Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 43 (1943)

Artikel: Über links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen

Autor: Schärf, Henryk

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550943

Über links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen.

Von *Henryk Schärf*, z. Zt. in Zürich.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist hauptsächlich einer Verallgemeinerung des Riemann-Stieltjesschen Integrals gewidmet, auf die mich ursprünglich Nachforschungen nach dem natürlichen mathematischen Werkzeug der Versicherungsmathematik geführt hatten und deren besondere Einfachheit nachher zu einer eingehenderen funktionentheoretischen Behandlung einlud.

Für die im Intervall $[a, b]$ [1]) definierten endlichen Funktionen f, g und dessen Einteilung D mit den Teilungspunkten $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ sei

$$\overset{(-)}{A}_D[f,g] = \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)\,[g(t_{i+1}) - g(t_i)],\ \overset{(+)}{A}_D[f,g] = \sum_{i=0}^{r-1} f(t_{i+1})\,[g(t_{i+1}) - g(t_i)].$$

Konvergiert für jede «normale» Einteilungsfolge $\{D_n\}$ die Zahlenfolge $\{\overset{(-)}{A}_{D_n}[f,g]\}$ bzw. $\{\overset{(+)}{A}_{D_n}[f,g]\}$, so setzen wir

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(-)}{A}_{D_n}[f,g] = \overset{(-)}{\int_a^b} f\,dg,\ \lim_{n\to\infty} \overset{(+)}{A}_{D_n}[f,g] = \overset{(+)}{\int_a^b} f\,dg.$$

Dabei heisse $\{D_n\}$ normal, wenn die maximale Länge $\|D_n\|$ der Teilintervalle von D_n für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Die vollkommene Beherrschung des «linksseitigen» Integrals $\overset{(-)}{\int_a^b} f\,dg$ und des «rechtsseitigen» $\overset{(+)}{\int_a^b} f\,dg$ gelingt dank einigen Existenzsätzen (Satz 6 und 7), die überdies einen aufschlussreichen Einblick in die Zusammenhänge zwischen diesen Integralen und dem Lebesgue-Stieltjesschen — und damit dem Perron-Stieltjesschen — Integral

[1]) Für die Intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant t < b$, $a < t \leqslant b$, $a < t < b$ verwenden wir im folgenden entsprechend die Bezeichnungen $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b).

einerseits, dem Riemann-Stieltjesschen [1]) anderseits gewähren, wodurch sie auch zu neuen Erkenntnissen über diese bereits klassischen Integralbegriffe verhelfen.

Insbesondere wird so die allgemeine Regel der partiellen Integration für das Lebesgue-Stieltjessche Integral gefunden (Satz 9), von der bisher nur ein Spezialfall bekannt war, und dadurch die entsprechende ebenfalls unbekannte Regel für das Perron-Stieltjessche Integral. Ferner wird das Verhältnis des Riemann-Stieltjesschen Integrals zum Lebesgue-Stieltjesschen gänzlich geklärt (Satz 8*a*). — Eine andere Konsequenz besteht im Erzielen eines «massfreien» Existenzkriteriums für das Riemann-Stieltjessche Integral (Satz 8), woraus neben Verschärfung des Lebesgueschen Kriteriums für die Riemannsche Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion ein sofortiger Beweis für die Äquivalenz des Cauchyschen und Riemannschen Integralbegriffes folgt. — Endlich lässt sich eine von *H. L. Smith* (1) und *J. F. Steffensen* (1) eingeführte Verallgemeinerung des Riemann-Stieltjesschen Integrals mit Leichtigkeit als arithmetisches Mittel unserer links- und rechtsseitigen Integrale behandeln.

Für diese letzteren Integrale werden nach Begründung der fundamentalen Rechenregeln und Erforschung der Struktur der unbestimmten Integrale einige für die Anwendungen erforderliche Sätze über Integraliterationen in voller Allgemeinheit abgeleitet. — Ergänzend wird über die Möglichkeit einer Definitionserstreckung auf beliebige Punktmengen und mehrere Dimensionen sowie über die gliedweise Integration von Funktionenfolgen berichtet.

