

# Beitrag zur Theorie der Häufigkeitsfunktionen

Autor(en): **Kreis, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **45 (1945)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555167>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Beitrag zur Theorie der Häufigkeitsfunktionen

Von *H. Kreis*, Winterthur

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die binomialen Verteilungen als Beispiele von symmetrischen und asymmetrischen unstetigen Funktionen behandelt. Neu ist dabei die Benutzung eines Operators, durch den die formelmässige Ableitung von Mittelwerten und Summen von Potenzen von Abweichungen wesentlich erleichtert wird. Daran anschliessend wird im zweiten Teil eine Methode zur Bildung von symmetrischen und asymmetrischen stetigen Verteilungsfunktionen entwickelt. Die Methode gestattet, auf ungezwungene Art das Gaußsche Fehlergesetz und die Brunssche Verteilungsfunktion durch Grenzprozess zu begründen.

Zur Veranschaulichung der Entstehung einer binomialen Verteilung wollen wir uns  $s = 6$  Urnen denken. Diese enthalten je  $a = 3$  weisse und  $av = 2$  schwarze, somit  $N = a(1 + v) = 5$  Kugeln. Aus jeder dieser  $s$  Urnen wird je eine der  $N$  Kugeln herausgegriffen, so dass eine Zusammenstellung von teils weissen, teils schwarzen Kugeln zum Vorschein kommt. Im ganzen können  $N^s = 5^6$  oder 15 625 Ziehungen unterschieden werden, die sich je nach der Anzahl weisser und schwarzer Kugeln in 7 Klassen unterbringen lassen.

Ordnungs- zahl	Anzahl der Kugeln		Häufigkeit	
	weisse	schwarze	absolut	relativ
0	6	0	729	0,046 656
1	5	1	2 916	0,186 624
2	4	2	4 860	0,311 040
3	3	3	4 320	0,276 480
4	2	4	2 160	0,138 240
5	1	5	576	0,036 864
6	0	6	64	0,004 096
Total			15 625	1,000 000

Die absoluten wie auch die relativen Häufigkeitszahlen dieses Urnenspieles liefern zwei asymmetrische, unstetige Verteilungsfunktionen von der Form

$$\varphi(x) = C\alpha^s \binom{s}{x} v^x, \quad (1)$$

wo definitionsgemäss  $v$  eine beliebige rationale Zahl,  $C$  ein an sich unwesentlicher konstanter Faktor,  $\alpha$  und  $s$  ganzzahlig sind. Das veränderliche Argument  $x$  der Funktion (1) ist die Ordnungszahl der betreffenden Klasse;  $x$  tritt hier zugleich als Exponent von  $v$  und als Index des Binomialkoeffizienten  $\binom{s}{x}$  auf und kann infolgedessen nur einen der Werte 0; 1; 2 usw. bis  $s$  annehmen. Die Summenfunktion der Verteilung (1) wird durch die Gleichung definiert

$$S_0(x) = \sum \varphi(x) = C\alpha^s (1 + v)^s. \quad (2)$$

Diese Summe  $S_0$  stellt den Umfang der Reihe (1) dar. Über die unwesentliche konstante Zahl  $C$  lässt sich so verfügen, dass  $S_0$  entweder gleich  $N^s$  oder 1 oder gleich irgendeinem anderen zweckmässigen Wert wird. Im folgenden setzen wir  $C\alpha^s = 1$ , so dass der Umfang der Reihe

$$S_0(x) = (1 + v)^s \quad (3)$$

und die Verteilungsfunktion selbst

$$\varphi(x) = \binom{s}{x} v^x \quad (4)$$

sein werden.

Wir denken uns nun sämtliche  $N^s$  Kugelzusammenstellungen nach den  $s + 1$  Klassen geordnet und zählen die vorkommenden schwarzen Kugeln. Die Klasse  $(x)$  enthält  $\varphi(x) \cdot x$ , die ganze Tafel  $S_1 = \sum \varphi(x) \cdot x$  schwarze Kugeln. Eine Zusammenstellung enthält infolgedessen im Durchschnitt  $S_1 : S_0$  schwarze Kugeln. Im obigen Beispiel ist

$$S_0 = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^6 = 21,43347; \quad S_1 = \sum \binom{6}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot x = 51,44033$$

und  $S_1 : S_0 = 2,4$ , d. h. die mittlere Anzahl schwarzer Kugeln, die in den 15 625 verschiedenen Ziehungen auftreten, ist gleich 2, 4. Zur übersichtlichen Darstellung der Summen der höheren Potenzen

$$S_k = \sum \varphi(x) \cdot x^k \quad (5)$$

wollen wir den Operator  $\Delta$  folgendermassen definieren

$$\begin{aligned} \Delta f(v) &= v \cdot \frac{df}{dv} \\ \Delta^2 f(v) &= \Delta(\Delta f(v)) \\ \Delta^k f(v) &= \Delta(\Delta^{k-1} f(v)). \end{aligned} \quad (6)$$

