Über die Anwendbarkeit von Durchschnittsverfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung

Autor(en): **Leepin, Peter Alexander**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **44 (1944)**

PDF erstellt am: **24.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551233

Über die Anwendbarkeit von Durchschnittsverfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung [1]

Von *Peter Alexander Leepin*, Basel

Einleitung

1. Grundsätzliches zur Versicherungsmathematik ausserhalb der Lebensversicherung

Die Mathematik der Lebensversicherung hat sich längst Geltung verschafft und bedarf keines Anwaltes mehr. In der Lebensversicherung ist es heute überflüssig, die Nützlichkeit der Anwendung mathematischer Verfahren noch besonders nachzuweisen.

Ganz anders verhält es sich mit der Mathematik der übrigen Versicherungszweige. Die Mathematik der Nichtlebensversicherung, wie sie auch bezeichnet wird, ist erst in den beiden letzten Jahrzehnten entstanden und ringt gegenwärtig um ihre Anerkennung. Zahlreiche Einzelabhandlungen haben sich weitgehend zu einem Ganzen vereinigt; wir erwähnen hier nur die grundlegenden Werke von *Riebesell* (1), *Gürtler* (2), *Sergowskij* (3) und *Potin* (4), in denen versucht wird, eine abgerundete Darstellung der Grundlagen und Verfahren der Mathematik der Nichtlebensversicherung zu vermitteln. Das Hauptverdienst gebührt dabei zweifellos *Riebesell*, der in seinen vielen Untersuchungen nicht nur den Grossteil der wissenschaftlichen Aufbauarbeit geleistet, sondern auch unermüdlich für die Anerkennung in der Praxis gekämpft hat.

Das Wort «kämpfen» mag Aussenstehende vielleicht überraschen und überspitzt anmuten. Es war aber und ist heute noch ein wirklicher Kampf, ein Ringen — leider muss es gesagt sein — überwiegend

[1] Die vorliegende Abhandlung ist der Abdruck der Basler Inauguraldissertation gleichen Titels (Basel 1944).

mit dem menschlichen Beharrungsvermögen. Weil die bisherigen «Verfahren» — so wird offen und versteckt gefolgert — die Geschäftsentwicklung nicht unmittelbar gefährdet haben, sind sie auch «richtig» und bedürfen keiner Verbesserung oder Verfeinerung.

Als wertvoll und nützlich anerkennt der Mathematiker dagegen die Einwände, welche auf Grund von Untersuchungen aus der Praxis gegen die Anwendung mathematischer Methoden erhoben werden. In diesem Zusammenhange sind vor allem die Arbeiten von *Wunderlin* (5) und *Thalmann* (6) zu erwähnen. Diese Autoren begründen ihre Ablehnung der Anwendung mathematischer Verfahren in der sozialen Unfallversicherung mit der zu grossen Streuung im Schadenverlauf, die eine mathematische Behandlung verunmögliche.

Die Schadenwahrscheinlichkeit, d. i. das Verhältnis der gesamten Schadensumme zur gesamten Versicherungssumme in einer Gefahrenklasse, wird meist nach *Riebesell* (7) aufgespalten in die Ausbruchswahrscheinlichkeit und in die Ausbreitungswahrscheinlichkeit. Neben diesen beiden Benennungen sind auch die Ausdrücke Schadenhäufigkeit und durchschnittliche Schadenhöhe im Gebrauch, die vielleicht das Wesen der Sache anschaulicher umschreiben (*Gürtler* zieht die letztgenannten Bezeichnungen vor).

Wunderlin untersucht, ob die Wahrscheinlichkeitstheorie auf die soziale Unfallversicherung angewendet werden kann. Er vertritt die Ansicht, dass sich die Ausbreitungswahrscheinlichkeit nicht wie eine «richtige» Wahrscheinlichkeit verhält im Sinne der Theorie. Der strenge Nachweis dieser Behauptung wäre allerdings auf Grund der *Lexisschen* Dispersionslehre zu führen [1]) oder noch besser mit den in Verfolgung der *Lexisschen* Ideen entwickelten, modernen, statistischen Verfahren (vergleiche die Ausführungen im zweiten Abschnitt). Es scheint uns jedoch, die ganze Fragestellung *Wunderlins* entspringe einer grundsätzlichen Unterschätzung der Mathematik [2]). Wäre die Wahrscheinlichkeitsrechnung das einzige Hilfsmittel des

---

[1]) Auf diesen Mangel hat schon *Jecklin* (8) aufmerksam gemacht.

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die entsprechenden Arbeiten von *Peek* und *Blaschke* in der Lebensversicherung. An neueren Arbeiten erwähnen wir nur die Basler Dissertation von *Wiesler* «Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik» (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 44, Bern 1944).

[2]) Er schreibt l. c. S. 1: «Diese Suche nach einer mathematischen Methode zur Prämien- und Reservenbestimmung kann jedoch nur Aussicht auf Erfolg

Mathematikers, so liesse sich seine Auffassung eher vertreten. Immerhin müsste man sich daran erinnern, dass schon *Lexis* mit seinem Begriff der «typischen Wahrscheinlichkeitsgrösse mit übernormaler Dispersion» die Vorstellung der konstanten Wahrscheinlichkeit verlassen hat. Noch weiter geht *Riebesell,* der in seiner Einführung in die Sachversicherungsmathematik sogar Mittelwerte aus relativen Häufigkeiten in endlichen Beständen unter gewissen Voraussetzungen als Wahrscheinlichkeit bezeichnet [1]).

Nun steht aber der Mathematik der Nichtlebensversicherung ausser der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine weitere Waffe zur Verfügung. Wollen wir nämlich Verhältniszahlen, wie sie in der Sachversicherung auftreten, nicht Wahrscheinlichkeiten nennen, so ist ihre Behandlung Aufgabe der *mathematischen Statistik. Riebesell* hat am XI. Internationalen Versicherungsmathematiker-Kongress (9) in Paris die heute wohl allgemein anerkannte Ansicht vertreten, man dürfe dann von Sachversicherungsmathematik reden, wenn die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder der mathematischen Statistik Verwendung finden. Liesse es sich wirklich beweisen, dass der Ausbreitungswahrscheinlichkeit nicht Wahrscheinlichkeitscharakter im engeren Sinne zukommt, so würde eben der mathematische Statistiker an Stelle des strengen Wahrscheinlichkeitstheoretikers das Problem lösen müssen.

Für den einzelnen Versicherungsvertrag kann der Schaden theoretisch und praktisch zwischen Null und der vollen versicherten Leistung schwanken. Es ist deshalb nicht möglich, für einen einzelnen Vertrag eine Prämie vernünftig festzusetzen. Wird eine ausreichend grosse Zahl von Verträgen in einen Bestand zusammengefasst, so wäre es theoretisch wiederum denkbar, dass der Schaden sich zwischen Null und der ganzen Versicherungssumme bewegt. Praktisch wird nun aber der Schaden innerhalb «bestimmter Grenzen» bleiben, weil ein «Ausgleich» stattfindet. Dieser Ausgleich ist eine Erfahrungstatsache.

---

haben, wenn es gelingt nachzuweisen, dass die Unfallstatistik die Voraussetzungen für eine streng wissenschaftliche Bearbeitung erfüllt, so dass ihre Ergebnisse wahrscheinlichkeitstheoretisch verwendet werden können.»

[1]) In «Mathematik der Sachversicherung» S. 7: «Da wir es in der Praxis niemals mit unendlichen Folgen zu tun haben, soll von *Häufigkeit* gesprochen werden, wenn wir es mit *bestimmten* Versicherungsbeständen zu tun haben, von *Wahrscheinlichkeit* dagegen, wenn wir die Häufigkeiten auf mehrere Versicherungsbestände ausdehnen und Mittelwerte aus den Häufigkeiten bilden.»

Dass er im allgemeinen stattfinden wird, ist plausibel, sobald das Eintreffen eines Schadenfalles nicht auch das Eintreffen von anderen bedingt oder wenigstens stark begünstigt. Auf diesem Ausgleich beruht überhaupt die Möglichkeit der Versicherung.

Die Schadenwahrscheinlichkeit weist praktisch eine verhältnismässig kleine Streuung auf. Deswegen ist es möglich, aus der Vergangenheit auf die Zukunft zu schliessen. Wäre das nicht der Fall, so müssten Jahre mit riesigen Gewinnen von Jahren mit entsprechenden Verlusten gefolgt sein; alle paar Jahre würden auf Grund «normaler» Katastrophen Zusammenbrüche auftreten. Ein derartiges «Geschäft» wäre einem gefährlichen Hasardspiel gleichzustellen [1]).

Die Aufgabe, aus der Reihe der beobachteten Werte der Schadenwahrscheinlichkeit Rückschlüsse auf den zukünftigen Verlauf zu ziehen, ist ein Problem der mathematischen Statistik oder unter bestimmten Umständen auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die mathematische Statistik verfügt aber über die Verfahren, welche diese Aufgabe zu lösen gestatten. Diese Grundaufgabe ist allen Versicherungszweigen gemein. *Jecklin* (8) hat übrigens gezeigt, dass die Schwankungen in der Lebensversicherung nicht unbedingt kleiner ausfallen als in den übrigen Versicherungsarten.

Nach diesen kurzen grundsätzlichen Bemerkungen wenden wir uns nun unserem eigentlichen Thema zu, der Frage der Bestimmbarkeit der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung mit Hilfe von Durchschnittsverfahren.

2. Die Schadenreserve in der Unfallversicherung

a) Der Begriff der Schadenreserve

In der Unfallversicherung kann sich — wie übrigens auch in den meisten anderen Versicherungszweigen — die Erledigung der eingetretenen Schadenfälle auf mehrere Rechnungsjahre erstrecken;

---

[1]) Knapp, aber treffend hat *Jecklin* (10), S. 176, diesen Sachverhalt dargelegt: «Denn es sind nur zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder handelt es sich um Schadenhäufigkeiten mit einer gewissen, durch die charakteristischen Verteilungen gegebenen Stabilität, und man kann daraus auf die notwendige Prämienhöhe schliessen, oder aber die Entwicklung der Schadenquoten lässt keinen solchen Schluss zu. Im ersteren Falle ist nicht einzusehen, warum nach der Möglichkeit mathematisch-statistischer Grundlegung nicht auch die Folgerungen gelten sollen, im zweiten Falle aber liegt Versicherung im rein technischen Sinne des Wortes gar nicht vor.»

dessenungeachtet ist jedes Jahr die Erfolgsrechnung und die Bilanz zu erstellen. Die dem Versicherer aus bereits eingetretenen Fällen noch erwachsende Belastung ist darin vollständig zu berücksichtigen; denn es ginge nicht an, damit die Rechnung der folgenden Jahre zu belasten und so eine Verschiebung der Erfolge zu bewirken und gleichzeitig den Grundsatz der Bilanzwahrheit zu verletzen.

Unter Schadenreserve verstehen wir für unsere folgenden Ausführungen die bilanzmässige Rücklage für die eingetretenen, aber noch nicht vollständig abgewickelten Schadenfälle.

b) Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung

Zur Ermittlung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung kommen verschiedene Verfahren in Frage.

Das Einzelschätzungsverfahren

Beim Einzelschätzungsverfahren wird jeder einzelne angemeldete Schaden daraufhin durchgesehen, wieviel er nach Abschluss des Rechnungsjahres voraussichtlich noch kosten wird. Dieses Verfahren wird in der privaten Unfallversicherung fast ausschliesslich angewendet; seine Durchführung ist aber sehr mühsam, da sich der Schätzungsbeamte in jeden einzelnen Fall einarbeiten muss.

Durchschnittsverfahren

Bei den Durchschnittsverfahren wird versucht, unmittelbar den Gesamtbetrag der Schadenreserve zu bestimmen. Durch Multiplikation einer bestimmten, für das Rechnungsjahr kennzeichnenden Grösse, etwa der Anzahl der schwebenden Schadenfälle oder der Höhe der im Rechnungsjahr geleisteten Schadenzahlungen, mit einer Konstanten will man die gesamte Schadenreserve finden. Die Konstante selber erhält man durch Mittelbildung aus den Beobachtungen mehrerer Jahre. Dabei gibt es zahlreiche Möglichkeiten der Verfeinerung, z. B. durch Gruppierung der Schäden im Entstehungsjahr. Eine Abart der Durchschnittsverfahren besteht darin, nach der gleichen Methode zuerst die gesamte Schadensumme zu bestimmen und dann durch Subtraktion der bereits bezahlten Schäden die eigentliche Schadenreserve festzustellen. Der Erfindungsgabe steht hier ein weiter Spielraum offen.

In der Praxis der Unfallversicherung werden Durchschnittsverfahren selten verwendet [1]; sie sind jedoch vor etwa zehn Jahren durch Arbeiten italienischer Aktuare zur Diskussion gestellt worden. Bis heute ist jedoch keine abschliessende Klärung erfolgt. Es ist wohl allgemein anerkannt, dass die Verwendung von Durchschnittsverfahren an sich erwünscht wäre; hingegen sind die Ansichten darüber geteilt, ob die Reserveberechnung auf diese Weise nicht zu ungünstigen Ergebnissen führt.

3. Problemstellung

Im folgenden umschreiben wir die von uns zu behandelnde Aufgabe: *Können zur Berechnung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung Durchschnittsverfahren an Stelle des Einzelschätzungsverfahrens Verwendung finden?*

Die gestellte Frage bedarf gleich einer Erläuterung. Wir werden ein Durchschnittsverfahren verwenden dürfen, wenn es nicht wesentlich schlechtere Ergebnisse als das Einzelschätzungsverfahren zeitigt. Was heisst aber «schlechter»? Wir müssen also zuerst die Begriffe «gut» und «schlecht» umschreiben und daraus Methoden herleiten, welche einen Vergleich der verschiedenen Verfahren zur Reservebestimmung gestatten. Damit werden wir auch in der Lage sein, an einem bestimmten Beobachtungsmaterial einige Verfahren zu prüfen und neue Methoden auf ihre Anwendbarkeit hin anzusehen. Bei unserem Vorgehen werden wir uns weitgehend auf statistische Verfahren stützen, die im deutschen Sprachgebiet angesichts ihrer grossen, praktischen Bedeutung noch zu wenig bekannt sind.

