

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 44 (1944)

**Artikel:** Über partielle Bestandsänderungen und eine Klasse neuer  
Integrationsprozesse

**Autor:** Schärf, Henryk

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-551092>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über partielle Bestandsänderungen und eine Klasse neuer Integrationsprozesse

Von Henryk Schärf, z. Zt. in Zürich

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen.

Im ersten wird mit Hilfe bisher unbekannter Integrationsprozesse eine Theorie aufgebaut, die die *Karupsche* Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten — unter Vermeidung von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen — präzisiert und auf offene Gesamtheiten erstreckt.— Als grundlegend erweist sich dabei statt des Begriffes der unabhängigen Wahrscheinlichkeit der neue der «partiellen Bestandsänderung».

Im zweiten Teile werden die eingeführten Integrationsprozesse insoweit studiert, als dies für die Begründung des ersten Teiles notwendig ist. Ausserdem wird gezeigt, dass die verwendete Beweismethode sich im Spezialfalle des bereits von *Loewy* (3) behandelten verallgemeinerten Produktintegrals besonders einfach gestaltet und rasch ein allgemeineres Ergebnis liefert als das von *Loewy* durch ziemlich langwierige Betrachtungen gefundene.

## Teil I

### Verallgemeinerung der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

1. Den Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen bilden fingierte *allgemeine Elementengesamtheiten*, d. h. sowohl *geschlossene* Gesamtheiten, die sich mit der Zeit nur vermindern können, wie auch *offene*, die neben allfälligen Austritten auch Eintritte aufweisen.

Liegen  $n$  einander ausschliessende Aus- und Eintrittsgründe vor und ist  $f^{(i)}(t)$  die Zahl der in der Zeit von  $a$  bis  $t$  aus dem  $i$ -ten Grunde ausgetretenen Elemente (bei Austrittsgrund) bzw. die mit dem Minuszeichen versehene Zahl der in dieser Zeit eingetretenen Elemente (bei Eintrittsgrund), so gilt für die Elementenzahl zur Zeit  $t$ ,  $L(t)$ , die allgemeine Formel:

$$L(t) = L(\alpha) - \sum_{i=1}^n f^{(i)}(t). \quad (1)$$

Sinngemäß sind dabei die Funktionen  $f^{(i)}(t)$  monoton, also die Funktion  $L(t)$  von beschränkter Schwankung; überdies sei  $L(t) > 0$  für  $\alpha \leq t \leq b$ .

Es können verschiedene statistische Masszahlen eingeführt werden, die den Einfluss des  $i$ -ten Grundes auf die Änderung der Gesamtheit im Zeitintervall  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$  besonders hervorheben und die mit  $p^{(i)}(J)$  bezeichnet seien. Üblicherweise werden sie nur für Austrittsgründe und einjährige Zeitintervalle berechnet, wobei folgende Formeltypen, in denen  $\Delta f(\alpha) = f(\beta) - f(\alpha)$  gesetzt wurde, häufig sind:

$$p^{(i)}(J) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\Delta f^{(i)}(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \Delta f^{(j)}(\alpha)} \quad (2a) \\ \text{oder} \\ 1 - \frac{\Delta f^{(i)}(\alpha)}{L(\alpha)} \quad (2b) \\ \text{oder endlich} \\ 1 - \frac{\Delta f^{(i)}(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} \sum'_{j \neq i} \Delta f^{(j)}(\alpha)} \quad (2c) \end{array} \right.$$

(  $\sum'_{j \neq i}$  bedeutet dabei die Summation über gewisse ausgewählte, von  $i$  verschiedene Indizes. )

Beispiele für diese Formeltypen werden im nächsten Paragraphen gegeben.

Alle haben die gemeinsame Gestalt

$$p^{(i)}(J) = p_i \left[ \frac{1}{L(\alpha)} ; \Delta f^{(1)}(\alpha), \dots, \Delta f^{(n)}(\alpha) \right], \quad (2)$$

wobei  $p_i(y; z_1, \dots, z_n)$  eine Funktion ist, die für genügend kleine  $z_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) und  $|y| < \text{Maximum von } \frac{1}{L(t)} (a \leq t \leq b)$  stetige

erste Ableitungen bezüglich der  $z_i$  besitzt und folgende Bedingungen erfüllt:

$$p_i(y; 0, \dots, 0) = 1; \frac{\delta p_i}{\delta z_i}(y; 0, \dots, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq i \\ -y & \text{für } l = i. \end{cases}$$

Diese Eigenschaften sollen die Definition der Aussage bilden, dass «die Masszahl  $p^{(i)}(J)$  den  $i$ -ten Änderungsgrund besonders hervorhebt»<sup>1)</sup>.

Häufig wird bei geschlossenen Gesamtheiten die Formel (2a) als Näherungswert für die Karupsche unabhängige Wahrscheinlichkeit des Nichtausscheidens aus dem  $i$ -ten Grunde während eines einjährigen Zeitintervalls  $J$  verwendet.