Es folgt hieraus

$$\begin{aligned} \Delta C \cdot f(v) &= C \cdot \Delta f(v) \\ \Delta(f(v) + g(v)) &= \Delta f(v) + \Delta g(v) \\ \Delta v^x &= x \cdot v^x \\ \Delta^2 v^x &= x^2 \cdot v^x \\ \Delta^k v^x &= x^k \cdot v^x. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus (7) ergibt sich umgekehrt

$$\varphi(x) x^k = \binom{s}{x} v^x x^k = \Delta^k \binom{s}{x} v^x = \Delta^k \varphi(x) \quad (8)$$

und es kann also (5), wie folgt, geschrieben werden

$$S_k = \sum \Delta^k \varphi(x) = \Delta^k (1 + v)^s. \quad (9)$$

Es ist somit z. B.

$$\begin{aligned} S_1 &= \Delta(1 + v)^s = s(1 + v)^{s-1} \cdot v. \\ S_2 &= \Delta S_1 = s(s-1)(1 + v)^{s-2} v^2 + s(1 + v)^{s-1} v. \end{aligned}$$

Um eine allgemeine Beziehung zwischen den Summen  $S_1; S_2; S_3$  usw. zu erhalten bilden wir

$$\begin{aligned} (s - \Delta)(1 + v)^s &= s(1 + v)^s - s(1 + v)^{s-1} = s(1 + v)^{s-1} \\ \text{oder} \\ s(1 + v)^s - \Delta(1 + v)^s &= s(1 + v)^{s-1} \\ \text{also} \\ s(1 + v)^s - S_1 &= s(1 + v)^{s-1} \end{aligned} \quad (10)$$

Multipliziert man (10) beidseitig mit  $s-1-\Delta$ , so findet man

$$s(s-1)(1+v)^s - (2s-1)S_1 + S_2 = s(s-1)(1+v)^{s-2}; \quad (11)$$

ferner, wenn man mit  $s-2-\Delta$  multipliziert

$$\begin{aligned} s(s-1)(s-2)(1+v)^s - (3s^2-6s+2)S_1 + (3s-3)S_2 - S_3 = \\ = s(s-1)(s-2)(1+v)^{s-3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Aus (10) lässt sich die Summe  $S_1$ , aus (11)  $S_2$  und aus (12)  $S_3$  ermitteln.

Will man für die allgemeine Summe  $S_k$  einen formelmässigen Ausdruck, so geht man von dem symbolischen Produkt aus

$$\begin{aligned} (s-k+1-\Delta)(s-k-\Delta) \dots (s-\Delta)(1+v)^s = \\ = s(s-1) \dots (s-k+1)(1+v)^{s-k}. \end{aligned}$$

In der Entwicklung des Produktes linker Hand ersetzt man nach (9) Ausdrücke von der Form  $\Delta^i (1+v)^s$  durch  $S_i$  und erhält eine Gleichung von der Gestalt

$$f_0^{(k)}(1+v)^s - f_1^{(k)}S_1 + f_2^{(k)}S_2 + \dots + (-1)^k f_k^{(k)}S_k = f_0^{(k)}(1+v)^{s-k}, \quad (13)$$

in welcher  $f_0; -f_1; f_2 \dots; (-1)^k f_k$  Polynome in  $s$  bedeuten, die als Koeffizienten des nach  $t$  entwickelten Produktes

$$(s-k+1-t)(s-k-t) \dots (s-t) \quad (14)$$

auftreten. Ist insbesondere  $k=s+1$ , so hat das Produkt (14) die Form

$$(0-t)(1-t)(2-t) \dots (s-t).$$

Das absolute Glied  $f_0$  verschwindet und die Gleichung (13) geht in die *fundamentale Gleichung* über

$$-f_1^{(s+1)}S_1 + f_2^{(s+1)}S_2 - \dots + (-1)^{s+1}S_{s+1} = 0. \quad (15)$$

Da allgemein nach Gleichung (9)

$$\Delta S_k = S_{k+1}$$

ist, so gilt zwischen  $s+1$  aufeinander folgenden Potenzensummen

$$S_{l+1}; S_{l+2}; S_{l+3}; \dots S_{l+s+1} \text{ die Beziehung}$$

$$-f_1^{(s+1)} S_{l+1} + f_2^{(s+1)} S_{l+2} - \dots + (-1)^{s+1} S_{l+s+1} = 0, \quad (16)$$

die für jedes beliebige ganzzahlige  $l$  gültig ist.

Im Falle  $s=6$  lautet die Gleichung (16) in symbolischer Schreibart

$$-\Delta (1-\Delta) (2-\Delta) (3-\Delta) (4-\Delta) (5-\Delta) (6-\Delta) S_l = 0, \quad (17)$$

wobei unter  $\Delta^k S_l$  die Summe  $S_{l+k}$  zu verstehen ist.

