Über die Berechnung der unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten im ersten Versicherungsjahr

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **45 (1945)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555060

Über die Berechnung der unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten im ersten Versicherungsjahr

Von *Ernst Zwinggi,* Basel

1. Problemstellung

Zur Berechnung der einjährigen, unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen verwendet man in der Regel die Formeln

$$q = \frac{T}{L_0 - \dfrac{R+S}{2}} \tag{1}$$

und

$$s = \frac{S}{L_0 - \dfrac{R+T}{2}}, \tag{2}$$

worin für ein bestimmtes Alter x bedeuten:

L_0: Zahl der zu Beginn des Versicherungsjahres (Beobachtungsjahr = Versicherungsjahr) vorhandenen Versicherungen;

T: Zahl der im Versicherungsjahr durch Tod erloschenen Versicherungen;

S: Zahl der im Versicherungsjahr vorzeitig aufgelösten Versicherungen [1]);

---

[1]) Als vorzeitige Vertragsauflösung sehen wir «Aufgabe» und «Rückkauf» an. Versicherungen, für welche der Einlösungsbetrag nicht entrichtet wird, betrachten wir nicht als durch «Aufgabe» erloschen, da sie gar nicht in die Beobachtung eingehen, also auch nicht in L_0 enthalten sind.

R: Sonstiger Abgang im Versicherungsjahr; *R* kann auch negativ sein [1]).

Die Formeln (1) und (2) werden abgeleitet mit der offenen oder versteckten Annahme, dass die Todesfälle *T* und die Stornofälle *S* *gleichmässig verteilt* über das Versicherungsjahr eintreffen und der Beobachtungsbestand sich innerhalb eines Jahres *linear* verändert. Für die Sterbefälle kann die Voraussetzung der gleichmässigen Verteilung als plausibel gelten, auch wenn im Auslesezeitraum (insbesondere bei Versicherungen mit ärztlicher Untersuchung) eine spürbare absolute Zunahme der Todesfälle gegen das Ende des Versicherungsjahres nicht ausgeschlossen ist [2]); ziffernmässige Unterlagen für ein solches Verhalten fehlen aber unseres Wissens. Bei der vorzeitigen Vertragsauflösung dagegen darf man die gleichmässige Verteilung der Fälle nicht ohne Prüfung hinnehmen [3]). Deshalb sollte man stets vor Beginn der Rechnung abklären, ob im aufzuarbeitenden Beobachtungsmaterial die Stornofälle regelmässig verteilt sind, und sobald die Verteilung nicht regelmässig ist, zu erkennen suchen, welchen Einfluss die Abweichung des tatsächlichen Verlaufes vom angenommenen auf das Ergebnis haben kann. Im ersten Versicherungsjahr mit dem verhältnismässig grossen vorzeitigen Abgang ist es besonders notwendig, die Voraussetzungen auf ihre Bestätigung hin zu prüfen.

Ein schematisches Beispiel soll zeigen, von welcher Grössenordnung die Abweichungen sein können. Die beiden Grenzwerte

---

[1]) In R sind z. B. enthalten: Versicherungen, welche durch diskontierten Ablauf oder durch Überführung in einen anderen, nicht untersuchten Bestand aus der Beobachtung ausscheiden, ferner (mit negativem Vorzeichen) Versicherungen, welche im Laufe des Versicherungsjahres neu in die Beobachtung treten. Die normalen Abläufe gehören nicht zum sonstigen Abgang, sondern gehen unmittelbar in die Bestände L_0 ein, weil sie stets am Ende des Versicherungsjahres stattfinden.

[2]) Die jahreszeitlichen Schwankungen der Sterblichkeit haben keinen Einfluss, solange die Beobachtungsjahre gleichmässig über das Kalenderjahr verteilt beginnen.

[3]) Eine allgemein gültige Regel für den Verlauf des Stornos innerhalb des Versicherungsjahres aufzustellen, ist allerdings nicht möglich; die Bemessung der Abfindungswerte, die Häufigkeit unterjähriger Prämienzahlung und die Art der Auszahlung der Abschlussvergütungen können den «natürlichen» Ablauf wesentlich beeinflussen und von Bestand zu Bestand verschieden sein.

erhalten wir, indem wir die Stornofälle alle auf den Beginn oder alle auf das Ende des Versicherungsjahres verlegen. Wenn $R = 0$ angesetzt wird, ist $q^{max} = \frac{T}{L_0 - S}$, $q^{min} = \frac{T}{L_0}$, der verhältnismässige Unterschied also $\frac{q^{max}}{q^{min}} - 1 = \frac{S}{L_0 - S}$.