Die erzielten Ergebnisse gelten für den besonders wichtigen Fall, dass die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung ist. Ihnen musste das Studium einiger — wegen ihrer Allgemeinheit an und für sich nicht uninteressant erscheinender — Eigenschaften der Funktionen von beschränkter Schwankung vorangeschickt werden, von denen folgende erwähnt seien:

Ist eine Funktion von beschränkter Schwankung in jedem Punkte eines Intervalls von mindestens einer Seite stetig oder sogar nur halbstetig (von oben bzw. von unten), so weist sie diese Eigenschaft im ganzen Intervall «gleichmässig» auf (Satz 1). Daraus resultiert die

---

[1]) Darunter verstehen wir überall den Grenzwert des gewöhnlichen Stieltjesschen Integrationsprozesses *ohne* Voraussetzung der Stetigkeit der integrierten Funktion.

notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die einer normalen Einteilungsfolge des Intervalls I entsprechende Folge von Variationen einer Funktion von beschränkter Schwankung immer gegen deren Totalvariation auf I konvergiert (Satz 2). Anschliessende Untersuchungen über die Struktur der Funktionen von beschränkter Schwankung und über Nullmengen bezüglich solcher Funktionen gelten der Vorbereitung der Hauptsätze der Arbeit.

Dass die eingeführten Integrale das natürliche mathematische Werkzeug der Versicherungsmathematik bilden, wird im Schlussabschnitt gezeigt. Mit deren Hilfe werden dort nämlich die Grundlagen einer der diskontinuierlichen und kontinuierlichen Versicherungsmathematik übergeordneten Theorie aufgebaut, wodurch die Doppelspurigkeit zwischen diesen Disziplinen beseitigt wird. Dabei resultieren auch inhaltlich neue Erkenntnisse, insbesondere über Funktionalgleichungen der Deckungsrücklagen und den Zusammenhang zwischen Rücklagenvariationen und Gewinnausdrücken, was erneut die Zweckmässigkeit einer allgemeinen Betrachtungsweise sogar bei praktischen Anwendungsgebieten erweist.

Abschnitt 1.

Einige Eigenschaften von Funktionen mit beschränkter Schwankung.

§ 1.

Gleichmässigkeitseigenschaften.

1. Bekanntlich ist eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion dortselbst gleichmässig stetig. Man kann sich fragen, ob eine analoge Gleichmässigkeitseigenschaft nicht schon für Funktionen besteht, die in jedem Punkte eines Intervalls von mindestens einer Seite stetig oder sogar nur halbstetig sind. Präziser:

Wird ein abgeschlossenes Intervall der Länge δ, das im Punkte t endet, mit $\overset{[+]}{\mathrm{I}}(t,\delta)$ bzw. $\overset{[-]}{\mathrm{I}}(t,\delta)$ bezeichnet, je nachdem es rechts oder links von t liegt, so nennen wir die Funktion g:

$$1^0 \text{ im Punkt } t \begin{cases} a) \ \text{rechtsseitig stetig bzw.} \\ b) \quad » \quad \text{halbstetig von oben bzw.} \\ c) \quad » \qquad » \qquad » \ \text{unten,} \end{cases}$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, dass für alle Punkte x des Intervalls $\overset{[+]}{\mathrm{I}}(t,\delta)$ entsprechend die Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} &a) \ |g(x) - g(t)| < \varepsilon, \\ (1) \qquad &b) \ g(x) - g(t) < \varepsilon, \\ &c) \ g(x) - g(t) > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Wird hierin $\overset{[+]}{\mathrm{I}}(t,\delta)$ durch $\overset{[-]}{\mathrm{I}}(t,\delta)$ ersetzt, so verwenden wir die Bezeichnung «linksseitig» statt «rechtsseitig»;

$$2^0 \text{ in einem Intervall I} \begin{cases} a) \ \text{seitlich stetig bzw.} \\ b) \quad » \quad \text{halbstetig von oben bzw.} \\ c) \quad » \qquad » \qquad » \ \text{unten,} \end{cases}$$

wenn sie die betreffende Stetigkeitsart in jedem Punkte des Intervalls I von mindestens einer Seite aufweist;

3° in einem Intervall I «gleichmässig seitlich» stetig bzw. halbstetig von oben bzw. halbstetig von unten, wenn jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ und jedem Punkt t des Intervalls I ein solches Vorzeichen $\psi(t)$ zugeordnet werden kann, dass die der betreffenden Stetigkeitsart entsprechende Ungleichung (1) für alle Punkte x des Intervalls $\overset{[\psi(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta(\varepsilon)) \cdot \mathrm{I}$ erfüllt ist.