Die Glieder der Gleichungen (13), (15) und (16) lassen sich homogen machen, wenn die Mittelwerte  $\sigma_k^k$  der Potenzensumme  $S_k$  folgendermassen definiert werden

$$S_0 \sigma_0 = S_0$$

$$S_0 \sigma_k^k = S_k, \text{ für } k = 1; 2; 3; \dots$$

also ist

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_k^k = S_k : S_0 = S_k : (1+v)^s. \quad (18)$$

Die Gleichungen (13) und (16) lauten nun

$$f_0^{(k)} \sigma_0 - f_1^{(k)} \sigma_1 + f_2^{(k)} \sigma_2^2 - \dots + (-1)^k f_k^{(k)} \sigma_k^k = f_0^{(k)} (1+v)^{-k} \quad (19)$$

$$-f_1^{(s+1)} \sigma_{l+1}^{l+1} + f_2^{(s+1)} \sigma_{l+2}^{l+2} - \dots + (-1)^{s+1} \sigma_{l+s+1}^{l+s+1} = 0. \quad (20)$$

Während wir bis hieher die Summen  $S_k$  der Momente  $k$ -ten Grades der Elemente  $x$  der Zahlentafel in bezug auf das Anfangs- bzw. niedrigste Argument  $o$  ermittelt haben, so wollen wir im Folgenden die Momente  $\varphi(x) (x-\xi)^k$  in bezug auf eine andere irgendwie definierte Vergleichszahl  $\xi$  berechnen. In unserem Urnenspiel könnten beispielsweise für  $\xi$  folgende Werte in Betracht fallen:

$\xi = 6$ , als Endglied der Ordnungszahlenreihe;

$\xi = 2$ , als Ordnungszahl mit der grössten Häufigkeit 4 860 bzw. 0,311 040;

$\xi = 3$ , als Ordnungszahl in der Mitte;

$\xi = 2, 4$ , als Mittelwert aller  $x$ -Argumente.

Für die Berechnung dieser neuen Momentensummen lassen sich mit Hilfe des Operators  $\Delta$  allgemeine Formeln aufstellen, in welchen die schon berechneten Grössen  $S_k$  bzw.  $\sigma_k$  als Hilfszahlen Verwendung finden.

Auf Grund der Definitionsgleichung (6) für  $\Delta$  findet man

$$\begin{aligned}(\Delta - \xi) v^x &= x v^x - \xi v^x = (x - \xi) v^x \\(\Delta - \xi)^2 v^x &= (\Delta - \xi) (\Delta - \xi) v^x = (x - \xi)^2 v^x\end{aligned}$$

und allgemein

$$(\Delta - \xi)^k v^x = (x - \xi)^k v^x. \quad (21)$$

Infolgedessen kann man schreiben

$$(\Delta - \xi)^k (1 + v)^s = \sum (\Delta - \xi)^k \binom{s}{x} v^x = \sum \binom{s}{x} v^x (x - \xi)^k.$$

Bezeichnen wir den Mittelwert aller Momente  $k$ -ten Grades der Verteilungstafel mit  $\mu_k^k$ ; setzt man also

$$\mu_k^k = \sum \varphi(x) (x - \xi)^k : \sum \varphi(x), \quad (22)$$

so gilt die *fundamentale Gleichung*

$$(1 + v)^s \mu_k^k = (\Delta - \xi)^k (1 + v)^s. \quad (23)$$

Linker Hand ist  $(1 + v)^s$  ein gewöhnlicher Faktor, mit welchem der Mittelwert  $\mu_k^k$  multipliziert wird; rechter Hand hingegen bedeutet  $(1 + v)^s$  die Funktion von  $v$ , auf welche die Operation  $(\Delta - \xi)^k$  auszuführen ist.

Für  $k = 0; 1; 2$  und  $3$  lautet insbesondere Gleichung (21)

$$k = 0 \quad (1 + v)^s \mu_0^0 = (\Delta - \xi)^0 (1 + v)^s$$

$$\text{oder } \mu_0^0 = 1$$

$$\text{oder nach Gleichung (18) } \mu_0 = 1$$

$$k = 1 \quad (1 + v)^s \mu_1^1 = (\Delta - \xi) (1 + v)^s$$

$$\text{oder } (1 + v)^s \mu_1 = S_1 - \xi (1 + v)^s$$

$$\text{oder nach Gleichung (18) } \mu_1 = \sigma_1 - \xi$$

$$k = 2 \quad (1 + v)^s \mu_2^2 = (\Delta - \xi)^2 (1 + v)^s$$

$$= S_2 - 2 \xi S_1 + \xi^2 (1 + v)^s$$

$$\text{oder nach Gleichung (18) } \mu_2^2 = \sigma_2^2 - 2 \xi \sigma_1 + \xi^2$$

$$\begin{aligned} k = 3 \quad (1 + v)^s \sigma_3^3 &= (\Delta - \xi)^3 (1 + v)^s \\ &= S_3 - 3 \xi S_2 + 3 \xi^2 S_1 - \xi^3 (1 + v)^s \\ \text{oder nach Gleichung (18)} \quad \mu_3^3 &= \sigma_3^3 - 3 \xi \sigma_2^2 + 3 \xi^2 \sigma_1 - \xi^3. \end{aligned}$$