Diese wird nämlich für ein Zeitintervall  $\langle a, b \rangle$  folgendermassen umschrieben: es ist die Wahrscheinlichkeit  $\pi^{(i)} \langle a, b \rangle$ , dass ein im Zeitpunkt  $a$  der Gesamtheit angehörendes Element ihr noch im Zeitpunkt  $b$  angehört, wenn auf diese Gesamtheit in jedem Augenblick zwischen  $a$  und  $b$  der  $i$ -te Austrittsgrund mit seiner ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung wirken würde, während die aus anderen Gründen ausgeschiedenen Elemente sofort durch ebensoviele neue ersetzt würden. — Aus der Annahme, dass dann die in der einjährigen Zeitperiode  $J$  aus dem  $i$ -ten Grunde ausgeschiedenen  $\Delta f^{(i)}(\alpha)$  Elemente einer Durchschnittszahl von

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \Delta f^{(j)}(\alpha)$$

---

<sup>1)</sup> Sie bewirken, dass für stetige  $f^{(i)}(t)$  und  $\beta \rightarrow \alpha$  die Differenz zwischen  $p(J) = \prod_{i=1}^n p^{(i)}(J)$  und  $\pi(J) = \frac{L(\beta)}{L(\alpha)}$  unendlich klein zweiter Ordnung bezüglich der  $\Delta f^{(i)}(\alpha)$  wird.

Es ist dann nämlich

$$p(J) = f \left[ \frac{1}{L(\alpha)}; \Delta f^{(1)}(\alpha), \dots, \Delta f^{(n)}(\alpha) \right] \text{ mit } f(y; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n p_i(y; z_1, \dots, z_n),$$

$$\pi(J) = \varphi \left[ \frac{1}{L(\alpha)}; \Delta f^{(1)}(\alpha), \dots, \Delta f^{(n)}(\alpha) \right] \text{ mit } \varphi(y; z_1, \dots, z_n) = 1 - y \cdot \sum_{i=1}^n z_i$$

und  $f(y; 0, \dots, 0) = \varphi(y; 0, \dots, 0) \equiv 1, \frac{\delta f}{\delta z_i}(y; 0, \dots, 0) = \frac{\delta \varphi}{\delta z_i}(y; 0, \dots, 0) \equiv -y$  für  $i = 1, \dots, n$ .

während dieser Periode unter Ausscheiderisiko gestandenen Elemente entstammten, ergibt sich näherungsweise als ursprüngliche Ausscheiderwahrscheinlichkeit aus dem  $i$ -ten Grunde

$$\frac{\Delta f^{(i)}(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \Delta f^{(j)}(\alpha)}$$

und als entsprechende Verbleibswahrscheinlichkeit der Ausdruck (2a).—

Daraus folgt für  $\pi^{(i)} < a, b >$  der Näherungswert  $\prod_{s=a}^b p^{(i)}(< s, s+1 >)$ , falls  $a$  und  $b$  ganzzahlig sind.

Noch plausibler erscheint obiges Näherungsverfahren für eine Einteilung  $D$  des Intervalls  $< a, b >$  in kürzere als einjährige Teilintervalle  $I_s = < t_s, t_{s+1} >$  mit  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ , das zum Näherungswert

$$p_D^{(i)} = \prod_{s=0}^{r-1} p^{(i)}(I_s)$$

für  $\pi^{(i)} < a, b >$  führt.

Es möge nun  $D$  eine «normale» Folge von Einteilungen des Intervalls  $< a, b >$  durchlaufen, d. h. eine solche, dass die Länge des längsten Teilintervalls von  $D$  gegen 0 konvergiert. Existiert dann der Grenzwert von  $p_D^{(i)}$ , so ist er exakterweise als Wert der so vage umschriebenen Grösse  $\pi^{(i)} < a, b >$  zu definieren.

Damit sind wir aber zu einer Definitionsmöglichkeit gelangt, die weder des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bedarf, noch auf geschlossene Gesamtheiten beschränkt ist. Indem wir noch die Vorzugsstellung der Formel (2a) beseitigen, definieren wir:

Existiert für jede den  $i$ -ten Änderungsgrund einer allgemeinen Elementengesamtheit besonders hervorhebende Masszahl  $p^{(i)}(J)$  eine Grenze des Produktes

$$p_D^{(i)} = \prod_{s=0}^{r-1} p^{(i)}(I_s),$$

wenn die Einteilung  $D$  des Intervalls  $< a, b >$  in die Teilintervalle  $I_s$  ( $s = 0, \dots, r-1$ ) eine normale Folge durchläuft und ist diese Grenze von der Bestimmungsweise von  $p^{(i)}(J)$  unabhängig, so heisse sie die

*i*-te partielle Bestandsänderung der Gesamtheit in der Zeit von *a* bis *b* und werde mit  $\pi^{(i)} < a, b >$  bezeichnet <sup>1)</sup>.

