius konvergiert.

Da im Kreis $|z| < 1$ der Realteil $R[z^n] < 1$ ausfällt, ergibt sich auf Grund von (27) für den Realteil des erzeugenden Exponenten $\varphi(z)$ die Beziehung

$$R[\varphi(z)] < 0,$$

wobei noch die Summenrelationen (26) Berücksichtigung fanden.

Somit kann also im Kreis $|z| < 1$

$$\int_0^{\infty} e^{x\varphi(z)} dx = -\frac{1}{\varphi(z)}$$

gesetzt werden. Die Integration von (21) ergibt somit

$$(32) \quad -\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n z^n.$$

Diese Beziehung gestattet also, die Integrale (29) als Koeffizienten einer Potenzreihenentwicklung zu gewinnen.

Nach (III⁰) kann

$$-\frac{1-z}{\varphi(z)} = \frac{1}{\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(1)}{z-1}\right)}$$

geschrieben werden, so dass sich mit (IV⁰)

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} -\frac{1-z}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi'(1)} = 1$$

ergibt. Nach einem bekannten Theorem von *Hardy-Littlewood*¹⁾ kann man hieraus auf das Bestehen der asymptotischen Relation

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_0 + J_1 + \dots + J_n}{1+n} = 1$$

schliessen. Die Folge der Integrale (29) braucht als solche nicht zu konvergieren. Ist dies jedoch der Fall, so muss nach (33) offenbar

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$$

gelten.

Wie man leicht verifiziert, gilt für das normale Poissonsche Gesetz (1) sogar

$$(35) \quad J_n = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Die Tabelle (2) der vier Haupteigenschaften (I) bis (IV) des Poissonschen Gesetzes lässt sich also noch durch die Integralbedingung

$$(V) \quad \int_0^\infty \Phi_n(x) dx = 1$$

ergänzen. — Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass das Poissonsche Verteilungsgesetz (1) die einzige Lösung der fünf simultan gestellten Bedingungen (I) bis (V) darstellt.

In der Tat ergibt die Verbindung von (35) und (32) für den erzeugenden Faktor die bereits mit (23) angeführte Funktion, die nach der Darstellung (21) das Poissonsche Gesetz erzeugt.

¹⁾ *Hardy and Littlewood: The Messenger of Mathematics, Ser. 2, 43 141, 1914.*

Die Postulate (I) bis (V) charakterisieren demnach das Poisson-
sche Verteilungsgesetz in eindeutiger Weise.

6. Eine spezielle Lösung

Nachdem durch die in der vorliegenden Abhandlung entwickelten
Theorie der Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus verschiedene
Wege zur Gewinnung von Lösungen aufgezeigt wurden, soll nun noch
in diesem letzten Abschnitt eine spezielle Lösung entwickelt werden,
die auch ihrer sonstigen analytischen Beziehungen wegen von In-
teresse sein dürfte.

Als Ausgangspunkt wählen wir die durch die Differentiations-
formel

$$(36) \quad R_n(x) = e^{-x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n e^x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

definierten Polynome. Die Formel ist so zu verstehen, dass der rechts
in der Klammer stehende Differentialoperator n -mal nacheinander
angewendet werden soll. Offensichtlich ist

$$(37) \quad R_0(x) = 1,$$

und für $n \geq 1$ ergibt sich aus (36) mühelos die Differentialrekursion

$$(38) \quad R_n(x) = x \{ R_{n-1}(x) + R'_{n-1}(x) \},$$

welche eine fortlaufende Berechnung der Polynome ermöglicht. So
erhält man

$$(39) \quad \begin{aligned} R_0(x) &= 1 \\ R_1(x) &= x \\ R_2(x) &= x^2 + x \\ R_3(x) &= x^3 + 3x^2 + x \\ R_4(x) &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x \\ R_5(x) &= x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 15x^2 + x. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$(40) \quad \chi_n(x) = \frac{R_n\left(\frac{x}{e}\right)}{n!} e^{-\left(1-\frac{1}{e}\right)x}$$

ein Verteilungsgesetz vom Poissonschen Typus darstellt. In der Tat: Ersetzt man in der Differentiationsformel (36) x durch xe^z , so kann diese in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$R_n(xe^z) = e^{-xe^z} \frac{d^n}{dz^n} (e^{xe^z}),$$

so dass sich

$$R_n(x) = e^{-x} \left[\frac{d^n}{dz^n} e^{xe^z} \right]_{z=0},$$

und damit die Darstellung der Polynome durch eine erzeugende Funktion

$$(41) \quad e^{x(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x)}{n!} z^n$$

ergibt. Eine einfache Umrechnung liefert jetzt

$$(42) \quad e^{x(e^{z-1}-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(x) z^n,$$

so dass als erzeugender Exponent die Funktion

$$(43) \quad \varphi(z) = e^{z-1} - 1$$

erkannt wird. Diese genügt aber den in (22) aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Erzeugung eines Verteilungsgesetzes vom Poissonschen Typus.

Den wesentlichen Bestandteil der Funktion (40) bildet das mit (36) eingeführte Polynom, mit dem wir uns noch kurz befassen wollen.

Wenn wir in (36) auf der rechten Seite für die Exponentialfunktion die Potenzreihe einsetzen, so gewinnen wir nach der gliedweisen Ausführung der Differentiationen die Darstellung

$$(44) \quad R_n(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} x^\nu.$$

Diese erlaubt durch eine einfache Rechnung das Bestehen der Rekursionsformel

$$(45) \quad R_{n+1}(x) = x \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} R_\lambda(x)$$

zu bestätigen. Eine interessante Tatsache ergibt sich, wenn wir zu der Anschrift von (44) die normale Poissonsche Verteilung (1) heranziehen. So lässt sich nämlich

$$(46) \quad R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \Phi_\nu(x)$$

schreiben, eine Beziehung, welche darlegt, dass sich die Polynome $R_n(x)$ als n -te Momente der Poissonschen Verteilung deuten lassen.

Indem wir auf die ursprünglich gegebene wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation zurückgreifen, erkennen wir, dass der Polynomwert $R_n(x)$ den Erwartungswert der n -ten Potenz der Ereignisanzahl in der Zeitspanne x darstellt. — Besondere Beachtung verdienen die Erwartungswerte, die sich auf die Zeiteinheit beziehen. Es handelt sich um die Zahlwerte

$$(47) \quad A_n = R_n(1),$$

welche von $A_0 = 1$ ausgehend auf Grund der Rekursion

$$(48) \quad A_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} A_\lambda$$

fortlaufend berechnet werden können und die in enger Beziehung zu kombinatorischen Fragen stehen ¹⁾.

Wenn wir endlich die Darstellung (44) noch für die Anschrift der hier betrachteten speziellen Verteilung (40) heranziehen, so lässt sich mit weiterer Verwendung des Zeichens für die normale Poissonsche Verteilung (1) die Entwicklung

¹⁾ *H. Hadwiger*: Gruppierung mit Nebenbedingungen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker 43 113—122, 1943.

$$(49) \quad \chi_n(x) = \sum_{\nu=\infty}^{\infty} \Phi_n(\nu) \Phi_{\nu}(x)$$

angeben. Sie zeigt, dass sich unsere Lösung aus der normalen Poisson-schen Verteilung (1) durch das Kompositionsverfahren (20), das wir dort als Entwicklung bezeichneten, ergibt.

Endlich folgern wir noch für die Integrale unserer speziellen Lösung die Formel

$$(50) \quad \int_0^{\infty} \chi_n(x) dx = J_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_n(\nu) \sim \int_0^{\infty} \Phi_n(t) dt = 1.$$

