Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 44 (1944)

Artikel: Über den Vergleich von Verhältniszahlen : Beispiele für die Anwendung neuerer statistischer Verfahren im Gebiete der Versicherung

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550800

Über den Vergleich von Verhältniszahlen
Beispiele für die Anwendung neuerer statistischer Verfahren im Gebiete der Versicherung

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Einleitung

In ältern Handbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]) und der mathematischen Statistik sind die praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie im Gebiete der Versicherung meist sehr eingehend beschrieben; nicht selten sogar wird die Versicherung, vor allem die Lebensversicherung, als *das* Gebiet tatsächlicher Verwirklichung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen angesehen. So sind denn als Folge dieser Auffassung die «ältern» Verfahren der mathematischen Statistik zahlreich in das besondere versicherungsmathematische und -statistische Schrifttum eingegangen. Für die «neuern» statistischen Methoden dagegen müssen wir erkennen, wie wenig sie die Lösung versicherungsstatistischer Fragen zu beeinflussen vermochten. Wohl sind heute das landwirtschaftliche Versuchswesen, die industrielle Massenerzeugung, die Biologie und die Medizin als das hauptsächlichste Anwendungsgebiet der modernen mathematischen Statistik anzusehen und auch anerkannt [2]); es wäre aber falsch, glauben zu wollen, die Versicherungsstatistik könne sich mit den bisher angewendeten Verfahren begnügen. Vor allem zwingt die praktisch häufig geforderte Aufarbeitung *kleiner* Beobachtungsbestände, Kriterien zu finden, die zuverlässig erkennen lassen, welcher Wahr-

---

[1]) Z. B. in *E. Czuber:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Die letzte (5.) Auflage des ersten Bandes erschien wohl im Jahre 1938, stellt aber nur den unveränderten Neudruck der 4. Auflage (1924) dar; die 4. Auflage wiederum ist nur der um einige Zusätze vermehrte Neudruck der 3. Auflage vom Jahre 1912.

[2]) Man vergleiche darüber auch *W. Saxer:* Über die Beziehungen der Mathematik zur Statistik. Rektoratsrede 1941, erschienen als 25. Heft der kultur- und staatswissenschaftlichen Schriften der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich 1942. Polygraphischer Verlag AG.

scheinlichkeitsgehalt den Vergleichen von Verhältniszahlen und den daraus gezogenen Folgerungen innewohnt. Die «ältern» Methoden reichen in der Regel nicht aus, sauber zu entscheiden, ob die beobachteten Unterschiede als tatsächlich bestehend angesehen werden dürfen oder ob sie bloss das Ergebnis des Zufalles sind.

Durch Beispiele, wie sie in der Art fast unbegrenzt vermehrbar sind, wollen wir im folgenden belegen, welche Bedeutung den *Verfahren zur Prüfung, ob sich Verhältniszahlen wesentlich oder nur zufällig voneinander unterscheiden, in der Versicherungsstatistik* zukommt und wie einfach sich die Verfahren auch anwenden lassen [1]). Die darzustellenden Verfahren (Tests) sind nicht auf die versicherungsmathematische Methodik besonders zugeschnitten. Sie gelten allgemein für den Vergleich von Verhältniszahlen und sind dem mathematischen Statistiker geläufig; der Versicherungsmathematiker hingegen hat noch wenig Kenntnis von diesen besondern Methoden [2]). Es geht uns also nicht darum, die theoretischen Grundlagen der Tests durch einen Beitrag zu vermehren, sondern allein um die Anwendung bekannter Verfahren auf Fragestellungen, wie wir sie in letzter Zeit häufig angetroffen haben. Die Folgerungen zu ziehen aus den wesentlichen oder den bloss zufälligen Unterschieden der betrachteten Verhältniszahlen gehört ebenfalls nicht in den Rahmen der Untersuchung.

I. Beispiele zur Normalverteilung (Verteilung von x)

a) Zusammenhänge zwischen Tuberkulose-Heredität und Todesursache

Es gilt mehr oder weniger als eine feststehende Tatsache, dass Personen mit Tuberkulose-Heredität *allgemein* eine höhere Sterblichkeit aufweisen als Personen ohne Tuberkulose-Heredität. Ist indessen diese erhöhte Hinfälligkeit in bezug auf *alle* Todesursachen wirklich nachzuweisen, oder beschränkt sich die Übersterblichkeit doch nur auf Ursachen, welche ihren Grund unmittelbar in der Tuberkulose finden?

Lange-Nielsen (Oslo) z. B. untersucht in seiner Abhandlung «The Mortality within some Groups of Substandard Risks» [3]) u. a. die

---

[1]) Wir danken an dieser Stelle Herrn Dr. *Arthur Linder*, Privatdozent für mathematische Statistik an der Universität Bern, für Hinweise mancherlei Art.

[2]) Eine Ausnahme bildet die Arbeit von *H. L. Seal:* Tests of a mortality table graduation. Journal of the Institut of Actuaries, Vol. LXXI, 1943, S. 5 ff.

[3]) Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 14, 1931, S. 49 ff.

Sterblichkeit infolge Tuberkulose und infolge anderen Ursachen als Tuberkulose von Personen ohne Tuberkulose-Heredität und von Personen mit Tuberkulose-Heredität. Aus seinen Angaben [1]) über die Sterblichkeit als Folge *anderer* Ursachen als Tuberkulose bilden wir das folgende Rechnungsschema:

Altersgruppe ↓	Personen ohne Tbc-Heredität (standard lives)			Personen mit Tbc-Heredität (familiy history of tuberculosis)		
	Todesfälle	Personen unter einjährigem Risiko	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit	Todesfälle	Personen unter einjährigem Risiko	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit
Symbol →		N_1	p_1		N_2	p_2
14–19	400	112 485	0,00 356	7	2 700	0,00 259
20–29	1 932	548 332	352	50	15 600	321
30–39	1 715	501 573	342	52	15 141	343
40–49	1 680	310 553	541	44	9 024	488
50–59	1 443	132 180	1 092	50	3 056	1 636
60–69	907	31 670	2 864	21	587	3 578
	8 077	1 636 793		224	46 108	

Eine Betrachtung des Sterblichkeitsverlaufes obenhin könnte zum Schlusse führen, dass in den Altern bis zu 50 Jahren Personen mit Tuberkulose-Heredität eine kleinere Sterblichkeit infolge anderer Ursachen als Tuberkulose wie Personen ohne Tuberkulose-Heredität haben. Erst in den Altern von über 50 Jahren weisen Personen ohne Tuberkulose-Heredität die erwartete geringere Sterblichkeit auf als die mit Tuberkulose-Heredität belasteten Personen.