Während sonst die Existenz der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten nur unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Funktionen  $f^{(i)}(t)$  mit Hilfe des Intensitätsbegriffes bewiesen wird <sup>2)</sup>, ergeben die weiteren Betrachtungen den folgenden

*Satz 1:* Sind im Intervall  $< a, b >$  die Funktionen  $f^{(i)}(t)$  stetig und  $L(t) > 0$ , so existiert die *i*-te partielle Bestandsänderung in der Zeit von *a* bis *b*,  $\pi^{(i)} < a, b >$ , und es ist

$$\pi^{(i)} < a, b > = e^{-\int_a^b \frac{d f^{(i)}(t)}{L(t)}} . \quad (3)$$

Karup hat bewiesen, dass die totale Verbleibswahrscheinlichkeit in einer geschlossenen Gesamtheit gleich dem Produkt der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten des Nichtausscheidens aus den einzelnen Gründen ist, wenn die Funktionen der Ausscheideordnung differenzierbar sind.

Definieren wir die *totale Bestandsänderung* einer Elementengesamtheit in der Zeit von *a* bis *b*,  $\pi < a, b >$ , als den Quotienten deren Elementenzahlen in den Zeitpunkten *b* und *a*:

$$\pi < a, b > = \frac{L(b)}{L(a)} ,$$

so besagt allgemeiner der im Teile II zu beweisende

*Satz 2:* Ändert sich eine fingierte Elementengesamtheit durch mehrere einander ausschliessende Aus- und Eintrittsgründe auf stetige Art (d. h. sind die Funktionen  $f^{(i)}(t)$  stetig), so gleicht in jeder Zeitspanne die totale Bestandsänderung dem Produkt sämtlicher partiellen Bestandsänderungen.

<sup>1)</sup> Für diesen Begriff, der denjenigen der Karupschen unabhängigen Wahrscheinlichkeit des Nichtausscheidens aus dem *i*-ten Grunde präzisiert und verallgemeinert, ist übrigens eine ähnliche Umschreibung wie für den letzteren möglich:

Es ist der Quotient der Elementenzahlen in den Zeitpunkten  $t = b$  und  $t = a$ , der sich ergeben würde, wenn in jedem Augenblick zwischen *a* und *b* nur der *i*-te Änderungsgrund mit seiner ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Elementengesamtheit einwirken würde, während alle anderen Änderungsgründe als eliminiert gedacht werden (etwa mittels Kompensation der Aus- bzw. Eintritte durch ebensoviele gleichzeitige Ein- bzw. Austritte).

<sup>2)</sup> Mit Ausnahme der im Teile II, § 2, angeführten Untersuchungen von Loewy, die die vorliegende Arbeit angeregt haben.

2. Die Formeltypen (2a)—(2c) mögen durch einige Beispiele illustriert werden, in denen  $J$  jeweils eine einjährige Zeitperiode sei:

Ist die Elementengesamtheit eine geschlossene Gruppe gleichaltriger Aktiver, so wirken nur die Austrittsgründe «Tod» und «Invalidität», und die Formeln (2a) bzw. (2b) geben entsprechend die «korrigierte» (unabhängige) bzw. «experimentelle» (abhängige) Wahrscheinlichkeit des Nichtausscheidens aus einem dieser Gründe an <sup>1)</sup>.

Ist aber die Elementengesamtheit eine offene Gruppe gleichaltriger Aktiver und sind  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  entsprechend die Zahlen der bis zum Zeitpunkt  $t$  durch Tod, Invalidität und freiwillig Ausgeschiedenen,  $f_4(t)$  die mit dem Minuszeichen versehene der bis dahin Eintretenen, so werden im Zeitpunkt  $\alpha$  die «gewöhnlichen» Wahrscheinlichkeiten des Nichtausscheidens durch Tod bzw. Invalidität berechnet aus Formeln des Typus (2c) <sup>2)</sup> als

$$1 - \frac{\Delta f_1(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} [\Delta f_3(\alpha) + \Delta f_4(\alpha)]} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{\Delta f_2(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} [\Delta f_3(\alpha) + \Delta f_4(\alpha)]},$$

hingegen die «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten wieder aus Formeln des Typus (2a) als

$$1 - \frac{\Delta f_1(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} [\Delta f_2(\alpha) + \Delta f_3(\alpha) + \Delta f_4(\alpha)]}$$

bzw.

$$1 - \frac{\Delta f_2(\alpha)}{L(\alpha) - \frac{1}{2} [\Delta f_1(\alpha) + \Delta f_3(\alpha) + \Delta f_4(\alpha)]}.$$

3. Für Austrittsgründe findet man ferner zahlreiche Beispiele von Masszahlen des Typus (2a) bei *Friedli* (2). Mit ihnen als Verbleibswahrscheinlichkeiten konstruiert er abnehmende Ordnungen, deren Produkt er dann, dem Karup'schen Multiplikationssatz entsprechend, geschlossene Gesamtheiten darstellt.

