Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem

H. Hadwiger, Bern

Anlässlich der Lektüre verschiedener Abhandlungen [1]), die dem bekannten Zinsfussproblem gewidmet sind, habe ich eine Frage grundsätzlicher Art aufgeworfen, mit der wir uns in der vorliegenden Note kurz befassen wollen. Um den rein mathematischen Aspekt, unter dem ich die Studie betrachtet sehen möchte, besser hervortreten zu lassen, habe ich bei der Anschrift der Formeln die konventionellen Zeichen (Zinsintensität, Ausscheidefunktion, Leibrentenbarwert usw.) vermieden. Durch diese nicht gebundene Schreibweise wird auch die Anwendung der entwickelten Theorie in andern analogen Fällen erleichtert. Bei der üblichen versicherungstechnischen Interpretation wird der Fachmann mühelos die notwendigen Identifikationen vornehmen.

Das «Zinsfussproblem» in kontinuierlicher Behandlung kann in der folgenden analytischen Fassung dargeboten werden:

Es sei $\Phi(x)$ eine in $x \geqq 0$ definierte analytische Funktion, über die wir nur $\Phi(x) > 0$ und die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \Phi(x)\, dx$$

voraussetzen wollen. Durch die Integralbeziehung

$$\varphi = \varphi(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\Phi(x+t)}{\Phi(x)}\, dt \tag{1}$$

wird eine in $x \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ definierte Funktion der beiden Veränderlichen x und α festgelegt.

---

[1]) Vgl. *H. Christen*, Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. M. V. S. V., 25. Heft, 1930, S. 251—325; *E. Fischer*, Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe. M. V. S. V., 42. Bd., 1942, S. 205—306, und die den genannten Abhandlungen beigegebenen Literaturverzeichnisse.

Für einen Anfangswert α_0 sei nun

$$\varphi_0 = \varphi(x, \alpha_0) = \int_0^\infty e^{-\alpha_0 t} \frac{\Phi(x+t)}{\Phi(x)} dt \tag{2}$$

vorgegeben. Es wird das Problem gestellt, für $\alpha \neq \alpha_0$ die Funktion φ direkt aus φ_0 zu berechnen.

In einem erheblichen Teil der über dieses Problem geschriebenen Literatur werden Methoden der näherungsweisen Ermittlung entwickelt. Die sich hierbei ergebenden sehr zahlreichen Näherungsformeln, die nach der praktischen Anwendbarkeit ausgerichtet sind, bleiben im Rahmen dieser enggefassten theoretischen Studie unberücksichtigt. Unser Interesse gilt den exakten Lösungen des Problems. Derartige Lösungen wurden meines Wissens ausschliesslich bei vorgegebenen speziellen Ausscheidefunktionen (Gesetze von *Dormoy, Moivre, Achard, Makeham* u. a. m.) gegeben [1]). Bei der Lösungsform spielt jeweils die spezielle Natur des zugrunde gelegten Ausscheidungsgesetzes Φ eine entscheidende Rolle. Es handelt sich also um *Individuallösungen*. Gibt es nun eine *Universallösung*? Die exakt mathematische Formulierung dieser Frage lautet so: Ist bei Vorgabe der Funktion φ_0 ohne Kenntnis von Φ die Funktion φ für $\alpha \neq \alpha_0$ eindeutig bestimmt? Mit andern Worten: Kann das «Zinsfussproblem» ohne Kenntnis der Ausscheidefunktion exakt gelöst werden? Wenn diese Frage zu bejahen ist, so gibt es eine für alle Ausscheidegesetze simultan gültige Darstellung der Lösung, also eine Universallösung, die wir symbolisch durch

$$\varphi = \chi[\varphi_0] \tag{3}$$

bezeichnen.

Ich weiss nicht, ob diese grundsätzliche Frage bereits einmal gestellt und bearbeitet wurde. Oft geht aus den Definitionen des Problems schon nicht klar hervor, inwieweit die Kenntnis der Aus-

---

[1]) *E. Fischer*, der die letzte grössere Abhandlung über das Zinsfussproblem geschrieben hat (vgl. Fussnote 1, S. 31), gibt eine Übersicht über die bisher erzielten Lösungsansätze. Eine zweckdienliche Darstellung findet sich auch bei *W. Meissner*, Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. Blätter für Versicherungs-Mathematik, 4. Bd., 1939, S. 467—491.

scheidefunktion zur Darstellung der Lösung herangezogen werden kann. Es muss an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass ohne Angabe des Ausmasses, in welchem die Funktion Φ zur Darstellung der Lösung benutzt werden soll, gar kein exakt gestelltes Problem vorliegt, indem ja bereits die Darstellung (1) eine triviale Lösung ist. Dagegen wird «stillschweigend» eine, vom praktisch technischen Standpunkt aus beurteilt, wesentlich einfachere Formel erwartet.