Für einen Bestand $L_0 = 10\,000$ wird mit

S	der verhältnismässige Unterschied $\frac{S}{L_0 - S}$ in %
200	2,0
400	4,2
600	6,4
800	8,7
1 000	11,1

Bei einer Stornowahrscheinlichkeit von rund 0,1 — solche Werte kommen praktisch vor — können die verhältnismässigen Unterschiede zwischen dem Maximum und dem Minimum 11 % des minimalen Wertes der Sterbewahrscheinlichkeit betragen.

Untersuchungen im *Volksversicherungsbestand* der *Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft* haben gezeigt, dass die Zahl der vorzeitigen Vertragsauflösungen [1]) im ersten Versicherungsjahr *stark fallend* verläuft, die gleichmässige Verteilung der Stornofälle also nicht zutrifft; die absolute Abnahme lässt sich mit ausreichender Genauigkeit durch eine *Gerade* wiedergeben. Damit stellt sich uns die konkrete Aufgabe, zu prüfen, ob die Fehler, welche durch die weitere Anwendung der Formeln (1) und (2) entstehen können, nicht das zulässige Mass überschreiten.

---

[1]) Vgl. Fussnote S. 57.

2. Formeln für die einjährigen, unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten bei Annahme eines linearen Verlaufes der Zahl der vorzeitigen Vertragsauflösungen innerhalb des Versicherungsjahres

Bei der Ableitung der Bestimmungsgleichungen für die Wahrscheinlichkeiten haben wir davon auszugehen, dass

a) die *jährlichen Beobachtungszahlen* bekannt sind und

b) durch eine Sonderuntersuchung die *Lage der Geraden*, welche den Verlauf der vorzeitigen Vertragsauflösung festlegt, ermittelt worden ist [1]).

Von $L(x+h)$ Versicherungen des erreichten Alters $x+h (0 \leqq h \leqq 1)$ sollen im Zeitabschnitt h bis $h+dh$ durch Tod $L(x+h)\,\mu_{x+h}\,dh$ erlöschen; mit μ_{x+h} ist wie üblich die Intensität der Sterblichkeit bezeichnet [2]). Wird angenommen, die Todesfälle verteilen sich gleichmässig über das Versicherungsjahr, so ist

$$L(x+h)\,\mu_{x+h}\,dh = T\,dh\,. \tag{3}$$

Im Zeitabschnitt h bis $h+dh$ werden $L(x+h)\,\sigma_{x+h}\,dh$ Versicherungen vorzeitig aufgehoben, wo σ_{x+h} die Intensität der vorzeitigen Vertragsauflösung bedeutet. In Übereinstimmung mit dem beobachteten linearen Abfall der Zahl der vorzeitigen Vertragsauflösungen im ersten Versicherungsjahr setzen wir

$$L(x+h)\,\sigma_{x+h}\,dh = (A-2bh)\,dh\,, \tag{4}$$

wo A und b vorläufig unbestimmt bleiben und $A \geqq 2b$.

Wird schliesslich noch vorausgesetzt, der übrige Abgang R verteile sich wie die Todesfälle regelmässig über das Versicherungsjahr,

---

[1]) Dieses Vorgehen unterscheidet sich bereits im Ansatz von der Methode, welche *A. Linder* in der Abhandlung «Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen» (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 30. Heft, 1935, S. 35 ff.) zur genauen Erfassung der Wanderungen entwickelt hat; bei unserem Verfahren gehen nur die jährlichen Beobachtungszahlen in die Rechnung ein und nicht die unterjährigen.

[2]) Es ist überflüssig, die Selektionsklammer [] anzubringen, da wir uns nur in einem Versicherungsjahr bewegen.

so treten Rdh Versicherungen im Zentralabschnitt h bis $h+dh$ aus der Beobachtung aus [1]).

