Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 43 (1943)

Artikel: Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen

Autor: Picard, Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551015

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen.

Von Robert Picard, Genf.

Die Konstruktion einer Sterbetafel setzt theoretisch eine grosse Zahl von Beobachtungen voraus. Wie gross diese Zahl sein muss, oder umgekehrt, mit wie wenig Beobachtungen man noch auskommen kann, ist eine Frage, die nur sehr schwer zu beantworten sein dürfte.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, aus einer relativ kleinen Zahl von Beobachtungen eine Sterbetafel zu gewinnen.

Es ist klar, dass das Gelingen oder Misslingen dieses Versuches wesentlich vom Ausgleichsverfahren abhängt. Der «Angleichung», wie wir das hier benützte Verfahren nennen wollen, liegt ein einfacher Gedanke zugrunde, der andernorts auch schon zur Anwendung gekommen sein dürfte, wenn auch in der Literatur darüber keine Anhaltspunkte gefunden wurden.

Es bezeichne

 $\Sigma \; B_x$ der unter einjährigem Risiko stehende Bestand,

 Σ T_x die innerhalb der Beobachtungsperiode beobachteten Todesfälle.

Gegeben sei eine Sterbetafel I (Hilfstafel) durch ihre einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^I . Die rechnungsmässige Sterblichkeit des Bestandes ΣB_x , gemessen an der Tafel I, beträgt ΣQ_x , wobei gesetzt wird:

$$Q_x = B_x q_x^I.$$

Unsere Absicht geht dahin, von I zu einer Tafel II mit den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^{II} überzugehen, so dass $\sum B_x q_x^{II}$ sich möglichst gut der beobachteten Sterblichkeit $\sum T_x$ anpasst.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$q_x^{II} = \alpha + \beta \, q_x^{I}.$$

Darin sind α und β Konstanten, die wir nach der Methode der kleinsten Quadratsumme derart bestimmen, dass der Ausdruck

(3)
$$\Sigma \left[B_x \cdot (\alpha + \beta q_x^I) - T_x \right]^2 = \Sigma \left[\alpha B_x + \beta Q_x - T_x \right]^2$$

ein Minimum wird.

Auf Grund dieser Minimumsbedingung folgt, dass die partiellen Ableitungen nach α und β gleich 0 sein müssen. Wir erhalten auf diese Weise die zwei folgenden Gleichungen, aus denen α und β berechnet werden können:

(4)
$$\alpha \sum B_x^2 + \beta \sum B_x Q_x = \sum B_x T_x,$$
$$\alpha \sum B_x Q_x + \beta \sum Q_x^2 = \sum Q_x T_x.$$

Damit sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^{II} eindeutig bestimmt.

Die Annahme, die der Gleichung (2) zugrunde liegt, dass nämlich zwischen q^I und q^{II} eine lineare Beziehung bestehe, lässt sich folgendermassen begründen:

Wenn die Tafel I dem Gompertz-Makehamschen Gesetz folgt, das heisst, wenn die Sterbeintensitäten μ_x^I in der Form

(5)
$$\mu_x^I = a + bc^x \quad (a, b, c = \text{const.})$$

dargestellt werden können, wenn ferner, nicht zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten, jedoch zwischen den Sterbeintensitäten die Beziehung (2) besteht, d. h. wenn

(6)
$$\mu_x^{II} = \alpha + \beta \, \mu_x^{I},$$

dann ist

(7)
$$\mu_x^{II} = (\alpha + \beta a) + \beta bc^x.$$

Wir schliessen daraus, dass mit I auch II dem Gompertz-Makehamschen Gesetz folgt. Nun kann bekanntlich jede Sterbetafel, von den jugendlichen Altern abgesehen, mit mehr oder minder grosser Annäherung durch eine Gompertz-Makehamsche Formel ausgedrückt werden. Wir haben zwar zur Ermittlung der gesuchten Tafel angenommen, dass die lineare Beziehung (2) zwischen den Sterbewahrscheinlichkeiten q_x bestehe, aber der Unterschied zwischen q_x und den Sterbeintensitäten μ_x ist nicht bedeutend.

Der Umstand, dass die Konstante c in beiden Tafeln identisch wird, bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Schon S. Dumas ¹) hat darauf hingewiesen, dass diese Grösse bei den verschiedenen Tafeln nicht sehr voneinander abweicht und dass zudem ihre Variation innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen den Tafelverlauf nicht wesentlich beeinflusst.