Unser Satz 2 regt die Ausdehnung dieses Verfahrens auf offene Gesamtheiten an. — Die den einzelnen Änderungsgründen entspre-

<sup>1)</sup> Vgl. *Marchand* (4).

<sup>2)</sup> Vgl. *Bohren* (1), Seite 107.

chenden Ordnungen wären mit Masszahlen des Typus (2a) als totalen Bestandsänderungen zu konstruieren. Für Austrittsgründe würden sich wieder abnehmende Ordnungen ergeben, hingegen für Eintrittsgründe zunehmende. Das Produkt aller dieser Ordnungen würde die Entwicklung der offenen Gesamtheit illustrieren.

So wirken z. B. auf die Bevölkerung eines Gebietes neben den Austrittsgründen «Tod» und «Auswanderung» die Eintrittsgründe «Geburt» und «Einwanderung». Ihnen würden entsprechen: zwei abnehmende Ordnungen, die das isolierte Wirken von Tod bzw. Auswanderung illustrieren, und zwei zunehmende, die je den Einfluss von Geburt und Einwanderung veranschaulichen. Ihr Produkt würde die gesamte Bevölkerungsbewegung darstellen.

Andere Anwendungsbeispiele für das vorgeschlagene Verfahren liefern: Aktivengesamtheiten Gleichaltriger, die sich durch Tod und Invalidität vermindern, durch Reaktivierung vermehren; Ledigen-  
gesamtheiten Gleichaltriger, die sich durch Tod und Heirat vermindern, durch Verwitwung vermehren usw.

## Teil II

### Multiplikative und additive Integrationsprozesse

1. Der Grenzprozess, den wir zwecks Definition der partiellen Bestandsänderungen betrachtet haben, kann verallgemeinert werden.

Es sei  $\Phi(y_1, \dots, y_m; z_1 \dots z_n)$  eine im  $(m + n)$ -dimensionalen Euklidischen Raum definierte reelle Punktfunktion. — Sind im Intervall  $\langle a, b \rangle$  die reellen Funktionen  $f_x(x)$  ( $x = 1, \dots, m$ ) und  $g_\lambda(x)$  ( $\lambda = 1, \dots, n$ ) definiert, so möge der obeingeführten Einteilung  $D$  das Produkt

$$II_D \{f_x; g_\lambda\} = \prod_{s=0}^{r-1} \Phi [f_1(t_s), \dots, f_m(t_s); \Delta g_1(t_s), \dots, \Delta g_n(t_s)]$$

zugeordnet werden.

Existiert der Grenzwert von  $II_D \{f_x; g_\lambda\}$ , wenn  $D$  eine normale Einteilungsfolge durchläuft, so ist dies ein neuartiger Integralausdruck,

der mit  $\int_a^b P \Phi \{f_x(t); dg_\lambda(t)\}$  bezeichnet werde <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In obiger Definition könnte statt  $\langle a, b \rangle$  auch ein mehrdimensionales Intervall gewählt werden, wobei an Stelle der Punktfunktionen  $g_\lambda(x)$  additive Intervallfunktionen zu treten hätten.

Insbesondere ist also

$$\pi^{(i)} \langle a, b \rangle = \underset{a}{P}^b p_i \left\{ \frac{1}{L(t)}; df^{(i)}(t) \right\}, \quad (4)$$

wenn die in der Definition der partiellen Bestandsänderung auftretende Masszahl  $p^{(i)}(J)$  die Gestalt (2) hat. Die weiteren Spezialisierungen (2a) bzw. (2b) der Formel (2) liefern entsprechend

$$\pi^{(i)} \langle a, b \rangle = \underset{a}{P}^b \left\{ 1 - \frac{df^{(i)}(t)}{L(t) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda \neq i} df^{(\lambda)}(t)} \right\} \quad (4a)$$

$$\text{bzw.} \quad \pi^{(i)} \langle a, b \rangle = \underset{a}{P}^b \left\{ 1 - \frac{df^{(i)}(t)}{L(t)} \right\}. \quad (4b)$$

2. Bisher sind nur zwei Spezialfälle des definierten Integralausdrucks bekannt: das auf *Volterra* zurückgehende und in der Theorie der linearen Differentialgleichungen verwendete «Produktintegral»  $\underset{a}{P}^b \{1 + f(t) dt\}$ <sup>1)</sup> und das von *Loewy* (3) betrachtete «verallgemeinerte Produktintegral»  $\underset{a}{P}^b \{1 + f(t) dg(t)\}$ .

Durch letzteres ist insbesondere die totale Bestandsänderung einer allgemeinen Elementengesamtheit darstellbar. Es ist nämlich

$$\pi \langle a, b \rangle = \frac{L(b)}{L(a)} = \underset{s=0}{\prod}^{r-1} \left\{ 1 + \frac{\Delta L(t_s)}{L(t_s)} \right\},$$

$$\text{also} \quad \pi \langle a, b \rangle = \underset{a}{P}^b \left\{ 1 + \frac{dL(t)}{L(t)} \right\}. \quad (5)$$

Das auf ziemlich langem und kompliziertem Wege gewonnene *Loewysche* Ergebnis<sup>2)</sup> besagt:

<sup>1)</sup> Vgl. *Schlesinger* (5) und (6).