Sind aber die Unterschiede im Verlaufe der Sterblichkeit genügend gross, um diese Folgerung als gesichert hinzunehmen? Den Entscheid fällen wir auf Grund einer allgemein gültigen Überlegung [2]).

In einer Verteilung sei die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Eigenschaft zu besitzen, gleich p mit $q = 1 - p$. Wir entnehmen

---

[1]) Erfahrungen 1910—1925, Männer; Aggregatsterblichkeit, Versicherungen mit ärztlicher Untersuchung; S. 58/59.

[2]) In der allgemeinen Darstellung der Tests folgen wir dem Buche von P. *R. Rider:* An Introduction to Modern Statistical Methods. New York 1939, bei John Wiley & Sons.

Daneben ist das grundlegende Werk von *R. A. Fisher* zu nennen: Statistical Methods for Research Workers. 6. Auflage, Edinburgh 1936, bei Oliver and Boyd.

der Verteilung zwei grosse Reihen von Stichproben; in der einen Reihe habe eine Stichprobe den Umfang von N_1 Elementen, in der anderen den Umfang von N_2 Elementen. Sodann bestimmen wir die Mittel $\overline{p}_1$ und $\overline{p}_2$ der in diesen Stichproben auftretenden Werte p_1 und p_2; wir erwarten $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = p$. Die Streuungen in den beiden Stichproben in bezug auf den Wert p sind

$$\sigma^2_{p_1} = \frac{pq}{N_1} \text{ und } \sigma^2_{p_2} = \frac{pq}{N_2}\,. \tag{1}$$

Angenommen, wir hätten zu prüfen, ob Werte p_1 und p_2 aus zwei Stichproben vom Umfange von N_1 und N_2 einer *gemeinsamen* Verteilung angehören. Wäre dies der Fall, so müsste $\overline{p}_1 - \overline{p}_2 = 0$ sein. Wir müssen folglich entscheiden, ob sich die beobachteten Unterschiede $p_1 - p_2$ wesentlich und nicht nur zufällig von 0 unterscheiden. Sind die Unterschiede wesentlich von 0 verschieden, so sind die zwei Stichproben als nicht einer gemeinsamen Verteilung angehörend anzusehen. Die Streuung des Unterschiedes $\sigma^2_{p_1-p_2}$ ist, sofern keine Korrelation besteht, gleich

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2} = pq\left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right]. \tag{2}$$

Der Wert p ist unbekannt; eine gute Näherung dafür ist das gewogene arithmetische Mittel

$$p' = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2}{N_1 + N_2}\,. \tag{3}$$

Sofern N_1 und N_2 gross sind, dürfen wir annehmen, der Unterschied $p_1 - p_2$ sei normal verteilt; $\sigma_{p_1-p_2}$ werde in dieser Verteilung als Einheit der Veränderlichen angesehen. Die Wahrscheinlichkeit $P(x, x + dx)$, dass der Unterschied

$$x = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{p_1-p_2}} \tag{4}$$

in das Intervall x bis $x + dx$ fällt, wird folglich

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = \varphi(x)\, dx.$$

Bedeutet $P(>x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied x ausserhalb die Grenzen 0 bis x fällt, so ist

$$P(>x) = \int_x^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^x \varphi(x)\,dx .$$

Wahrscheinlichkeiten $P(>x)$ numerisch kleiner als 0,01 wollen wir als Ausdruck dafür ansehen, dass die beiden Stichproben nicht der gleichen Verteilung angehören, die Werte p_1 und p_2 sich also wesentlich und nicht nur zufällig voneinander unterscheiden. Liegen die Werte $P(>x)$ numerisch im Bereiche 0,01 bis 0,025, so soll die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein, dass die Stichproben derselben Verteilung entnommen sind, während für die Werte $P(>x)$ numerisch grösser als 0,025 von einem wesentlichen Unterschied nicht die Rede sein soll. Der Wahrscheinlichkeit 0,01 entspricht $x = 2{,}33$, der Wahrscheinlichkeit 0,025 entspricht $x = 1{,}96$.

Das beschriebene Verfahren wenden wir an, um zu entscheiden, ob im Sterblichkeitsverlauf tatsächlich Unterschiede nachzuweisen sind. Die «Stichprobe N_1» entspricht dem Bestand von Personen ohne Tuberkulose-Heredität, die «Stichprobe N_2» dem Bestand von Personen mit Tuberkulose-Heredität. Die Wahrscheinlichkeit p in der gemeinsamen Verteilung, d. h. der dafür verwendete Näherungswert p', ist identisch mit der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit der Altersgruppe im Bestande, der durch Zusammenlegen der Personen ohne Tuberkulose-Heredität und der Personen mit Tuberkulose-Heredität entsteht.

Die Prüfung des Unterschiedes führt über die folgenden Werte:

Altersgruppe	p' nach Formel (3)	$[p'q']^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\sigma_{p_1-p_2}$ nach Formel (2) mit (3)	$\|p_1-p_2\|$	$\|x\|$ nach Formel (4)
14–19	0,00 353	0,0593	0,0195	0,001 156	0,00 097	0,84
20–29	351	592	81	480	31	0,65
30–39	342	584	82	479	1	0,02
40–49	539	732	107	783	53	0,68
50–59	104	1045	183	1 912	544	*2,85*
60–69	877	1672	417	6 972	714	1,02

Ergebnis: Die kleinere Sterblichkeit in den Altern bis zu 50 Jahren der Personen mit Tuberkulose-Heredität ist nicht gesichert; als wesentlich erscheint einzig der Unterschied in der Altersgruppe von 50—59 Jahren mit der erwarteten kleineren Sterblichkeit der Personen ohne Tuberkulose-Heredität.

b) Unterschiede im Verlauf der Rentnersterblichkeit, wenn die Person oder die Police die Zähleinheit ist

Die schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften führten auf Veranlassung des Eidgenössischen Versicherungsamtes in ihren schweizerischen Beständen an Rentenversicherungen [1]) über die Jahre 1937—1942 [2]) eine Messung der Sterblichkeit durch; dabei war die *Police* als Zähleinheit vorgeschrieben.

Gegen die Police als Zähleinheit ist eingewendet worden, sie gebe nicht das getreue Bild, weil die Nachversicherungen gerade in der Einzelrentenversicherung zahlreich vorkämen und sich überwiegend nur gesund fühlende Personen zum Abschluss einer weitern Versicherung entschieden. Mehrere Gesellschaften legten deshalb der statistischen Erhebung beide Zähleinheiten zugrunde, um abzuklären, ob tatsächlich im Verlaufe der Sterblichkeit Unterschiede bestehen.