Kann nun aus dem Bestehen einer obiger seitlichen Stetigkeitsarten in einem Intervall auf deren Gleichmässigkeit dortselbst geschlossen werden?

Laut folgendem Beispiel ist diese Frage im allgemeinen zu verneinen:

Die als $g(x) = 0$ für $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $0 < x \leqslant 1$ definierte Funktion ist in $\mathrm{I} = [-1, +1]$ seitlich stetig. Wie aber auch $\delta > 0$ gewählt wird, so liegen für

$$t = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{mit} \quad \frac{3}{2n(4n-3)\pi} < \delta$$

die Punkte

$$\overset{(+)}{x} = \frac{1}{\left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi}, \quad \overset{(+)}{\xi} = \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\cdot\pi} \quad \text{bzw.} \quad \overset{(-)}{x} = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\cdot\pi}, \quad \overset{(-)}{\xi} = \frac{1}{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\cdot\pi}$$

entsprechend in $\overset{[+]}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$ bzw. $\overset{[-]}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$, während

$$g(\overset{(+)}{x}) = g(\overset{(-)}{x}) = 1, \; g(\overset{(+)}{\xi}) = g(\overset{(-)}{\xi}) = -1, \; g(t) = 0$$

ist, so dass bei $0 < \varepsilon < 1$ die Ungleichung (1 b) für $x = \overset{(+)}{x}$ und $x = \overset{(-)}{x}$, hingegen die Ungleichung (1 c) für $x = \overset{(+)}{\xi}$ und $x = \overset{(-)}{\xi}$ nicht erfüllt ist.

Wir beweisen jedoch den

Satz 1: Ist eine Funktion g in der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathrm{I}}$ eines (nicht notwendig abgeschlossenen) Intervalls I von beschränkter Schwankung und in I $\left\{\begin{array}{llll} a) & \text{seitlich stetig bzw.} & & \\ b) & » & \text{halbstetig von oben bzw.} & \\ c) & » & » & » \text{ unten,} \end{array}\right.$

so weist sie in I die betreffende Stetigkeitsart gleichmässig seitlich auf.

Beim Beweis genügt es, I als abgeschlossen vorauszusetzen, da andernfalls die Funktion g auf $\bar{\mathrm{I}} - \mathrm{I}$ durch ihren Grenzwert auf stetige Art ergänzt werden kann. Für $\mathrm{I} = [a, b]$ folgt aber die Behauptung aus einem nun zu formulierenden allgemeinen Hilfssatz.

Bezeichnen wir hiezu mit $\alpha(x)$ eine beliebige der Funktionen $x, |x|$ und setzen:

$$G_\alpha(t) = \min \{\alpha[g(t-0) - g(t)], \alpha[g(t+0) - g(t)]\} \text{ für } a < t < b,$$

$$G_\alpha(a) = \alpha[g(a+0) - g(a)], G_\alpha(b) = \alpha[g(b-0) - g(b)].$$

Wird dann mit Γ_α die obere Grenze von $G_\alpha(t)$ auf I bezeichnet, falls diese Grenze nicht negativ ist, andernfalls die Zahl 0, so lautet der angekündigte

Hilfssatz: Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ entspricht eine solche Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ und jedem Punkt t des abgeschlossenen Intervalls I ein solches Vorzeichen $\psi(t)$, dass für alle Punkte x des Intervalls[1] $\overset{[\psi(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta(\varepsilon)) \cdot \mathrm{I}$ die Ungleichung besteht:

$$\alpha[g(x) - g(t)] < \Gamma_\alpha + \varepsilon. \tag{2}$$

Daraus leiten wir den Satz 1 folgendermassen ab:

Im Falle *a)* wählen wir $\alpha(x) = |x|$. Dann ist entweder $g(t-0) - g(t) = 0$ oder $g(t+0) - g(t) = 0$, also $G_\alpha(t) \equiv 0$ auf I und $\Gamma_\alpha = 0$; daher wird die Ungleichung (2) zu (1a), während der Hilfssatz in die den Fall a betreffende Behauptung des Satzes 1 übergeht. — Im Falle *b)* wählen wir $\alpha(x) = x$. Dann ist entweder $g(t-0) - g(t) \leqslant 0$ oder $g(t+0) - g(t) \leqslant 0$, also $G_\alpha(t) \leqslant 0$ auf I, wonach wie oben geschlossen wird. — Im Falle *c)* ist endlich die Funktion $g_1(x) = -g(x)$ auf I seitlich — also auch gleichmässig seitlich — halbstetig von oben, demnach die Funktion g gleichmässig seitlich halbstetig von unten.