<sup>2)</sup> *L. c.*, Seite 208—213.

Sind im Intervall  $\langle a, b \rangle$  die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  stetig,  $g(t)$  überdies monoton, so existiert  $P_a^b \{1 + f(t)dg(t)\}$ , und es ist

$$P_a^b \{1 + f(t)dg(t)\} = e^{\int_a^b f(t)dg(t)}. \quad (6)$$

Dies genügt aber für die Bestimmung der totalen Bestandsänderung einer allgemeinen Elementengesamtheit noch nicht, da in der Formel (5)  $L(t)$  nicht notwendig monoton sein muss. Wir geben hingegen im nächsten Paragraphen einen einfachen Beweis für den allgemeineren

*Satz 3: Ist die Funktion  $f(t)$  im Intervall  $\langle a, b \rangle$  beschränkt, die Funktion  $g(t)$  dort stetig und von beschränkter Schwankung, so ist die Existenz des verallgemeinerten Produktintegrals  $P_a^b \{1 + f(t)dg(t)\}$  mit derjenigen des Riemann-Stieltjesschen Integrals  $\int_a^b f(t)dg(t)$  äquivalent, und es gilt die Gleichheit*

$$P_a^b \{1 + f(t)dg(t)\} = e^{\int_a^b f(t)dg(t)}. \quad (6)$$

Nachdem in Formel (5)  $L(t)$  von beschränkter Schwankung ist, liefert dieser Satz bei Stetigkeit von  $L(t)$  die Relation

$$\pi \langle a, b \rangle = e^{\int_a^b \frac{dL(t)}{L(t)}}.$$

Daraus und der Formel (1) folgt aber:

$$\pi \langle a, b \rangle = e^{-\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{df^{(i)}(t)}{L(t)}} = \prod_{i=1}^n e^{-\int_a^b \frac{df^{(i)}(t)}{L(t)}}.$$

Gelingt es daher, für stetige  $f^{(i)}(t)$  die Formel (3),

$$\pi^{(i)} \langle a, b \rangle = e^{-\int_a^b \frac{df^{(i)}(t)}{L(t)}},$$

abzuleiten, so wird damit die Behauptung des Satzes 2:

$$\pi \langle a, b \rangle = \prod_{i=1}^n \pi^{(i)} \langle a, b \rangle$$

bewiesen sein.

Hat die Masszahl  $p^{(i)}(J)$  die Form (2b), so ergibt sich dies aus der Darstellung (4b) von  $\pi^{(i)} \langle a, b \rangle$  durch ein Produktintegral und der Beziehung (6). Diesen Spezialfall hat Loewy (3) für eine geschlossene Gesamtheit betrachtet. Der allgemeine Fall soll im Paragraphen 6 erledigt werden.

3. Zwecks Beweises des Satzes 3 führen wir folgende Hilfsfunktion ein:

$$\psi(y, z) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + yz)}{z} - y & \text{für } z \neq 0, yz > -1, \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $\ln(1 + yz) = yz + z \cdot \psi(y, z)$ . (7)

Laut Mittelwertsatz existiert aber eine solche Zahl  $0 < \vartheta < 1$ , dass

$$\ln(1 + yz) = \frac{yz}{1 + \vartheta yz}$$

ist, also folgt aus (7):

$$\psi(y, z) = -\vartheta y^2 \cdot \frac{z}{1 + \vartheta yz}.$$

Bleibt  $|y|$  unterhalb der oberen Grenze  $M$  von  $|f(t)|$  in  $\langle a, b \rangle$ , so ist daher für  $M \cdot |z| < \frac{1}{2}$

$$|\psi(y, z)| \leq M^2 \frac{|z|}{1 - M \cdot |z|} \leq 2 M^2 \cdot |z|,$$

also existiert zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein solches  $\delta > 0$ , dass für  $|z| < \delta$  und  $|y| < M$  die Ungleichung gilt:

$$|\psi(y, z)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Ist nun 
$$II_D[f, g] = \prod_{s=0}^{r-1} \{1 + f(t_s) \cdot \Delta g(t_s)\},$$

so folgt aus 
$$\ln II_D[f, g] = \sum_{s=0}^{r-1} \ln \{1 + f(t_s) \cdot \Delta g(t_s)\}$$

und (7) die Gleichheit

$$\ln II_D[f, g] = \sum_{s=0}^{r-1} f(t_s) \cdot \Delta g(t_s) + \sum_D \quad (9)$$

mit 
$$\sum_D = \sum_{s=0}^{r-1} \Delta g(t_s) \cdot \psi[f(t_s), \Delta g(t_s)]. \quad (10)$$

Bei genügend feiner Einteilung  $D$  ist dabei angesichts der Stetigkeit von  $g(t)$ :  $|\Delta g(t_s)| < \delta$  für  $s = 0, 1, \dots, r-1$ , also zufolge (8):

$$|\psi[f(t_s), \Delta g(t_s)]| < \varepsilon.$$

Daher ist 
$$|\sum_D| \leq \varepsilon \cdot \sum_{s=0}^{r-1} |\Delta g(t_s)| \leq \varepsilon \cdot V,$$

wobei  $V$  die Totalvariation von  $g(t)$  in  $\langle a, b \rangle$  bezeichnet.

