Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 45 (1945)

Artikel: Die Staffelung der Versicherungssumme bei anormalen Risiken

Autor: Jecklin, H. / Eisenring, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555039

Die Staffelung der Versicherungssumme bei anormalen Risiken

Von *H. Jecklin* und *M. Eisenring,* Zürich

Von manchen Autoren wurde versucht, für das Problem der Versicherung anormaler Risiken eine Lösung zu finden, bei welcher der Versicherte keine grössere oder doch eine nicht wesentlich höhere Prämie zu entrichten hat als der gleichaltrige normale Versicherte, indem die Versicherungskombination so abgeändert wird, dass für den Versicherer keine Erhöhung des zu tragenden Risikos gegenüber dem normalen Leben entsteht. Als typisch in dieser Hinsicht seien z. B. die Arbeit von Gross [1]) und die Ausführungen im bekannten Lehrbuch von Maingie [2]) erwähnt. In prinzipieller Stellungnahme möchten wir jedoch der Meinung Bergers [3]) beipflichten, dass solche Vorschläge nicht als eigentliche Lösung des Problems der Versicherung Anormaler anzusprechen sind.

Zu den Vorschlägen genannter Art ist auch die sogenannte Staffelung der Versicherungssumme zu zählen, welche seit jeher ein beliebtes Hilfsmittel zur Herabdrückung einer erhöhten Prämie ist. Die Staffelung besteht darin, dass man zwecks Risikoausgleich gegenüber dem normalen Leben die Versicherungssumme anfänglich niedriger ansetzt und in linear gestaffeltem Anstieg während einer bestimmten Zeitdauer das volle Kapital erreichen lässt. Berger erwähnt genannten Orts, dass es verkehrt und gegen das Interesse des Versicherten gerichtet sei, wenn die Tragung erhöhten Risikos statt bei der Prämie beim versicherten Kapital zum Ausdruck gebracht wird. Wir haben in anderem Zusammenhange [4]) auch schon darauf hingewiesen, dass die Lösung des Anormalenproblems sich nicht darin erschöpfen kann, den Versicherten ungeachtet ihres Versicherungsbedürfnisses eine bestimmte Versicherungsart vorzuschreiben, und möchten der Meinung der Autoren Albers und Wissing [5]) beistimmen,

---

[1]) Die Ziffern der Literaturhinweise beziehen sich auf die Zusammenstellung am Schluss der Arbeit.

dass die Staffelung der Versicherungssumme in den ersten Jahren eines Vertrages auf solche Fälle beschränkt werden sollte, bei welchen gerade in diesen Jahren das Risiko nicht zu übersehen oder schwer abzuschätzen ist.

Es wird zwar in der Literatur auch die Ansicht vertreten, so z. B. von Koeppler [6]), dass eine Staffelung der Versicherungssumme angezeigt sei, wenn lediglich in den ersten Versicherungsjahren eine Erhöhung der Sterblichkeit anzusetzen ist, die aber laufend abnimmt, so dass voraussichtlich nach einer gewissen Frist die Sterblichkeit als normal betrachtet werden kann. Aber auch in diesem Falle ist die Staffelung nur vom Standpunkt des Versicherers aus als vorsichtige Massnahme zu werten, der Versicherte seinerseits geht gerade in jenen Jahren, in welchen er wegen erhöhter Sterblichkeit besonderen Gefahren aussgesetzt ist, eines Teils des Versicherungsschutzes verlustig. Wir möchten uns vorbehalten auf diese, durch medizinische Überlegungen veranlasste Staffelung in einer späteren Publikation speziell einzugehen. In vorliegender Arbeit handelt es sich um den Fall, dass eine für dauernde Übersterblichkeit angesetzte Sonderprämie ersetzt werden soll durch eine äquivalente Staffelung der Versicherungssumme. Denn in der Praxis wird die Staffelung meist dadurch bedingt, dass der Versicherungsnehmer sich weigert, eine Sonderprämie zu entrichten, aber geneigt ist, eine gestaffelte Kürzung der Versicherungssumme in Kauf zu nehmen. Wenn dies auch — wie wir bereits betonten — vom Standpunkt des Versicherten aus gesehen eine unzweckmässige Massnahme ist, so muss doch zugegeben werden, dass die gestaffelte Versicherung immerhin noch besser ist als gar keine.

Leider ist es so, wie auch Berger l. c. [3]) betont, dass in der Praxis sehr oft die notwendige Reduktion der Todesfallsumme nicht genauer bestimmt, sondern einfach eine mehr oder weniger willkürliche Festsetzung über Ausmass und Dauer der Kürzung getroffen wird. Es mag dies damit zusammenhängen, dass die genaue Durchführung im einzelnen Falle ein umfangreiches Tabellenwerk von Kommutationszahlen und eine etwas umfangreiche Rechenarbeit bedingt. Nun ist es bekanntlich schon im einfach gelagerten Falle der Festsetzung von Sonderprämien für gegebene Übersterblichkeit erwünscht, einfache und doch hinreichend genaue Näherungsverfahren zu kennen; man vergleiche in diesem Zusammenhange z. B. die bezügliche Arbeit von Jecklin [7]). Die vorliegenden Ausführungen setzen sich zum Ziel, für die Festsetzung von Staffelungen bei gegebener konstanter Übersterblichkeit einfach zu handhabende Näherungsformeln aufzustellen.

Wir basieren uns durchwegs, wie in der bereits zitierten Arbeit von Jecklin [7]), auf die Methode der multiplikativen Sterblichkeitserhöhung, d. h. die Sterblichkeit des anormalen Risikos wird, nach ärztlicher Direktive, gegenüber jener des normalen Risikos für alle Altersstufen um einen festen Prozentsatz erhöht. Ist demnach q_x die einjährige normale Sterblichkeit, so ist $\overset{*}{q}_x = q_x \cdot (1 + \alpha)$ die entsprechende einjährige anormale Sterblichkeit mit der Sterblichkeitserhöhung α. Im folgenden sind die Kommutationszahlen und Prämienwerte, die aus der mit um α erhöhten Sterblichkeit gebildeten Ausscheideordnung abgeleitet sind, mit dem Index α kenntlich gemacht. Die Ausführungen beziehen sich des weiteren nur auf die gemischte Versicherung als der häufigsten Versicherungskombination. Die Staffelung sei derart festgelegt, dass die Versicherungssumme im 1. Jahr um einen bestimmten Betrag $\lambda_{x\overline{m}|}$ reduziert wird (so dass also die Einheit der Versicherungssumme im 1. Versicherungsjahr auf $(1 - \lambda_{x\overline{m}|})$ zu kürzen ist) und im Laufe der folgenden Jahre (wobei die Staffelungsdauer m höchstens gleich der Versicherungsdauer n ist) in linearer Abstufung auf die volle Versicherungssumme ansteigt. Wenn nun eine gegebene jährliche Extraprämie $\underset{\alpha}{\mathcal{E}}_{x\overline{n}|} = \underset{\alpha}{P}_{x\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|}$ durch eine äquivalente Staffelung ersetzt werden soll, so muss zufolge Gleichsetzung von Extraprämienbarwert und Barwert der Staffelungsabzüge die folgende fundamentale Beziehung bestehen, die später auch als Prüfstein für die Güte der Approximationen herangezogen wird:

$$\underset{\alpha}{\mathcal{E}}_{x\overline{n}|} \cdot \left(\underset{\alpha}{N}_x - \underset{\alpha}{N}_{x+n}\right) = \sum_{t=0}^{m-1} \underset{\alpha}{C}_{x+t} \cdot \lambda_{x\overline{m}|} \cdot \frac{m-t}{m} =$$

$$= \frac{\lambda_{x\overline{m}|}}{m} \cdot \left(m \cdot \underset{\alpha}{M}_x - \underset{\alpha}{R}_{x+1} + \underset{\alpha}{R}_{x+m+1}\right).$$

Daraus ergibt sich die gesuchte erstjährige Kürzung zu

$$\lambda_{x\overline{m}|} = \frac{\underset{\alpha}{\mathcal{E}}_{x\overline{n}|} \cdot m \cdot \left(\underset{\alpha}{N}_x - \underset{\alpha}{N}_{x+n}\right)}{m \cdot \underset{\alpha}{M}_x - \underset{\alpha}{R}_{x+1} + \underset{\alpha}{R}_{x+m+1}} = \frac{\underset{\alpha}{\mathcal{E}}_{x\overline{n}|} \cdot \underset{\alpha}{\mathrm{a}}_{x\overline{n}|}}{\underset{\alpha}{A}_x - \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\underset{\alpha}{R}_{x+1} - \underset{\alpha}{R}_{x+m+1}}{\underset{\alpha}{D}_x}} . \quad \text{(I)}$$

Die Benützung dieser Formel setzt demnach voraus, dass für alle Übersterblichkeitsklassen die Tabellenwerke der Kommutationszahlen vollständig vorliegen. Dies dürfte jedoch meist nicht der Fall sein, da man schon die Extraprämie zu approximieren pflegt, und wenn auch übersterbliche Kommutationstabellen zur Hand sein sollten, so werden diese jedenfalls nur die $\underset{a}{D_x}$, $\underset{a}{N_x}$ und allenfalls $\underset{a}{S_x}$ enthalten, schwerlich aber die $\underset{a}{M_x}$ und $\underset{a}{R_x}$, so dass diese nach bekannter einfacher, aber rechnerisch umständlicher und zeitraubender Relation aus den ersteren errechnet werden müssen.

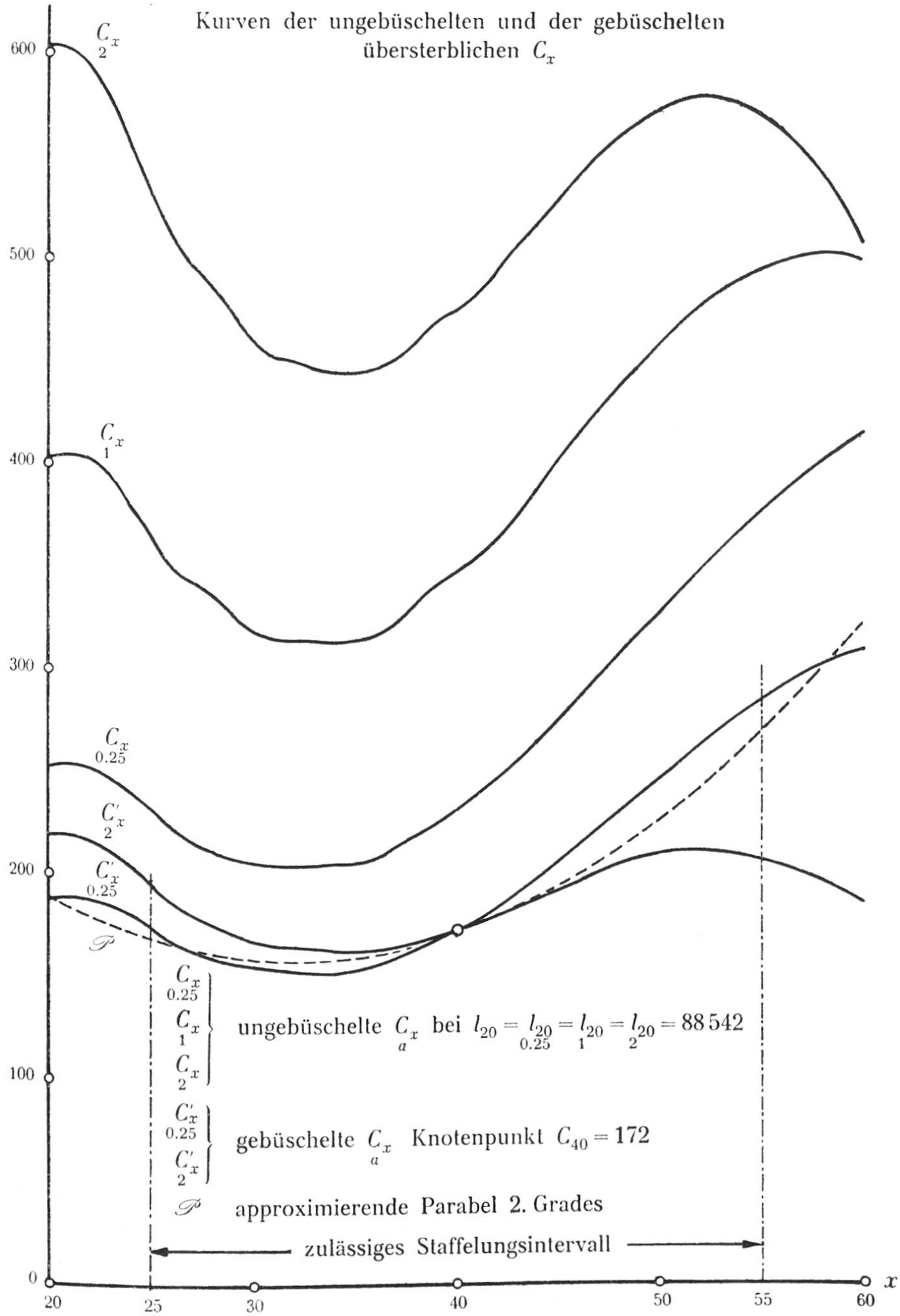
Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass die Staffelungsdauer, die nach oben mit n begrenzt ist, eine natürliche untere Grenze besitzt, indem bei Unterschreitung eines bestimmten Wertes für m der Wert für $\lambda_{\overline{xm}|}$, d. h. der erstjährige Summenabzug, grösser als 1 wird, was theoretisch zwar durchaus denkbar (Depotleistung des Versicherten oder Zahlungsverpflichtung der Erben im Todesfalle des Versicherten solange die Summenkürzung $>$ 1 ist) praktisch aber zu vermeiden ist. Als genaue mathematische Bedingung, damit $\lambda_{\overline{xm}|} \leqslant 1$ ist, folgt aus der Bestimmungsgleichung I offenbar