---

[1] Wie wir einem Vortrag von *Schües* (11) entnehmen, fanden Durchschnittsverfahren zum erstenmal in der englischen Seeversicherung Anwendung. Der Grund für diese Tatsache liegt wohl darin, dass es in diesem Versicherungszweig besonders lange ging, bis der Versicherer vom Eintritt und von der Schwere des die Entschädigungspflicht begründenden Ereignisses erfuhr. *Schües* wandte Durchschnittsverfahren mit Erfolg in der Transportversicherung an. In der anschliessenden Diskussion teilte *Wendt* mit, dass seine Haftpflichtgesellschaft auch solche Verfahren anwende.

Nach *Leslie* (18) ist es im Staate New York den Haftpflichtgesellschaften gesetzlich vorgeschrieben, die Schadenreserven auf Grund von Durchschnittsverfahren zu bestimmen.

Aus der Unfallversicherung ist uns kein Beispiel vor *Bufano* (12) bekannt. Immerhin ist es gut möglich, dass auch schon früher in der Unfallversicherung derartige Methoden benutzt wurden, da der Gedanke von anderen Versicherungszweigen her nahe lag.

I. Abschnitt

Die Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der Unfallversicherung und ihre Brauchbarkeit

Die Frage der Anwendbarkeit von Durchschnittsverfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der Unfallversicherung hat unseres Wissens die erste Behandlung im Jahre 1933 erfahren durch *Bufano* (12) und *D'Addario* (13). Diese Arbeiten stützen sich auf Häufigkeitsverteilungen, die *Amoroso* (14) vorgeschlagen hatte. *Bufano* und *D'Addario* bejahen ohne genauere Prüfung an einem Beobachtungsmaterial die Möglichkeit, Durchschnittsverfahren anzuwenden [1]).

Das Problem der Bestimmung der Prämien und Reserven in der Unfall- und Haftpflichtversicherung als Ganzes ist dann 1934, um die Ansichten der Mathematiker aller Länder zu erfahren, vom X. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker in Rom behandelt worden. Aus den eingereichten Abhandlungen lassen sich die folgenden Ansichten über unsere besondere Frage entnehmen. *Stroh* (15) zeigt sich exakten Methoden für die Unfall- und Haftpflichtversicherung nicht zugänglich. *Jannott* (16) glaubt auf Grund der Erfahrungen seiner Gesellschaft (Gothaer allgemeine Versicherungsbank) die Anwendbarkeit von Durchschnittsverfahren zur Reservebestimmung verneinen zu müssen. *Amoroso* (17) kommt, sich auf das Material seiner Gesellschaft stützend (Le Assicurazioni d'Italia), zur gegenteiligen Überzeugung. *Renfer* (19) hält die Einzelschätzung für vorsichtiger. Bei grossen Beständen wäre seiner Meinung nach auch die globale Schätzung auf Grund der Erfahrungen früherer Jahre zulässig; dabei sei indessen eine Sonderbehandlung der grössern Schadenfälle zu empfehlen. Im Anschluss an seine Kongressarbeit veröffentlichte *Jannott* (20) eine weitere Abhandlung, in der er seine Ansicht noch weiter zu begründen versuchte. Damit ist das Schrifttum über die von uns zu behandelnde Frage bereits erschöpft.

---

[1]) *Bufano* hat für *ein* Jahr die Schadenreserve mittels zweier Durchschnittsverfahren berechnet. Die so erhaltenen Reserven vergleicht er mit der Einzelschätzungsreserve (statt den tatsächlichen Auszahlungen) und findet gute Übereinstimmung.

§ 1

Die Güte eines Verfahrens

Um verschiedene Verfahren miteinander vergleichen zu können, müssen wir zuerst genau festlegen, wann ein Verfahren als «gut», d. h. als brauchbar, zu bezeichnen ist. Als bestes Verfahren dürften wir dasjenige ansehen, das uns Jahr für Jahr die genaue Summe der Auszahlungen angeben würde, die für die unerledigten Schadenfälle noch zu leisten ist. Weil wir aber nicht in die Zukunft sehen können, müssen wir auf die Verwirklichung dieses Idealfalles verzichten. Der nächstliegende Gedanke wäre nun, diejenige Bestimmung als die günstigste zu bezeichnen, die am nächsten an die tatsächlichen Auszahlungen herankommt. Dann schwankt aber die Reserve um die Auszahlungen; sie wird also zum Teil ungenügend sein. Das müsste weiter dazu führen, dass spätere Rechnungsjahre mit den Auszahlungen alter Schäden belastet würden, während die Jahre mit dem eigentlichen Schaden einen zu hohen Überschuss aufwiesen, der unter Umständen bereits verbraucht wäre. So gelangt man schliesslich dazu, den zu erwartenden, eigentlichen Bedarf noch um einen Sicherheitszuschlag zu erhöhen. Es liegt im Interesse einer gleichmässigen Geschäftsentwicklung, den Sicherheitszuschlag fest anzusetzen; so werden die aus der Überreservierung frei werdenden Mittel auch annähernd gleich ausfallen. Ausserdem ist es von Nutzen, über das Ausmass des zu erwartenden Überschusses durch Einrechnung von Sicherheitszuschlägen unterrichtet zu sein.

Der Weg, den wir zu gehen haben, ist damit vorgezeichnet. Wir suchen unter Zweiteilung unserer Aufgabe eine möglichst genaue Schätzung des tatsächlichen Bedarfs und eine Möglichkeit, den Sicherheitszuschlag dergestalt festzusetzen, dass mit grosser Wahrscheinlichkeit aus der Schadenabwicklung kein Verlust entsteht.

Was bedeutet nun aber eine möglichst genaue Schätzung? Darunter verstehen wir ein Verfahren, das zu kleinen Abweichungen von den tatsächlichen Aufwendungen führt, das also eine kleine Streuung um die beobachteten Auszahlungen aufweist. Für den zahlenmässigen Vergleich verschiedener Verfahren ist es dabei gegeben, ein Streuungsmass, z. B. die mittlere quadratische Abweichung, zu verwenden.

§ 2

Die einzelnen Verfahren

Wir wenden uns vorerst einer genauen Betrachtung der einzelnen Verfahren zu.

1. Die «genaue» Einzelschätzung

In der Einleitung führten wir bereits aus, das bisher allgemein übliche Verfahren der «genauen» Einzelschätzung bestehe darin, jeden einzelnen Fall darauf zu prüfen, wieviel er im schlimmsten Falle den Versicherer voraussichtlich noch kosten wird. In diesem Vorgehen ist der Sicherheitszuschlag bereits enthalten; seiner Grösse nach ist er aber nicht bekannt, muss indessen als maximaler Zuschlag angesehen werden.

Die Streuung der geschätzten Werte um die «wahren» Werte bleibt innerhalb bestimmter, aber nicht zum voraus feststehender Schranken. Auch bei einer gestörten Geschäftsentwicklung, bei einem anormalen Schadenverlauf oder bei Änderungen in der Bestandszusammensetzung wird die Einzelschätzung brauchbare Ergebnisse zeitigen. Auch lässt sich der Rückversicherungsanteil ohne Schwierigkeit bestimmen.

Diesen Vorzügen stehen nun aber gewichtige Nachteile gegenüber. Vor allem bedeutet es eine mühsame und zeitraubende Arbeit, sich in jeden Schadenfall einzuarbeiten; die genaue Durchsicht der Schadenakten ist aber notwendig, um eine gute Schätzung abgeben zu können. Ein weiterer Mangel besteht in der fehlenden Objektivität der Schätzung; verschiedene Schätzer werden den gleichen Fall verschieden beurteilen und ziffernmässig andere Reserven festlegen. Ferner haftet dem Vorgehen der Mangel an, dass die Grösse des Sicherheitszuschlages unbekannt bleibt. Allerdings liegt dies nicht im Verfahren an sich begründet, sondern in der Art der Anwendung. Schliesslich findet der Ausgleich innerhalb des Bestandes keine Berücksichtigung.

2. Die Durchschnittsverfahren

Jannott braucht, um den Gegensatz der Durchschnittsverfahren zu der Einzelschätzung auszudrücken, den Ausdruck «mathematische Bestimmbarkeit der Schadenreserve». Wir möchten jedoch das Vorgehen nicht als «mathematisch» bezeichnen. Auch in der Lebensversicherung ist der Ausdruck «mathematisch» kaum mehr üblich für die Berechnung der technischen Rücklagen [1]). Wir bestimmen vielmehr auf Grund mathematischer Operationen, deren Anwendung auf bestimmten Annahmen beruht, den Wert, der auf Grund statistischer Beobachtungen mit der grössten Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Diese Art der Berechnung fusst aber in erster Linie auf statistischen Beobachtungen. «Mathematisch bestimmbar» ist eine Bezeichnungsweise, die besser der reinen Mathematik vorbehalten bleibt.

Jannott (20) hat verschiedene Grössen daraufhin untersucht, ob sie zur Bestimmung der Schadenreserve in Frage kommen können. Wir wollen versuchen, diese Ansätze in ein System zu bringen. Als *direkt* bezeichnen wir ein Verfahren, das unmittelbar auf die Reserve führt. *Indirekt* nennen wir eine Methode, welche die gesamte Schadensumme zu berechnen gestattet; durch Abzug der bereits bezahlten Summen erhalten wir die noch zu leistenden Zahlungen, also die Schadenreserve.

a) Direkte Verfahren

Aus den Erfahrungen mehrerer Jahre bestimmen wir das Verhältnis der für die unerledigten Fälle später benötigten Mittel zu einer Bezugsgrösse. Durch Multiplikation der so erhaltenen Verhältniszahl mit der entsprechenden Bezugsgrösse des laufenden Jahres erhalten wir die (Netto-) Schadenreserve; vom Sicherheitszuschlag sehen wir dabei vorläufig ab.

Wir bezeichnen mit A_i die Schadenauszahlungen aus der Schadenreserve im Rechnungsjahre i, mit B_i die Bezugszahl des Jahres, mit R_i die Schadenreserve und mit m die Verhältniszahl; dann ist

$$R_i = m \cdot B_i, \tag{1}$$

wobei

$$m = \frac{\sum^i A_i}{\sum^i B_i} \tag{1a}$$

Die Summationen im Ausdruck für m erstrecken sich über mehrere vorhergehende Rechnungsjahre.

---

[1]) Das Wort Versicherungs-«Mathematik» sollte ebenfalls nur für theoretische Betrachtungen Verwendung finden.

Die Wahl von B_i steht uns frei. Hingegen werden wir diese Wahl im Sinne unserer grundsätzlichen Betrachtungen derart treffen, dass so wenig Schwankungen als möglich zu erwarten sind. — *Jannott* untersucht verschiedene Grössen B_i, die unseres Erachtens schon zum vorneherein als Bezugszahl nicht in Frage kommen können. Wir werden doch von unserem B_i unbedingt verlangen müssen, dass es die Bestandsbewegung mitmacht. Eine Grösse wie zum Beispiel die *Durchschnittsprämie* ist auf alle Fälle zur Reservebestimmung ungeeignet. Wir dürfen nur solche Grössen verwenden, die mit wachsendem absolutem Risiko im allgemeinen auch zunehmen; für die Durchschnittsprämie trifft diese Forderung aber nicht zu. Ebenso müssen wir von der *Policenanzahl* als Bezugsgrösse absehen. Werden viele Versicherungen mit kleinen Summen neu abgeschlossen, so braucht das gesamte Risiko, also im allgemeinen auch die Schadenreserve, nicht stark zuzunehmen. Dagegen kann durch eine Gruppenversicherung mit einer einzigen Police eine wesentliche Risikovermehrung eintreten.

Für die Bestandsbewegung sind typisch:

a) die *Prämieneinnahmen des laufenden Jahres* oder auch der *mittlere Prämienbestand* des Jahres;

b) die *Schadenzahlungen des laufenden Jahres;*

c) ausserdem käme als Bezugsgrösse in Frage die *Anzahl der angemeldeten* oder die *Anzahl der nicht erledigten Schadenfälle.*

Die beiden letztgenannten Möglichkeiten sind allerdings mit dem Nachteil behaftet, dass leichte und schwere Schadenfälle gleich stark zählen; die Anzahl der Schadenfälle ist nur bedingt ein Mass des Risikos.

Jannott glaubt, die direkten Verfahren zum vorneherein, ohne jede statistische Untersuchung, ablehnen zu müssen. Er führt aus, mit einer Erhöhung etwa der Prämieneinnahme könne sehr wohl eine Verminderung des Schadenanfalls verbunden sein. Dabei wird aber übersehen, dass dieser Mangel jeder Vorausberechnung anhaftet. Auch die Einzelschätzung kann zu einem höheren Betrage führen, während die tatsächlich zu leistenden Zahlungen bei günstiger Abwicklung kleiner ausfallen. Die entscheidende Frage ist es, ob Fälle der genannten Art häufig vorkommen oder nicht. Zum mindesten hätte die Häufigkeit derartiger Vorkommnisse durch eine statistische

Untersuchung geprüft werden müssen. Ganz im Gegenteil halten wir dafür, dass nur die direkten Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve praktisch in Frage kommen können, wobei wir zudem als Bezugszahl eine Grösse verwenden müssen, welche die Bestandsbewegung mitmacht.

b) Indirekte Verfahren

Bei den indirekten Verfahren suchen wir zuerst die gesamte Schadensumme zu bestimmen; durch Subtraktion der bereits bezahlten Beträge ergibt sich daraus die Schadenreserve. Dabei werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen:

α) wir bestimmen die gesamte Summe der in einem Rechnungsjahr neu angefallenen Schäden, also die Schadensumme eines Jahrganges, oder

β) wir bestimmen die gesamte Schadensumme aller Jahrgänge, die in die Berechnung der Schadenreserve eingehen, ohne Gruppierung nach dem Alter der Schäden.