---

[1]) Das nicht auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist.

Bemerkt sei, dass aus der rechtsseitigen Halbstetigkeit bzw. Stetigkeit einer Funktion von beschränkter Schwankung in einem Intervall noch nicht entsprechend deren gleichmässige rechtsseitige Halbstetigkeit bzw. Stetigkeit dortselbst folgt: Die als $g(x)=0$ für $0 \leqslant x < 1$, $g(x)=1$ für $1 \leqslant x \leqslant 3$ definierte Funktion ist in $[0,2]$ von beschränkter Schwankung und rechtsseitig stetig. Ist aber $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta > 0$, so ist für $1-\delta < t < 1$ und $1 \leqslant x \leqslant t+\delta$ die Ungleichung (1*b*) nicht erfüllt.

2. Es genügt, den Hilfssatz für die Sprungfunktion von g

$$\sigma(x) = \sum_{x_i \leq x} \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) + \sum_{x_i < x} \overset{(+)}{\Delta} g(x_i)$$

zu beweisen, wobei $x_1, x_2, \ldots$ die Unstetigkeitspunkte von g auf I seien, $\overset{(-)}{\Delta} g(x) = g(x) - g(x-0)$, $\overset{(+)}{\Delta} g(x) = g(x+0) - g(x)$ bedeute.

Einerseits ist nämlich die Funktion $\gamma(x) = g(x) - \sigma(x)$ auf I gleichmässig stetig, und es ist offenbar

$$(2') \qquad \alpha[g(x) - g(t)] \leqslant \alpha[\sigma(x) - \sigma(t)] + |\gamma(x) - \gamma(t)|,$$

anderseits hat aber σ mit g die Funktionen G_α und die Zahlen Γ_α auf I gemeinsam (nachdem $\overset{(-)}{\Delta}\sigma(t) \equiv \overset{(-)}{\Delta} g(t)$, $\overset{(+)}{\Delta}\sigma(t) \equiv \overset{(+)}{\Delta} g(t)$ ist). Gilt der Hilfssatz für σ, so existiert ein solches $\delta > 0$, dass sowohl $\alpha[\sigma(x) - \sigma(t)] < \Gamma_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle Punkte x des Intervalls $\overset{[\psi(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$ ist, wie auch $|\gamma(x) - \gamma(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, woraus angesichts (2') die Ungleichung (2) folgt.

Da nun die Reihe $\sum_i \overset{(-)}{\Delta}\sigma(x_i) + \sum_i \overset{(+)}{\Delta}\sigma(x_i)$ entweder endlich ist oder absolut konvergiert, existiert ein Index m mit $\sum_{i>m} |\overset{(-)}{\Delta}\sigma(x_i)| + \sum_{i>m} |\overset{(+)}{\Delta}\sigma(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ [1]. Es sei d der Minimalabstand der Punkte $x_1, \ldots, x_m$ und $0 < \delta < \frac{d}{2}$. Ist t einer der Punkte $x_1, \ldots, x_m$ und

[1]) Dabei sei $\sum_{i>m} c_i = 0$, falls die Folge $\{c_i\}$ aus m Gliedern besteht.

$\psi(t)$ dasjenige Vorzeichen $\sim$, für das $G_\alpha(t) = \alpha[\sigma(t \sim 0) - \sigma(t)]$ ist, so liegt sonst keiner dieser Punkte im Intervall $\overset{(\sim)}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$, also gilt dort für $x \neq t$

$$\alpha[\sigma(x) - \sigma(t \sim 0)] \leqslant \sum_{i<m}^{(-)} |\Delta\sigma(x_i)| + \sum_{i>m}^{(+)} |\Delta\sigma(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus der Ungleichung

$$\alpha[\sigma(x) - \sigma(t)] \leqslant \alpha[\sigma(x) - \sigma(t \sim 0)] + \alpha[\sigma(t \sim 0) - \sigma(t)] < G_\alpha(t) + \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt daher wegen $G_\alpha(t) < \Gamma_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ die Ungleichung (2) für die Funktion σ.