$$\underset{a}{\mathcal{E}_{\overline{xn}|}} \leqslant \frac{1}{\underset{a}{\mathrm{a}_{\overline{xn}|}}} \cdot \left(\underset{a}{A_x} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\underset{a}{R_{x+1}} - \underset{a}{R_{x+m+1}}}{\underset{a}{D_x}} \right).$$

Um zu einer Berechnung von $\lambda_{\overline{xm}|}$ zu gelangen, bei welcher die vorgenannten Schwierigkeiten bei der Auswertung des Nenners der Bestimmungsgleichung I nicht auftreten, gehen wir aus von seiner explizit geschriebenen Form $\Sigma \underset{a}{C_{x+t}} \cdot \lambda_{\overline{xm}|} \cdot \frac{m-t}{m}$ und zeigen, dass die Reihe der $\underset{a}{C_x}$ eine algebraische Approximation zulässt, die gleichzeitig für alle Übersterblichkeitsklassen und nach Einsetzung charakteristischer Konstanten für jede Sterbetafel anwendbar ist. Da die Reihen der übersterblichen $\underset{a}{C_x}$ rein mathematisch aus der empirischen Reihe der normalen C_x hergeleitet sind, bleiben bei den ersteren gewisse Eigenschaften der Kurve der normalen C_x erhalten, wie die beigefügte graphische Darstellung auf Basis S. M. 1921/30 zu 2¾ % demonstriert. Wenn auch die Kurven der C_x und der $\underset{a}{C_x}$ bei verschie-

Tafel S. M. 1921/30 $2\frac{3}{4}\%$

Kurven der ungebüschelten und der gebüschelten übersterblichen C_x



denen Grundlagen ein sehr verschiedenes Bild darbieten, so lässt sich doch bei der Mehrzahl der Tafeln die einzelne Kurve in einem etwa durch $x = 25$ und $x = 55$ begrenzten Intervall durch eine gewöhnliche Parabel approximieren. Bei einzelnen Sterbetafeln gelingt eine befriedigende Approximation allerdings erst durch eine Parabel 3. Grades. Würde nun lediglich jede einzelne der $\underset{a}{C}_x$-Kurven durch eine spezielle Parabel approximiert, so wäre im Vergleich zur genauen Methode nach Formel I wenig gewonnen.

Nun ist aber daran zu erinnern, dass die Kommutationswerte stets zur Bildung von Verhältniszahlen dienen, so dass es auf die Versicherungswerte ohne Einfluss bleibt, wenn sämtliche Kommutationszahlen einer Absterbeordnung mit ein und derselben Konstanten multipliziert werden. Es ist dies einfach eine andere Einkleidung des Faktums, dass bei der Bildung einer Ausscheideordnung der Anfangsbestand frei gewählt werden kann. Indem wir nun die Reihen der $\underset{a}{C}_x$ je mit einem solchen unwesentlichen Faktor versehen, können wir erreichen, dass diese Kurven alle sich in einem auf der C_x-Kurve gelegenen Punkte schneiden, den wir frei und damit natürlich zweckmässig wählen können. Diese Transformation nennen wir Büschelung der Kurven. Entsprechend bezeichnen wir die so modifizierten Kommutationszahlen als «gebüschelt» und kennzeichnen sie mit einem Akzent, also $\underset{a}{C}'_x$ etc.

Als Träger des Büschels — wir bezeichnen ihn als Knotenpunkt — wählen wir den Punkt C_{40}. Für diese Wahl sind zwei Gründe massgebend. Erstens soll durch die Büschelung erreicht werden, dass die Kurven möglichst nahe zusammenrücken und infolgedessen in einem möglichst grossen Intervall gut durch eine einzige Parabel approximiert werden können; dieses Ziel wird — wie ein Blick auf die graphische Darstellung zeigt — durch die Wahl des Punktes C_{40} als Knotenpunkt sehr gut erreicht. Zweitens ist wünschbar, dass die Approximation in den ersten Staffelungsjahren, d. h. bei Versicherungsbeginn, möglichst gut ist, da die grossen, ins Gewicht fallenden Summenreduktionen der Staffelung ja stets am Versicherungsanfang stehen. Da nun die Approximation in der Umgebung des Knotenpunktes die geringsten Fehler aufweist, folgt sofort, dass die Abszisse des Knotenpunktes möglichst mit dem mittleren Eintrittsalter der Versicherten übereinstimmen soll. Dieses mittlere Eintrittsalter dürfte in der Nähe von $x = 40$ liegen, in welcher Annahme wir durch eine Untersuchung von Zwinggi [8]) bestärkt werden.

Eine derart gebüschelte Kurvenschar der $\underset{\alpha}{C'_x}$ werde nun durch eine Parabel approximiert, die möglichst ausgeglichen zwischen den beiden meist divergierenden Kurven — für welche wir $\alpha = 0.25$ (25 % Übersterblichkeit) einerseits und $\alpha = 2$ (200 % Übersterblichkeit) anderseits ansetzen — verlaufen soll. Wir setzen hier voraus, dass eine gewöhnliche Parabel, d. h. eine Kurve 2. Grades, bereits eine genügende Approximation liefere, wie dies bei der Tafel S. M. 1921/30 der Fall ist. Die geforderten Bedingungen umschreiben nach den Sätzen der analytischen Geometrie die Koeffizienten ζ, μ, ϱ der Gleichung der approximierenden Parabel

$$\mathscr{P}\,(\underset{\alpha}{C'_x}) = \zeta \cdot \left[(x-\mu)^2 + \varrho\right].$$