Die indirekten Verfahren weisen zunächst den Vorteil auf, dass sie unabhängig sind von der Abwicklungsgeschwindigkeit, ausser wenn die gesamte Schadensumme auf Grund der bereits geleisteten Zahlungen als Bezugsgrösse gerechnet wird. Die direkten Verfahren dagegen werden beeinträchtigt und können sogar unbrauchbar werden, wenn etwa als Folge von Personalmangel (Krieg!) die Schäden langsamer abgewickelt werden als normal. Am ehesten wird noch unter diesen Umständen das direkte Verfahren unter Verwendung der Anzahl der schwebenden Schäden als Bezugsgrösse brauchbare Ergebnisse zeitigen. Bei den indirekten Verfahren drückt sich die langsamere Abwicklung in der Subtraktion einer kleineren Schadenzahlung aus, führt also zwangsläufig zu einer Erhöhung der Schadenreserve. Es muss dabei allerdings schon eine recht kräftige Störung des Betriebslebens eintreten, bis sich ein starker Einfluss auf die Reserve geltend macht. Die schweren Fälle werden ohnehin langsamer abgewickelt und die leichten Fälle beeinflussen die Schadenreserve nicht erheblich.

Den beschriebenen Vorteilen der indirekten Verfahren steht aber ein gewichtiger und entscheidender Nachteil gegenüber. Der Streuungsbereich des gesamten Schadenbetrages ist wesentlich weiter als derjenige der Schadenreserve, weil der Gesamtschaden grösser ist als die Reserve. Alle Schwankungen in den Auszahlungen werden von der Schadenreserve gefolgt. Denken wir uns nach einer Reihe normaler Jahre ein Jahr mit einem besonders grossen Schadenanfall, von dem ein grosser Teil noch im gleichen Jahre ausbezahlt wird. Der Subtrahend (die geleisteten Zahlungen) wird gross, während der Gesamtschadenanfall an Hand der normalen Jahre berechnet wird. Die Schadenreserve kann damit negativ ausfallen, während zur Deckung des erhöhten Bedarfs eine verstärkte Reserve zu stellen wäre. In derartigen Fällen würden die direkten Verfahren zu wesentlich besseren Ergebnissen führen.

Ungeachtet der aufgeführten Nachteile sind bis jetzt fast ausschliesslich die indirekten Verfahren untersucht worden. Nebenbei gesagt ist es bezeichnend, dass bei der Betrachtung der indirekten Verfahren nur Grössen, die mit wachsendem absolutem Risiko im allgemeinen zunehmen, Verwendung fanden. Es sind das dieselben, die wir bei den direkten Verfahren als allein in Frage kommend bezeichnet haben: die Prämieneinnahme *(Bufano, Jannott)*, die Schadenzahlungen des laufenden Jahres *(Bufano)* und die Anzahl der schwebenden Schäden *(D'Addario)*. Auch *Jannott* sucht hier keine andere Bezugsgrösse, während er bei den direkten Verfahren dieselben Nenner sogar ohne weiteres von der Betrachtung ausschloss.

Es ist ferner merkwürdig, dass sowohl *Bufano* als auch *Jannott* es übersehen haben, dass die Verwendung der Schadenzahlungen als Bezugsgrösse eigentlich ein direktes Verfahren darstellt. Die Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit der Schadenabwicklung ist nur scheinbar. *Bufano* sucht die gesamte Schadensumme eines Jahrganges zu berechnen, der in die Reservebestimmung eingeht. Wir bezeichnen die Schadenreserve eines Jahrganges mit R_i^n; der obere Index gibt das Rechnungsjahr des Unfallereignisses an, der untere das Alter des Schadens. Weiter sind S_i^n die Summe der Zahlungen für die im Rechnungsjahr n angefallenen Schäden bis zum Zeitpunkt (Alter) i, A_i^n die für den gleichen Bestand nach dem Zeitpunkt i noch zu leistenden Beträge und m^n die Bezugszahl eines Jahrganges. Dann sieht mit unserer Bezeichnung die Formel von *Bufano* so aus:

$$R_i^n = m^n S_i^n - S_i^n = (m^n - 1) S_i^n.$$

Dabei läuft es aber auf dasselbe hinaus, ob wir aus unseren Beobachtungen mehrerer Vorjahre nach *Bufano* die Verhältniszahl

$$m^n = \frac{\sum_n (S_i^n + A_i^n)}{\sum_n S_i^n}$$

bestimmen oder die Grösse

$$m^n - 1 = \frac{\sum_n A_i^n}{\sum_n S_i^n}.$$

Das zweite Vorgehen ist jedoch nichts anderes als das direkte Verfahren unter Verwendung der Schadenzahlungen als Bezugsgrösse.

Wir kommen zum *Schluss:* Die direkten Verfahren scheinen uns die besten Ergebnisse zu verbürgen, während die indirekten Methoden entweder nichts Neues bringen oder aber die Gefahr grosser Abweichungen in sich bergen. Immerhin müssen wir darauf hinweisen, dass die früher genannten italienischen Aktuare nur die indirekten Verfahren untersucht haben. Unsere vorher dargelegten grundsätzlichen Bedenken veranlassen uns aber, diese Verfahren von der weiteren Betrachtung auszuschliessen.

Bisher haben wir durch rein theoretische Betrachtungen diejenigen Grössen und Verfahren ausgesondert, die voraussichtlich zur Reserveberechnung in Frage kommen. Einen wirklichen Entscheid können wir doch erst auf Grund der Ergebnisse einer praktischen Untersuchung fällen.

§ 3

Praktischer Vergleich verschiedener Verfahren zur Reservebestimmung an einem Beobachtungsmaterial

1. Das Beobachtungsmaterial

Den Vergleich verschiedener Verfahren führen wir an einem Material durch, das uns von der Unfallabteilung der «Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft» zur Bearbeitung zur Verfügung gestellt worden ist. Das Beobachtungsmaterial umfasst unter Beschränkung auf das Schweizer Geschäft und unter Weglassung einiger kleiner Sonderbestände (Reiseversicherungen, Autoinsassenversicherungen) die schwebenden Schäden am Ende der Jahre 1934—1938. Auch so enthält der untersuchte Bestand noch ganz verschiedene Komponenten: Einzel-, Gruppen-, Kinder-, Schüler-, Abonnenten- und Hektarenversicherungen. Eine Aufspaltung in die Unterbestände konnten wir uns ersparen, da während der Beobachtungszeit in der Zusammensetzung des Gesamtbestandes keine grossen Veränderungen eintraten. Hingegen dürfen unsere Ergebnisse nicht ohne Prüfung auf andere Gesellschaften übertragen werden, die eine andere Bestandsstruktur aufweisen.

Auf eine Differenzierung der Schäden nach dem Alter (Entstehungsjahr) wird verzichtet; dafür untersuchen wir die Verteilung der Schäden nach der Höhe. Eine weitere Aufspaltung bestände in der Gliederung nach den einzelnen Entschädigungsarten: Todesfall, dauernde Invalidität, Taggeld und Heilungskosten. Wir haben diese Gliederung zwar durchgeführt; sie ergab jedoch nichts Wesentliches und wird deshalb hier nicht behandelt.

Die praktische Aufarbeitung der Bestände stützte sich auf die vorhandenen Schadenkarten, auf denen die Reserve und die daraus geleisteten Zahlungen verzeichnet sind. Einige Ungleichheiten mussten übernommen werden, weil die Untersuchung erst nach der Abwicklung des Bestandes begann. So wurden die Kosten von ärztlichen Gutachten teilweise zu den Heilungskosten geschlagen, teilweise aber in die gewöhnlichen laufenden Kosten genommen. Hier wäre eine einheitliche Lösung erwünscht gewesen. Bei diesen Mängeln handelt es sich aber um Kleinigkeiten, die das Ergebnis der Untersuchung nicht beeinflussen. Der Umfang des Bestandes wird durch die nachfolgende *Tabelle 1* gekennzeichnet.

Zum Vergleich sei erwähnt, dass in den gleichen fünf Jahren beinahe zwölf Millionen Franken für Schäden ausbezahlt und etwa 75 000 Schäden angemeldet worden sind.

Als erstes betrachten wir die Verteilung der Schäden nach ihrer Höhe; sie ist in *Tabelle 2* wiedergegeben.

Tabelle 1

Zahlungen aus der Reserve und Anzahl der reservierten Schäden

Jahr	Zahlungen aus der Reserve Ende des Jahres in Fr. 1 000.—	Anzahl der reservierten Schäden Ende des Jahres
1934	635,2	2 242
1935	693,3	2 459
1936	753,2	2 447
1937	726,2	2 594
1938	689,2	3 023
Σ	3 497,1	12 765

Tabelle 2

Verteilung der Schadenfälle nach ihrer Höhe

Jahr	Schäden von Fr.				
	0–1 000	1 000–5 000	5 000–10 000	über 10 000	Insgesamt
	Beträge in Fr. 1 000.—				
1934	241,7	228,9	108,7	55,9	635,2
1935	270,5	221,3	145,4	56,1	693,3
1936	262,7	231,4	86,2	172,9	753,2
1937	270,5	291,2	67,7	96,8	726,2
1938	293,0	274,8	62,2	59,2	689,2
Σ	1 338,4	1 247,6	470,2	440,9	3 497,1
	Zugehörige Anzahl der Schadenfälle				
1934	2 112	111	16	3	2 242
1935	2 324	110	21	4	2 459
1936	2 327	105	13	2	2 447
1937	2 442	137	9	6	2 594
1938	2 869	141	10	3	3 023
Σ	12 074	604	69	18	12 765

Der Aufstellung entnehmen wir einmal, dass die kleinen Schadenfälle in der Reserve weitaus am häufigsten vorkommen. Eine genauere Betrachtung zeigt ausserdem, dass die Schwankungen in der jährlichen Schadensumme bei den niedrigen Auszahlungen am kleinsten sind, während sie bei den schweren Schadenfällen gross ausfallen [1]). Die weit grösseren Schwankungen bei den schweren Schadenfällen lassen sich damit erklären, dass bei der grossen Zahl der kleinen Schadenfälle ein Ausgleich viel eher zu erwarten ist als bei der kleinen Zahl der schweren Fälle. So ist die hohe Auszahlung bei den schweren Schadenfällen im Jahre 1936 dadurch hervorgerufen, dass beim Todesfall eines einzigen Hochversicherten Fr. 150 000 fällig wurden. Wir dürfen daraus schliessen, dass Ausnahmejahre meistens durch die hohen Schadenfälle bedingt sind. Da wir damit eine wichtige Ursache für Ausnahmejahre kennen, haben wir die Möglichkeit, ihren Einfluss auf die Bestimmung der Schadenreserve mittels eines Durchschnittsverfahrens weitgehend auszuschalten. Wir werden bei der Verwendung von Durchschnittsverfahren die schweren Schadenfälle aussondern und, wenn nötig, sie auf Grund der Einzelschätzungsmethode in die Bilanz einstellen. Das ist jedoch nur dann erforderlich, wenn sich darunter besonders schwere Schäden befinden oder eine überdurchschnittlich grosse Zahl schwerer Schäden noch schwebend ist. Die Aussonderung der schweren Schäden bietet keine besondere Schwierigkeit, da sie beim Zeitpunkt der Reservestellung normalerweise bekannt sind. Die Grenze, von der ab Schadenfälle als schwer zu bezeichnen sind, hängt vom Umfang des Bestandes ab. In unserem Falle wäre die Grenze etwa bei Fr. 10 000 oder etwas tiefer zu ziehen; dabei handelt es sich anzahlmässig nur um einen unbedeutenden Bruchteil der schwebenden Schäden (s. Tabelle 2).

Im Sinne dieser Betrachtungen lassen wir in unserer weiteren Untersuchung den Todesfall des Jahres 1936 mit einer Auszahlung von Fr. 150 000 weg. Er war im Augenblick der Reservestellung in seiner Schadenhöhe genau bekannt und gab zu keiner Schwierigkeit in der Rücklageschätzung Anlass.

In diesem Zusammenhange ist es möglich, weitgehend eine Erklärung dafür zu finden, weshalb *Jannott* mit seinem Beobachtungs-

---

[1]) Wir sehen bei dieser Betrachtung von der nicht sehr starken Bestandsvergrösserung im Laufe der Beobachtungszeit ab.

material zu schlechten Ergebnissen für die Durchschnittsverfahren kommen musste. Abgesehen davon, dass es sich bei der Gothaer allgemeinen Versicherungsbank damals um einen jungen, kleineren, wohl auch noch nicht ausgeglichenen Bestand handelte, hat *Jannott* gerade Jahre untersucht, in denen einige wenige hohe Schadenfälle das Bild vollständig stören. Leider gibt er nirgends absolute Zahlen wieder; hingegen entnehmen wir seinen Untersuchungen (20) S. 30, Tabelle *B*, dass das Jahr 1931 — das bei der Prüfung der Durchschnittsverfahren durch seine hohe Schadenbelastung dann auch schlechte Ergebnisse zeitigte — einige wenige, schwere Schadenfälle aufweist, wie sie in den anderen Jahren nicht auftreten. Die Schadenfälle von über RM. 50 000 machen allein wesentlich mehr als einen Drittel der gesamten Schadenzahlung aus. Wären diese schweren Schadenfälle von *Jannott* aus der Untersuchung ausgeschlossen worden, so hätten auch die von ihm untersuchten indirekten Verfahren eher befriedigt.