Schreibt man symbolisch

$$(\sigma_1^1)^k = \sigma_k^k,$$

so lässt sich die letzte Gleichung symbolisch auch schreiben

$$\mu_3^3 = (\sigma_1^1 - \xi)^3.$$

Es leuchtet unmittelbar ein, dass man, symbolisch verstanden, allgemein schreiben kann

$$\mu_k^k = (\sigma_1^1 - \xi)^k.$$

In der Fundamentalgleichung (23) können wir die Grösse  $\xi$  als veränderliche Abszisse und den zugehörigen Mittelwert  $\mu_k$  als Ordinate des laufenden Punktes auf einer Kurve  $C_k$  betrachten. Die Gleichung von  $C_k$

$$(1 + v)^s \mu_k^k = (\Delta - \xi)^k (1 + v)^s \quad (23)$$

erlaubt uns, ihre Tangenten leicht zu bestimmen, indem wir sie nach  $\xi$  differenzieren. Es ist nämlich

$$(1 + v)^s k \mu_k^{k-1} \frac{\delta \mu_k}{\delta \xi} = -k (\Delta - \xi)^{k-1} (1 + v)^s,$$

welche Gleichung wir nach Gleichung (23) vereinfachen können in

$$\frac{\delta \mu_k}{\delta \xi} = - \left( \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \right)^{k-1}. \quad (24)$$

Die Gleichungen der Kurven  $C_1$ ;  $C_2$  und  $C_3$  lauten nach Gleichungen (23) und (24) wie folgt:

$$C_1: \quad \mu_1 = \sigma_1 - \xi,$$

$$\frac{\delta \mu_1}{\delta \xi} = -1.$$

$C_1$  ist somit eine fallende Gerade mit der Richtungszahl  $-1$ , welche die X-Achse im Punkte  $\xi = \sigma_1$  schneidet.



$$C_2: \quad \mu_2^2 = \sigma_2^2 - 2\xi\sigma_1 + \xi_2,$$

$$\frac{\delta\mu_2}{\delta\xi} = -\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right).$$

$C_2$  ist eine gleichseitige Hyperbel, deren imaginäre Achse mit der  $X$ -Achse zusammenfällt. Die Scheitel der Kurve oder das Minimum von  $\sigma_2^2$  findet man, indem man  $\frac{\delta\mu_2}{\delta\xi}$  gleich Null setzt. Das gibt  $\mu_1 = 0$  und dementsprechend  $\xi = \sigma_1$ .

Dieser Schnittpunkt  $(\sigma_1; 0)$  ist übrigens der Mittelpunkt der Hyperbel, durch welchen die zweite Asymptote geht.

$$C_3: \quad \mu_3^3 = \sigma_3^3 - 3\xi\sigma_2^2 + 3\xi^2\sigma_1 - \xi^3,$$

$$\frac{\delta\mu_3}{\delta\xi} = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_3}\right)^2.$$

Der Differentialquotient von  $\mu_3$  nach  $\xi$  ist immer negativ, d. h. die Kurve  $C_3$  fällt ununterbrochen von  $+\infty$  bis  $-\infty$ . Sie schneidet die  $X$ -Achse nur einmal, und zwar orthogonal, denn für  $\mu_3 = 0$  wird  $\frac{\delta\mu_3}{\delta\xi} = \infty$ .

Diesem Schnittpunkt  $\mu_3 = 0$  entsprechend hat die Kurve  $C_4$  ihre tiefste Stelle über und ihre höchste Stelle unter der  $X$ -Achse.

Allgemein erkennt man leicht, dass sämtliche Kurven geraden Grades  $C_2; C_4; C_6; \dots C_{2k}$  nur zwei reelle Asymptoten haben, welche mit den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel  $C_2$  zusammenfallen.

Sämtliche Kurven ungeraden Grades  $C_3; C_5; C_7; \dots C_{2k+1}$  haben nur eine reelle Asymptote, welche mit der Geraden  $C_1: \mu_1 + \xi = \sigma_1$  zusammenfällt.

Die Schnittpunkte dieser einteiligen, fallenden Kurven  $C_1; C_3; C_5$  usw. mit der  $X$ -Achse liefern die tiefsten (höchsten) Stellen über (unter) der  $X$ -Achse der Kurven  $C_2; C_4; C_6$  usw. Sie bestimmen die Minima der Mittelwerte  $\mu_2^2; \mu_4^4; \mu_6^6$  usw. Näheres über diese Kurvenscharen findet sich in anderer Darstellung bei *Lipps* [7].

Im Anhang gebe ich für die Verteilungsfunktion des eingangs besprochenen Urnschemas  $\binom{6}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x$  die vollständigen Gleichungen der 6 ersten  $C$ -Kurven samt deren graphischer Darstellung an.

Zur Beurteilung der Struktur einer Zahlenreihe  $\varphi(x)$ , d. h. zur Kennzeichnung der Verteilung oder Streuung ihrer Ordnungszahlen  $x$  über den ganzen in Betracht kommenden Zahlenbereich sind diese Mittelwerte  $\mu_k$  charakteristisch. Je mehr solche Mittelwerte vorliegen, desto besser lässt sich die Streuung charakterisieren und messen. Bei allen Untersuchungen über solche Mittelwerte und Streuungsmasszahlen von statistischen oder sonstigen Zahlenreihen stösst man aber unvermeidlich immer wieder auf die Mittelwerte  $\sigma_k^k$  der Potenzen der Ordnungszahlen in bezug auf ein an sich willkürliches ursprüngliches Zählsystem. Diese Grundzahlen  $\Sigma \varphi(x) x^k$  sind von fundamentaler Bedeutung. Namentlich mit Rücksicht auf die stetigen Verteilungsfunktionen, deren Einführung sich geradezu aufdrängt, muss die Rolle dieser Grundzahlen hervorgehoben werden.