Ist $t \varepsilon \mathrm{I}$ keiner der Punkte $x_1, \ldots, x_m$, so sei $\psi(t)$ dasjenige Vorzeichen $\sim$, für das im Intervall $\overset{[\sim]}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$ kein x_i mit $i = 1, \ldots, m$ liegt. Für $x \varepsilon \overset{[\psi(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta) \cdot \mathrm{I}$ gilt wieder die Ungleichung (2) wegen

$$\alpha[\sigma(x) - \sigma(t)] \leqslant \sum_{i>m}^{(-)} |\Delta\sigma(x_i)| + \sum_{i>m}^{(+)} |\Delta\sigma(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} < \Gamma_\alpha + \varepsilon.$$

3. Konvergiert für jede normale Folge von Einteilungen $\{D_n\}$ des Intervalls I die Folge $\{v_{D_n}\}$ der entsprechenden Variationen der Funktion g gegen ihre Totalvariation V_I, so heisse g «von gleichmässig approximierbarer Totalvariation» auf I. — Jede stetige Funktion von beschränkter Schwankung ist bekanntlich von gleichmässig approximierbarer Totalvariation [1]). Wir beweisen den allgemeineren

Satz 2: Damit eine Funktion von beschränkter Schwankung g im abgeschlossenen Intervall I von gleichmässig approximierbarer Totalvariation ist, ist es notwendig und hinreichend, dass sie in jedem inneren Punkte von I seitlich halbstetig sowohl von oben wie auch von unten ist.

Beweis: Diese Bedingung ist notwendig. — Es sei nämlich $\{D_n\}$ eine normale Folge von Einteilungen des Intervalls I, die dessen inneren Punkt t nicht als Teilungspunkt haben, $[\alpha_n, \beta_n]$ das den Punkt t ent-

---

[1]) Vgl. z. B. Lebesgue (1), S. 52.

haltende Teilintervall von D_n, D'_n die aus D_n durch Hinzufügung des Teilungspunktes t entstehende Unterteilung. Aus

$$v_{D'_n} - v_{D_n} = |g(t) - g(\alpha_n)| + |g(\beta_n) - g(t)| - |g(\beta_n) - g(\alpha_n)|$$

folgt, wenn g von gleichmässig approximierbarer Totalvariation auf I ist,

$$\lim_{n \to \infty} (v_{D'_n} - v_{D_n}) = |g(t) - g(t-0)| + |g(t+0) - g(t)| - |g(t+0) - g(t-0)| = 0,$$

$g(t)$ liegt daher zwischen $g(t-0)$ und $g(t+0)$, woraus bei $g(t-0) \leqslant g(t+0)$ die linksseitige Halbstetigkeit von oben und rechtsseitige von unten der Funktion g in t folgt, während bei $g(t-0) > g(t+0)$ das umgekehrte der Fall ist.

Diese Bedingung ist hinreichend. — Ist sie nämlich erfüllt, so existieren zufolge Satz 1 bei beliebigem $\varepsilon > 0$ solche Zahlen $\delta'(\varepsilon) > 0$, $\delta''(\varepsilon) > 0$ und zu jedem inneren Punkt t des Intervalls I solche Vorzeichen $\psi'(t)$, $\psi''(t)$, dass für alle Punkte x des Intervalls $\overset{[\psi'(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta'(\varepsilon)) \cdot \mathrm{I}$ bzw. $\overset{[\psi''(t)]}{\mathrm{I}}(t, \delta''(\varepsilon)) \cdot \mathrm{I}$ entsprechend die Ungleichung $(1b)$ bzw. $(1c)$ gilt.