Angesichts der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  konvergiert  $\sum_D$  gegen 0, wenn  $D$  eine normale Einteilungsfolge durchläuft. Die Identität (9) zeigt daher, dass die Existenz von  $\int_a^b f(t) dg(t)$  mit derjenigen des Grenzwertes von  $\ln II_D[f, g]$  äquivalent ist und beide Zahlen gleich sind, was den Satz 3 beweist, nachdem  $II_D[f, g] = e^{\ln II_D[f, g]}$  ist.

4. Es ist zweckmässig, neben dem definierten multiplikativen Integrationsprozess den entsprechenden additiven zu betrachten, der aus ihm mittels Ersetzung der Produkte  $II_D\{f_\nu; g_\lambda\}$  durch die Summen

$$\sum_D\{f_\nu; g_\lambda\} = \sum_{s=0}^{r-1} \Phi[f_1(t_s), \dots, f_m(t_s); \Delta g_1(t_s), \dots, \Delta g_n(t_s)]$$

entsteht und dessen Grenzwert mit

$$\int_a^b \Phi\{f_\nu(t); dg_\lambda(t)\}$$

bezeichnet werde.

Die Formulierung eines Konvergenzkriteriums für beide Prozesse wird durch folgende Vereinbarungen erleichtert:

Wir schreiben abkürzend  $\{y_\kappa; z_\lambda\}$ ,  $\{y_\kappa; 0\}$ ,  $\{y_\kappa\}$  für  $(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_m; 0, \dots, 0)$ ,  $(y_1, \dots, y_m)$  und bezeichnen die Menge aller Punkte  $\{y_\kappa; z_\lambda\}$ , für die

$$|y_\kappa| < M_\kappa \quad \text{und} \quad |z_\lambda| < \delta \quad (\kappa = 1, \dots, m; \lambda = 1, \dots, n)$$

ist, mit  $U \{M_\kappa; \delta\}$ . Alsdann sagen wir, dass die Funktion  $\Phi \{y_\kappa; z_\lambda\}$  in  $U \{M_\kappa; \delta\}$  das *gleichmässige Differential*

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i \{y_\kappa\} \cdot z_i$$

hat, wenn für alle  $\{y_\kappa; z_\lambda\} \in U \{M_\kappa; \delta\}$  eine Darstellung der Form

$$\Phi \{y_\kappa; z_\lambda\} = \Phi \{y_\kappa; 0\} + \sum_{i=1}^n \Phi_i \{y_\kappa\} \cdot z_i + \psi \{y_\kappa; z_\lambda\} \quad (11)$$

mit einer Funktion  $\psi \{y_\kappa; z_\lambda\}$  möglich ist, die folgende *Eigenschaft A* besitzt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein solches  $\delta(\varepsilon)$ , dass  $0 < \delta(\varepsilon) < \delta$  ist und für alle  $\{y_\kappa; z_\lambda\}$  aus  $U \{M_\kappa; \delta(\varepsilon)\}$  die Ungleichung gilt

$$|\psi \{y_\kappa; z_\lambda\}| < \varepsilon \cdot \sum_{\lambda=1}^n |z_\lambda|. \quad (12)$$

Offenbar muss dann

$$\Phi_i \{y_\kappa\} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_\kappa; 0\} \quad (13)$$

für  $|y_\kappa| < M_\kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, m$ ) sein<sup>1)</sup>. — Existieren umgekehrt in  $U \{M_\kappa; \delta\}$  die Ableitungen  $\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_\kappa; z_\lambda\}$  und sind sie dort überdies stetig, so hat dort die Funktion  $\Phi$  das gleichmässige Differential

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_\kappa; 0\} \cdot z_i.$$

<sup>1)</sup> Dies folgt aus (11), wenn man  $z_\lambda = 0$  für  $\lambda \neq i$  setzt und, nach beiderseitiger Division mit  $z_i$ ,  $z_i$  gegen 0 gehen lässt.

Laut Mittelwertsatz ist dort nämlich

$$\Phi \{y_x; z_\lambda\} - \Phi \{y_x; 0\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_x; \vartheta z_\lambda\} \cdot z_i \quad (14)$$

mit  $0 < \vartheta = \vartheta \{y_x; z_\lambda\} < 1$ . — Setzen wir

$$\psi \{y_x; z_\lambda\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_x; \vartheta z_\lambda\} - \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_x; 0\} \right] \cdot z_i, \quad (15)$$

so hat diese Funktion wegen der in  $U \{M_x; \delta\}$  vorausgesetzten gleichmässigen Stetigkeit von  $\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}$  die Eigenschaft  $A$ , und die Formeln (14) und (15) liefern die Darstellung (11).