Um bei unserer Prüfung genau zu sein, müsste man die Beobachtungsbestände teilen in einen Bestand von lauter Personen ohne Nachversicherungen und in einen Bestand von lauter Personen mit Nachversicherungen. Man kann aber so verfahren — die vorhandene Gliederung zwingt übrigens zu diesem Vorgehen —, dass man zunächst einen Bestand bildet, der alle «Nachversicherungen» enthält und ihn vergleicht mit dem Bestand aller «Erstversicherungen». Der letztgenannte Bestand ist aber gleich dem Gesamtbestand mit der Person als Zähleinheit; der erstgenannte Bestand dagegen stimmt überein mit dem Unterschied zwischen dem Gesamtbestand mit der Police als Zähleinheit und dem Gesamtbestand mit der Person als Zähleinheit.

---

[1]) Aufgeschobene und laufende Versicherungen auf ein und mehrere Leben mit und ohne Prämienrückgewähr nach den *Einzelrententarifen.* Versicherungen auf mehrere Leben zählen so oft, als Personen versichert sind.

[2]) Die Beobachtung setzt ein mit dem im Jahre 1937 beginnenden Versicherungsjahre und hört auf mit dem im Jahre 1942 endigenden Versicherungsjahre; sie umfasst also insgesamt fünf Beobachtungsjahre.

Die Unterschiede in der Sterblichkeit scheinen nicht unbeträchtlich zu sein. Bei der *Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft* z. B. ist für Frauen der folgende Verlauf [1]) zu erkennen:

Altersgruppe	Zähleinheit «Person»			Zähleinheit «Police» *)		
	Todesfälle	Personen unter einjährigem Risiko	einjährige unabhängige Sterbewahrscheinlichkeit	Todesfälle	Policen unter einjährigem Risiko	einjährige unabhängige Sterbewahrscheinlichkeit
Symbol		N_1	p_1		N_2	p_2
45–49	2	321	0,006 231	0	41	0,000 000
50–54	4	583,5	6 855	0	163	0
55–59	10	814,5	12 277	1	263,5	3 795
60–64	19	1 093	17 383	3	405	7 407
65–69	32	1 088	29 412	16	470	34 043
70–74	41	927	44 229	16	361	44 321
75–79	46	773	59 508	23	508	45 276
	154	5 600,0		59	2 211,5	

*) Im Sinne der getroffenen Festsetzungen.

Die Unterschiede in den einjährigen unabhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten verlaufen nicht über alle Altersgruppen in gleicher Richtung. Für die untern Altersklassen möchte man folgern, die Personensterblichkeit liege zum Teil wesentlich über der Policensterblichkeit, während sich später die Verhältnisse in das Gegenteil umkehren. Sind jedoch die Unterschiede in den Sterbewahrscheinlichkeiten gross genug, um mit Rücksicht auf den beschränkten Umfang des Beobachtungsmaterials diese Folgerung als schlüssig anzuerkennen?

Der zu Beispiel *a* entwickelte Test lässt grundsätzlich auch im vorliegenden Falle entscheiden, ob im Verlaufe der Sterblichkeit wesentliche Unterschiede bestehen. Die Art, wie wir die Vergleichsbestände bildeten, zwingt indessen zur Berücksichtigung der zwischen den beiden Beständen auftretenden Korrelation. Sobald eine Person mit mehr als einer Versicherung stirbt, wird die Sterbewahrscheinlichkeit in beiden Beständen betroffen. Eine Zunahme der Sterblichkeit

[1]) Alle Versicherungsjahre zusammen genommen. Bei einer genauern Prüfung hätte man den Einfluss der ungleichen Bestandeszusammensetzung infolge nicht gleicher abgelaufener Versicherungsdauer noch auszuschalten.

in dem einen Vergleichsbestand kann eine Zunahme auch im andern Bestand bewirken.

Formel (2) nimmt bei Vorhandensein einer Verbundenheit zwischen den beiden Vergleichsbeständen die allgemeinere Gestalt an

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2} - 2r\,\sigma_{p_1}\sigma_{p_2}, \tag{5}$$

wo r den Korrelationskoeffizienten bedeutet. Gleich wie vorher ist

$$\sigma^2_{p_1} = \frac{pq}{N_1} \quad \text{und} \quad \sigma^2_{p_2} = \frac{pq}{N_2}. \tag{6}$$

Zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten r ist die übliche Formel zu verwenden, nämlich

$$r = \frac{S(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\left[S(x_1 - \mu_1)^2 \cdot S(x_2 - \mu_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}}; \tag{7}$$

darin bedeuten x_1 und x_2 den Wert der Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 in den einzelnen Beobachtungsjahren. Ferner ist $\mu_1 = \frac{Sx_1}{m}$ und $\mu_2 = \frac{Sx_2}{m}$ mit m = Zahl der betrachteten Beobachtungsjahre.

Das vorliegende Beobachtungsmaterial reicht nicht aus, r für jede Altersklasse einzeln zu bestimmen. Dagegen kann r unter Zusammenfassung aller in die Untersuchung einbezogenen Alter von 45—79 Jahren ermittelt und dieser Wert dann zur Berechnung von $\sigma^2_{p_1-p_2}$ verwendet werden.

Die Bestimmung der Unterschiede geschieht über die folgenden Stufen:

Jahr	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit		$[x_1-\mu_1]^2$	$[x_2-\mu_2]^2$	$[x_1-\mu_1] \times [x_2-\mu_2]$
	x_1	x_2			
	‰	‰			
1937/38	24,44	14,65	8,58	135,26	34,08
1938/39	21,20	28,20	38,07	3,69	— 11,85
1939/40	42,15	42,83	218,45	273,90	244,61
1940/41	23,87	24,77	12,25	2,28	5,28
1941/42	25,18	20,93	4,80	28,62	11,72
			282,15	443,75	283,84

$\mu_1 = 27{,}37$, $\mu_2 = 26{,}28$.

Nach Formel (7) ist $r = 0{,}8$.