In dieser Note zeige ich nun, dass es tatsächlich eine Universallösung im oben bezeichneten Sinne gibt. Es wird auch die analytische Gestalt der Darstellung (3) mitgeteilt. Ob die erreichte Formel auch vom praktischen Standpunkte aus von Interesse ist, ist jetzt nicht zu entscheiden; jedenfalls kann sie als Ausgangspunkt für weitere theoretische Erhebungen dienen. Die nachfolgenden Rechnungen sind sehr einfach und werden nur angedeutet. Der gedankliche Inhalt der Entwicklung ist der folgende: Zunächst wird ein bezüglich α invarianter Ausdruck [Formel (4)] abgeleitet, der nur φ und α enthält. Diese Invariante, eine partielle Differentialform erster Ordnung, ist gleich der Intensität der Ausscheidefunktion Φ [1]). Damit ist eine Separation erzielt, die gestattet, mühelos Φ durch φ und α darzustellen [Formel (7)]. So ist eigentlich die Inversion der Integralbeziehung (1) vollzogen. Setzt man jetzt in (1) die sich vermöge der Inversion von (2) ergebende Ausscheidefunktion ein, so ist die von Φ freie Universaldarstellung von φ durch φ_0 gewonnen [Formel (8)].

Die erwähnte Invariante (4) gestattet z. B., noch eine für die Funktion φ gültige (von Φ unabhängige) partielle Differentialgleichung 2. Ordnung abzuleiten [Formeln (5) und (6)].

Als Ausgangspunkt der Entwicklung wählen wir (1) und erreichen durch eine einfache Umrechnung zunächst

$$\Phi(x)\, e^{-\alpha x}\, \varphi = \int_x^\infty e^{-\alpha \xi}\, \Phi(\xi)\, d\xi$$

und dann

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x)\, e^{-\alpha x}\, \varphi\right] = -\, e^{-\alpha x}\, \Phi(x)\,.$$

[1]) Die Formel an sich ist nicht neu; es handelt sich um ein Äquivalent zu der bekannten Differentialgleichung für den Rentenbarwert. Vgl. *N. R. Jörgensen*, Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung, 1913, S. 148.

Die Differentiation des linksseitigen Produktes und zweckdienliche Umformung ergibt die Beziehung

$$(4) \qquad \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha \varphi + 1}{\varphi} = - \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} .$$

Die rechte Seite ist also die Intensität von Φ und damit von α völlig unabhängig. Die linksseitige Differentialform ist somit eine Invariante bezüglich α [1]).

Durch partielle Ableitung nach α fällt der Einfluss von Φ aus, und man erreicht die partielle Differentialgleichung

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\varphi} \right] - 1 = 0 ,$$

oder anders geschrieben

$$(6) \qquad \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \varphi^2 = 0 .$$

Diese partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung können zweckmässig zur Bearbeitung gewisser Fragen herangezogen werden [2]).

---

[1]) Diesem invarianten Ausdruck entspricht in der diskontinuierlichen Behandlung des Zinsfussproblems der ebenfalls invariante Bruch

$$\frac{v a_{x+1}}{a_{x-1}} = \frac{l_x}{l_{x+1}} .$$

[2]) So kann man z. B. die Frage, ob es möglich ist, dass sich für die Funktion $\varphi(x,\alpha)$ die separierte Gestalt $\varphi(x,\alpha) = \psi(x)\,\chi(\alpha)$ ergeben kann, leicht erledigen. Mit diesem Ansatz geht nämlich die partielle Differentialgleichung zunächst in die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + \psi(x)\,\chi^2 = 0$ über, so dass $\psi(x) = a$ und dann als Lösung der entstehenden Bernoullischen Gleichung $\chi(\alpha) = \frac{1}{c + a\alpha}$ und also $\varphi(x,\alpha) = \frac{a}{c + a\alpha}$ folgt.

Die weitere Rechnung liefert $\Phi(x) = \Phi(0)\, e^{-\frac{cx}{a}}$. Damit ist auf diesem Wege gezeigt, dass das Gesetz von *Dormoy* als einziges Ausscheidegesetz die verlangte Eigenschaft besitzt. Die erzielte Separation ist in diesem Fall insofern trivial, als der eine Faktor eine Konstante ist.

Nun lässt sich weiter (4) nach Φ auflösen. So ergibt sich die Inversion von (1), nämlich

$$\Phi(x) = \Phi(0)\,\frac{\varphi(0)}{\varphi(x)}\,e^{\alpha x - \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)}} \tag{7}$$

Endlich kann man den sich durch Inversion von (2) ergebenden Ausdruck für Φ in (1) substituieren und erreicht auf diese Weise die von Φ freie Darstellung von φ durch φ_0 in der Gestalt

$$\varphi(x) = \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x+t)}\, e^{-(\alpha-\alpha_0)t - \int\limits_x^{x+t} \frac{d\xi}{\varphi_0(\xi)}} \right\} dt. \tag{8}$$

Damit ist die analytische Form der Universallösung des «Zinsfussproblems» erreicht [1]).

---

[1]) Als Beispiel für die Durchrechnung nach der Universalformel wähle man z. B. die für $0 < c < 1$, $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$ monoton fallende Funktion

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{1 - c e^{-bx}} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{c e^{-bx}}{a + b} \right\}$$

Es ergibt sich nach (8)

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - c e^{-bx}} \left\{ \frac{1}{a + \alpha - \alpha_0} - \frac{c e^{-bx}}{a + b + \alpha - \alpha_0} \right\}.$$