Bevor wir an die eigentliche praktische Prüfung der «Güte» verschiedener Verfahren herantreten, müssen wir noch auf eine Tatsache aufmerksam machen. Die Schadenreserve wird aus geschäftstechnischen Gründen erst mehrere Wochen nach dem Ende des alten Rechnungsjahres ermittelt. In der Zwischenzeit wird aber ein grosser Teil der schwebenden Schadenfälle noch erledigt. Für diese bis zum Zeitpunkt der Reserveschätzung abgewickelten Schäden ist einfach der tatsächlich bezahlte Betrag zu reservieren. Es war uns nicht möglich, aus unserem Material diese bis zum Tag der Reservebestimmung bereits erledigten Fälle auszuscheiden, so dass sich unsere Untersuchung auf die ganze Summe der am Ende des Rechnungsjahres noch nicht geleisteten Zahlungen bezieht. Hingegen ist es bei der praktischen Berechnung vorzuziehen, die bereits erledigten Schadenfälle mit ihrem wirklichen Betrag in die Reserve einzusetzen und nur für die am Tage der Reservebestimmung unerledigten Fälle ein Durchschnittsverfahren anzuwenden.

2. Das Einzelschätzungsverfahren

Wir betrachten zuerst die Verhältnisse beim Einzelschätzungsverfahren; *Tabelle 3* zeigt uns den Vergleich der Reserve nach dem Einzelschätzungsverfahren mit den tatsächlichen Auszahlungen für die schwebenden Fälle.

Tabelle 3

Reserve nach dem Einzelschätzungsverfahren

Jahr	Reserve nach dem Einzelschätzungsverfahren	Auszahlungen für die schwebenden Fälle	Nettoreserve
	Beträge in Fr. 1 000.—		
1934	769,1	635,2	549,2
1935	940,6	693,3	671,7
1936	934,6	603,2	667,4
1937	1 034,2	726,2	738,5
1938	1 008,5	689,2	720,2
Σ	4 687,0	3 347,1	3 347,0

Der Unterschied in der Summe zwischen Spalte zwei und drei beruht auf Rundungsdifferenzen.

Bei der Würdigung der Zahlen ist daran zu erinnern, dass in der Einzelschätzungsreserve die Sicherheitsreserve bereits inbegriffen ist. Um dem Rechnung zu tragen, berechnen wir eine «Nettoreserve», indem wir die Einzelschätzungsreserve im Verhältnis $\frac{3347,1}{4687,0} = 0,71\,412$ kürzen. Beim Vergleich der Auszahlungen mit der so bestimmten Nettoreserve fallen uns die grossen Abweichungen des tatsächlichen Schadenverlaufs von der Schätzung auf. Es scheint also nicht so leicht zu sein, in die Zukunft zu blicken. Dabei ist zu erwähnen, dass alle Schadenreserven vom gleichen Beamten geschätzt worden sind. Die Abweichungen rühren nicht von einem Wechsel in der Person des Schätzers her.

Um mit anderen Verfahren zahlenmässig vergleichen zu können, ermitteln wir die mittlere quadratische Abweichung s der Nettoreserve R_i von den Auszahlungen A_i nach der Formel

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (R_i - A_i)^2 . \tag{2}$$

Für einen ersten groben Vergleich genügt dieses Streuungsmass. Im dritten Abschnitt werden wir das Verfahren noch verfeinern. Wir erhalten $s = 51\,200$.

3. Die Durchschnittsverfahren

Wir wenden uns nun der Prüfung der Durchschnittsverfahren zu. Die Berechnung der Durchschnittsreserve ist praktisch auf die Erfahrungen der vorhergehenden Jahre zu stützen. Die Schadenkarten für diese verflossenen Jahre standen uns aber nicht mehr zur Verfügung. Deswegen mussten wir die Durchschnittsreserven aus dem Mittel unserer fünf Beobachtungsjahre selber berechnen. Dieser Weg ist für die wirkliche Ermittlung einer Schadenreserve natürlich nicht gangbar, bedeutet aber für die Erreichung unseres Zieles keinen Nachteil. Denn es liegt uns ja nur daran, die Streuung abzuschätzen, die im Verlauf mehrerer Jahre auftritt. Auf eine Untersuchung der indirekten Verfahren verzichten wir aus den schon früher erwähnten Gründen.

Als Bezugszahlen für das direkte Verfahren betrachten wir

a) den mittleren Prämienbestand des Geschäftsjahres;

b) die Zahlungen des Geschäftsjahres für Schadenfälle;

c) die Anzahl der unerledigten Schadenfälle.

Die Tabellen 4, 5 und 6 geben die beobachteten Bezugszahlen und die daraus auf Grund der Formel (1) berechneten Schadenreserven für die verschiedenen Verfahren wieder. Zum Vergleich wiederholen wir die tatsächlich geleisteten Auszahlungen.

Vergleichen wir die Ergebnisse der drei Verfahren zur Bestimmung der Reserve mit dem «genauen» Einzelschätzungsverfahren, so scheinen sie uns auf alle Fälle nicht schlechter. Nur die Anzahl der Schadenfälle als Bezugszahl führt im letzten Beobachtungsjahr zu einer wesentlich zu grossen Reserve. Wir können uns das damit erklären, dass die Anzahl der reservierten Schäden die Schadenhöhe nicht berücksichtigt. Ausserdem hängt es häufig von der Ansicht des Reserveschätzers ab, ob er einen Fall als erledigt ansehen will oder nicht. Die Untersuchung der Schadenfälle nach der Schadenhöhe zeigt uns denn auch, dass die grosse Anzahl der Schäden im letzten Jahr weitgehend durch Bagatellfälle bedingt ist, die als unerledigt

Tabelle 4

Bezugszahl: Mittlerer Prämienbestand des Rechnungsjahres [1])

Jahr	Mittlerer Prämienbestand	Reserve	Auszahlungen aus der Reserve
	Beträge in Fr. 1 000.—		
1934	3 793,6	649,3	635,2
1935	3 927,8	672,2	693,3
1936	3 934,5	673,4	603,2
1937	3 929,8	672,6	726,2
1938	3 970,8	679,6	689,2
Σ	19 556,5	3 347,1	3 347,1

$$m = \frac{3\,347{,}1}{19\,556{,}5} = 0{,}17\,115 \qquad s = 41\,300$$

Tabelle 5

Bezugszahl: Zahlungen des Geschäftsjahres für Schadenfälle

Jahr	Zahlungen des Geschäftsjahres	Reserve	Auszahlungen aus der Reserve
	Beträge in Fr. 1 000.—		
1934	2 246,7	640,2	635,2
1935	2 590,5	738,2	693,3
1936	2 249,5	641,0	603,2
1937	2 307,1	657,5	726,2
1938	2 351,8	670,2	689,2
Σ	11 745,6	3 347,1	3 347,1

$$m = \frac{3\,347{,}1}{11\,745{,}6} = 0{,}28\,497 \qquad s = 41\,400$$

[1]) Diesen mittleren Prämienbestand haben wir berechnet als arithmetisches Mittel aus den Prämienbeständen Anfang und Ende Rechnungsjahr.

Tabelle 6

Bezugszahl: Anzahl der schwebenden Schadenfälle

Jahr	Anzahl der schwebenden Schadenfälle	Schaden-reserve	Auszahlungen aus der Reserve
		Beträge in Fr. 1 000.—	
1934	2 242	587,9	635,2
1935	2 459	644,8	693,3
1936	2 446	641,4	603,2
1937	2 594	680,2	726,2
1938	3 023	792,7	689,2
Σ	12 764	3 347,0	3 347,1

$$m = \frac{3\,347{,}1}{12\,764} = 262{,}23 \qquad s = 61\,400$$

betrachtet wurden, aber keine oder nur noch unbedeutende Auszahlungen mehr erforderten. Will man demnach die Anzahl der unerledigten Fälle zur Reserveermittlung verwenden, so muss diese Anzahl unabhängig von persönlichen Ansichten bestimmt werden, indem man z. B. durchgehend nur diejenigen Fälle als erledigt betrachtet, bei denen die Schlussquittung mit dem Verzicht auf weitere Ansprüche unterschrieben vorliegt.

Die mittlere quadratische Abweichung wird beim Einzelschätzungsverfahren 51 200, während bei Verwendung des mittleren Prämienbestandes und der Zahlungen des Geschäftsjahrs als Bezugszahl die Streuungen 41 300 und 41 400 betragen. Einzig die Anzahl der schwebenden Fälle führt zu einer grösseren mittleren Abweichung von 61 400. — Wir erhalten somit das *Ergebnis:* Bei unserem Beobachtungsmaterial sind die Durchschnittsverfahren als brauchbar, zum Teil sogar als besser zu bezeichnen als das Einzelschätzungsverfahren. Die damit berechneten Schadenreserven kommen teilweise näher an die Summe der tatsächlichen Auszahlungen heran als das «genaue» Einzelschätzungsverfahren. Es scheint in grossen Beständen nur schwer möglich, bei der Abschätzung des einzelnen Falles dem Ausgleich innerhalb des Bestandes richtig Rechnung zu tragen. Das bedeutet, dass zum mindesten bei grösseren ausgeglichenen Beständen sehr wohl an Stelle der zeitraubenden Einzelschätzung Durchschnittsverfahren Verwendung finden können.

Wir haben mit unseren Betrachtungen keinen mathematischen Beweis dafür geführt, dass die Durchschnittsverfahren besser sind als das Einzelschätzungsverfahren. Hingegen ist es aber schon sehr wichtig zu wissen, dass die Grössenordnung der Streuungen dieselbe ist. Das genügt bereits, um der grossen Arbeitsersparnis wegen ein Durchschnittsverfahren praktisch vorzuziehen. Für ein einzelnes Jahr kann allerdings das Einzelschätzungsverfahren ein besseres Ergebnis zeitigen. Im Mittel wird jedoch die Streuung bei den Durchschnittsverfahren zum mindesten nicht viel grösser ausfallen als beim Einzelschätzungsverfahren.

Mit dem Entscheid auf Anwendbarkeit der Durchschnittsverfahren scheint die gestellte Aufgabe gelöst zu sein. Es bleiben jedoch noch wesentliche Fragen offen, die nicht mehr mit so einfachen Überlegungen beantwortet werden können. Einmal besitzen wir noch keinen Anhaltspunkt für die Bemessung der Sicherheitsreserve; sodann haben wir noch keinen endgültigen Entscheid über die Güte der verschiedenen Verfahren, d. h. über ihre Rangordnung getroffen. Wohl hat bei unserem Beobachtungsmaterial die Anzahl der schwebenden Fälle zur grössten Streuung geführt; das könnte aber das Ergebnis des Zufalls sein. Es wäre denkbar, dass in einem anderen Versuche gerade die umgekehrte Rangfolge herauskäme, so dass die Verwendung der Anzahl der schwebenden Schäden gerade zur kleinsten Streuung führt. Wie weit dürfen wir auf Grund unseres Beobachtungsmateriales endgültige Schlüsse ziehen? Wann können wir den Unterschied in der Streuung als nicht mehr zufällig betrachten? Vorläufig haben wir keine Möglichkeit, Unterschiede in der Streuung zu bewerten. Zur Beantwortung dieser Fragen müssen wir unser Thema für den Augenblick verlassen und uns einem Gebiet der modernen, mathematischen Statistik, der Theorie der Stichproben, zuwenden.

II. Abschnitt

Theorie der Stichproben [1]

§ 4

Der Begriff des wesentlichen Unterschiedes

Man pflegt eine statistische Reihe abkürzend zu kennzeichnen durch zwei Werte, nämlich durch

a) einen Mittelwert;

b) ein Streuungsmass.

Welcher Mittelwert und welches Streuungsmass in einem bestimmten Falle vorzuziehen sein wird, ist zum Teil Geschmacksache. Die beiden Zahlen können die Reihe nicht ersetzen; sie dienen nur als Hilfsmittel zur Veranschaulichung und zum Vergleich mit anderen Reihen.

Sehr oft tritt die Aufgabe an den Statistiker heran zu entscheiden, ob zwei Reihen wesentlich voneinander verschieden sind, sei es in bezug auf den Mittelwert oder in bezug auf die Streuung. Als wesentlich werden wir einen Unterschied dann bezeichnen dürfen, wenn er nicht auch ohne weiteres aus dem Zufall erklärt werden kann. Wir werden demnach allgemein zwei Mittelwerte dann wesentlich verschieden nennen, wenn ihr Unterschied gross ist und die beiden Streuungen klein sind. Zwei Streuungsmasse sind als wesentlich verschieden anzusehen, wenn das eine viel grösser ist als das andere.

---

[1]) Leider war es der Zeitumstände halber nicht möglich, zu der Darstellung durchgehend die meist englische Originalliteratur zu verwenden. Unsere Ableitungen stützen sich deswegen teilweise auf die Vorlesung von *Linder* «Neuere statistische Methoden I, Theorie der Stichproben», wofür wir auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen möchten.

Die grundlegende Arbeit auf dem Gebiete der Stichproben wurde von *Pearson* (21) geleistet (χ^2-Verteilung). Unter seinem Einfluss entstanden dann die weiteren Schriften von *Gosset* (22) (t-Verteilung, nach seinem Decknamen als «Student's distribution» bezeichnet) und von *Fisher* (23) (z-Verteilung, «Fisher's distribution»), an die sich eine ganze Reihe von weiteren Schriften anschloss. Wer sich mehr nur für die praktische Anwendung der Teste interessiert, möge die Lehrbücher von *Fisher* (24) oder *Rider* (25) verwenden, wo neben vielen Beispielen auch die zur praktischen Durchführung notwendigen Tabellen angegeben sind.

Mit diesen allgemeinen Aussagen können wir aber vorläufig nicht viel anfangen; wir wissen nicht, wo die Grenze zwischen «gross» und «klein» liegt. Allerdings ist einschränkend zu bemerken, dass der Begriff des «wesentlich Verschiedenseins» überhaupt subjektiver Natur ist; wir haben aber bis jetzt keinen zahlenmässigen Halt selbst für unser subjektives Urteil. So konnten wir am Schluss des letzten Abschnitts den Unterschied zweier Streuungen nicht beurteilen.