Altersgruppe	p' nach Formel (3)	$[p'q']^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{1}{N_1}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}$	σ_{p_1}	σ_{p_2}
45–49	0,005 525	0,0741	0,0558	0,1562	0,00 413	0,01 157
50–54	5 358	730	414	783	302	572
55–59	10 204	1005	350	616	352	619
60–64	14 686	1203	303	497	365	598
65–69	30 809	1728	303	461	524	797
70–74	44 255	2057	329	526	677	1 082
75–79	53 864	2258	360	444	813	1 003

Altersgruppe	$\sigma^2_{p_1}$	$\sigma^2_{p_2}$	$2r\,\sigma_{p_1}\sigma_{p_2}$	$\sigma^2_{p_1-p_2}$	$\sigma_{p_1-p_2}$	$\lvert p_1-p_2\rvert$	$\lvert x\rvert$ nach Formel (4)
45–49	0,000 017	0,000 134	0,000 038	0,000 113	0,01 063	0,00 623	0,59
50–54	9	33	14	28	529	686	1,30
55–59	12	38	17	33	574	848	1,48
60–64	13	36	17	32	566	998	1,76
65–69	27	64	33	58	762	463	0,61
70–74	46	117	59	104	1 020	9	0,01
75–79	66	101	65	102	1 010	1 423	1,41

Ergebnis: Die Werte von x sind alle kleiner als 1,96. Folglich ist der Umfang des Beobachtungsmaterials in allen Altersstufen zu gering, als dass die festgestellten Unterschiede in der Sterblichkeit wesentlich und nicht bloss zufällig wären.

In den Altersgruppen 55—64 hat x Werte, die nicht allzu weit von 1,96 entfernt liegen. Die $x = 1{,}48$ und $x = 1{,}76$ zugehörigen Werte von $P(>x)$ sind 0,07 und 0,04, also verhältnismässig klein. Es wäre daher zu begrüssen, wenn an einem grösseren Beobachtungsmaterial die Untersuchung wiederholt werden könnte.

c) Abhängigkeit der vorzeitigen Vertragsauflösung vom Alter und von der vertraglichen Versicherungsdauer

In der Untersuchung «Der vorzeitige Abgang in der Lebensversicherung» [1] konnten wir eine zum Teil bedeutende Abhängigkeit der Häufigkeit der vorzeitigen Vertragsauflösung vom Alter und von

[1] Assekuranz-Jahrbuch, 62. Band, Basel 1943, S. 3—20.

der vertraglichen Versicherungsdauer zeigen. Zur Bearbeitung stand indessen nur ein sehr begrenztes Beobachtungsmaterial; es ist deshalb notwendig, nachträglich abzuklären, ob die festgestellten Unterschiede in den einjährigen Stornowahrscheinlichkeiten wesentlich sind.

Im ersten Versicherungsjahr fanden wir für die Zahl der durch Aufgabe erloschenen Versicherungen und für den unter einjähriger Beobachtung gestandenen Bestand bei Beschränkung auf Summen unter Fr. 30 000:

Altersgruppe	Vertragliche Versicherungsdauer	Durch Aufgabe erloschene Versicherungen	Versicherungen unter einjährigem Risiko	Einjährige unabhängige Stornierungswahrscheinlichkeit
0–19	10–19	4	91	0,0440
20–39		22	247,5	889
40 und mehr		22	433	508
0–19	20–29	46	602	764
20–39		443	4 613	960
40 und mehr		48	774,5	620
0–19	30 und mehr	15	307,5	488
20–29		83	718,5	1155

Die Unterschiede berechnen wir für die folgenden Kombinationen, wobei wir die kaum ins Gewicht fallende Korrelation zwischen den Vergleichsbeständen vernachlässigen [1]):

Vertragliche Versicherungsdauer	Vergleich der Altersgruppen	p_1	p_2	N_1	N_2	x
10–19	0–19 mit 20–39	0,0440	0,0889	91,0	247,5	1,38
	20–39 mit 40 und mehr	889	508	247,5	433,0	1,94
20–29	0–19 mit 20–39	764	960	602,0	4 613,0	1,54
	20–39 mit 40 und mehr	960	620	4 613,0	774,5	*3,04*
Altersgruppe	**Vergleich der Versicherungsdauern**	p_1	p_2	N_1	N_2	x
20–39	10–19 mit 20–29	0,0889	0,0960	247,5	4 613,0	0,37
	20–29 mit 30 und mehr	960	1155	4 613,0	718,5	1,63

[1]) Die gleiche Person kann neben kurzfristigen auch langfristige Verträge abgeschlossen haben und sie zugleich auflösen.

Ergebnis: Von den betrachteten Unterschieden in der einjährigen Stornierungswahrscheinlichkeit ist nur einer wesentlich; die andern Werte von x liegen mit Ausnahme eines einzigen allerdings nicht sehr weit von der innern Sicherheitsschwelle entfernt [1]).

II. Beispiele für die „Student"-Verteilung (Verteilung von *t*)

a) Belastung durch Taggeldentschädigung in den verschiedenen Gefahrenklassen der Einzelunfallversicherung

Zur Festsetzung der Prämien in der *Einzelunfallversicherung* werden die vorkommenden Berufe nach ihrer Unfallgefährdung in eine Anzahl Klassen eingeteilt und in den verschiedenen so gebildeten Gefahrenklassen ausreichende Prämien in dem Sinne erhoben, dass jede Klasse in sich den vollständigen Ausgleich bringen muss.

Die Überprüfung der Rechnungsvoraussetzungen für die Ermittlung der Prämien der *Taggeldversicherung* auf Grund der Erfahrungen der Jahre 1933—1940 führte bei der *Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft* in den mit A, B, C und D bezeichneten aufeinander folgenden Gefahrenklassen zum nachstehenden Ergebnis:

Jahr	Vielfaches *) der Nettoprämie für das Taggeld «1» in den Gefahrenklassen			
	A	B	C	D
1933	1,000 [1])	1,913	2,047	2,976
1934	1,181	1,614	1,732	2,386
1935	1,079	1,535	1,866	2,606
1936	0,874	1,646	1,630	2,425
1937	0,913	1,717	1,638	2,630
1938	1,740	1,402	1,583	2,591
1939	0,858	1,717	1,709	2,126
1940	1,268	1,787	1,614	2,370

*) Nettoprämie des Jahres 1933 gleich 1,000 gesetzt. Die Vervielfachung der Prämie mit einer festen Grösse bleibt für den angewendeten Test ohne Bedeutung.

[1]) Untersuchungen an einem wesentlich umfangreichern Versicherungsbestand — an rund 45 000 im Jahre 1942 zugegangenen Volksversicherungen — zeigen, dass in den Altersstufen von 20—39 Jahren tatsächlich ein erhöhter vorzeitiger Abgang stattfindet und dass sich mit zunehmender vertraglicher Versicherungsdauer der Storno im allgemeinen erhöht. Die für Grosslebensversicherungen gemachten Feststellungen — obschon aus einem beschränkten Material hervorgegangen — erhalten damit im wesentlichen ihre Bestätigung.