Wenn auch für die der Gleichung (2) zugrunde liegende Hypothese gute Gründe sprechen, so soll damit nicht gesagt sein, dass nicht auch andere Beziehungen, wie z. B. die folgende, denkbar sind:

(8)
$$q_x^{II} = \alpha + \beta q_x^I + \gamma (q_x^I)^2.$$

Die Stärke, aber auch die Schwäche der Methode der Angleichung liegt darin, dass eine passende Hilfstafel herangezogen werden muss. Dies ist bei den gebräuchlichen Ausgleichsverfahren nicht der Fall; da ist jede Tafel gewissermassen eine Neuschöpfung, unabhängig von frühern Erfahrungen. Anders die Methode der Angleichung; sie lehnt sich bewusst an eine andere Tafel an. Dies hat zur Folge, dass charakteristische Schwankungen der Hilfstafel auf die neue Tafel übertragen werden, während umgekehrt Eigenheiten, die das Beobachtungsmaterial vielleicht aufweist, gar nicht in Erscheinung treten können. Diesen Nachteilen, die übrigens jedem analytischen Ausgleichsverfahren auch anhaften, wird man aber bei einem kleinen Beobachtungsmaterial kein Gewicht beilegen dürfen.

Die Methode der Angleichung erhebt gewiss nicht Anspruch darauf, mit den klassischen Ausgleichsverfahren in Wettbewerb treten zu wollen; ihr Vorteil liegt auf praktischem Gebiet. Sie führt auch bei kleinen Beständen ohne umständliche Rechenarbeit zu einem brauchbaren Resultat. Sieht man mit Loewy ²) die Aufgabe der Ausgleichung darin, «die beobachtete Zahlenreihe durch eine andere zu ersetzen, die sich dem Beobachtungsmaterial möglichst eng anschmiegt und einen regelmässigen Verlauf aufweist», dann erfüllt auch die Methode der Angleichung diese Aufgabe.

Die Güte der Angleichung hängt selbstverständlich von der verwendeten Hilfstafel ab; zweckmässigerweise wird man dafür eine solche wählen, von der von vornherein feststeht, dass ihre Sterblichkeit derjenigen der beobachteten nahe kommt. Ist eine geeignete Hilfstafel nicht zur Hand, so kann man sich eine solche durch ein rohes graphisches Verfahren unschwer verschaffen.

¹⁾ S. Dumas: Le contrôle de la mortalité, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 21. Heft, Juni 1926, S. 91.

²) Manes, Versicherungslexikon, 3. Auflage, S. 217.

Die Methode ist auch anwendbar, wenn der unter Risiko stehende Bestand nicht, wie üblich, aus Personen oder Policen, sondern aus Risikokapital gebildet wird. Als Zähleinheit figuriert dann Fr. 1 Risikokapital, und die beobachtete Sterblichkeit ist auf Grund der effektiven Schadenszahlungen zu bestimmen. Der Wert einer solchen, direkt auf dem finanziellen Ergebnis ruhenden Tafel ist augenscheinlich. Auf die Möglichkeit, eine Sterbetafel mit Hilfe des Risikokapitals zu ermitteln, haben P. Meyer¹) und im Anschluss daran A. Berger²) hingewiesen.

Nachfolgend geben wir noch das Ergebnis einer praktischen Auswertung der Methode der Angleichung bekannt. Zur Verfügung standen die Sterblichkeitserfahrungen aus den Jahren 1936—1942 der Helvetia-Leben, Lebensversicherungsgesellschaft in Genf, an ihrem Bestand an Einzelkapitalversicherungen. Der Direktion dieser Gesellschaft spreche ich für die bereitwillig erteilte Erlaubnis, dieses Material veröffentlichen zu dürfen, meinen verbindlichsten Dank aus.

Die Berechnungen wurden auf Grund folgender Festsetzungen durchgeführt:

Als Zähleinheit diente die Police, als Beobachtungsjahr das Kalenderjahr. Die Beobachtungsperiode erstreckte sich vom 1. Januar 1936 bis 31. Dezember 1942. Erfasst wurde der Bestand an Einzelkapitalversicherungen auf den Tod (Grossleben, Schweizerportefeuille), ohne die Versicherungen auf mehrere Leben. Von dieser Ausnahme abgesehen, umfasst die Untersuchung sämtliche jeweils am 31. Dezember in den Reserveregistern aufgeführten Policen. Die Altersbestimmung erfolgte in der üblichen Weise, auf- oder abgerundet auf ganze Jahre.

Es sei

 B_x^{1935} = die Anzahl der Policen der 1935 x-Jährigen am 31. Dezember 1935,

(9) $B_x^{1936} = \text{die Anzahl der Policen der 1936 } x\text{-Jährigen am 31. Dezember 1936}$

...usw.

¹) P. Meyer: Ein Beitrag zum Dividendenproblem in der Lebensversicherung. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft. Heft XX, Berlin 1911, S. 61.

²) A. Berger: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, Berlin 1923, I. Teil, S. 135.