Die Bewertung eines Unterschiedes als wesentlich oder unwesentlich ist in vielen Fällen mit Hilfe der Theorie der Stichproben möglich. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich nämlich die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten einer Abweichung berechnen. Damit gewinnen wir aber den Ansatz, die Wahrscheinlichkeit einer grösseren Abweichung als die beobachtete zu ermitteln. Ist diese Wahrscheinlichkeit klein, so sind grössere Abweichungen selten. Wir werden den Unterschied als wesentlich bezeichnen. Die Festlegung einer Schranke zwischen «wesentlich» und «nicht wesentlich» ist damit ohne weiteres möglich. Die Ableitung setzt allerdings Normalverteilung voraus, was in der Praxis selten streng erfüllt sein wird. Es muss daher dem Gefühl des Statistikers überlassen bleiben zu entscheiden, ob er sich in einem bestimmten Fall mit der getroffenen Voraussetzung nicht zu stark von der Wirklichkeit entfernt, d. h. wie weit er die Normalverteilung als Annäherung an die wirklichen Verhältnisse betrachten darf.

§ 5

Verteilungen von zufallsbedingten Grössen

1. Die x-Verteilung

Wird eine Grundgrösse durch sehr viele, sehr kleine, unabhängige Elementarfehler gestört, so bildet die Häufigkeitsverteilung der beobachteten Grösse eine Normalkurve von der Gestalt [1]:

$$df(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

wo $df(x)$ die Häufigkeit oder die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Intervall von x bis $x + dx$ ist. Es gilt:

[1] Eine gute Ableitung findet sich in dem bekannten Lehrbuch von *Czuber* (26).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma (2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 .$$

Ferner wird der Mittelwert gleich μ; als Mittelwert oder Mittel bezeichnen wir hier und im folgenden kurz das arithmetische Mittel.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma (2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu .$$

Endlich gilt für die mittlere quadratische Abweichung vom Mittel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma (2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 .$$

2. Die χ^2-Verteilung

Wir suchen die Verteilung der Streuung in Stichproben von n Elementen x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, also die Verteilung von

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 .$$

An Stelle von s^2 betrachten wir, um von der Grössenordnung von σ unabhängig zu werden, die Grösse

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} . \tag{3}$$

Da σ und n konstant sind, bedeutet das Vorgehen nur eine Massstabsänderung auf der s^2-Achse. Der Einfachheit halber setzen wir $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Dann wird

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Nach Voraussetzung sind die x_i normal verteilt; also gilt

$$df(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i .$$

Nehmen wir an, die Stichproben seien voneinander unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine bestimmte Werteverbindung der x_i

$$\prod_{i=1}^{n} df(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{i=1}^{n} dx_i .$$

Um $df(\chi^2)$, die Wahrscheinlichkeitsdichte von χ^2, zu erhalten, müssen wir integrieren über

$$\chi^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \chi^2 + d(\chi^2) .$$

Damit wird

$$df(\chi^2) = \overset{(n)}{\int \cdots \int} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{i=1}^{n} dx_i . \tag{4}$$

Führen wir für x_n als neue Variable χ^2 ein, derart dass

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \; d(\chi^2) = 2\, x_n d x_n ,$$

so wird

$$\begin{aligned} df(\chi^2) &= \overset{(n-1)}{\int \cdots \int} \int_{\chi^2}^{\chi^2+d(\chi^2)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \frac{d(\chi^2) \prod_{i=1}^{n-1} dx_i}{2\left(\chi^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right) \overset{(n-1)}{\int \cdots \int} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} dx_i}{\left(\chi^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \tag{5}$$

Das $(n-1)$-fache Integral ist dabei zu erstrecken über

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant \chi^2 .$$

Es hat, wie wir gleich durch den Schluss von n auf $n+1$ zeigen werden, den Wert

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \chi^{n-2} . \tag{6}$$

Für $n=2$ ist, wenn wir $\frac{x_1}{\chi} = \sin y$ setzen, unter Beachtung der Zweiwertigkeit der Wurzel

$$\int_{-\chi}^{+\chi} \frac{d x_1}{(\chi^2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d y = 2\pi .$$

Andererseits ergibt sich der gleiche Wert aus dem Ausdruck (6), da $\Gamma_{(1)} = 1$ ist.

Sodann nehmen wir die Behauptung (6) für n als richtig an und leiten daraus die Geltung für $n+1$ ab. Es ist, indem wir die Integration über x_n zuletzt durchführen,

$$\int^{(n)} \cdots \int \frac{\prod_{i=1}^{n} d x_i}{\left(\chi^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int_{-\chi}^{+\chi} d x_n \int^{(n-1)} \cdots \int \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d x_i}{\left(\chi^2 - x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} . \tag{7}$$

Das n-fache Integral ist zu erstrecken über

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \chi^2$$

das $(n-1)$-fache aber über

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant \chi^2 - x_n^2 .$$

Das letztgenannte Integral entspricht dem Integral in (5), wenn χ^2 durch $\chi^2 - x_n^2$ ersetzt wird.

Durch Substitution in (7) erhalten wir

$$\int_{-\chi}^{+\chi} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} (\chi^2 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} dx_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \chi^{n-1}}{\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \int_{-\chi}^{\chi} \left(1 - \frac{x_n^2}{\chi^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{dx_n}{\chi}\,; \quad (8)$$

setzen wir $\frac{x_n}{\chi} = u^{\frac{1}{2}}$, so wird das Integral in (8)

$$\int_0^1 (1-u)^{\frac{n-2}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du,$$

ist also ein Eulersches Integral erster Gattung und lässt sich durch Γ-Funktionen darstellen. Es gilt

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{\Gamma_{(\alpha)} \cdot \Gamma_{(\beta)}}{\Gamma_{(\alpha+\beta)}}\,; \; \alpha, \beta > 0\,.$$

Damit geht Formel (8) über in

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)} \chi^{n-1}}{\Gamma_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}},$$

und unter Benutzung der Beziehung $\Gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pi^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir schliesslich

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} \chi^{n-1}}{\Gamma_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}},$$

also die Behauptung (6) für $n+1$. Damit ist der gesuchte Nachweis erbracht. Setzen wir noch den Wert (6) in (5) ein, so wird

$$df(\chi^2) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-2} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

oder auch

$$df(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right). \tag{9}$$

3. Die t-Verteilung

Es kommt häufig vor, dass wir eine Abweichung von einem Mittelwert zu beurteilen haben, wobei wir über die Streuung zum vorneherein keinen Anhaltspunkt besitzen, sondern sie zuerst aus der Beobachtung näherungsweise bestimmen müssen. Als Schätzung der Streuung verwenden wir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\chi}{n^{\frac{1}{2}}};$$

dabei haben wir wieder den Mittelwert gleich null und die Streuung gleich eins gesetzt. Für diesen Fall suchen wir die Verteilung von t, wo $t = \frac{xn^{\frac{1}{2}}}{\chi}$. Nehmen wir an, dass x und χ^2 voneinander unabhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer bestimmten Werteverbindung von x und χ^2

$$df(x)\, df(\chi^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \frac{1}{\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\left(\frac{1}{2}\chi^2\right).$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $df(t)$ von t erhalten wir durch Integration über das Gebiet

$$t \leqslant \frac{xn^{\frac{1}{2}}}{\chi} \leqslant t + dt.$$

Damit wird

$$df(t) = \int\int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+\chi^2)} \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \chi \, dx \, d\chi =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \int\int e^{-\frac{1}{2}(x^2+\chi^2)} \left(\frac{\frac{x^2+\chi^2}{2}}{1+\frac{x^2}{\chi^2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} dx \, d\chi \, .$$

Zur Vereinfachung führen wir die neuen Veränderlichen t und u ein, die mit x und χ durch die folgenden Beziehungen verknüpft sind

$$t = \frac{x n^{\frac{1}{2}}}{\chi}, \; u = \frac{x^2+\chi^2}{2} \, .$$

Die Jakobische Transformationsdeterminante wird

$$\begin{vmatrix} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\chi}, & -\frac{x n^{\frac{1}{2}}}{\chi^2} \\ x \;, & \chi \end{vmatrix} = n^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{\chi^2}\right) = n^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right).$$

Damit erhalten wir

$$df(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \int_0^\infty \int_t^{t+dt} e^{-u} \left(\frac{u}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{du \; dt}{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(\pi n)^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} du \, .$$

Da aber

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}} du = \Gamma_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

ist, folgt

$$df(t) = \frac{\Gamma_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{(\pi n)^{\frac{1}{2}}\,\Gamma_{\left(\frac{n}{2}\right)}} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (10)$$

4. Die z-Verteilung

Die z-Verteilung dient zum Vergleich von Streuungen.

Wir erheben zwei Reihen von Stichproben mit n_1 und n_2 Elementen, die zu χ_1^2 und χ_2^2 führen. Wir suchen die Verteilung von

$$u = \frac{\chi_1^2\, n_2}{n_1\, \chi_2^2}.$$

Nehmen wir an, dass die Stichproben voneinander unabhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer bestimmten Werteverbindung

$$df(\chi_1^2)\;df(\chi_2^2) = \frac{1}{\Gamma_{\left(\frac{n_1}{2}\right)}}\left(\frac{1}{2}\chi_1^2\right)^{\frac{n_1-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi_1^2}\, d\left(\frac{1}{2}\chi_1^2\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma_{\left(\frac{n_2}{2}\right)}}\left(\frac{1}{2}\chi_2^2\right)^{\frac{n_2-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi_2^2}\, d\left(\frac{1}{2}\chi_2^2\right).$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von u ergibt sich durch Integration über

$$u \leqslant \frac{\chi_1^2\, n_2}{n_1\, \chi_2^2} \leqslant u + du\,;$$

also wird

$$df(u) = \frac{n_1^{\frac{n_1-2}{2}}\; n_2^{\frac{n_2-2}{2}}}{\Gamma_{\left(\frac{n_1}{2}\right)}\;\Gamma_{\left(\frac{n_2}{2}\right)}} \int\!\!\int e^{-\frac{1}{2}\left(\chi_1^2+\chi_2^2\right)}\,.$$

$$\cdot\left(\frac{\chi_1^2\, n_2}{n_1\, \chi_2^2}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \left(\frac{\frac{\chi_1^2+\chi_2^2}{2}}{n_2 + \frac{\chi_1^2\, n_2}{\chi_2^2}}\right)^{\frac{n_1+n_2-4}{2}} d\left(\frac{1}{2}\chi_1^2\right) d\left(\frac{1}{2}\chi_2^2\right). \qquad (11)$$

Zur weiteren Umformung führen wir für $\frac{1}{2}\chi_1^2$ und $\frac{1}{2}\chi_2^2$ neue Variable u und v ein, wobei

$$u = \frac{\chi_1^2 n_2}{n_1 \chi_2^2}, \quad v = \frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{2}.$$

Dann wird die Transformationsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2n_2}{n_1\chi_2^2}, & -\dfrac{2\chi_1^2 n_2}{n_1 \chi_2^4} \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = \frac{2n_2}{n_1\chi_2^2}\left(1 + \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}\right) =$$

$$= \left(n_2 + \frac{n_2\chi_1^2}{\chi_2^2}\right)\frac{1 + \dfrac{\chi_1^2}{\chi_2^2}}{n_1 \dfrac{\chi_1^2+\chi_2^2}{2}} = \frac{(n_2 + n_1 u)^2}{n_1 n_2 v},$$

und damit das Integral in (11)

$$\int_0^\infty \int_u^{u+du} e^{-v} u^{\frac{n_1-2}{2}} \left(\frac{v}{n_2 + n_1 u}\right)^{\frac{n_1+n_2-4}{2}} \frac{n_1 n_2 v}{(n_2 + u n_1)^2}\, du\, dv =$$

$$= \frac{n_1 n_2 u^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 u + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, du \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}\, dv.$$

Das letzte Integral hat aber den Wert $\Gamma_{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$. Somit folgt durch Einsetzen in (11)

$$df(u) = \frac{\Gamma_{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma_{\left(\frac{n_1}{2}\right)} \Gamma_{\left(\frac{n_2}{2}\right)}} \frac{u^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1 u + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\, du. \qquad (12)$$

Zur Vereinfachung setzen wir noch $u = e^{2z}$, also $du = 2e^{2z}dz$. Damit erhalten wir für die z-Verteilung

$$df(z) = \frac{2 n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma_{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}}{\Gamma_{\left(\frac{n_1}{2}\right)} \Gamma_{\left(\frac{n_2}{2}\right)}} \frac{e^{n_1 z}\, dz}{(n_1 e^{2z} + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}. \qquad (13)$$

§ 6

Tests für wesentliche Unterschiede

In Anlehnung an den angelsächsischen Sprachgebrauch verstehen wir unter Tests Verfahren, die es gestatten festzustellen, ob ein Unterschied wesentlich (significant) ist oder nicht. Mit Hilfe der soeben abgeleiteten Verteilungskurven ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der ein grösserer Unterschied als der beobachtete aus dem Zufall zu erwarten ist. Die Grösse der Wahrscheinlichkeit ist dann ein Mass dafür, ob wir einen Unterschied als wesentlich, d. h. nicht mehr allein aus dem Zufall erklärlich, betrachten wollen. Statt Zufall würde vielleicht der Ausdruck «bekannte Fehlerursachen» den Sachverhalt genauer umschreiben. Das Wort «Zufall» hat sich aber in diesem Sinne eingebürgert.

Es ist nicht unsere Absicht, hier die Theorie der Stichproben erschöpfend zu behandeln. Wir beschränken uns auf die Herleitung der wichtigsten Tests, von denen wir zwei für unsere Aufgabe verwenden werden. Für eine eingehendere Betrachtung verweisen wir auf die erwähnte Literatur.