In der zweiten Begründung seines Fehlergesetzes betrachtet *Gauss* [6] die 3 Integrale

$$\int_{-u}^{+u} \varphi(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx,$$

in denen mit  $x$  der Fehler, mit  $\varphi(x)$  seine relative Häufigkeit bezeichnet ist. Das erste Integral gibt die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Fehler zwischen den Grenzen  $-u$  und  $+u$  liegt; es wird, wenn die Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  werden, welches auch die Funktion  $\varphi(x)$  auch sei, den Wert 1 annehmen müssen. Das zweite Integral stellt das Mittel aller möglichen Fehler oder den mittleren Wert der Grösse  $x$  dar und ist immer gleich Null, sobald zwei gleiche, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehene Fehler dieselbe Häufigkeit haben; ein von Null abweichender Wert würde anzeigen, dass die Beobachtungsreihe noch einen konstanten Fehler enthält. Das dritte Integral oder der mittlere Wert des Quadrates  $x^2$  erscheint am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definieren und zu messen, so dass von zwei Beobachtungsreihen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenige für die genauere zu halten ist, für welche das Integral den kleineren Wert erhält. Vgl. *Bauschinger*, Ausgleichungsrechnung [6].

Indem wir uns nun an die Eigenschaften der binomialen Verteilungen anlehnen, wollen wir unter einer stetigen Häufigkeitsfunktion jede reelle, positive Funktion  $\varphi(x)$  mit folgenden Eigenschaften verstehen:

1. sie soll für alle Werte von  $x$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  stetig und endlich sein;

2. das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx$ , wo  $k$  eine beliebige, vorgegebene ganze Zahl bedeutet, soll endlich sein.

Diese Bedingungen genügen noch nicht, um die unbekannte Funktion  $\varphi(x)$  vollständig zu definieren. Aus den gestellten Forderungen folgt aber, dass notwendigerweise

$$\lim x^k \varphi(x) \rightarrow 0$$

sein muss, wenn  $x \rightarrow \pm \infty$  wird, und dass, wenn das Integral

$$S_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx$$

endlich ist, die Integrale  $S_0; S_1; \dots S_{k-1}$  ebenfalls endlich sein werden. Diesen Forderungen genügen aber unzählige Funktionen, von denen wir im Folgenden nur ein Paar Beispiele geben wollen.

Wir fangen an mit rationalen Funktionen von der Form

$$\varphi(x) = \frac{P_n(x)}{Q_{2m}(x)}.$$

Als Nenner  $Q_{2m}(x)$  nehmen wir ein reelles Polynom in  $x$  vom Grade  $2m$ , das keine reellen Nullstellen hat und immer positiv ist. Wegen der Beschaffenheit der Nullstellen kommt als Nenner ein Polynom ungeraden Grades nicht in Betracht. Als Zähler  $P_n(x)$  nehmen wir ein reelles Polynom von  $x$ , das niemals negativ werden darf. Die Bedingung für das endliche Integral  $S_k$  kann bekanntlich nur dann erfüllt werden, wenn im Integranden  $x^k P_n : Q_{2m}$  der Grad  $2m$  des Nenners den Grad  $n + k$  des Zählers um mehr als 1, also um mindestens 2 übertrifft.

Eine einfache rationale Funktion dieser Art ist beispielsweise

$$\varphi(x) = \frac{C}{x^4 + 1}.$$

Durch Partialbruchzerlegung lassen sich die Integrale  $S_0$  und  $S_2$  in geschlossener Form bestimmen, während  $S_1$ , wegen der identischen Gleichung  $\varphi(+x) = \varphi(-x)$ , Null ist. Man findet

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2} - 1)$$

und

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1 - x\sqrt{2} + x^2}{1 + x\sqrt{2} + x^2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x\sqrt{2} - 1).$$

Somit

$$S_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi C}{\sqrt{2}},$$

$$S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Cx^2 dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi C}{\sqrt{2}}.$$

Um eine normierte Verteilung zu erhalten, wählen wir den Wert der Konstanten  $C$  so, dass  $S_0 = 1$  wird, also

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Die Häufigkeitsfunktion heisst dann

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(x^4 + 1)}. \quad (25)$$

Die Funktion (25) ist die reziproke Funktion der Parabelfunktion vierten Grades

$$y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(x^4 + 1).$$

Das Bild der Häufigkeitsfunktion (25) ist die reziproke Kurve dieser Parabel, nämlich das bekannte Profil einer Glocke. Die maximale Ordinate für  $x = 0$  ist gleich  $\varphi(0) = \sqrt{2} : \pi = 0,45$ . Die Abszissen der beiden reellen Wendepunkte genügen der Gleichung

$$x^4 = 0,6,$$

also  $x = \pm 0,88$  und  $y = 0,28$ .

Die Integrale  $S_3; S_4; \dots$  sind sämtlich unendlich gross. Hingegen führt im allgemeinen die Parabelfunktion

$$y = (1 + ax)^2 + (bx + cx^2)^2,$$

die nicht mehr gerade ist, zu einer asymmetrischen stetigen Häufigkeitsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{C}{(1 + ax)^2 + (bx + cx^2)^2}. \quad (26)$$

Die Integrale  $S_0; S_1$  und  $S_2$  sind endlich;  $S_3; S_4$  usw. unendlich.  $S_1$  ist aber nicht unbedingt gleich Null.