Aus dem Verlaufe der Vielfachen schliessen wir vorerst auf einen bedeutenden Schwankungsbereich der Belastung schon innerhalb der einzelnen Gefahrenklassen [1]). Ist es indessen möglich, für die Schwankungen eine obere und eine untere Grenze anzugeben, derart, dass ein Schwingen über die Schranken hinaus als eine wesentliche und nicht bloss zufällige Abweichung vom bisherigen Verlauf angesehen werden darf [2])?

In einer Normalverteilung sei das Mittel μ bekannt, die Varianz σ^2 dagegen nicht. Wir ersetzen σ^2 durch die Streuung der Stichprobe mit

$$s^2 = \frac{S(X - \bar{X})^2}{N - 1}\,; \tag{8}$$

dabei bedeutet in der Stichprobe X den Wert der Veränderlichen, $\bar{X}$ das Mittel $\frac{S(X)}{N}$ und N die Zahl der Werte X.

Die Streuung des Mittels $\bar{X}$ der Stichproben in der Zahl N' ist sodann bestimmt durch $\frac{\sigma^2}{N'}$ oder mit (8) durch

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{s^2}{N'} = \frac{S(X - \bar{X})^2}{N'(N - 1)}\,. \tag{9}$$

Der Unterschied eines Mittels $\bar{X}$ vom gegebenen Mittel μ wird, ausgedrückt mit $s_{\bar{X}}$ als Einheit, gleich

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}\,. \tag{10}$$

Die Verteilung von $\frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$ ist, sofern s^2 aus Stichproben in der beschränkten Zahl N bestimmt wird, nicht normal, sondern geht in die «Student»-Verteilung (Verteilung von t) über.

---

[1]) Es ist aber unzulässig, allein aus diesen Schwankungen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Prämienbestimmung verneinen zu wollen.

[2]) Man vergleiche darüber *A. Linder:* Statistische Methoden in der Industrie. Industrielle Organisation I, 1943.

Für die Wahrscheinlichkeit $P(t, t + dt)$, dass t in das Intervall t bis $t + dt$ fällt, haben wir zu setzen

$$P(t, t + dt) = \frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]!}{[n\pi]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{n-2}{2}\right]!}\left[1 + \frac{t^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}} dt, \qquad (11)$$

mit $n = N - 1$ und $k! = \Gamma(k + 1)$.

Es bedeute $P(>t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied t ausserhalb die Grenzen 0 bis t fällt. Alsdann wollen wir wie bei der Normalverteilung Werte $P(>t)$ numerisch kleiner 0,01 als Ausdruck dafür ansehen, dass die Stichprobe nicht mit der Verteilung identisch ist. Sind die Werte $P(>t)$ numerisch im Bereiche 0,01 bis 0,025 gelegen, so soll die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein, dass die Stichprobe zur Verteilung gehört, während schliesslich für Werte $P(>t)$ numerisch grösser 0,025 die Stichprobe der Verteilung entnommen sein soll.

Den sechs als «Normaljahre» vorausgesetzten Beobachtungsjahren 1933—1938 entspricht $n = N - 1 = 5$. Für $P(> 0{,}025)$ ist mit $n = 5$ für $t = 2{,}571$ anzunehmen; für $P(> 0{,}01)$ wird t numerisch 3,365 [1]). Der Wert von $\bar{X}$, welcher der innern Sicherheitsschwelle entspricht, ist demnach bestimmt durch $\frac{|\bar{X} - \mu|}{s_{\bar{X}}} = 2{,}571$; dabei ist $s_{\bar{X}} = s$, weil wir die Schwankungen eines einzigen Jahres verfolgen, also $N' = 1$ annehmen. Daraus folgt $\bar{X} = \mu \pm 2{,}571\, s$.

In gleicher Weise erhalten wir für die äussere Schwelle $\bar{X} = \mu \pm 3{,}365\, s$.

Liegt das beobachtete Mittel $\bar{X}$ innerhalb $\mu \pm 2{,}571\, s$, so kann nicht geschlossen werden, es unterscheide sich wesentlich von μ; ein wesentlicher Unterschied liegt erst vor, wenn das Mittel $\bar{X}$ ausserhalb $\mu \pm 3{,}365\, s$ sich befindet. Werte im Streifen zwischen $\mu \pm 2{,}571\, s$ und $\mu \pm 3{,}365\, s$ bedeuten noch nicht einen wesentlichen Unterschied, aber die Verschiedenheit ist nicht auszuschliessen.

---

[1]) Tabellen für t in Abhängigkeit von n und P sind in den Werken von *Fisher* und *Rider* enthalten.

Für die angeführten vier Gefahrenklassen bestimmt sich der Schwankungsbereich folgendermassen, wobei die vollständige Berechnung nur für die Klassen A und B wiedergegeben wird:

Jahr	Gefahrenklasse A			Gefahrenklasse B		
	X	$\lvert X-\mu \rvert$	$(X-\mu)^2$	X	$\lvert X-\mu \rvert$	$(X-\mu)^2$
1933	1,000	0,131	0,0172	1,913	0,275	0,0756
1934	1,181	50	25	1,614	24	6
1935	1,079	52	27	1,535	103	106
1936	0,874	257	660	1,646	8	1
1937	0,913	218	475	1,717	79	62
1938	1,740	609	3709	1,402	236	557
	6,787		0,5068	9,827		0,1488
	$\mu = 1{,}131$			$\mu = 1{,}638$		

$$\frac{S(X-\mu)^2}{N-1} = s^2 = \frac{0{,}5068}{5} = 0{,}1014 \text{ und } s^2 = \frac{0{,}1488}{5} = 0{,}0298.$$

$s = 0{,}318$ und $s = 0{,}173$.

Gefahren-klasse	μ	s	Äussere Schwellen		Innere Schwellen	
			obere $\mu+3{,}365\,s$	untere $\mu-3{,}365\,s$	obere $\mu+2{,}571\,s$	untere $\mu-2{,}571\,s$
A	1,131	0,318	2,201	0,061	1,949	0,313
B	1,638	173	2,220	1,056	2,083	1,193
C	1,749	177	2,345	1,153	2,204	1,294
D	2,602	209	3,305	1,899	3,139	2,065

Ergebnis: Die Taggeldbelastungen der Jahre 1939 und 1940 liegen alle innerhalb der innern Schwelle; die beiden Jahre dürfen deshalb in bezug auf die Taggeldbelastung als «normal» angesehen werden.