Wir bezeichnen mit μ den «wahren» Mittelwert und mit σ die «wahre» Streuung, dann mit m den Mittelwert und mit s die Streuung aus den «beobachteten Grössen» x_i, wo $i = 1, 2, \ldots, n$.

1. Abweichungen von Mittelwerten

Zuerst wollen wir die Abweichungen von Mittelwerten prüfen. Dabei haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden.

a) Die Streuung σ sei bekannt; zu prüfen ist die Abweichung des Mittels m von μ

Es ist

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

normal verteilt mit dem Mittel μ und der Streuung $\sigma_m = \frac{\sigma}{n^{\frac{1}{2}}}$ oder, was dasselbe bedeutet, $\xi = \frac{m - \mu}{\sigma_m}$ ist normal verteilt mit dem Mittel 0 und der Streuung 1. Die Wahrscheinlichkeit $P(> \xi)$ einer grösseren Abweichung als ξ, ist durch die Integration

$$P(>\xi) = \int_{\xi}^{\infty} df(\xi)$$

zu bestimmen. Häufig brauchen wir die Wahrscheinlichkeit einer absolut grösseren Abweichung als ξ; sie ist das Doppelte von $P(\xi)$. Tabellen, in denen $P(>\xi)$ angegeben ist, finden sich bei *Rider* und *Fisher*. Übrigens lassen sich auch die üblichen Tafeln für das Integral der Normalverteilung verwenden.

Die Statistiker haben sich darauf geeinigt, einen Unterschied dann als wesentlich zu bezeichnen, wenn ihm ein $P(>\xi) < 0{,}01$ entspricht. Das ist so zu verstehen: Ist eine grössere Abweichung als die beobachtete nur einmal unter hundert Fällen zu erwarten ohne besonderen Grund, so lässt sich das Beobachtungsresultat nicht gut durch den Zufall erklären. Ist $P(>\xi) > 0{,}025$, so liegt kein wesentlicher Unterschied vor. Die Zwischenzone $0{,}01 < P(>\xi) < 0{,}025$ gestattet kein sicheres Urteil. Diese Schranken gelten auch für die folgenden Tests.

Wir verzichten darauf, für diesen Fall ein Beispiel durchzurechnen, da er als genügend bekannt vorausgesetzt werden darf.

b) Die Streuung σ sei bekannt; zu prüfen ist der Unterschied zweier Mittelwerte

Zwei Reihen x_i $(i=1, 2, \ldots, n_1)$ und y_k $(k=1, 2, \ldots, n_2)$ führen zu den Mittelwerten

$$m_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i\,, \; m_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} y_k\,.$$

Wir wollen prüfen, ob die beiden Mittelwerte wesentlich voneinander verschieden sind. Dazu treffen wir die Annahme, sie seien zufällige Abweichungen vom gleichen, wahren Mittelwert μ. Dann ist die Differenz $m_1 - m_2$ normal verteilt mit dem Mittel 0 und der Streuung

$$\sigma^2_{\overline{m_1 - m_2}} = \sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2}\,,$$

wenn die beiden Reihen korrelationslos sind und wo σ_{m_1} und σ_{m_2}, die Streuungen von m_1 und m_2, gegeben sind durch

$$\sigma^2_{m_1} = \frac{\sigma^2}{n_1} \quad \text{und} \quad \sigma^2_{m_2} = \frac{\sigma^2}{n_2}.$$

Liegt dagegen eine Korrelation vor, so ist $\sigma_{\overline{m_1 - m_2}}$ aus der allgemeineren Formel

$$\sigma^2_{\overline{m_1 - m_2}} = \sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2} - 2\,r\,\sigma_{m_1}\sigma_{m_2}$$

zu berechnen; dabei ist r der Korrelationskoeffizient [1]). Wir können mit

$$\xi = \frac{m_1 - m_2}{\sigma_{\overline{m_1 - m_2}}}$$

wie beim vorhergehenden Fall in die Tabellen für das Integral der Normalverteilung eingehen.

Wir haben in den beiden ersten Fällen angenommen, σ sei bekannt. Diese Voraussetzung wird aber nur bei einem grossen Beobachtungs-

[1]) Diese Formel lässt sich aus der bekannteren vorhergehenden leicht ableiten. Wir bezeichnen die Mittelwerte mit m_1 und m_2; ihre Streuungen mit σ_1 und σ_2.

Nun bestehe eine lineare Korrelation, d. h. m_2 sei zu einem gewissen Teil linear von m_1 abhängig. Dann spalten wir m_2 in die unabhängigen Teile auf, also $m_2 = a \cdot m_1 + m_2'$, wo m_2' den von m_1 unabhängigen Teil von m_2 darstellt. Im Falle der vollständigen Korrelation ist $m_2' = 0$ und die Streuung von am_1 gleich der Streuung von m_2, also $\sigma_2^2 = a\sigma_1^2$. Die Extrema von a sind $a = \pm \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Um von der Grössenordnung von σ_1 und σ_2 unabhängig zu werden, setzen wir $a = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, wo nun r von -1 bis $+1$ läuft; r nennen wir den Korrelationskoeffizienten. Wir setzen den Ausdruck für a in die obige Formel für m_2 ein und erhalten: $m_2 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1 + m_2'$. Die Posten auf der rechten Seite sind unabhängig voneinander. Ausserdem hat ihre Summe die Streuung σ_2. Also sind sie normal verteilt mit dem Mittel 0 und den Streuungen $r\sigma_2$ und $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\sigma_2$. Wir suchen aber die Verteilung von $m_1 - m_2 = m_1\left(1 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - m_2'$. Auch hier sind die Glieder auf der rechten Seite normal verteilt und unabhängig, also ist ihre Differenz ebenfalls normal verteilt mit dem Mittel 0 und der Streuung $\sigma_{\overline{1-2}}$, wo

$$\sigma^2_{\overline{1-2}} = \sigma_1^2\left(1 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 + (1 - r^2)\,\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2r\,\sigma_1\sigma_2\,.$$

Damit ist der Beweis geleistet.

material erfüllt sein oder, falls auf Grund von Erfahrungen nachgewiesen werden kann, dass eine «statistische Wahrscheinlichkeitsgrösse» sich wie eine wirkliche Wahrscheinlichkeit verhält; alsdann können wir die Streuung auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmen. Wir möchten diesen Fall mit einem praktischen Beispiel verdeutlichen, das mit unserer Fragestellung allerdings keinen unmittelbaren Zusammenhang aufweist.

Marbe (29) hat an verschiedenen Beobachtungsreihen den Einfluss der Unfallneigung auf die Unfallhäufigkeit gezeigt in dem Sinne, dass es Personen gibt, die eine ausgesprochene Neigung zu wiederholten Unfällen besitzen. Diese Behauptung lässt sich folgendermassen nachprüfen. Wir betrachten einen Bestand von Unfallversicherten über einen bestimmten Zeitraum; alsdann werden die Versicherten, die in diesem Zeitraum Unfälle erleiden, zu einem grossen Teile unfalldisponiert sein, werden also auch in einem späteren Zeitraum im allgemeinen mehr Unfälle aufweisen als die Versicherten, die im früheren Zeitraume keine Unfälle erlitten haben. Wir prüfen diesen Sachverhalt an 58 beliebig herausgegriffenen Unfallversicherten der Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft. Wir gruppieren den Beobachtungsbestand einmal danach, ob in den Jahren 1938/1939 Unfälle angemeldet worden sind oder nicht. Dann spalten wir die beiden so erhaltenen Bestände noch einmal danach auf, ob in den folgenden Jahre 1940/1941 Unfälle vorgekommen sind oder nicht. So erhalten wir die Gliederung:

	Von den Versicherten, die 1938/1939		
	keinen Unfall	Unfälle	
wiesen 1940/1941 auf	erlitten		zusammen
keinen Unfall	30	9	39
Unfälle.	10	9	19
	40	18	58

Der Versuch scheint die Behauptung von *Marbe* zu bestätigen. Wir stellen uns jedoch die Frage: Dürfen wir bereits auf Grund des kleinen Beobachtungsmaterials einen endgültigen Entscheid fällen, oder könnte der beobachtete Unterschied auch zufällig entstanden sein. Es handelt sich also darum zu entscheiden, ob $p_1 = \frac{10}{40} = 0{,}25$ wesentlich kleiner ist als $p_2 = \frac{9}{18} = 0{,}5$.

Ohne eine weitere Voraussetzung können wir die Frage nicht beantworten; denn ohne Anhaltspunkte über die Streuungen lässt sich über den Unterschied zweier Grössen nichts aussagen. Treffen wir jedoch die zusätzliche Annahme, es liege dem Ereignis die Wahrscheinlichkeit $p' = \frac{19}{58} = 0{,}328$ zugrunde, dann erlaubt es die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Streuung zu berechnen. Die Grösse

$$\xi = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{\overline{p_1 - p_2}}}$$

ist normal verteilt, wo

$$\sigma^2_{\overline{p_1 - p_2}} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2},$$

da keine Korrelation vorliegt. Dabei sind σ_{p_1} und σ_{p_2} zu berechnen aus

$$\sigma^2_{p_1} = \frac{p'(1-p')}{n_1}, \quad \sigma^2_{p_2} = \frac{p'(1-p')}{n_2}.$$

Wir erhalten $\sigma_{\overline{p_1 - p_2}} = 0{,}133$ und $\xi = 1{,}88$; dieser Wert liegt noch innerhalb der Zufallsschranke von $P(>\xi) = 0{,}025$ ($\xi = 2{,}33$). Wir dürfen also auf Grund dieser einen Beobachtung die *Marbesche* Behauptung noch nicht als bewiesen annehmen; das bedeutet nicht, dass sie falsch ist. Die Aufstellung spricht ja im Gegenteil für die Gültigkeit der Aussage von *Marbe*. Das Beispiel zeigt aber deutlich, wie gefärlich es ist, aus einem kleinen Beobachtungsmaterial voreilig Schlüsse zu ziehen. Bei kleinen Beständen muss der Unterschied zweier Mittelwerte ziemlich gross werden, damit er als wesentlich bezeichnet werden darf.

c) Die Streuung σ ist nicht bekannt; zu prüfen ist die Abweichung des Mittels m von μ

Liegen nur wenig Beobachtungen eines Ereignisses vor, so ist die Streuung σ als unbekannt anzusehen. Wir müssen sie dann aus den Beobachtungen schätzen. Unter Verwendung der Bezeichnungen des Falles *a)* ist

$$X = \frac{m - \mu}{\dfrac{\sigma}{n^{\frac{1}{2}}}}$$

normal verteilt und

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2}$$

verteilt wie χ^2.

Das zweite Ergebnis überrascht auf den ersten Blick, da wir ja bei der Herleitung der χ^2-Verteilung die Abweichungen von μ berechnet haben. Man kann jedoch zeigen, dass sich die Summen der Quadrate von n «abhängigen» Abweichungen gleich um m verteilen wie von n—1 unabhängigen um μ [1]). Die Anzahl der unabhängigen Beobachtungen heisst auch die Anzahl der Freiheitsgrade. Die Korrektur für die Berechnung der Abweichungen von m anstatt von μ

---

[1]) Wir suchen die Verteilung von $\chi'^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2}$.

Dazu setzen wir wieder der Einfachheit halber $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Dann wird

$$df(\chi'^2) = \int^{(n)} \cdots \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{i=1}^{n} dx_i .$$

Die Integration erstreckt sich über $\chi'^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \leqslant \chi'^2 + d(\chi'^2)$.

Nun führen wir eine *orthogonale* Transformation durch [siehe etwa die Vorlesungen über Algebra von *Bieberbach-Bauer* (28)]. Wir setzen

$$y_1 = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{n} x_i = n^{\frac{1}{2}} m .$$

$y_2 \ldots y_n$ sind beliebig; erfüllen aber die für orthogonale Transformationen kennzeichnenden Bedingungen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

und dass die Transformationsdeterminante 1 wird. Da

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nm^2 = \sum_{i=2}^{n} y_i^2$$

erfolgt also durch eine Verkleinerung von n um 1. Wir können deswegen X und χ'^2 als unabhängige Grössen auffassen; dann folgt aber

$$\xi = \frac{X\,(n-1)^{\frac{1}{2}}}{\chi'} = \frac{m-\mu}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n\,(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{14}$$

der t-Verteilung.

Die Wahrscheinlichkeit $P(>\xi)$ einer grösseren Abweichung als ξ erhalten wir wieder durch Integration. Auch hier brauchen wir oft die Wahrscheinlichkeit einer absolut grösseren Abweichung als ξ; sie ist $2\,P(\xi)$. Tabellen für das Integral über die t-Verteilung für n bis 30 finden sich ebenfalls bei *Rider* und *Fisher*. Für grössere n geht die t-Verteilung in die Normalverteilung über. Für n grösser als 100 ist t selber mit genügender Genauigkeit normal verteilt. Für n zwischen 30 und 100 benutzen wir die Grösse

$$t\left(\frac{n-2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

ergibt sich

$$df(\chi'^2) = \int\limits^{(n)}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \prod_{i=1}^{n} d\,y_i\,,$$

wo sich die Integration erstreckt über

$$\chi'^2 \leqslant \sum_{i=2}^{n} y_i^2 \leqslant \chi'^2 + d\,(\chi'^2).$$

Führen wir die Integration nach y_1 durch, so folgt

$$df(\chi'^2) = \int\limits^{(n-1)}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=2}^{n} y_i^2} \prod_{i=2}^{n} d\,y_i\,.$$

Das ist aber die χ^2-Verteilung bei n—1 unabhängigen Veränderlichen [siehe Formel (4)].

d) Die Streuung σ ist nicht bekannt;
zu prüfen ist der Unterschied zweier Mittelwerte

Wir verwenden die Bezeichnungen des Falles *b)*. Dann ist unter der Voraussetzung, dass die beiden Stichprobenreihen das gleiche Mittel μ und die gleiche Streuung σ besitzen,

$$X = \frac{m_1 - m_2}{\sigma \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

normal verteilt mit dem Mittel 0 und der Streuung 1, wenn keine Korrelation vorliegt, während

$$\chi'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2 + \sum_{k=1}^{n_2} (y_k - m_2)^2}{\sigma^2}$$

verteilt ist wie χ^2 mit der Anzahl der Freiheitsgrade $n_1 + n_2 - 2$ [1]) und schliesslich

$$\xi = \frac{X (n_1 + n_2 - 2)^{\frac{1}{2}}}{\chi'} \frac{m_1 - m_2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2 + \sum_{k=1}^{n_2} (y_k - m_2)^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

verteilt ist wie t.