Sollen nun die Integrale  $S_k$  bis zu einem unbeschränkt hohen Index  $k$  endlich sein, so hat man an Stelle von Polynomen transzendente Funktionen zu Hilfe zu nehmen. Am nächsten kommen die Funktionen in Betracht, die kettenlinienartige Bilder liefern; beispielsweise

$$f_1(x) = \left( \frac{e^{\frac{ax}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{ax}{\sqrt{n}}}}{2} \right)^n, \quad (27)$$

$$f_2(x) = \left( \frac{e^{\frac{ax}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{ax}{\sqrt{n}}}}{2} \right)^n e^{bx}, \quad (28)$$

in welchen  $n$  eine natürliche Zahl,  $a$  und  $b$  reelle Konstanten bedeuten sollen. Die Funktionen

$$\varphi_1(x) = \frac{C}{f_1(x)} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \frac{C}{f_2(x)}$$

besitzen offenbar die von uns geforderten Eigenschaften von stetigen Häufigkeitsfunktionen, gleichgültig welche Werte  $n$  erteilt wird. Ausserdem sind für beliebig hohe Werte von  $k$  die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_1(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_2(x) dx$$

endlich.

Die Häufigkeitsfunktion  $\varphi_1(x)$  ist symmetrisch in bezug auf das Argument  $x = 0$ , d. h. es ist für jedes  $x$  identisch

$$\varphi_1(+x) = \varphi_1(-x).$$

Die zweite Häufigkeitsfunktion  $\varphi_2(x)$  ist im allgemeinen asymmetrisch: es gibt keinen festen Wert  $c$  derart, dass identisch

$$\varphi_2(c+x) = \varphi_2(c-x)$$

wäre.

Da die Reihenentwicklungen der Exponentialfunktionen in  $f_1$  beständig konvergieren, können wir schreiben

$$f_1(x) = \left(1 + \frac{a^2 x^2}{2n} + \frac{R}{n^2}\right)^n,$$

wo  $R$  eine endliche Grösse bedeutet, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a^2 x^2}{2n} + \frac{R}{n^2}\right)^n = e^{\frac{a^2 x^2}{2}}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(x) = C e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \quad (29)$$

Wir erhalten in diesem Falle das *Gaußsche* Häufigkeitsgesetz als Grenze der Verteilungsfunktion  $\varphi_1(x)$ .

Auf analoge Art erhalten wir im Falle der Funktionen  $f_2(x)$  und  $\varphi_2(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x) = e^{\frac{a^2 x^2}{2}} e^{bx}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_2(x) = C e^{-\frac{a^2 x^2}{2} - bx}. \quad (30)$$

Bezüglich dieser Grenzfunktion (30) lese man im Lehrbuch von *Czuber* [5] die Ableitung der Normalform der *Brunsschen*  $\Phi$ -Reihe nach.

Die dargelegte Methode zur Bildung von stetigen Häufigkeitsfunktionen lässt sich nach Belieben auf Verbindungen von rationalen und transzendenten Hilfsfunktionen ausdehnen.

Das Problem, eine vorliegende statistische Zahlenreihe an eine stetige Frequenzfunktion anzupassen, ist seiner Natur nach vieldeutig und kann nur mit mehr oder weniger Willkür gelöst werden. Es kommt in erster Linie darauf an, welche Funktion  $\varphi(x)$  als ideale Normalform betrachtet werden darf, und wie viele charakteristische

Mittelwerte  $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; \dots$  der Grundreihe mit den entsprechenden Mittelwerten der idealen stetigen Verteilung übereinstimmen sollen. Sollen die beiden Reihen in den Werten von  $\sigma_1 = 0$  und  $\sigma_2$  übereinstimmen, so genügt meistens eine symmetrische Verteilungsfunktion mit einem wesentlichen Parameter, z. B. die *Gaußsche* Häufigkeitsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Ist aber die Anpassung ungenügend, sei es, dass die höheren Mittel  $\sigma_3; \sigma_4; \dots$  der beiden Reihen zu stark auseinandergehen, oder sei es, dass die Grundreihe eine ausgesprochene Asymmetrie aufweist, so muss zu einer schmiegsameren idealen Verteilungsfunktion Zuflucht genommen werden.

Die mathematische Erforschung von statistischem Zahlenmaterial erfasst stets aufs neue weitere Wissensgebiete und stellt immer weitergehende Anforderungen an die Mathematik; sie legt den Mathematikern die Aufgabe auf, dafür zu sorgen, dass den Statistikern eine ausreichende Auswahl von brauchbaren und anpassungsfähigen idealen Häufigkeitsfunktionen, von Standardverteilungen, zur Verfügung gestellt werden können.

Es seien mir zum Schluss noch zwei Bemerkungen methodologischer Natur erlaubt: die erste betrifft den Übergang von den Sigma- zu den Integralsummen, während sich die zweite mit der Begründung und Ableitung des *Gaußschen* Fehlergesetzes befasst, wie man sie in den meisten Lehrbüchern findet.