Mit diesen Annahmen finden wir

$$L(x+h) = L_0 - \int_0^h (T + A - 2bk + R)\,dk$$

$$= L_0 - (T + A + R)\,h + bh^2; \qquad (5)$$

ferner ist

$$\mu_{x+h} = \frac{T}{L_0 - (T + A + R)\,h + bh^2}, \qquad (6)$$

$$\sigma_{x+h} = \frac{A - 2bh}{L_0 - (T + A + R)\,h + bh^2}. \qquad (6a)$$

Wir kürzen ab mit

$$T + A + R = Q,$$

$$-\frac{T + A + R}{2b} = -\frac{Q}{2b} = r, \qquad (7)$$

$$\frac{L_0}{b} = t$$

und erhalten

$$\mu_{x+h} = \frac{T}{b}\,\frac{1}{h^2 + 2rh + t}, \qquad (8)$$

$$\sigma_{x+h} = \frac{A}{b}\,\frac{1}{h^2 + 2rh + t} - \frac{2h}{h^2 + 2rh + t}. \qquad (8a)$$

a) Sterbewahrscheinlichkeit

Wir setzen (8) in die Definitionsgleichung für die einjährige, unabhängige Sterbewahrscheinlichkeit ein; es wird

---

[1]) Diese Annahme ist plausibel, weil das Versicherungsjahr die Einheit der Beobachtungszeit ist und Neuabschlüsse unmittelbar in L_0 eingehen.

$$q_x = 1 - e^{-\int\limits_0^1 \mu_{x+h}\,dh} = 1 - e^{-\frac{T}{b}\int\limits_0^1 \frac{dh}{h^2+2rh+t}} = 1 - e^{\mathrm{Exp\ I}}. \tag{9}$$

Exp I lässt sich leicht auswerten; es ist entweder

$$\mathrm{Exp\ I} = -\frac{T}{2b(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}\, ln \frac{r+t+(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}{r+t-(r^2-t)^{\frac{1}{2}}} \tag{10}$$

oder

$$\mathrm{Exp\ I} = -\frac{T}{b(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{arc}\ tg\frac{1+r}{(t-r^2)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{arc}\ tg\frac{r}{(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = -\frac{T(\alpha-\beta)}{b(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad ($$

je nachdem $r^2 > t$ oder $r^2 < t$.

Zur numerischen Berechnung von $\alpha - \beta$ verwendet man mit Vorteil die Beziehung

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}{t+r}. \tag{11}$$

Führt man in (10) rückwärts an Stelle von r und t die jährlichen Beobachtungszahlen ein, so folgt

$$\mathrm{Exp\ I} = -\frac{T}{(Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}}\, ln \frac{2L_0 - Q + (Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}}{2L_0 - Q - (Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}}. \tag{10b}$$

Ist $b = 0$, d. h. sofern für die vorzeitige Vertragsauflösung die gleichmässige Verteilung der Fälle über das Versicherungsjahr gilt, vereinfacht sich (10b) mit $A = S$ auf

$$\mathrm{Exp\ I} = \frac{T}{Q}\, ln \frac{L_0 - Q}{L_0};$$

damit wird aus (9)

$$q_x = 1 - \left[1 - \frac{Q}{L_0}\right]^{\frac{T}{Q}} \sim \frac{T}{L_0 - \dfrac{R+S}{2}} = (1)\ \text{[1]}.$$

---

[1]) Diese Näherung findet man durch Entwicklung der Klammer in die Binomialreihe und nachherige Approximation durch eine geometrische Reihe. (Vgl. darüber *W. Friedli:* Methodischer Beitrag zu den Grundlagen der Invalidenversicherung. Festgabe Moser, Bern 1931, S. 313 ff.)

b) Stornowahrscheinlichkeit

Wir führen Beziehung (8*a*) in die Definitionsgleichung für die einjährige, unabhängige Stornowahrscheinlichkeit ein und erhalten

$$_c = 1 - e^{-\int_0^1 \sigma_{x+h}\, dh} = 1 - e^{-\frac{A}{b}\int_0^1 \frac{dh}{h^2+2rh+t} + 2\int_0^1 \frac{h\,dh}{h^2+2rh+t}} = 1 - e^{\text{Exp II} + \text{Exp III}}. \quad (12)$$

Exp II hat die nämliche Form wie Exp I, nur muss T durch A ersetzt werden; also gilt

$$\text{Exp II} = -\frac{A}{2b(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}\, ln \frac{r+t+(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}{r+t-(r^2-t)^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

oder

$$\text{Exp II} = -\frac{A(\alpha-\beta)}{b(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13a)$$

Ferner wird

$$\text{xp III} = 2\int_0^1 \frac{h\,dh}{h^2+2rh+t} = ln\frac{1+2r+t}{t} - \frac{r}{(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}\, ln\frac{r+t+(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}{r+t-(r^2-t)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

oder

$$\text{Exp III} = ln\frac{1+2r+t}{t} - \frac{2r(\alpha-\beta)}{(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (14a)$$