Ein Beispiel aus der privaten Unfallversicherung soll den Gang der Rechnung verdeutlichen [2]). Ein bestimmter Beruf wird in die verschiedenen Gefahrenklassen I, II, III usw. aufgeteilt und die Prämie für die Taggeldversicherung in den Gefahrenklassen einzeln bestimmt. Es ist zu prüfen, ob die Mittel aus verschiedenen Beobachtungsjahren in den einzelnen Gefahrenklassen wesentlich voneinander verschieden sind. Wir geben nur die Beobachtungen in zwei Gefahrenklassen wieder.

---

[1]) Das ergibt sich leicht durch eine orthogonale Transformation (s. Fussnote S. 345/346). Allgemein geht durch jede lineare Beziehung ein Freiheitsgrad verloren.

[2]) Es ist einer Vorlesung von *Zwinggi* «Über die Anwendung statistischer Methoden in der Versicherungsrechnung» entnommen.

Beobachtungs-jahr	Ein Vielfaches der notwendigen Prämie für Fr. 1.— Taggeld-entschädigung in Klasse	
	I x_i	II y_k
1	1,055	2,543
2	1,701	0,961
3	1,551	1,898
4	0,693	1,598
5	1,150	1,031
6	2,409	1,134
7	0,654	1,874
8	0,535	1,213
Σ	9,748	12,252

Wir erhalten $m_1 = 1{,}218$, $m_2 = 1{,}532$. Damit wird

$$\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2 + \sum_{k=1}^{n_2} (y_k - m_2)^2 = 4{,}968$$

und $t = 1{,}05$. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $8 + 8 - 2 = 14$. Der Unterschied ist nicht wesentlich.

2. Abweichungen von Streuungen

a) Die Streuung σ ist bekannt;
zu prüfen ist die Abweichung der beobachteten Streuung s von σ

Die Streuung der Beobachtung ist

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 .$$

Dann ist

$$\xi = \frac{n\, s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{\sigma^2}$$

verteilt wie χ^2 mit der Anzahl der Freiheitsgrade n—1.

Die Wahrscheinlichkeit $P(>\xi)$ einer grösseren Abweichung als ξ erhalten wir wiederum durch Integration. Wir finden $P(>\xi)$ für Werte von n kleiner als 30 tabelliert in den schon mehrfach genannten Werken von *Rider* und *Fisher*. Für $n > 30$ verwenden wir die Normalverteilung an Stelle der χ^2-Verteilung. Wir setzen $y = 2^{\frac{1}{2}}\chi - (2n-1)^{\frac{1}{2}}$. Dann ist y normal verteilt mit dem Mittel 0 und der Streuung 1.

Unter diesen Fall gehört die vollständige Beantwortung der von *Lexis* aufgeworfenen Frage nach einem Verfahren, das entscheiden lässt, wann eine Verhältniszahl Wahrscheinlichkeitscharakter besitzt. Der Dispersionskoeffizient von *Lexis* sagt wohl aus, ob die Streuung über- oder unternormal ist; hingegen gibt er uns keine Möglichkeit zu beurteilen, ob eine von der normalen abweichende Streuung als Resultat des Zufalls gewertet werden darf oder nicht. Die χ^2-Verteilung dagegen erlaubt es festzustellen, ob die beobachtete Streuung wesentlich verschieden ist von der nach der Wahrscheinlichkeitstheorie zu erwartenden.

Sei N_i der Umfang des einzelnen Versuchs, N_i^E $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die beobachteten Häufigkeiten des Ereignisses E in n Versuchen. Dann setzen wir

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i^E}{\sum_{i=1}^{n} N_i}, \quad q = 1 - p\,.$$

Treffen wir die Annahme, die nach Voraussetzung zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit sei p, dann ist die Streuung $(Npq)^{\frac{1}{2}}$. Deshalb ist die Grösse

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(N_i^E - N_i p)^2}{N_i pq}$$

wie χ^2 verteilt, wenn die N_i gross genug sind. Häufig wird der Faktor q weggelassen, wenn er nahe bei 1 ist. Damit können wir entscheiden, ob eine von der normalen abweichende Dispersion sich leicht aus dem Zufall erklären lässt oder nicht.

b) Die Streuung σ ist nicht bekannt;
zu prüfen ist der Unterschied zweier beobachteter Streuungen

Zwei Reihen von Stichproben führen zu den beiden Streuungen

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2 , \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} (y_k - m_2)^2 .$$

Um den Unterschied der beiden Streuungen zu prüfen, treffen wir die Annahme, dass beiden Versuchen die gleiche Streuung σ zugrunde liegt. Dann sind

$$\chi_1'^2 = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad \chi_2'^2 = \frac{n_2 s_2^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n_2} (y_k - m_2)^2}{\sigma^2}$$

wie χ^2 verteilt mit $n_1 - 1$ und $n_2 - 1$ Freiheitsgraden.

Also ist

$$\xi = \log \text{nat} \frac{\chi_1' (n_2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\chi_2' (n_1 - 1)^{\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

wie z verteilt; s_1 ist dabei die grössere Streuung.

Die Wahrscheinlichkeit einer grösseren Abweichung als ξ erhalten wir durch Integration. Auch für die z-Verteilung geben *Rider* und *Fisher* die Integrale an. Es erübrigt sich zu diesem Test hier ein Beispiel zu geben, da wir ihn im nächsten Abschnitt verwenden werden [1].

---

[1]) Lediglich der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass sich mit Hilfe dieser Tests auch Regressionskoeffizienten und Korrelationskoeffizienten prüfen lassen. Wir verweisen aber dafür auf die bereits genannte Literatur und auf das Beispiel in der Basler Dissertation von *Baumann*, «Die Todesursachen der Volksversicherten» (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 44, Bern 1944). Eine weitere wichtige Anwendung eines dieser Teste in einem für die Versicherung wichtigen Gebiete ist die Prüfung der Güte der Ausgleichung (goodness of fit).

III. Abschnitt

Der genaue Vergleich von Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve, der Sicherheitszuschlag und die praktische Durchführung der Berechnung der Schadenreserve mit Hilfe eines Durchschnittsverfahrens

Mit den im letzten Abschnitt abgeleiteten Methoden haben wir nun die Möglichkeit, die am Ende des ersten Abschnitts noch offengelassenen Fragen, nämlich die der Festsetzung des Sicherheitszuschlages und die des genauen Vergleichs der Durchschnittsverfahren untereinander und mit dem Einzelschätzungsverfahren, zu beantworten.

§ 7

Der genaue Vergleich verschiedener Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve

Im ersten Abschnitt haben wir, um verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Schadenreserve miteinander vergleichen zu können, die mittlere quadratische Abweichung der geschätzten Reserven von den tatsächlichen Auszahlungen berechnet. Die Verwendung der mittleren quadratischen Abweichung als Maßstab für die Güte verschiedener Verfahren leidet in dieser Form an dem Mangel, dass Abweichungen bei kleinen Reserven gleich stark bewertet werden wie bei grossen. Das kann bei Gesellschaften mit rasch wachsendem Bestande oder beim Vergleich der Ergebnisse verschiedener Gesellschaften zu einem falschen Bilde führen. Nehmen wir etwa als krassen Fall an, eine Gesellschaft habe für schwebende Schäden das erste Jahr Fr. 100 000 zu zahlen, im nächsten Jahr aber Fr. 1 000 000; ein erstes Verfahren schätze die erste Reserve zu Fr. 200 000 und die zweite genau. Ein zweites Verfahren möge die erste Reserve genau angeben, hingegen im zweiten Fall Fr. 1 100 000. Die mittlere quadratische Abweichung wäre in beiden Fällen dieselbe, und doch ist unbedingt das zweite Verfahren vorzuziehen, da bei einem grösseren

Bestand zum vorneherein mit grösseren Abweichungen zu rechnen ist; die gleiche Abweichung ist hier eher tragbar.

Andererseits wäre es auch nicht richtig, die Abweichung proportional dem Bestand anzusetzen; eine Abweichung von Fr. 100 000 bei einer Reserve von Fr. 100 000 ist nicht so unwahrscheinlich wie eine solche von Fr. 1 000 000 bei einer Reserve von Fr. 1 000 000. Kommen die Abweichungen der Auszahlungen von der Reserve durch das Wirken sehr vieler kleiner und voneinander unabhängiger Ursachen zustande, so lehrt die Fehlertheorie, dass die Streuung proportional der Quadratwurzel aus dem Bestande wächst. Damit wird dem Ausgleich richtig Rechnung getragen.

Bezeichnen wir wieder mit R_i die Schadenreserve des i-ten Jahres und mit A_i die daraus tatsächlich geleisteten Zahlungen, so können wir im Sinne der vorhergehenden Betrachtung die Grössen

$$\frac{A_i - R_i}{R_i^{\frac{1}{2}}}$$

als gleichwertige Beobachtungen, d. h. gleichwertige Abweichungen der Reservebestimmung betrachten; die verschiedene Grösse der Bestände spielt keine Rolle mehr. Das richtige Mass der Güte wäre somit s', wo

$$s'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(A_i - R_i)^2}{R_i}\,; \tag{16}$$

n ist dabei die Anzahl der Beobachtungsjahre. Führen wir die Berechnung von s' für die einzelnen Verfahren durch, so erhalten wir die folgenden Werte:

	s'	s [1]
Einzelschätzungsverfahren	66,1	51 200
Durchschnittsverfahren mit Bezugszahl:		
a) mittlerer Prämienbestand	50,4	41 300
b) Zahlungen des Geschäftsjahrs für Schadenfälle	50,4	41 400
c) Anzahl der schwebenden Fälle	72,6	61 400

[1]) Zum Vergleich geben wir in der letzten Kolonne die im ersten Abschnitt berechnete Streuung s ohne Korrektur für die verschiedene Bestandsgrösse.

Die Berechnung der Streuung unter Berücksichtigung der Bestandsgrösse führt fast vollständig zu den gleichen Ergebnissen für die Güte der verschiedenen Verfahren wie die Berechnung unter Vernachlässigung der Bestandsgrösse. Das rührt vor allem davon her, dass sich der Umfang des Bestandes während der Beobachtungszeit nicht wesentlich verändert hat.

Mit der Berücksichtigung der Bestandsgrösse haben wir einen Mangel des Vergleichs im ersten Abschnitt beseitigt. Mit Hilfe der im zweiten Abschnitt abgeleiteten z-Verteilung ist es nun weiter möglich zu entscheiden, ob die beobachteten Streuungen s' wesentlich voneinander verschieden sind, d. h. ob wir auf Grund unseres Beobachtungsmaterials allein schon schliessen dürfen, dass etwa die Verwendung der Anzahl der schwebenden Fälle auch in Zukunft im Mittel schlechtere Resultate ergeben wird als die Berechnung auf Grund des mittleren Prämienbestandes. Wir haben auszugehen von der Formel (vgl. Formel 15)

$$\xi = \log \text{nat} \frac{s_1 n_1^{\frac{1}{2}} (n_2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{s_2 n_2^{\frac{1}{2}} (n_1 - 1)^{\frac{1}{2}}} .$$

In unserem Falle ist $n_1 = n_2 (= 5)$; damit reduziert sich der Ausdruck auf $\xi = \log \text{nat} \frac{s_1}{s_2}$. Für den Vergleich der Verfahren unter Verwendung des mittleren Prämienbestandes und der Anzahl der schwebenden Fälle als Bezugsgrössen finden wir $\xi = \log \text{nat} \frac{72{,}6}{50{,}4} =$ $= 0{,}365$. In der Regel genügt es, die z für die Wahrscheinlichkeiten $P = 0{,}005$ und $P = 0{,}025$ zu kennen; in den Tabellen von *Rider* und *Fisher* sind die z, welche den beiden Wahrscheinlichkeiten $P =$ $= 0{,}005$ und $P = 0{,}025$ entsprechen, für die verschiedenen Kombinationen von n_1 und n_2 angegeben.

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist in unserem Falle beidemal $5 - 1 = 4$. Den Wahrscheinlichkeiten $P = 0{,}005$ und $P = 0{,}025$ entsprechen $z = 1{,}3856$ und $z = 0{,}9272$. Unter hundert Fällen kommt es also mehr als fünfmal vor, dass zwei Streuungen «zufällig» Abweichungen im beobachteten Ausmasse aufweisen. Unterschiede in der Streuung, wie sie bei unserem Material auftreten, lassen sich noch durchaus aus dem Zufall allein erklären. — Erst recht unterscheiden sich die anderen Streuungen nicht wesentlich voneinander. Das lässt den Schluss zu, dass ohne besondere Ursachen, also nur «zufällig», ein anderes Beobachtungsmaterial eine andere Rangordnung der vier Verfahren geben kann. Die Grössenordnung der bei den verschiedenen Verfahren auftretenden Streuungen wird allerdings dieselbe bleiben.