In dieser Abhandlung war zuerst von einer Funktion  $\varphi(x) = \binom{s}{x} v^x$  die Rede, die nur für ganzzahlige Werte von  $x$  existiert. Es empfiehlt sich daher, ihre Definition so zu erweitern, dass die Funktion an jeder Stelle des betrachteten Zahlenbereiches einen Sinn erhält. Wir erklären deshalb, für jedes ganzzahlige  $x$  und jedes  $h \leq \frac{1}{2}$  soll

$$\varphi(x \pm h) = \binom{s}{x} \cdot v^x$$

sein. Das Bild der so erweiterten Funktion ist im Intervalle von  $x - \frac{1}{2}$  bis  $x + \frac{1}{2}$  eine Strecke von der Länge 1 im Abstände  $\varphi(x)$

von der  $X$ -Achse. Das Bild der Funktion in ihrem ganzen Verlauf ist nicht mehr ein System von Punkten, sondern eine Treppelinie. Wir fassen nun den algebraischen Ausdruck  $\varphi(x) \cdot (x - \xi)^k$  nicht mehr als das Moment der Häufigkeitszahl  $\varphi(x)$ , sondern als das *Flächenmoment* des Rechteckes  $\varphi(x) \cdot 1$  in bezug auf die bestimmte Gerade  $x = \xi$  auf. Der Schwerpunkt dieser Rechtecksfläche hat die Entfernung  $x - \xi$  von der fraglichen Bezugsachse. Im Sinne dieser erweiterten Definition würde die Gleichung (22) bzw. (23) besagen

Gesamtfläche mal Mittelwert  $\mu_k^k$  gleich Summe der Flächenmomente  $k$ -ten Grades der Elementarrechtecke.

Im Falle einer stetigen Funktion  $\varphi(x)$  ist die Höhe des Elementarrechteckes  $\varphi(x)$ , seine Breite  $dx$  und die Entfernung des Schwerpunktes von der Bezugsachse,  $x - \xi$ . Der Satz über die Flächenmomente lautet sinngemäss in allgemeiner Form:

$$\mu_k^k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)^k \varphi(x) dx.$$

Insbesondere ist für  $\xi = 0$  analog Gleichung (18):

$$\sigma_k^k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx.$$

Die zahlenmässige Erfassung von Dingen, sei es durch Zählung oder Messung, ist die Voraussetzung einer jeden Verteilungstafel oder Häufigkeitsfunktion. Ob es sich dabei um Gegenstände oder Erscheinungen mit Wahrscheinlichkeitscharakter handelt oder nicht, ist an sich unwesentlich. Wie gezeigt wurde, konnte tatsächlich das *Gaußsche* Frequenzgesetz ohne irgendwelche hypothetischen Annahmen über die mehr oder weniger grosse Wahrscheinlichkeit von Fehlern dieser oder jener Art abgeleitet werden. Aus dieser Untersuchung scheint mir also klar hervorzugehen, dass Fragen über Häufigkeitsfunktionen ohne Verquickung mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff gelöst werden können, und zwar, wie es im Kern des Problems liegt, rein *formal-mathematisch*.



**Graphische Darstellung der Mittelwerte  $\mu_k$**

Häufigkeitsfunktion (Urnenschema):  $\varphi(x) = \binom{6}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x$ .

Mittelwerte  $\sigma_k$  nach Formel (19):

$$6 - \sigma_1 = 3,6;$$

$$30 - 11 \sigma_1 + \sigma_2^2 = 10,8;$$

$$120 - 74 \sigma_1 + 15 \sigma_2^2 - \sigma_3^3 = 25,92;$$

$$360 - 342 \sigma_1 + 119 \sigma_2^2 - 18 \sigma_3^3 + \sigma_4^4 = 46,656;$$

$$720 - 1044 \sigma_1 + 580 \sigma_2^2 - 155 \sigma_3^3 + 20 \sigma_4^4 - \sigma_5^5 = 55,9872;$$

$$720 - 1764 \sigma_1 + 1624 \sigma_2^2 - 735 \sigma_3^3 + 175 \sigma_4^4 - 21 \sigma_5^5 + \sigma_6^6 = 33,59232.$$

$$\sigma_1 = 2,4; \sigma_2^2 = 7,2; \sigma_3^3 = 24,48; \sigma_4^4 = 91,296; \sigma_5^5 = 365,9328;$$

$$\sigma_6^6 = 1\,554,98112. \sigma_2 = 2,68; \sigma_3 = 2,90; \sigma_4 = 3,09;$$

$$\sigma_5 = 3,26; \sigma_6 = 3,40.$$

Mittelwerte  $\mu_k$  nach Formel (23):