Unter der Voraussetzung, dass alle Mutationen in der Jahresmitte stattfinden, ergibt sich für 1936 der unter Risiko stehende Bestand x-Jähriger als

$$\frac{1}{2} \left(B_x^{1935} + B_x^{1936} \right).$$

Für die Beobachtungsperiode vom 1. Januar 1936 bis 31. Dezember 1942 setzt sich der unter einjährigem Risiko stehende Bestand B_x x-Jähriger wie folgt zusammen:

(11)
$$B_x = \frac{1}{2} B_x^{1935} + (B_x^{1935} + \dots + B_x^{1941}) + \frac{1}{2} B_x^{1942}.$$

Diesem Bestand x-Jähriger steht folgende beobachtete Sterblichkeit T_x gegenüber:

(12)
$$T_x = T_x^{1936} + T_x^{1937} + \dots + T_x^{1942}.$$

Für die Angleichung wurden nur die Alter von 10—64 Jahren herangezogen. Dies ergibt ein Total von 100840 Zähleinheiten, d. h. rund $^1/_7$ des Bestandes, welcher für RAH 1930—1940 zur Verfügung stand.

Als Hilfstafel wurde die Tafel A 1924—1929 (Schlusstafel) ¹) gewählt. Es wurden auch Versuche mit andern Tafeln unternommen, insbesondere mit RAH 1930—1940 ²). Während für die mittleren Alter von 20—50 Jahren die Schlusstafel A 1924—1929 sich nur unwesentlich von RAH 1930—1940 unterscheidet, weist die letztere gegenüber der ersteren in den jungen Altern relativ niedrige, in den hohen Altern dagegen relativ hohe Sterblichkeitssätze auf. Da sich der beobachtete Bestand gegen die Tafelenden zu besser an A 1924—1929 als an RAH 1930—1940 anpasst, wurde die erstere als Hilfstafel herangezogen.

Auf Grund dieser Festsetzungen wurde folgende lineare Beziehung ermittelt:

(13)
$$q_x^{II} = -0.000964 + 1.113 q_x^{I}.$$

¹) Continuous investigation into the mortality of assured lives. Monetary Tables A 1924—1929, Vol. I. Cambridge 1934.

²) H. Wyss: Betrachtungen über die Sterblichkeit bei Einzelkapitalversicherungen der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 42. Bd., Heft 2, 1942, S. 309.

Es sei erwähnt, dass man mit RAH 1930—1940 als Hilfstafel zu folgender Gleichung geführt wird:

(14)
$$q_x^{II} = -0,000225 + 0,963 q_x^{I}.$$

Die folgende Gegenüberstellung zeigt den Grad der Übereinstimmung zwischen der effektiven und der rechnungsmässigen Sterblichkeit:

Altersgruppe	Policen unter ein- jährigem Risiko	Beobachtete Rechnungsmässige Sterblichkeit			
10-14	3938.5	6	3.9		
15—19	$4\ 570.5$	6	6.9		
20 - 24	$8\ 104.5$	12	13.4		
25 29	$14\ 532.5$	24	24.1		
30-34	18 947	38	35.6		
3539	$18\ 832.5$	45	49.2		
40 - 44	14878.5	57	58.0		
45 — 4 9	$9\ 542$	57	54.4		
50 - 54	4793	52	42.9		
55—5 9	$2\ 036.5$	25	30.1		
60 - 64	664.5	13	16.3		
10-64	100 840	335	334.8		

Im nachfolgenden geben wir noch eine detaillierte Aufstellung des Bestandes der beobachteten Sterblichkeit und der angeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten bekannt:

Sterblichkeitserfahrungen 1936-1942 der Helvetia-Leben.

Alter	Policen unter einjährigem Risiko	Beobachtete Sterblichkeit	Angeglichene Sterbenswahr- scheinlichkeit in ⁰ / ₀₀	Alter	Alter	Policen unter einjährigem Risiko	Beobachtete Sterblichkeit	Angeglichene Sterbenswahr- scheinlichkeit in ⁰ / ₀₀	Alter
x	B_x	T_x	$1000~q_x$	\boldsymbol{x}	x	B_x	T_x	1000 q _x	x
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 Übertrag	805.5 786 770 776.5 800.5 832 866 907.5 956 1009 1129 1352.5 1618.5 1851.5 2153 2390.5 2635 2905 3169 3433 3602.5 3733.5 3818.5 3885.5 3907 3961 3781 3665 3515.5 3374 72299.5	1 1 2 1 1 1 2 3 - 4 1 1 1 5 5 5 1 1 3 9 6 11 5 7 14 10 8 6 15 146	$egin{array}{c} 0.77 \\ 0.88 \\ 0.99 \\ 1.11 \\ 1.22 \\ 1.33 \\ 1.44 \\ 1.54 \\ 1.61 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.65 \\ 1.25 \\ 1.65 $	10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	Ubertrag 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64	3154 2951 2784 2615.5 2387 2142 1901.5 1666.5 1445 1260 1093 957 806 677 580 472 390.5 324 270 211 163 122.5 96.5 71.5	146 14 8 8 12 11 10 14 5 17 12 9 8 15 8 3 9 5 5 3 4 3 - 3 335	3.63 3.92 4.22 4.55 4.90 5.30 5.76 6.28 6.87 7.54 8.29 9.12 10.05 11.10 12.28 13.63 15.17 16.93 18.88 21.— 23.25 25.68 28.32 31.24	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64

187 -

9 **