5. Das angekündigte Konvergenzkriterium enthält der

*Satz 4:* Die Funktion  $\Phi \{y_x; z_\lambda\}$  habe für ein genügend kleines  $\delta$  ein gleichmässiges Differential in  $U \{M_x; \delta\}$ . Ist  $|f_x(t)| < M_x$  und die Funktion  $g_\lambda(t)$  stetig und von beschränkter Schwankung für  $a \leq t \leq b$  ( $x = 1, \dots, m; \lambda = 1, \dots, n$ ), so ist die Existenz von

$$\int_a^b \Phi \{f_x(t); dg_\lambda(t)\} \quad \text{oder von} \quad \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_\lambda(t)$$

äquivalent mit derjenigen von

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_i(t),$$

je nachdem, ob:

- ( $\alpha$ )  $\Phi \{y_x; 0\} = 0$ ,      oder
- ( $\beta$ )  $\Phi \{y_x; 0\} = 1$     und  $\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{y_x; 0\}$  beschränkt für  $|y_x| \leq M_x$  ist
- ( $x = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n$ ).

Es ist dann

im Falle ( $\alpha$ ):

$$\int_a^b \Phi \{f_x(t); dg_\lambda(t)\} = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_i(t), \quad (16)$$

im Falle ( $\beta$ ):

$$\int_a^b \Phi \{f_x(t); dg_\lambda(t)\} = e^{\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_i(t)}. \quad (17)$$

Beweis: im Falle ( $\alpha$ ) folgt dann aus (11) und (13):

$$\sum_D [f_x; g_\lambda] = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t_s); 0\} \cdot \Delta g_i(t_s) + \sum'_D \quad (18)$$

mit 
$$\sum'_D = \sum_{s=0}^{r-1} \psi \{f_x(t_s); \Delta g_\lambda(t_s)\}.$$

Bei einer genügend feinen Einteilung  $D$  wird nun  $|\Delta g_\lambda(t_s)| < \delta(\varepsilon)$  für alle  $\lambda$  und  $s$ , also zufolge (12):

$$|\psi \{f_x(t_s); \Delta g_\lambda(t_s)\}| < \varepsilon \cdot \sum_{\lambda=1}^n |\Delta g_\lambda(t_s)|, \quad \text{demnach}$$

$$|\sum'_D| \leq \varepsilon \cdot \sum_{\lambda=1}^n V[g_\lambda],$$

wobei  $V[g_\lambda]$  die totale Variation der Funktion  $g_\lambda(t)$  in  $\langle a, b \rangle$  bezeichnet.

Durchläuft  $D$  eine normale Folge, so konvergiert daher  $\sum'_D$  gegen 0, und aus Formel (18) folgt die Behauptung des Satzes 4.

Im Falle ( $\beta$ ) setzen wir  $\varphi \{y_x; z_\lambda\} = \ln \Phi \{y_x; z_\lambda\}$ .

Nachdem  $\varphi \{y_x; 0\} \equiv 0$  ist, genügt es zu beweisen, dass die Funktion  $\varphi \{y_x; z_\lambda\}$  in  $U \{M_x; \delta\}$  ein gleichmässiges Differential hat, um laut Vorangegangenen schliessen zu können, dass bei einer normalen Einteilungsfolge

$$\sum_{s=0}^{r-1} \varphi \{f_x(t_s); \Delta g_\lambda(t_s)\}$$

gegen 
$$\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_i(t) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \{f_x(t); 0\} dg_i(t)$$

konvergiert, also  $\Pi_D \{f_x; g_\lambda\}$  gegen den Ausdruck (17).

Dies ist nun folgendermassen erreichbar:

Zunächst folgt aus (11):

$$\varphi \{y_x; z_\lambda\} = \ln(1 + u) \quad \text{mit}$$

$$u = \sum_{i=1}^n \Phi_i \{y_x\} \cdot z_i + \psi \{y_x; z_\lambda\} = \Phi \{y_x; z_\lambda\} - \Phi \{y_x; 0\}. \quad (19)$$

Laut Mittelwertsatz ist aber erstens

$$\ln(1 + u) = \frac{1}{1 + \vartheta u} \cdot u \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

und zweitens, wenn  $\vartheta \cdot u = v$  gesetzt wird,

$$\frac{1}{1 + v} = 1 - \frac{v}{(1 + \vartheta_1 v)^2} \quad \text{mit } 0 < \vartheta_1 < 1.$$