Substituiert man diesen Funktionswert an Stelle von $\underset{\alpha}{C_x}$ in unserer ursprünglichen Gleichsetzung von Extraprämien- und Staffelungsbarwert, so erhält man offenbar

$$\underset{\alpha}{\mathscr{E}_{x\overline{n}|}} \cdot (\underset{\alpha}{N'_x} - \underset{\alpha}{N'_{x+n}}) \sim \frac{\lambda_{x\overline{m}|}}{m} \cdot \sum_{t=0}^{m-1} \zeta \cdot \left[(x+t-\mu)^2 + \varrho\right] \cdot (m-t) = \lambda_{x\overline{m}|} \cdot K_{x\overline{m}|}\,.$$

Die Summation der Hilfsfunktion $K_{x\overline{m}|}$ (arithmetische Reihen 1., 2., und 3. Ordnung) ergibt:

$$K_{x\overline{m}|} = \frac{\zeta \cdot (m+1)}{12} \cdot \left\{6 \cdot \left[(x-\mu)^2 + \varrho\right] + (m-1) \cdot \left[4 \cdot (x-\mu) + m\right]\right\}.$$

So erhält man schliesslich als Näherungsformel zur Bestimmung von $\lambda_{x\overline{m}|}$:

$$\lambda_{x\overline{m}|} \sim \frac{\underset{\alpha}{\mathscr{E}_{x\overline{n}|}} \cdot (\underset{\alpha}{N'_x} - \underset{\alpha}{N'_{x+n}})}{K_{x\overline{m}|}} \tag{II}$$

Dabei bedeuten, wie bereits erwähnt, $\underset{\alpha}{N'_x}$ die gebüschelten Werte der übersterblichen $\underset{\alpha}{N_x}$, $\underset{\alpha}{\mathscr{E}_{x\overline{n}|}}$ die jährliche Extraprämie für die betreffende Übersterblichkeitsklasse α, und $K_{x\overline{m}|}$ den Wert der Hilfsfunktion für die in Frage stehende Sterbetafel beim Eintrittsalter x und der frei gewählten Staffelungsdauer m.

Wir haben die Koeffizienten einer approximierenden Parabel für die Tafel S. M. 1921/30 zu $2\frac{3}{4}$ % berechnet ($\zeta = 0.21$, $\mu = 32$, $\varrho = 750$) und die Werte von $K_{x\overline{m}|}$ für die Eintrittsalter 20 bis 50 und die Staffelungsdauern $m = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ in der Beilage tabelliert. Die gebüschelten Kommutationswerte $\underset{\alpha}{N'_x}$ sind leicht aus den $\underset{\alpha}{N_x}$ zu berechnen und bei Bedarf zu tabellieren. In der Tat besteht ja die Büschelung lediglich aus einer Multiplikation der übersterblichen Kommutationszahlen mit jenem Faktor, der die $\underset{\alpha}{C_{40}}$ mit C_{40} zur Inzidenz bringt. Dieser Proportionalitätsfaktor f ist demnach $f = \frac{C_{40}}{\underset{\alpha}{C_{40}}}$ und es gilt somit für jede Übersterblichkeitsklasse:

$$\underset{\alpha}{N'_x} - \underset{\alpha}{N'_{x+n}} = \frac{C_{40}}{\underset{\alpha}{C_{40}}} \cdot \left(\underset{\alpha}{N_x} - \underset{\alpha}{N_{x+n}}\right).$$

Voraussetzung für die Durchführbarkeit ist natürlich, dass die Reihen der übersterblichen $\underset{\alpha}{N_x}$ vorliegen. Sofern die $K_{x\overline{m}|}$ und $\underset{\alpha}{N_x}$ tabelliert und die (für bestimmtes α konstant bleibenden) Büschelungsfaktoren gegeben sind, kann $\lambda_{x\overline{m}|}$ auf der Rechenmaschine in einem Arbeitsgang ermittelt werden.

Die abgeleitete Approximationsformel für $\lambda_{x\overline{m}|}$ kann in dem Intervall von 25 bis 55 Jahren als gut bezeichnet werden, der Fehler beträgt in den mittleren Übersterblichkeitsklassen ($\alpha = 0{,}75$ bis 1) in der Regel nicht mehr als 1 % und liegt auch in den extremen Klassen ($\alpha \leqslant 0{,}5$ oder > 1) meist unter 4 %. Die vorgenannten Intervallgrenzen — es sei dies speziell betont — beziehen sich in keiner Weise auf die Versicherungs- sondern lediglich auf die Staffelungsdauer. Es soll also $x + m$ nicht über 55 zu liegen kommen; es kann aber z. B. ohne weiteres nach vorbeschriebener Methode eine Gemischte Versicherung mit $x = 45$ und Endalter 65 gestaffelt werden, sofern die Staffelungsdauer sich nicht über mehr als 10 Jahre erstreckt.

Es ist vielleicht nicht unnötig, darauf hinzuweisen, dass die in den gebüschelten $\underset{\alpha}{N'_x}$ enthaltenen Reihen der $\underset{\alpha}{D'_x}$ nicht wie die $\underset{\alpha}{C'_x}$ bei $x = 40$ einen Knotenpunkt haben, sie schneiden sich im Gegenteil nicht. Denn nachdem, wie eingangs definiert, die anormale einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit sich aus der normalen durch Multiplikation mit $(1+\alpha)$ ergibt, muss gelten $\dfrac{\underset{a}{C'_{40}}}{\underset{a}{D'_{40}}} = (1+\alpha)\cdot\dfrac{C_{40}}{D_{40}}$ und da $\underset{a}{C'_{40}} \equiv C_{40}$

folgt $\underset{a}{D'_{40}} = \dfrac{D_{40}}{1+\alpha}$ und allgemein $\underset{a}{D'_{x}} = \underset{a}{D_{x}}\cdot\dfrac{C_{40}}{\underset{a}{C_{40}}} = \dfrac{D_x}{(1+\alpha)}\cdot\dfrac{C_{40}}{\underset{a}{C_{40}}}$. Man kann aber doch die Idee der approximierenden Parabel auch für den Zähler von Formel II nutzbar machen, indem man die $\underset{a}{D_x}$ ihrerseits mit Knotenpunkt in D_{40} büschelt. Die so erhaltene Kurvenschar der $\underset{a}{D''_x}$ kann durch eine Parabel

$$\mathscr{P}\left(\underset{a}{D''_x}\right) = \xi\, x^2 + \sigma\, x + \nu$$

approximiert werden und wir können schreiben

$$\underset{a}{N''_x} - \underset{a}{N''_{x+n}} \sim \sum_{t=0}^{n-1}\left(\xi\,(x+t)^2 + \sigma\,(x+t) + \nu\right) = H_{x\overline{n}|}\,.$$