Die Mittel μ nehmen von Klasse zu Klasse zu, wobei aber der Sprung von Klasse B zu Klasse C nur klein ist. Dürfen wir gleichwohl schliessen, alle Klassen unterscheiden sich wesentlich voneinander?

Wir nehmen an, die Mittel $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ gehören derselben Normalverteilung mit der (unbekannten) Streuung σ^2 an. Die Mittel $\bar{X}_1$ seien aus Stichproben in der Zahl N_1, die Mittel $\bar{X}_2$ aus Stichproben in der Zahl N_2 gefunden. Die entsprechenden Streuungen sind

$$\sigma^2_{\bar{X}_1} = \frac{\sigma^2}{N_1} \quad \text{und} \quad \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2}{N_2} .$$

Die Differenz $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ist, da $\bar{X}_1$ und $\bar{X}_2$ nach Voraussetzung einer Normalverteilung entstammen, normal verteilt; sofern keine Korrelation besteht, gilt

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \sigma^2 \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right] . \tag{12}$$

Da σ^2 nicht bekannt ist, setzen wir dafür den Wert

$$s'^2 = \frac{S(X_1 - \bar{X}_1)^2 + S(X_2 - \bar{X}_2)^2}{N_1 + N_2 - 2} , \tag{13}$$

wobei aber die Verteilung von $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ bei kleinen N_1 und N_2 von der Normalverteilung wiederum übergeht in die «Student»-Verteilung (Verteilung von t).

Die Streuung des Unterschiedes $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ wird damit

$$s'^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = s'^2 \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right] , \tag{14}$$

und für t folgt

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s' \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]^{\frac{1}{2}}} ; \tag{15}$$

für unsern Fall mit $N_1 = N_2 = N$ gilt

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s' \left[\frac{2}{N} \right]^{\frac{1}{2}}} . \tag{16}$$

Vergleich von Klasse	Mittel $\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	Berechnung von s': $S(X_1-\overline{X}_1)^2$	$S(X_2-\overline{X}_2)^2$	s'^2 n. Formel (13)	s'
A mit B	1,131	1,638	0,5068	0,1488	0,06 556	0,2560
B mit C	1,638	1,749	1488	1569	3 057	1748
C mit D	1,749	2,602	1569	2188	3 757	1938

$s'\left[\frac{2}{N}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\lvert\overline{X}_1-\overline{X}_2\rvert$	$\lvert t\rvert$ nach Formel (16)	Unterschied
0,1478	0,507	3,43	$P(>t)$ kleiner 0,005
0,1009	0,111	1,10	$P(>t)$ zwischen 0,15 und 0,10
0,1119	0,853	7,62	$P(>t)$ kleiner 0,005

Ergebnis: Die Belastungen durch Taggeld in den beiden Klassen B und C unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander.

b) Abhängigkeit der Krankenhäufigkeit vom Einkommen

Die Erfahrungen der *Öffentlichen Krankenkasse des Kantons Basel-Stadt* [1]) weisen auf eine bedeutende Abhängigkeit der Krankenhäufigkeit vom Einkommen hin. In die beiden extremen Klassen — Klasse A mit voller Prämie zulasten des Kantons, Klasse D mit voller Prämie zulasten des Versicherten — ist der folgende Verlauf der durchschnittlichen Patientenzahl [2]) zu erkennen (siehe Tabelle Seite 87).

Dürfen wir folgern, es bestehe für die beiden Einkommensklassen insgesamt ein wesentlicher Unterschied in dem Sinne, dass Klasse D als *Ganzes* die geringere durchschnittliche Patientenzahl aufweist als Klasse A?

Für die Berechnung der Unterschiede gehen wir genau gleich vor wie im vorhergehenden Fall. Es wird:

$\overline{X}_1 = 69{,}6$ und $\overline{X}_2 = 58{,}6$

$$s'^2 = \frac{S(X_1-\overline{X}_1)^2 + S(X_2-\overline{X}_2)^2}{N_1+N_2-2} = \frac{575{,}2}{16} = 35{,}95$$

---

[1]) Die Morbiditätsstatistik der Öffentlichen Krankenkasse des Kantons Basel-Stadt für das Jahr 1936, Basel 1942.

[2]) S. 77.

Jahrgangsgruppe	Patienten pro 100 Mitglieder		$\mid X_1-\bar{X}_1 \mid$	$\mid X_2-\bar{X}_2 \mid$	$(X_1-\bar{X}_1)^2$	$(X_2-\bar{X}_2)^2$
	Klasse A X_1	Klasse D X_2				
1921/17	77	56	7,4	2,6	54,8	6,8
1916/12	80	58	10,4	0,6	108,2	0,4
1911/07	79	63	9,4	4,4	88,4	19,4
1906/02	64	59	5,6	0,4	31,4	0,2
1901/97	71	56	1,4	2,6	2,0	6,8
1896/92	70	55	0,4	3,6	0,2	13,0
1891/87	67	58	2,6	0,6	6,8	0,4
1886/82	59	61	10,6	2,4	112,4	5,8
1881/77	59	61	10,6	2,4	112,4	5,8
	626	527			516,6	58,6

$$s' = 5{,}996$$

$$\left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}471$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s'\left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{11{,}0}{2{,}824} = 3{,}90$$

Bei $n = N_1 + N_2 - 2 = 16$ entspricht t numerisch $= 3{,}90$ einer Wahrscheinlichkeit $P(>t)$ von weniger als 0,005.

Ergebnis: Die Krankenhäufigkeiten unterscheiden sich wesentlich in den beiden Einkommensklassen.

c) Abhängigkeit der Krankenhäufigkeit vom Alter

Die eben erwähnten Erfahrungen der *Öffentlichen Krankenkasse des Kantons Basel-Stadt* lassen auf eine Abnahme der durchschnittlichen Patientenzahl mit zunehmendem Alter schliessen. Für die Alter bis ungefähr zu 60 Jahren ist die Abnahme in der Klasse A nahezu linear; für die Klasse D trifft der lineare Abfall etwas weniger gut zu.

Wir wollen entscheiden, ob der lineare Abfall in beiden Einkommensklassen gesichert ist und ob er sich in den beiden Klassen gleich entwickelt.