Der Vergleich der Streuungen lässt uns abschliessend feststellen: Unser Beobachtungsmaterial erlaubt nicht, eine endgültige Vorschrift für die Wahl der Bezugsgrösse aufzustellen. Der Verwendung der Zahl der schwebenden Fälle als Bezugsgrösse steht wohl das grundsätzliche Bedenken gegenüber, dass dabei die Schadenschwere vernachlässigt wird; dafür hat das Verfahren den Vorteil, eine langsame Abwicklung der Schadenfälle zu berücksichtigen. Wird langsamer abgewickelt, so bleiben mehr Schäden unerledigt; also wird die mit der Anzahl der Schäden berechnete Reserve grösser. Auch deswegen möchten wir diese Möglichkeit nicht vollständig verwerfen.

Wären die Prämien rein auf Grund der Erfahrung festgesetzt, ohne Verschiebungen durch die Erfordernisse kaufmännischer Geschäftsführung (Konkurrenzrabatte usw.), würden wir den mittleren Prämienbestand als bestes Mass für das Risiko des Gesamtbestandes betrachten und den Auszahlungen des Rechnungsjahres als Bezugsgrösse vorziehen, weil diese mehr zufälligen Schwankungen unterworfen sind. So lässt sich aber auch hier kein Entscheid fällen. Bei Verwendung der Zahlungen als Bezugsgrösse ist wie bei der Reserve das Weglassen der Spitzenschäden zu empfehlen.

§ 8

Die Bestimmung des Sicherheitszuschlags

Die auf Grund eines Durchschnittsverfahrens berechnete (Netto-) Schadenreserve stellt einen Mittelwert dar, der in der Hälfte aller Fälle zu Gewinnen, in der anderen Hälfte aber zu Verlusten führen wird. Dieser Tatbestand drängt zur Stellung eines Zuschlages als Sicherung vor Verlusten, die von späteren Jahren getragen werden müssten. Theoretisch absolute Sicherheit vor Verlusten wäre nur bei Stellung der vollen noch versicherten Leistung als Reserve zu erreichen; das ist jedoch, wie leicht ersichtlich, praktisch nicht durchführbar.

Die Bestimmung des Sicherheitszuschlages hat — wie schon der Vergleich der verschiedenen Bezugsgrössen — sich auf die Ergebnisse des zweiten Abschnitts zu stützen. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die Grössen

$$\frac{A_i - R_i}{R_i^{\frac{1}{2}}}$$

als gleichwertige Beobachtungen angesehen. Dann unterliegt der Wert

$$\xi = \frac{A_\nu - R_\nu}{R_\nu^{\frac{1}{2}}} \, \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(A_i - R_i)^2}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

der Verteilung von t, wobei der Index ν einen Jahrgang später als n bezeichnet (vergleiche Formel 14). — Der mögliche Überschuss der Auszahlungen über die (Netto-) Reserve, $A_\nu - R_\nu$, soll mit dem Sicherheitszuschlag Z_ν gedeckt werden. Wir werden Z_ν so festzusetzen haben, dass es für «normalerweise» auftretende Überschüsse ausreicht, d. h. mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht übertroffen wird. Wir erhalten aus der letzten Gleichung für Z_ν den Ausdruck

$$Z_\nu = \xi \cdot R_\nu^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(A_i - R_i)^2}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{17}$$

Die Grösse des Sicherheitszuschlages ist abhängig einmal von dem Grade der Sicherheit, der verlangt wird, also von der Wahrscheinlichkeit P; dann aber ist er auch bedingt von der Anzahl der Freiheitsgrade. Je nachdem wir die Verhältniszahl m aus mehr oder weniger Beobachtungsjahren berechnen, wird der Sicherheitszuschlag Z_ν kleiner oder grösser. Als Anhaltspunkt für die Grössenordnung von ξ in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit P geben wir nachstehend einen Auszug aus der Tabelle von *Rider*.

Anzahl der Freiheitsgrade	Werte von t zu den Werten von		
	$P = 0{,}005$	0,01	0,025
1	63,657	31,821	12,706
2	9,925	6,965	4,303
3	5,841	4,541	3,182
4	4,604	3,747	2,776
5	4,032	3,365	2,571

Um die Sicherheitszuschläge im Vergleich zur Schadenreserve nicht allzu gross werden zu lassen, müssen wir unsere Beobachtungen auf mindestens drei Jahre erstrecken (zwei Freiheitsgrade). Wegen der Höhe des Sicherheitszuschlages allein wäre es sogar erwünscht, die Berechnung von m auf eine möglichst breite Grundlage zu stellen, d. h. die Anzahl der Jahre n möglichst gross zu wählen. Andererseits dürfen aber zur Berechnung der Schadenreserve nicht allzu alte Erfahrungen Verwendung finden; es muss somit ein mittlerer Weg zwischen diesen beiden Zielen gefunden werden.

Die Festsetzung der Wahrscheinlichkeit, bis zu welcher das Eintreten eines Verlustes gedeckt sein soll, ist zum Teil Ansichtssache. Als Grenze sollte allermindestens $P = 0{,}025$ gewählt werden; wir ziehen indessen Grenzen von der Grössenordnung $P = 0{,}005$ bis $P = 0{,}01$ vor. Um die Festsetzung des Sicherheitszuschlages mit dem dargelegten Verfahren ziffernmässig zu zeigen, geben wir in der folgenden *Tabelle 7* neben der (Netto-) Schadenreserve die Sicherheitszuschläge bei Verwendung des mittleren Prämienbestandes als Bezugsgrösse und mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 0{,}005$ ($\xi = 4{,}604$) an. Weiter finden sich in der Tabelle noch der nach dem Verfahren zu reservierende Gesamtbetrag und die tatsächliche Schadenhöhe.

Tabelle 7

Sicherheitszuschläge

Bezugszahl: Mittlerer Prämienbestand des Rechnungsjahres

Jahr	Schadenreserve	Sicherheitszuschlag	Gesamtbetrag	Schadenbetrag
	Beträge in Fr. 1000.—			
1934	649,3	209,1	858,4	635,2
1935	672,2	212,8	885,0	693,3
1936	673,4	213,0	886,4	603,2
1937	672,6	212,9	885,5	726,2
1938	679,6	214,0	893,6	689,2

§ 9

Bemerkungen zur praktischen Durchführung der Berechnung der Schadenreserve

Die wesentlichsten Erfordernisse, die bei der Berechnung der Schadenreserve mit Hilfe eines Durchschnittsverfahrens zu beachten sind, sollen im folgenden besonders zusammengefasst werden.

1. Die Schadenzahlungen aus schwebenden Fällen, die bis zum Tage der Reserveberechnung im neuen Rechnungsjahr bereits geleistet worden sind, bilden den einen genau zu ermittelnden Teil der Schadenreserve.

2. Der andere Teil wird auf Grund der Erfahrungen der Vorjahre mit Hilfe eines Durchschnittsverfahrens bestimmt. Als Bezugsgrössen kommen dabei in Frage:

a) der mittlere Prämienbestand;
b) die Auszahlungen des Geschäftsjahres für Schadenfälle;
c) eventuell die Anzahl der schwebenden Schäden.

Die Verhältniszahl m ist aus den Erfahrungen (Abwicklung der schwebenden Schäden) der Vorjahre zu bestimmen. Zwei Jahre nach dem eingetretenen Unfallereignis ist der weitaus grösste Teil der Schäden abgewickelt, so dass sich die wenigen übriggebliebenen Fälle ohne grosse Mühe abschätzen lassen.

3. Für allfällig auftretende sehr schwere Schadenfälle ist gesondert Reserve zu stellen; dementsprechend haben wir die Spitzenschäden bei der Berechnung von m auszuschalten. Zu beachten ist, dass unter Umständen auch eine grosse Zahl mittelschwerer Schäden eine höhere Reservestellung erfordern kann. Weiterhin ist zu prüfen, ob nicht die Schadenentwicklung einen Trend, eine Entwicklungstendenz, aufweist.

4. Schliesslich ist die Berechnung eines angemessenen Sicherheitszuschlages durchzuführen.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, die Anwendung von Durchschnittsverfahren zur Bestimmung der Schadenreserve in der privaten Unfallversicherung abzuklären. Die verhältnismässig grosse Streuung beim bisher allgemein üblichen «genauen» Einzelschätzungsverfahren erlaubt es, bereits im ersten Abschnitt die Möglichkeit der Anwendung von Durchschnittsverfahren grundsätzlich festzustellen. Wenn es schon nicht angängig ist, die Schadenreserve einigermassen genau zu erhalten, so ist das technisch einfachere Verfahren vorzuziehen. Unter Verwendung der im zweiten Abschnitt abgeleiteten neueren statistischen Verfahren war es im dritten Abschnitt dann noch möglich, für die Höhe des Sicherheitszuschlages Grenzen festzulegen und festzustellen, ob die verschiedenen Bezugszahlen wesentlich verschiedene Ergebnisse zeitigen.

Über die Anwendbarkeit von Durchschnittsverfahren zur Bestimmung von Schadenreserven in anderen Versicherungszweigen ist mit der vorliegenden Arbeit nichts ausgesagt. Grössere Abweichungen können unter Umständen die Anwendung von Durchschnittsverfahren verunmöglichen. Ganz abgesehen davon aber, dass die Idee von Durchschnittsverfahren ja nicht aus der Unfallversicherung stammt und dass Durchschnittsverfahren verschiedentlich auf anderen Gebieten angewendet werden, ist es gut denkbar, dass mit den Durchschnittsverfahren gleichzeitig auch das Einzelschätzungsverfahren eine wesentlich grössere Streuung aufweist. Unter dieser Voraussetzung liessen sich auch in anderen Versicherungszweigen Durchschnittsverfahren zur Bestimmung der Schadenreserven einführen.

Literaturverzeichnis

1. Sachversicherung

Wir haben aus der Literatur der Sachversicherung nur die unmittelbar verwendeten Schriften aufgenommen. Ausführlichere Verzeichnisse finden sich in 1 und 2.

1. *P. Riebesell:* Einführung in die Sachversicherungsmathematik. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Berlin 1936.
2. *M. Gürtler:* Die Kalkulation der Versicherungsbetriebe. Berlin 1936.
3. *N. Sergowskij:* Einführung in die Theorie der Feuerversicherung. Prag 1931.
4. *L. Potin:* Calcul des tarifs des assurances de risques divers. Paris et Liège 1934.
5. *W. Wunderlin:* Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Unfallversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 31, Bern 1936. — Zur Frage der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der sozialen Unfallversicherung. In «Rückblick und Ausblick», Schweizerische Unfallversicherungsanstalt, Bern 1942.
6. *W. Thalmann:* Die Frage der Aufstellung von Weltstatistiken über Arbeiterunfälle und die Tarifgestaltung in der Sozialversicherung. Comptes rendus du XI^e congrès international d'actuaires, vol. II, Paris 1937.
7. *P. Riebesell:* Die Mathematik der Feuerversicherung. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft 38, Berlin 1926.
8. *H. Jecklin:* Ist die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Lebensversicherung besser fundiert als in der Sachversicherung? Berichte des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Bd. I, Luzern 1940.
9. *P. Riebesell:* Fragen aus der Feuer- und Sachversicherung. Comptes rendus du XI^e congrès international d'actuaires, vol. II, Paris 1937.
10. *H. Jecklin:* Ist eine Weiterentwicklung der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen möglich und wünschbar? Das Versicherungsarchiv, Jahrg. 11, Wien 1941.

2. Literatur über die Schadenreserve

11. *Neumanns* Zeitschrift für Versicherungswesen 1936, S. 369/370.
12. *G. Bufano:* Calcolo delle riserve sinistri nei rami elementari. Rivista italiana di statistica, economia e finanza, anno V, no. 1, marzo 1933 (Bologna).
13. *R. D'Addario:* Il calcolo della riserva-sinistri nelle assicurazioni elementari. Giornale dell' Istituto degli Attuari, anno IV, no. 3, 1933 (Roma).

14. *L. Amoroso:* Curve di frequenza nelle assicurazioni di infortuni e di responsabilità civile. Nota presentata al congresso internazionale dei Matematici, Zurigo 1932.

15. *A. Stroh:* Bestimmung der Prämien und technischen Reserven in der Unfall- und Haftpflichtversicherung. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, Roma 1934, vol. III.

16. *K. Jannott:* Bestimmung der Prämien und Reserven in der Unfall- und Haftpflichtversicherung. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, Roma 1934, vol. III.

17. *L. Amoroso:* La rappresentazione analitica delle curve di frequenza nei sinistri di infortuni e di responsabilità civile. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, Roma 1934, vol. III.

18. *W. Leslie:* The determination of the premiums and reserves for assurances against accident and civil liability. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, Roma 1934, vol. III.

19. *H. Renfer:* Die Rücklagen in der Unfall- und Haftpflichtversicherung. Atti del decimo congresso internazionale degli attuari, Roma 1934, vol. III.

20. *K. Jannott:* Betrachtungen über die mathematische Bestimmbarkeit der Schadenreserve in Unfall und Haftpflicht. Jena 1934.

3. Literatur zur Theorie der Stichproben

21. *K. Pearson:* On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. Phil. Mag, Bd. 50, 5. Reihe, 1900.

22. *Student (B. S. Gosset):* The probable error of a mean. Biometrika, Bd. 6, 1908.

23. *R. A. Fisher:* On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics. Proceedings of the international mathematical congress, Toronto 1924.

24. *R. A. Fisher:* Statistical methods for research workers. Edinbourgh 1930.

25. *P. R. Rider:* A introduction to modern statistical methods. New York 1933.

26. *E. Czuber:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung. Statistik und Lebensversicherung, Bd. 1 und 2, 3. Auflage 1928, Leipzig.

27. *E. Czuber:* Vorlesungen über Differenzial- und Integralrechnung. Bd. 1 und 2, 5. Auflage, Leipzig 1922.

28. *L. Bieberbach-Bauer:* Vorlesungen über Algebra. 5. Auflage, Leipzig 1933.

29. *K. Marbe:* Praktische Psychologie der Unfälle und Betriebsschäden. München und Berlin 1926.

Inhaltsverzeichnis