(Auf Basis S. M. 1921/30 zu $2\frac{3}{4}$ % erhält man eine gut approximierende Parabel mit $\xi = 11.17$, $\sigma = -2007.1$, $\nu = 89812$). Die Summation der Hilfsfunktion ergibt

$$H_{x\overline{n}|} = \frac{n}{6}\left\{6\cdot[\xi\, x^2 + \sigma\, x + \nu] + (n-1)\cdot[3\cdot(2\,\xi\, x + \sigma) + (2n-1)\cdot\xi]\right\}.$$

Die Hilfsfunktion $H_{x\overline{n}|}$ kann aber nicht ohne weiteres an Stelle von $\underset{a}{N'_x} - \underset{a}{N'_{x+n}}$ in Formel II eingesetzt werden, nach dem soeben Gesagten ist sie zu diesem Zwecke mit $\dfrac{1}{1+\alpha}$ zu multiplizieren, und wir erhalten als weitere Näherungsformel:

$$\lambda_{x\overline{m}|} \sim \frac{\underset{a}{\mathscr{E}_{x\overline{n}|}}\cdot H_{x\overline{n}|}}{(1+\alpha)\cdot K_{x\overline{m}|}}\,. \qquad \text{(III)}$$

Ein Vorteil von Formel III gegenüber Formel II liegt insbesondere darin, dass sie eine Auflösung nach α ermöglicht. Wenn eine bestimmte Staffelung vorliegt und nach der entsprechenden Übersterblichkeit gefragt ist, so ersetzt man $\underset{\alpha}{\mathscr{E}}_{\overline{xn}|}$ durch eine Näherung, etwa $\underset{\alpha}{\mathscr{E}}_{\overline{xn}|} \sim \alpha \cdot \varDelta_{\overline{xn}|}$, wobei $\varDelta_{\overline{xn}|} = P_{x\overline{xn}|} - P_{\overline{xn}|}$ oder $\varDelta_{\overline{xn}|} = P_{\overline{xn}|} - P_{\overline{n}|}$, und berechnet dann

$$\frac{1}{\alpha} \sim \frac{\varDelta_{\overline{xn}|} \cdot H_{\overline{xn}|}}{\lambda_{\overline{xm}|} \cdot K_{\overline{xm}|}} - 1. \tag{III a}$$

Die Hilfsfunktionen repräsentieren ihrem Wesen nach natürlich Reihen künstlicher Kommutationszahlen, die gegenüber den Reihen der normalen Kommutationszahlen eine gewisse Deformation aufweisen. Ohne weiter darauf einzugehen, sei nur angedeutet, dass man auch von der approximierenden Parabel der gebüschelten $\underset{\alpha}{D}''_x$-Werte ausgehen und eine entsprechende Parabel der $\underset{\alpha}{C}''_x$-Werte ermitteln könnte, analog der bei den normalen Kommutationszahlen bestehenden Relation $C_x = v \cdot D_x - D_{x+1}$. Es ist jedoch auf diesem Wege keine Verbesserung der Approximationswerte zu erreichen, und ausserdem kann im Nenner nicht mehr eine so einfache algebraische Gestalt einer Hilfsfunktion zur Verwendung kommen, wie dies auf Grund einer selbständigen Büschelung und Approximierung der $\underset{\alpha}{C}'_x$-Kurven möglich ist.

Das vorstehend beschriebene Verfahren wird man, in Ersetzung der genauen Berechnung, mit Vorteil zur Anwendung bringen, wenn die Staffelung auf den im eigenen Geschäftsbetrieb verwendeten Rechnungsgrundlagen basieren soll. Die Festlegung der Hilfsfunktionen und deren Tabellierung ist eine einmalige Arbeit und wird sich lohnen. Dabei ist allerdings zumindest die Kenntnis des Verlaufes der übersterblichen $\underset{\alpha}{C}_x$ und $\underset{\alpha}{D}_x$ wenigstens für $\alpha = 2$ vorausgesetzt, damit die Büschelung im beschriebenen Sinne vorgenommen werden kann. Wenn es sich nun aber darum handelt, Extraprämie und äquivalente Staffelung auf Basis von nicht täglich gebrauchten Rechnungsgrundlagen zu bestimmen, so wird das nachfolgende entwickelte Näherungsverfahren willkommen sein, das sich nur auf die normalen Kommutationszahlen stützt.

Wenn wir in unserer genauen Bestimmungsgleichung I für $\lambda_{\overline{xm}|}$ den Zähler $(\underset{\alpha}{P}_{\overline{xn}|} - P_{\overline{xn}|}) \cdot \underset{\alpha}{a}_{\overline{xn}|}$ betrachten, und vorerst $\alpha = 1$, d. h. eine Übersterblichkeit von 100 % annehmen, so ist es naheliegend, anstelle der Tafel mit 100 %iger Übersterblichkeit eine solche für zwei gleichaltrige verbundene Leben zu verwenden und in weiterer Approximation die verbundene temporäre Leibrente $a_{xx\overline{n|}}$ durch den Wert $\dfrac{a_{x\overline{n|}} \cdot a_{x\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}}$ zu ersetzen, eine Näherung die z. B. von Jecklin [9]) in diesen Mitteilungen in anderem Zusammenhang besprochen wurde. Wir haben somit für $\alpha = 1$:

$$(\underset{\alpha}{P_{x\overline{n|}}} - P_{x\overline{n|}}) \cdot \underset{\alpha}{a_{x\overline{n|}}} \sim (P_{xx\overline{n|}} - P_{x\overline{n|}}) \cdot a_{xx\overline{n|}} \sim \left(\frac{a_{\overline{n|}}}{a_{x\overline{n|}} \cdot a_{x\overline{n|}}} - \frac{1}{a_{x\overline{n|}}}\right) \cdot \frac{a_{x\overline{n|}} \cdot a_{x\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_{x\overline{n|}}} - \frac{1}{a_{\overline{n|}}}\right) \cdot a_{x\overline{n|}} = (P_{x\overline{n|}} - P_{\overline{n|}}) \cdot a_{x\overline{n|}}.$$