Jahrgangsgruppe	Mittleres Alter	Patienten pro 100 Mitglieder		x	y^2		xy	
		Klasse A y_1	Klasse D y_2		A	D	A	D
1936/32	2	94	91	—6	8 836	8 281	—564	—546
1931/27	7	93	74	—5	8 649	5 476	—465	—370
1926/22	12	85	68	—4	7 225	4 624	—340	—272
1921/17	17	77	56	—3	5 929	3 136	—231	—168
1916/12	22	80	58	—2	6 400	3 364	—160	—116
1911/07	27	79	63	—1	6 241	3 969	— 79	— 63
1906/02	32	64	59	0	4 096	3 481	0	0
1901/97	37	71	56	1	5 041	3 136	71	56
1896/92	42	70	55	2	4 900	3 025	140	110
1891/87	47	67	58	3	4 489	3 364	201	174
1886/82	52	59	61	4	3 481	3 721	236	244
1881/77	57	59	61	5	3 481	3 721	295	305
1876/72	62	58	61	6	3 364	3 721	348	366
		956	821		72 132	53 019	—548	—280

Der Regressionskoeffizient (die Steigung) der Geraden Y = Zahl der Patienten pro 100 Mitglieder $= \bar{y} + bx$ ist gegeben durch $b = \dfrac{Sxy}{Sx^2}$; dabei ist $\bar{y} = \dfrac{Sy}{N}$ und $Sx^2 = \dfrac{N(N^2-1)}{12}$. Die Veränderliche x zählt vom mittleren Alter von 32 Jahren an. Wird angenommen, y sei für einen festen Wert von x normal verteilt, mit der Streuung σ^2, so ist b ebenfalls normal verteilt mit der Streuung $\sigma_b^2 = \dfrac{\sigma^2}{Sx^2}$. Aus der Stichprobe schliessen wir auf die unbekannte Streuung σ^2 mit

$$s^2 = \frac{S(y-Y)^2}{N-2} = \frac{Sy^2 - N\bar{y}^2 - b^2 Sx^2}{N-2} \text{ [1]}; \tag{17}$$

damit ist

$$s_b = \frac{s^2}{Sx^2}. \tag{18}$$

[1]) Man vergleiche darüber wie auch für eine weitere Anwendung der Methode die Dissertation von *B. Baumann:* Die Todesursachen der Volksversicherten, Basel 1944 (noch nicht im Druck veröffentlicht).

Der Unterschied von b gegenüber der Waagrechten ist, ausgedrückt in s_b als der Einheit

$$t = \frac{b}{s_b}. \tag{19}$$

Haben wir den Unterschied von zwei Regressionskoeffizienten zu untersuchen, also den Unterschied von b_1 zu b_2 in den Geraden $Y_1 = \overline{y}_1 + b_1 x_1$ und $Y_2 = \overline{y}_2 + b_2 x_2$ zu bewerten, so schliessen wir zuerst aus den beiden Stichproben auf die Streuung

$$s'^2 = \frac{S(y_1 - Y_1)^2 + S(y_2 - Y_2)^2}{N_1 + N_2 - 4} \text{ mit} \tag{20}$$

$$S(y_1 - Y_1)^2 = Sy_1^2 - N_1 \overline{y}_1^2 - b_1^2 \, Sx_1^2 \text{ und}$$
$$S(y_2 - Y_2)^2 = Sy_2^2 - N_2 \overline{y}_2^2 - b_2 Sx_2^2 .$$

Die Streuung des Unterschiedes der beiden Regressionskoeffizienten wird

$$s^2_{b_1 - b_2} = \frac{s'^2}{Sx_1^2 + Sx_2^2} \tag{21}$$

und daraus

$$t = \frac{b_1 - b_2}{s_{b_1 - b_2}} .$$

In unserem Beispiel folgt der Reihe nach

a) in den beiden Klassen einzeln

Symbol	Klasse A	Klasse D
N	13	13
$\overline{y} = \frac{Sy}{N}$	73,538	63,154
Sxy	(—) 548	(—) 280
$Sx^2 = \frac{N(N^2-1)}{12}$	182	182
Sy^2	72 132	53 019
$b = \frac{Sxy}{Sx^2}$	(—) 3,011	(—)1,538

Symbol	Klasse A	Klasse D
$s^2 = \dfrac{Sy^2 - N\bar{y}^2 - b^2 Sx^2}{N-2}$	16,37	67,18
$s_b^2 = \dfrac{s^2}{Sx^2}$	0,0899	0,3691
s_b	0,300	0,608
$t = \dfrac{b}{s_b}$	(—) 10,04	(—) 2,53

Bei $n = N-2 = 11$ entspricht t numerisch $= 10{,}04$ einer Wahrscheinlichkeit $P(>t)$ von weniger als 0,005 und $t = 2{,}53$ einer Wahrscheinlichkeit zwischen 0,01 und 0,025.

b) Beim Vergleich der beiden Klassen:

$$s'^2 = \frac{S(y_1 - Y_1)^2 + S(y_2 - Y_2)^2}{N_1 + N_2 - 4} = \frac{180{,}1 + 739{,}0}{22} = 41{,}78$$

$$s^2_{b_1-b_2} = \frac{s'^2}{2Sx^2} = \frac{41{,}78}{364{,}0} = 0{,}1148$$

$$s_{b_1-b_2} = 0{,}339$$

$$t = \frac{b_1 - b_2}{s_{b_1-b_2}} = \frac{-3{,}011 + 1{,}538}{0{,}339} = (-)\, 4{,}35\,.$$

Bei $n = N_1 + N_2 - 4 = 22$ entspricht t numerisch $= 4{,}35$ einer Wahrscheinlichkeit $P(>t)$ von weniger als 0,005.

Ergebnis: In der Klasse A ist der Abfall der durchschnittlichen Patientenzahl wesentlich, nicht dagegen in der Klasse D. Wesentlich wieder ist der Unterschied der beiden Regressionskoeffizienten.

d) Entwicklung der Sterblichkeit infolge Lungenentzündung

Das Eidgenössische Statistische Amt führt in seiner Veröffentlichung «Bevölkerungsentwicklung in der Schweiz 1941» [1]) über die Entwicklung der Sterblichkeit infolge Lungenentzündung aus:

---

[1]) Statistische Quellenwerke der Schweiz, Heft 123, Bern 1943, S. 35.

«Ein Erfolg besonderer Art hat sich im Bereich der Infektionskrankheiten eingestellt. Soweit sich die Angaben zurückverfolgen lassen, ist die Sterblichkeit infolge Lungenentzündung, selbst gegenüber den günstigsten Ergebnissen, in allen Altersschichten stark gesunken. Es dürfte sich hier nicht um eine einmalige Erscheinung handeln, denn dieser Rückgang trat parallel auf mit dem Bekanntwerden der verschiedenen Sulfanilamid-Präparate, von denen ein schweizerisches bei uns in der Therapie rasch Eingang gefunden hat.»