Daraus folgt

$$\text{xp II} + \text{Exp III} = ln\frac{1+2r+t}{t} - \frac{A+2br}{2b(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}\, ln\frac{r+t+(r^2-t)^{\frac{1}{2}}}{r+t-(r^2-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= ln\frac{L_0-Q+b}{L_0} - \frac{A-Q}{(Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}}\, ln\frac{2L_0-Q+(Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}}{2L_0-Q-(Q^2-4bL_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

oder

$$\text{Exp II} + \text{Exp III} = ln\frac{1+2r+t}{t} - \frac{(A+2br)(\alpha-\beta)}{b(t-r^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (15a)$$

Ist im besondern $b = 0$ mit $A = S$, so vereinfacht sich (15) auf

$$\text{Exp II} + \text{Exp III} = ln\left[1 - \frac{Q}{L_0}\right] + \frac{A - Q}{Q}\, ln\left[1 - \frac{Q}{L_0}\right];$$

damit geht aus (12) hervor, dass

$$s_x = 1 - \left[1 - \frac{Q}{L_0}\right]^{\frac{A}{Q}} \sim \frac{S}{L_0 - \dfrac{R + T}{2}} = (2)\,.$$

3. Numerische Auswertung

Die neuen Formeln erlauben es nicht, die Abweichungen gegenüber (1) und (2) zu erkennen; einzig die numerische Auswertung gestattet den Vergleich.

Für den Neuzugang an Volksversicherungen der Jahre 1942 und 1943 (gemischte Versicherungen) ist der folgende, auf 1000,0 bezogene vorzeitige Abgang im ersten Versicherungsjahr gemessen worden:

Prämien bezahlt für Wochen	Im Mittel abgelaufene Zeit (Jahre) h	Männer		Frauen	
		1942	1943	1942	1943
1— 4	0,0038	186,4	179,6	172,8	180,5
5— 8	115	101,0	124,3	101,9	127,8
9—12	192	103,9	86,1	69,4	86,3
13—16	269	120,6	114,8	145,1	126,2
17—20	346	74,5	65,9	97,2	68,7
21—24	423	48,0	55,3	50,9	47,9
25—28	500	81,4	80,8	92,6	103,8
29—32	577	54,9	73,3	75,6	68,7
33—36	654	52,9	64,8	52,5	46,3
37—40	731	70,6	67,0	57,1	49,5
41—44	808	63,7	49,9	49,4	51,1
45—48	885	33,3	32,9	29,3	30,4
49—52	962	8,8	5,3	6,2	12,8
		1000,0	1000,0	1000,0	1000,0

Ermittelt man nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungswerten die Gleichung der Geraden $a' - b'h$, welche die absolute Zahl der Stornofälle in jedem der 13 Intervalle angibt, so ist

	a'	b'
Männer 1942	139,4	124,9
1943	140,2	126,7
Frauen 1942	140,1	126,4
1943	144,3	134,7

Diesen Werten entsprechen $A \sim 13\,a'$ und $b \sim 6{,}5\,b'$; also wird

	A	b *)
Männer 1942	1 812	812
1943	1 823	823
Frauen 1942	1 821	821
1943	1 876	876

Die Auswertung von (9) mit (10 a) und von (12) mit (15 a) soll für $L_0 = 10\,000$, $R = 0$, $A = 1\,800$ und $b = 800$ (d. h. $s_x \sim 0{,}1$) mit den folgenden Annahmen für T geschehen:

	T
1. Fall	50
2. Fall	500

Gleichzeitig berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten aus (1) und (2) mit $L_0 = 10\,000$, $R = 0$, $S = 1\,000$ ($= A - b$) und

	T
1. Fall	50
2. Fall	500

Ergebnis:

	Sterbewahrscheinlichkeit		*Stornowahrscheinlichkeit*	
	nach (9)	nach (1)	nach (12)	nach (2)
1. Fall	0,00 534	0,00 526	0,10 019	0,10 025
2. Fall	0,05 351	0,05 263	0,10 195	0,10 256

[1]) Rundungsdifferenzen.

Die Unterschiede der Wahrscheinlichkeiten sind unbedeutend; man darf daraus folgern, dass sich der Abfall der Zahl der Stornofälle im ersten Versicherungsjahr stark von der Geraden entfernen muss, z. B. im Sinne des schematischen Beispieles, damit die Abweichungen eine unzulässige Grössenordnung erreichen. (Der Grenzfall $A = 2\,b$ ist in unserem Beispiel nahezu erreicht.) Im untersuchten Beobachtungsmaterial jedenfalls ist es gestattet, die einfachen Formeln (1) und (2) weiterhin zu gebrauchen.