Nachdem im allgemeinen $\alpha \leqslant 1$ ist und nur in Ausnahmefällen Übersterblichkeiten von über 100 % in Betracht fallen, wobei $\alpha = 2$ als Maximum anzusetzen ist, kann in diesen Grenzen für beliebiges α der Wert des Zählers unserer Formel I angenähert werden durch $\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{a_{x\overline{n|}}} - \dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}\right) \cdot a_{x\overline{n|}}$. Der Nenner von Formel I seinerseits repräsentiert den Barwert einer temporären Todesfallversicherung mit linear fallender Summe, und nachdem die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit bei Übersterblichkeit sich aus dem normalen Satz einfach durch Multiplikation mit $(1 + \alpha)$ ergibt, wird die Prämie für temporäre Versicherung, als einer Kombination mit reinem Todesfallrisikocharakter, bei supponierter Übersterblichkeit gegenüber dem normalen Fall auch ungefähr im Verhältnis dieses Faktors erhöht sein, so dass wir schliesslich zur Bestimmung von $\lambda_{x\overline{m|}}$ die Arbeitsformel erhalten

$$\lambda_{x\overline{m|}} \sim \frac{\alpha}{(1+\alpha)} \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{a_{x\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}}\right)}{\left(A_x - \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{R_{x+1} - R_{x+m+1}}{D_x}\right)}, \qquad \text{(IV)}$$

wobei ausschliesslich Kommutationszahlen der normalen Absterbeordnung zur Verwendung gelangen. Durch Auflösung nach α lässt sich die einer gegebenen Staffelung entsprechende unbekannte Übersterblichkeit ermitteln, also

$$\frac{1}{\alpha} \sim \frac{\left(1 - \frac{a_{x\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}\right)}{\lambda_{x\overline{m}|} \cdot \left(A_x - \frac{1}{m} \cdot \frac{R_{x+1} - R_{x+m+1}}{D_x}\right)} - 1 \,. \qquad \text{(IV}a\text{)}$$

In der Absicht, zu Näherungsverfahren zu gelangen, kann man sich schliesslich auch ganz elementar überlegen, dass wenn ein anormaler Versicherter statt der notwendigen, auf das Risikokapital zu beziehenden Risikoprämie $\overset{*}{q}_{x+t} = q_{x+t} \cdot (1 + \alpha)$ nur die Risikoprämie q_{x+t} entrichtet, das Risikokapital im Verhältnis $\frac{1}{1+\alpha}$ zu reduzieren ist. Dies ergibt eine über die ganze Versicherungsdauer sich erstreckende, allerdings nicht lineare Staffelung. Für $t = 0$, d. h. Versicherungsbeginn insbesondere ergibt sich diesfalls ein Abzug von $\frac{\alpha}{1+\alpha}$. Kurze Hinweise dieser Art haben z. B. die amerikanischen Aktuare Marshall [10]) und Richardson [11]) gegeben. Macht man nun die vereinfachende Annahme, dass die Reserve der gemischten Versicherung linear ansteige, also im t. Versicherungsjahr $\frac{t}{n}$ betrage, so beträgt die gestaffelte Versicherungssumme im t. Versicherungsjahr

$$\frac{t}{n} + \left(1 - \frac{t}{n}\right) \cdot \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{t}{n}\alpha\right),$$

sie steigt also in linearer Staffelung, ausgehend von $\frac{1}{1+\alpha}$ für $t = 0$ bis 1 für $t = n$. Der Abzug $\lambda_{\overline{n}|}$ im 1. Versicherungsjahr würde in diesem speziellen Falle $\lambda_{\overline{n}|} = \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\alpha}{(1+\alpha)}$ betragen. Nachdem jedoch die erste Reserve kleiner $\frac{1}{n}$ ist, kann der Abzug im Sinne einer Vergrösserung und damit Verbesserung der Approximation $\lambda_{\overline{n}|} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ gesetzt werden. Soll nun die Staffelungsdauer m kürzer als die Versicherungsdauer n sein, muss notwenigerweise eine Erhöhung des erstjährigen Abzuges resultieren. Bei Ausserachtlassung von Zinswirkung und Sterblichkeit kann man offenbar bei gegebener Übersterblichkeit α den erstjährigen Abzug in sehr einfache Beziehung zur Staffelungsdauer bringen, indem die Summe der Staffelabzüge konstant sein muss; oder es muss, geometrisch interpretiert, das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $\lambda_{\overline{n}|}$ und n inhaltsgleich sein dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\lambda_{\overline{m}|}$ und m, also $\frac{1}{2}\lambda_{\overline{n}|}\cdot n = \frac{1}{2}\lambda_{\overline{m}|}\cdot m$, woraus folgen würde $\lambda_{\overline{m}|} = \lambda_{\overline{n}|}\cdot\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{(1+\alpha)}\cdot\frac{n}{m}$.

Dass diese von Sterbetafel und Zinsfuss unabhängige Approximation durchwegs gute Werte liefere, darf man billigerweise nicht erwarten. Für $n = 20$ sind die Resultate immerhin überraschend gut und für andere Versicherungsdauern kann bei modernen Sterbetafeln eine fühlbare Verbesserung erreicht werden, indem man setzt

$$\lambda_{\overline{m}|} \sim \frac{\alpha}{(1+\alpha)}\cdot\frac{n}{m}\cdot(1+(n-20)\cdot 0.01)\,. \qquad \text{(V)}$$

Wenn man diese Formel auch nicht zu genaueren Staffelfestsetzungen benützen wird, so kann sie doch manchmal gute Dienste leisten, insbesondere um umgekehrt die einer vorliegenden linearen Staffelung entsprechende unbekannte Übersterblichkeit abzuschätzen, mit Hilfe der Relation

$$\frac{1}{\alpha} \sim \frac{n\cdot(1+(n-20)\cdot 0.01)}{\lambda_{\overline{m}|}\cdot m} - 1\,. \qquad (\mathrm{V}a)$$

Um ein Bild über die Güte der vorstehend entwickelten Näherungsformeln zu vermitteln, haben wir im Anhang eine Zusammenstellung gegeben, welche auf Basis der Tafel S. M. 1921/30 zu 2¾ % für die Eintrittsalter 30, 40 und 50 bei verschiedenen Versicherungs- und Staffelungsdauern und für die Übersterblichkeitsklassen $\alpha = 0.25$, 1 und 2 die Werte von $\lambda_{x\overline{m}|}$ nach den Formeln I, II, III, IV und V nebeneinander aufführt. Die nachstehenden wenigen Beispiele, gerechnet nach M. und W. I. zu 3½ %, sollen belegen, dass auch bei Verwendung älterer Tafeln ebenso befriedigende Resultate erhalten werden. (Für die Approximierung der gebüschelten $\underset{\alpha}{C'_x}$-Kurven wurde hier eine Parabel 3. Grades benützt.)