$$C_1: \mu_1 + \xi = 2,4;$$

$$C_2: \mu_2^2 - \xi^2 + 4,8 \xi - 7,2 = 0;$$

$$C_3: \mu_3^3 + \xi^3 - 7,2 \xi^2 + 21,6 \xi - 24,48 = 0;$$

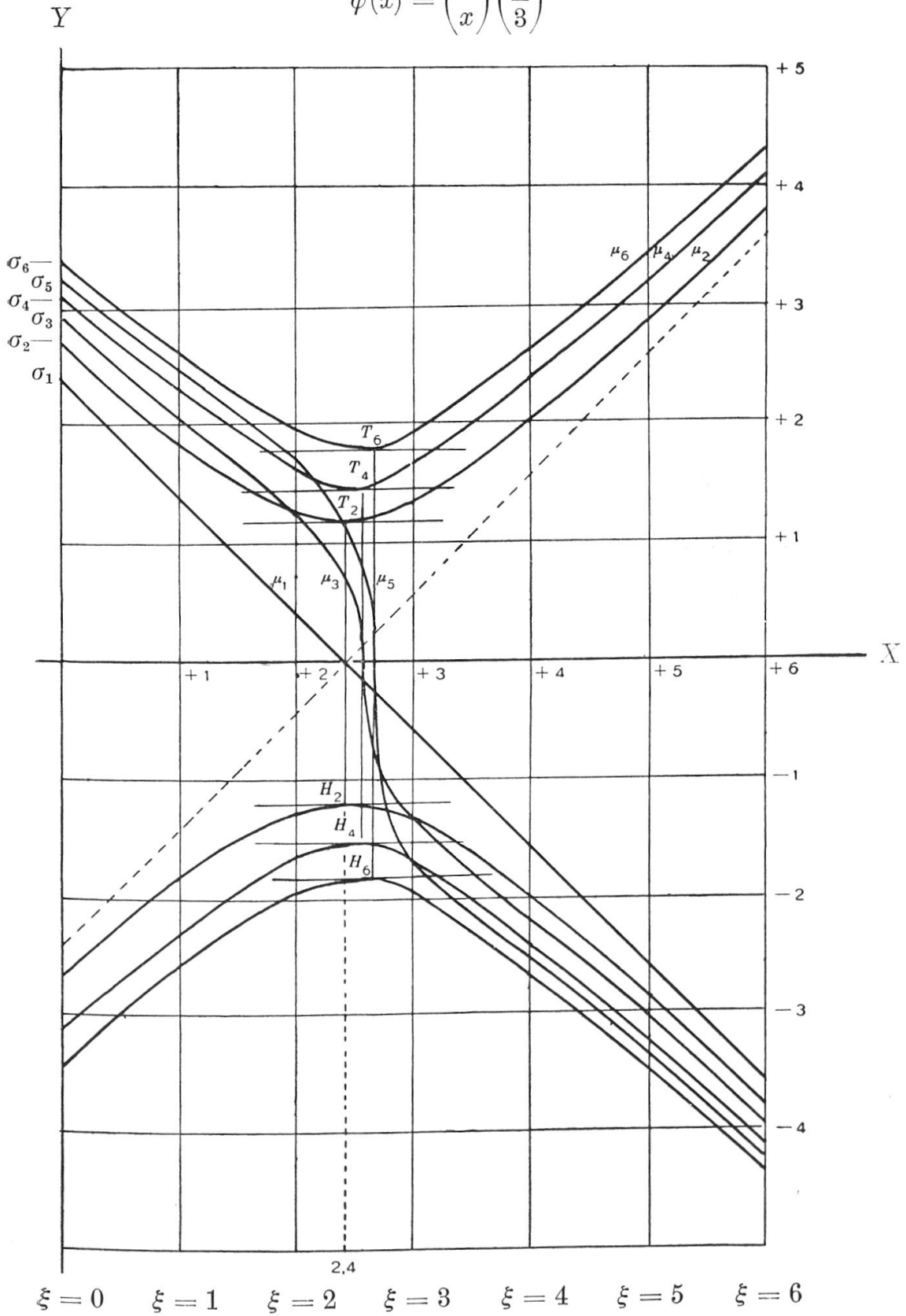
$$C_4: \mu_4^4 - \xi^4 + 9,6 \xi^3 - 43,2 \xi^2 + 97,92 \xi - 91,296 = 0;$$

$$C_5: \mu_5^5 + \xi^5 - 12 \xi^4 + 72 \xi^3 - 244,8 \xi^2 + 456,48 \xi - 365,9328 = 0;$$

$$C_6: \mu_6^6 - \xi^6 + 14,4 \xi^5 - 108 \xi^4 + 489,6 \xi^3 - 1369,44 \xi^2 + \\ + 2195,5968 \xi - 1554,98112 = 0.$$

Die 6 ersten  $\mu_k$ -Kurven der binomialen Häufigkeitsfunktion

$$\varphi(x) = \binom{6}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$



## Literaturnachweis

- [1] *O. Anderson*: Einführung in die mathematische Statistik, Wien 1935.
- [2] *U. Broggi*: Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités, Trad. *S. Lattès*, Paris 1907.
- [3] *J. L. Coolidge*: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe, Leipzig 1927.
- [4] *E. Czuber*: Die statistischen Forschungsmethoden, Wien 1921.
- [5] *E. Czuber*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, erster Band, Leipzig 1914.
- [6] *Encyclopedie* der mathematischen Wissenschaften, erster Band, zweiter Teil, den Artikel von *J. Bauschinger*, Ausgleichungsrechnung.
- [7] *G. F. Lipps*: Die Theorie der Kollektivgegenstände, Separat-Abdruck aus «*Wundt*, Philosophische Studien», Leipzig 1902.
- [8] *Schlömilch*: Handbuch der Mathematik, Breslau 1881, zweiter Band, S. 926.
- [9] *H. Rothe*: Vorlesungen über höhere Mathematik, Wien 1921.