Die Sterblichkeit infolge Lungenentzündung verlief seit 1934 wie folgt [1]):

Jahr	Alter 0—59 Jahre			Alter 60—69 Jahre			Alter 70 und mehr Jahre		
	Todesfälle	Lebende unter einjährigem Risiko *)	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit ‰	Todesfälle	Lebende unter einjährigem Risiko *)	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit ‰	Todesfälle	Lebende unter einjährigem Risiko *)	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit ‰
1934	1 082	3 669 050	2,95	452	296 515	15,24	1 078	170 487	63,23
1935	1 106	3 675 645	3,01	435	303 212	14,35	1 103	175 503	62,85
1936	1 179	3 679 982	3,20	455	310 678	14,65	1 164	180 429	64,51
1937	1 149	3 682 796	3,12	497	318 762	15,59	1 201	185 792	64,64
1938	1 185	3 685 494	3,22	564	327 078	17,24	1 447	189 999	76,16
1939	1 028	3 689 402	2,79	467	334 634	13,96	1 300	193 318	67,25
1940	1 067	3 693 829	2,89	479	340 735	14,06	1 396	196 645	70,99
1941	688	3 702 822	1,86	339	346 549	9,78	1 073	200 811	53,43
1942	694	3 719 127	1,87	335	352 601	9,50	1 190	206 726	57,56

*) Zahl der Lebenden auf Jahresmitte. Diese Zahlen mussten durch Fortschreibung seit dem Jahre 1930 gewonnen werden, weil die Aufarbeitung der Volkszählungsergebnisse 1941 noch nicht beendet ist. Das Gesamtergebnis der Fortschreibung stimmt nicht vollständig überein mit dem Gesamtergebnis der Volkszählung 1941. Die vorkommende Abweichung ist indessen so gering, dass sie keinen Einfluss auf die Ergebnisse unserer Untersuchung haben kann.

Die Jahre 1939 und 1940 müssen als Einführungszeit der neuen Behandlungsart angesehen werden und sind deshalb von der Untersuchung auszunehmen. Der Vergleich hat sich also auf die Jahre

(Fortsetzung Seite 92 Mitte.)

[1]) Diese eingehenden Angaben sind uns in freundlicher Weise vom Eidgenössischen Statistischen Amt zur Verfügung gestellt worden.

Symbol	Alter 0—59 Jahre
$s'^2 = \dfrac{S(X_1 - \bar{X}_1)^2 + S(X_2 - \bar{X}_2)}{N_1 + N_2 - 2}$	$\dfrac{0{,}05}{5} = 0{,}01$
s'	$0{,}10$
$\left[\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}84$
$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$3{,}10 - 1{,}86 = 1{,}24$
$s'\left[\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}$	$0{,}08$
$t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s'\left[\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right]^{\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{1{,}24}{0{,}08} = 15{,}5$

1934—1938 und 1941—1942 zu beschränken; er führt über die Werte:

Jahr	Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit ‰ X			$\lvert X - \bar{X} \rvert$			$(X - \bar{X})^2$		
	Altersgruppe			Altersgruppe			Altersgruppe		
	0–59	60–69	70 und mehr	0–59	60–69	70 u. mehr	0–59	60–69	70 u. mehr
1934	2,95	15,24	63,23	0,15	0,17	3,05	0,02	0,03	9,30
1935	3,01	14,35	62,85	9	1,06	3,43	1	1,12	11,76
1936	3,20	14,65	64,51	10	0,76	1,77	1	0,58	3,13
1937	3,12	15,59	64,64	2	18	1,64	0	3	2,69
1938	3,22	17,24	76,16	12	1,83	9,88	1	3,35	97,61
	15,50	77,07	331,39				0,05	5,11	124,49
	$\bar{X}_1 = 3{,}10$	$\bar{X}_1 = 15{,}41$	$\bar{X}_1 = 66{,}28$						
1941	1,86	9,78	53,43	0,00	0,14	2,07	0,00	0,02	4,28
1942	1,87	9,50	57,56	1	14	2,06	0	2	4,24
	3,73	19,28	110,99				0,00	0,04	8,52
	$\bar{X}_2 = 1{,}86$	$\bar{X}_2 = 9{,}64$	$\bar{X}_2 = 55{,}50$						

(Fortsetzung Seite 92 oben.)

Alter 60—69 Jahre	Alter 70 und mehr Jahre
$\dfrac{5{,}15}{5} = 1{,}03$	$\dfrac{133{,}01}{5} = 26{,}60$
1,01	5,16
0,84	0,84
$15{,}41 - 9{,}64 = 5{,}77$	$66{,}28 - 55{,}50 = 10{,}78$
0,85	4,33
$\dfrac{5{,}77}{0{,}85} = 6{,}8$	$\dfrac{10{,}78}{4{,}33} = 2{,}5$

Bei $n = N_1 + N_2 - 2 = 5$ entsprechen t numerisch $= 15{,}5$ und t numerisch $= 6{,}8$ Wahrscheinlichkeiten $P(>t)$ von weniger als 0,005, während $t = 2{,}5$ einer Wahrscheinlichkeit von fast 0,025 gleichkommt.

Ergebnis: In den Altern von 0—59 Jahren und von 60—69 Jahren sind die Unterschiede der Sterblichkeit infolge Lungenentzündung wesentlich und nicht bloss zufällig; in der Altersgruppe 70 und mehr Jahre darf der wesentliche Unterschied in Erwägung gezogen werden[1]).

Schluss

Wir haben bewusst darauf verzichtet, aus dem wesentlichen oder dem bloss zufälligen Unterschied von Verhältniszahlen Schlüsse zu ziehen. Es ging uns einzig darum, an einigen Beispielen zu belegen, wie die Anwendung der Verfahren zu geschehen hat. Die stellenweise breite Wiedergabe des Rechnungsganges ist begründet durch das Ziel der Untersuchung: Die Anwendung neuerer statistischer Verfahren auf versicherungsmathematische und -statistische Fragestellungen, wie sie fast täglich in der Praxis sich zeigen, ausführlich und allgemein verständlich darzustellen.

[1]) Man vergleiche darüber auch *R. Staehelin:* Grundsätzliches zur Bewertung des Erfolges von Arzneimitteln. Schweizerische Medizinische Wochenschrift, 73. Jahrgang, Nr. 19/20, Basel 1943, S. 549 ff.