$\lambda_{x\overline{m}|}$ nach den Formeln I, II, IV in $^0/_{00}$ der Versicherungssumme, Fehler F in % des genauen Wertes:

x	n	m	α	I	II	F	IV	F
30	20	20	0.25	207	199	3.9	202	2.4
		10	1	916	905	1.2	926	1.1
		15	2	858	903	5.2	833	2.9
	30	25	0.25	262	255	2.7	259	1.5
			1	641	634	1.1	646	0.8
			2	833	848	1.8	806	3.2
40	10	5	2	1033	1016	1.7	1023	1.0
	20	10	0.25	389	397	2.1	383	1.5
	30	25	1	633	624	1.4	656	3.6
50	20	15	1	654	651	0.5	667	2.0

Bei der Beurteilung der Genauigkeit der verschiedenen Approximationen ist zu berücksichtigen, dass die Verteilung der Eintrittsalter in der Nähe von $x = 40$ den dichtesten Wert aufweist und dass die Mehrzahl der vorkommenden anormalen Risiken Übersterblichkeiten von rund 50 % haben dürften. Bei einer in diesem Sinne gewichteten Durchschnittsbildung lässt sich sagen, dass die aufgeführten vier Näherungsmethoden in der Reihenfolge der Formeln II—V qualitativ leicht abnehmen.

Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass in der Praxis zuweilen die Bestimmung von Extraprämie und von Staffelung in Ergänzung zueinander vorzunehmen sind. Liegt z. B. die Übersterblichkeit α vor und der Versicherte entrichtet eine Extraprämie, welche lediglich einer Übersterblichkeit $\alpha_1 < \alpha$ entspricht, so ist die restliche Übersterblichkeit $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ durch eine zusätzliche Staffelung zu kompensieren. Diese kann einfach ermittelt werden, sei es dass in Formel III im Zähler die einer Übersterblichkeit α_2 entsprechende Extraprämie eingesetzt, oder bei den Formeln IV und V der Quotient $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ durch $\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}$ ersetzt wird. Oder wird umgekehrt, ebenfalls bei einer Übersterblichkeit α, eine Staffelung vereinbart, welche nur eine Übersterblichkeit $\alpha_1 < \alpha$ deckt (das Kriterium hiefür wird durch die Formeln III a, IV a oder V a gegeben) so ist noch eine zusätzliche Prämie für die restliche Übersterblichkeit $a_2 = \alpha - \alpha_1$ zu erheben, deren genauer Betrag $\frac{\alpha_2}{\alpha} (P_{\overline{xn|}}^{\alpha} - P_{\overline{xn|}})$ ist, die aber auch durch einfache Näherungsverfahren [7]) festgesetzt werden kann.

Zitierte Literatur

1. *Gross*, «Die Versicherung Minderwertiger. Lösung des Problems durch die Tarifbildung.» Löwenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten. Bd. III 1914.
2. *Maingie*, «Les opérations viagères», S. 23/24.
3. *Berger*, «Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik». Bd. II. S. 113—115.
4. *Jecklin*, «Kleiner Beitrag zur Theorie der Versicherung anormaler Risiken», Blätter für Versicherungs-Mathematik, Bd. III Heft 10.
5. *Albers und Wissing*, «Ein Beitrag zur Versicherung anormaler Risiken in der Lebensversicherung». Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozial-Forschung, Bd. VIII Heft 2.
6. *Koeppler*, «Zur Mathematik der Versicherung minderwertiger Leben». Assekuranz-Jahrbuch *43* 1928.
7. *Jecklin*, «Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 44 Heft 1.
8. *Zwinggi*, «Bemerkungen zur Reserveberechnung nach der *t*-Methode». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 42 Heft 2.
9. *Jecklin*, «Über den Zusammenhang zwischen gewissen Zusatzversicherungen, Prämienzerlegungen und Approximationen in der Lebensversicherungstechnik». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 44 Heft 2.
10. *Marshall*, «The Incidence of Substandard Mortality» (Diskussionsvotum). Transactions, Actuarial Society of America XXIII. S. 144.
11. *Richardson*, «Substandard Business», The Record, American Institute of Actuaries XXX, 1. S. 145.

SM 1921/30 2¾%

Hilfsfunktion

$$K_{x\overline{m|}} = \frac{7\cdot(m+1)}{400}\left\{6\cdot\left[(x-32)^2+750\right]+(m-1)\left[4(x-32)+m\right]\right\}$$

x \ m	5	10	15	20	25	30
20	545.2	966.7	1372.6	1775.8	2189.5	2626.8
21	532.4	947.1	1349.6	1753.0	2170.4	2614.9
22	520.8	929.8	1330.0	1734.6	2156.7	2609.4
23	510.5	914.8	1313.8	1720.6	2148.5	2610.5
24	501.5	902.1	1300.9	1711.1	2145.8	2618.1
25	493.7	891.7	1291.4	1705.9	2148.5	2632.2
26	487.2	883.6	1285.2	1705.2	2156.7	2652.8
27	482.0	877.8	1282.4	1708.9	2170.4	2680.0
28	478.0	874.3	1283.0	1717.0	2189.5	2713.6
29	475.2	873.2	1286.9	1729.5	2214.0	2753.7
30	473.8	874.3	1294.2	1746.4	2244.1	2800.4
31	473.6	877.8	1304.8	1767.7	2279.6	
32	474.6	883.6	1318.8	1793.4	2320.5	
33	476.9	891.7	1336.2	1823.5	2366.9	
34	480.5	902.1	1356.9	1858.1	2418.8	
35	485.3	914.8	1381.0	1897.0	2476.1	
36	491.4	929.8	1408.4	1940.4		
37	498.8	947.1	1439.2	1988.2		
38	507.4	966.7	1473.4	2040.4		
39	517.2	988.7	1510.9	2097.0		
40	528.4	1012.9	1551.8	2158.0		
41	540.8	1039.5	1596.0			
42	554.4	1068.4	1643.6			
43	569.3	1099.6	1694.6			
44	585.5	1133.1	*1748.9*			
45	602.9	1168.9	*1806.6*			
46	621.6	1207.0				
47	641.6	*1247.4*				
48	662.8	*1290.1*				
49	685.2	*1335.2*				
50	*709.0*	*1382.5*				
51	*733.9*					
52	*760.2*					
53	*787.7*					
54	*816.5*					
55	*846.5*					

Die Benützung der kursiv gesetzten Funktionswerte soll nach Möglichkeit vermieden werden, da der dabei auftretende Approximationsfehler nicht selten 4% übersteigt.

x = Eintrittsalter
m = Staffelungsdauer

Soweit in den nachfolgenden Zusammenstellungen zur Berechnung von $\lambda_{x\,m|}$ Werte der Hilfsfunktion $K_{x\overline{m|}}$ benutzt wurden, die in den kursiv gedruckten Bereich fallen, sind die Rechenergebnisse ebenfalls kursiv gedruckt.