Daher gilt die Formel

$$\varphi \{y_x; z_\lambda\} = \left[ 1 - \frac{\vartheta u}{(1 + \Theta \cdot u)^2} \right] \cdot u$$

mit  $0 < \vartheta < 1, 0 < \Theta = \vartheta \cdot \vartheta_1 < 1$ . Setzen wir darin abkürzend

$$\frac{\vartheta u}{(1 + \Theta \cdot u)^2} = x \quad (20)$$

und für  $u$  seinen Wert aus (19). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi \{y_x; z_\lambda\} &= (1 - x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \Phi_i \{y_x\} \cdot z_i + \psi \{y_x; z_\lambda\} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \{y_x\} \cdot z_i + \chi \{y_x; z_\lambda\} \end{aligned}$$

mit  $\chi \{y_x; z_\lambda\} = \psi \{y_x; z_\lambda\} - x [\Phi \{y_x; z_\lambda\} - \Phi \{y_x; 0\}]$ .

Zu zeigen ist, dass die Funktion  $\chi \{y_x; z_\lambda\}$  die Eigenschaft  $A$  hat.

Nachdem dies für die Funktion  $\psi \{y_x; z_\lambda\}$  zutrifft und

$$|\chi \{y_x; z_\lambda\}| \leq |\psi \{y_x; z_\lambda\}| + |x| \cdot |\Phi \{y_x; z_\lambda\} - \Phi \{y_x; 0\}|$$

ist, während  $\Phi \{y_x; z_x\} - \Phi \{y_x; 0\} = u$  wegen der gleichmässigen Stetigkeit von  $\Phi \{y_x; z_x\}$  in  $U \{M_x; \delta\}$  für genügend kleine  $|z_x|$  beliebig klein wird, genügt es zu beweisen, dass dann

$$|x| < \sum_{i=1}^n a_i |z_i| \quad (21)$$

mit geeigneten Konstanten  $a_l > 0$  ( $l = 1, \dots, n$ ) gilt. — Wählt man aber  $|z_\lambda| < \delta(\varepsilon)$  ( $\lambda = 1, \dots, n$ ) so klein, dass  $|u| < \frac{1}{2}$  wird, und bezeichnet die obere Grenze von  $|\Phi_i \{y_x\}|$  für  $|y_x| \leq M_x$  ( $x = 1, \dots, m$ ) mit  $b_i$ , so folgt aus (20)

$$|x| \leq \frac{|u|}{(1 - |u|)^2} \leq 4|u|$$

und aus (19) und (12)

$$|u| \leq \sum_{i=1}^n (b_i + \varepsilon) \cdot |z_i|$$

also für  $a_i = 4(b_i + \varepsilon)$  die Ungleichung (21), w.z.b.w.

6. Die Beweise der Sätze 3 und 4 übertragen sich ungeändert auf den in der Fussnote S. 239 erwähnten mehrdimensionalen Fall; die Voraussetzungen des Satzes 4 könnten überdies noch abgeschwächt werden <sup>1)</sup>.

Für den hier bezweckten Existenzbeweis der partiellen Bestandsänderung

$$\pi^{(i)} \langle a, b \rangle = P_a^b p_i \left\{ \frac{1}{L(t)}; df^{(i)}(t) \right\}$$

reicht aber die gegebene Formulierung des Satzes 4 aus. In diesem Spezialfall ist nämlich  $m = 1$ , und die Funktion  $p_i \{y; z_i\}$  hat voraussetzungsgemäss stetige erste Ableitungen bezüglich der Variablen  $z_i$  in  $U \{M; \delta\}$ , wenn  $M$  die obere Grenze von  $\frac{1}{L(t)}$  für  $a \leq t \leq b$  bezeichnet und  $\delta$  genügend klein ist; daher hat sie dort das gleichmässige Differential

<sup>1)</sup> Wie an anderer Stelle gezeigt werden soll.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial z_i} \{y; 0\} \cdot z_i = -y \cdot z_i.$$

Nachdem dort ferner die Funktionen  $f_1(t) = \frac{1}{L(t)}$ ,  $g_\lambda(t) = f^{(\lambda)}(t)$  ( $\lambda=1, \dots, n$ ) stetig und letztere dazu monoton sind, endlich  $p_i \{y, 0\} \equiv 1$  ist und die Ableitungen  $\frac{\partial p_i}{\partial z_i}$  beschränkt sind, trifft der Fall ( $\beta$ ) des Satzes 4 zu.

Dies beweist aber die Existenz von  $\pi^{(i)} \langle a, b \rangle$ , wobei Formel (17) in die behauptete Relation (3) übergeht.

## Literaturzitate

1. *Bohren, A.*: Über den Stand der Theorie der Invalidenversicherung. Assekuranzjahrbuch, 1913.
2. *Friedli, W.*: Intensitätsfunktion und Zivilstand. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1926.
3. *Loewy, A.*: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik, 1932.
4. *Marchand, E.*: Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1937.
5. *Schlesinger, L.*: Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, 1908.
6. *Schlesinger, L.*: Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865. Jahresbericht der Deutschen Math. Ver., 1909.