Tafel S. M. 1921/30 zu 2¾%; Übersterblichkeit 25% ($\alpha = 0.25$)

Tabelle der $\lambda_{x\overline{m}|}$ in $^0/_{00}$ der Versicherungssumme nach Formel:
(mit Angabe des Fehlers in % des genauen Wertes)

x	n	m	I	II		III		IV		V	
30	10	10	173	167	3.1	171	1.2	171	1.2	180	4.0
		5	319	309	3.1	315	1.3	317	0.6	360	12.8
	20	20	200	198	1.0	198	1.0	197	1.5	200	0.0
		15	273	267	2.2	267	2.2	271	0.7	266	2.6
		10	408	396	2.9	396	2.9	406	0.5	400	2.0
		5	755	731	3.2	731	3.2	751	0.5	800	6.0
	30	30	216	219	1.4	214	0.9	215	0.5	220	1.0
		25	272	273	0.4	267	1.8	271	0.4	264	2.9
		20	354	351	0.8	344	2.8	355	0.3	330	6.8
		15	484	474	2.1	464	4.1	487	0.6	440	9.1
		10	723	700	3.2	686	5.1	730	1.0	660	8.7
		5	1337	1293	3.3	1266	5.3	1352	1.1	1320	1.3
40	10	10	172	179	4.1	174	1.2	170	1.2	180	4.7
		5	336	343	2.1	332	1.2	333	0.9	360	7.1
	20	20	201	212	5.5	199	1.0	198	1.5	200	0.5
		15	280	294	5.0	277	1.1	277	1.1	266	5.0
		10	433	451	4.2	425	1.8	431	0.5	400	7.6
		5	846	862	1.9	812	4.0	845	0.1	800	5.4
	30	30	215	*220*	2.3	*203*	5.6	215	0.0	220	2.3
		25	269	*280*	4.1	*259*	3.7	271	0.7	264	1.9
		20	350	369	5.4	341	2.6	356	1.7	330	5.7
		15	488	513	5.1	474	2.9	499	2.3	440	9.8
		10	755	787	4.2	727	3.7	777	2.9	660	12.6
		5	1475	1507	2.2	1393	5.6	1524	3.3	1320	10.5
50	10	10	175	*185*	5.7	*167*	4.6	170	2.9	180	2.9
		5	335	*361*	7.8	*325*	3.0	329	1.8	360	7.5
	20	20	204	*203*	0.5	*178*	12.8	198	2.9	200	2.0
		15	276	*284*	2.9	*250*	9.2	271	1.8	266	3.6
		10	417	*441*	5.8	*387*	7.2	413	1.0	400	4.1
		5	798	*859*	7.6	*755*	5.4	799	0.1	800	0.3

Tafel S. M. 1921/30 zu 2¾%; Übersterblichkeit 100% ($\alpha = 1$)

Tabelle der $\lambda_{x\overline{m}|}$ in $^0/_{00}$ der Versicherungssumme nach Formel:
(mit Angabe des Fehlers in % des genauen Wertes)

x	n	m	I	II		III		IV		V	
30	10	10	431	427	0.9	428	0.7	428	0.7	450	4.4
		5	792	787	0.6	790	0.3	793	0.1	900	13.6
	20	20	499	499	0.0	499	0.0	493	1.2	500	0.2
		15	677	673	0.6	673	0.6	677	0.0	660	2.5
		10	1005	996	0.9	996	0.9	1014	0.9	1000	0.5
	30	30	539	536	0.6	538	0.2	536	0.6	550	1.9
		25	668	669	0.1	672	0.6	678	1.5	660	1.2
		20	860	860	0.0	863	0.3	887	3.1	825	4.1
		15	1167	1160	0.6	1164	0.3	1218	4.4	1100	5.7
40	10	10	431	439	1.8	438	1.6	425	1.4	450	4.4
		5	832	841	1.1	839	0.8	833	0.1	900	8.2
	20	20	503	502	0.2	505	0.4	494	1.8	500	0.6
		15	687	698	1.6	702	2.2	692	0.7	667	2.9
		10	1049	1070	2.0	1076	2.6	1077	2.7	1000	4.7
	30	30	536	*495*	7.6	*506*	5.6	538	0.4	550	2.6
		25	650	*630*	3.1	*645*	0.8	678	4.3	660	1.5
		20	829	828	0.1	851	3.7	891	7.5	825	0.5
		15	1133	1151	1.6	1183	4.4	1248	10.1	1100	2.9
50	10	10	438	*416*	5.0	*424*	3.2	426	2.8	450	2.8
		5	821	*810*	1.3	*826*	0.6	823	0.2	900	9.6
	20	20	510	*427*	16.3	*453*	13.3	495	2.9	500	2.0
		15	666	*600*	10.0	*635*	4.8	677	1.6	667	0.1
		10	977	*926*	5.3	*985*	0.8	1033	5.8	1000	2.4

Tafel S. M. 1921/30 zu 2¾%; Übersterblichkeit 200% ($\alpha = 2$)

Tabelle der $\lambda_{x\overline{m|}}$ in $^0/_{00}$ der Versicherungssumme nach Formel:

(mit Angabe des Fehlers in % des ganauen Wertes)

x	n	m	I	II		III		IV		V	
30	10	10	576	595	3.3	576	0.0	571	0.9	600	4.2
		5	1051	1098	4.5	1063	1.1	1057	0.6	1200	14.2
	20	20	666	678	1.8	672	0.9	658	1.2	667	0.2
		15	893	914	2.4	907	1.6	901	0.9	889	0.4
		10	1312	1354	3.2	1343	2.4	1354	3.0	1333	1.6
	30	30	717	703	2.0	720	0.4	715	0.3	733	2.2
		25	873	877	0.5	899	3.0	905	3.2	880	0.8
		20	1107	1127	1.8	1155	4.3	1183	6.9	1100	0.6
40	10	10	576	574	0.3	590	2.4	567	1.6	600	4.2
		5	1095	1101	0.5	1131	3.3	1110	1.4	1200	18.7
	20	20	671	629	6.3	682	1.6	659	1.8	667	0.6
		15	896	875	2.3	948	5.8	922	2.9	889	0.8
		10	1343	1340	0.2	1452	8.1	1436	6.9	1333	0.7
	30	30	711	*579*	18.6	*669*	5.9	717	0.8	733	3.2
		25	836	*738*	12.2	*853*	2.0	903	8.0	880	5.2
		20	1038	973	6.3	1124	8.3	1188	14.5	1100	6.0
50	10	10	587	*483*	17.7	*575*	2.0	568	3.2	600	2.2
		5	1067	*942*	11.7	*1122*	5.2	1097	2.8	1200	9.7
	20	20	678	*457*	32.6	*613*	9.6	660	2.7	667	1.6
		15	852	*642*	24.7	*860*	0.9	903	6.0	889	4.3
		10	1208	*996*	17.6	*1336*	10.6	1378	14.1	1333	10.4