Es seien nun $\{D_n\}$ und $\{\Delta_n\}$ normale Einteilungsfolgen des Intervalls I, wobei D_n die Teilungspunkte $z_0 < z_1 < \ldots < z_N$ hat. Ist für $m > M$

$$\|\Delta_m\| < \delta = \min \left\{\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon), \frac{1}{2}(z_1 - z_0), \frac{1}{2}(z_2 - z_1), \ldots, \frac{1}{2}(z_N - z_{N-1})\right\},$$

so werden wir zeigen, dass für $m > M$ auch

$$v_{\Delta_m} \geqslant v_{D_n} - 2(N-1)\,\varepsilon \tag{3}$$

gilt. Daraus folgt dann wegen der Beliebigkeit von ε: $\liminf\limits_{m \to \infty} v_{\Delta_m} \geqslant v_{D_n}$, weiter wegen der Beliebigkeit von n: $\liminf\limits_{m \to \infty} v_{\Delta_m} \geqslant \limsup\limits_{n \to \infty} v_{D_n}$ und aus Symmetriegründen: $\liminf\limits_{n \to \infty} v_{D_n} \geqslant \limsup\limits_{m \to \infty} v_{\Delta_m}$, woraus schliesslich die Gleichheit: $\lim\limits_{n \to \infty} v_{D_n} = \lim\limits_{m \to \infty} v_{\Delta_m}$ resultiert. Da eine normale Einteilungsfolge $\{\Delta_m\}$ mit $\lim\limits_{m \to \infty} v_{\Delta_m} = V_I$ existiert, ist dann, wie behauptet, für jede normale Einteilungsfolge $\{D_n\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} v_{D_n} = V_I$.

Aus jeder Intervalleinteilung können Teilungspunkte $\xi_{\lambda+1}$ mit

$$[g(\xi_{\lambda+1})-g(\xi_\lambda)]\cdot[g(\xi_{\lambda+2})-g(\xi_{\lambda+1})]\geqslant 0$$

ohne Änderung der Variation von g gestrichen werden, nachdem

$$|g(\xi_{\lambda+1})-g(\xi_\lambda)|+|g(\xi_{\lambda+2})-g(\xi_{\lambda+1})|=|g(\xi_{\lambda+2})-g(\xi_\lambda)|$$

ist. — Für die aus der Einteilung D_n durch sukzessive Streichung aller solcher Punkte erhaltene Einteilung $D\{a=t_0<t_1<\ldots<t_r=b\}$ ist daher $v_D=v_{D_n}$. — Ist $v_{D_n}=|g(b)-g(a)|$, so gilt selbstverständlich die Ungleichung (3). Andernfalls ist $1<r\leqslant N, [g(t_{i+1})-g(t_i)]\cdot$ $\cdot[g(t_{i+2})-g(t_{i+1})]<0$ für $i=0,1,\ldots,r-2$, und zwecks Beweises von (3) kann $g(t_1)>g(a)$ angenommen werden, da v_{Δ_m} und v_{D_n} bei Änderung des Vorzeichens von g ungeändert bleiben. Dann ist

$$v_D=[g(t_1)-g(a)]-[g(t_2)-g(t_1)]+[g(t_3)-g(t_2)]-\ldots\pm[g(b)-g(t_{r-1})]\cdot \tag{4}$$

Wir ordnen nun entsprechend zu: Jedem im Inneren von I gelegenen Punkt t_{2j} bzw. t_{2j+1} den nächsten in $\underset{[\psi'(t_{2j})]}{\mathrm{I}(t_{2j},\delta'(\varepsilon))}$ bzw. $\underset{[\psi''(t_{2j+1})]}{\mathrm{I}(t_{2j+1},\delta''(\varepsilon))}$ gelegenen Teilungspunkt ϑ_{2j} bzw. ϑ_{2j+1} von Δ_m (er existiert wegen $\|\Delta_m\|<\delta\leqslant\min\{\delta'(\varepsilon),\delta''(\varepsilon)\}$). Angesichts

$$|\vartheta_i-t_i|\leqslant\|\Delta_m\|\leqslant\delta\leqslant\min\left\{\frac{1}{2}(t_1-t_0),\frac{1}{2}(t_2-t_1),\ldots,\frac{1}{2}(t_r-t_{r-1})\right\}$$

bilden die Punkte ϑ_i ebenso wie die t_i eine wachsende Folge und bestimmen eine Einteilung Δ'_m des Intervalls I mit $v_{\Delta'_m}\leqslant v_{\Delta_m}$ (da Δ_m Unterteilung von Δ'_m ist). Überdies ist

$$g(\vartheta_{2j})-g(t_{2j})=\varepsilon_{2j}<\varepsilon,\ g(t_{2j+1})-g(\vartheta_{2j+1})=\varepsilon_{2j+1}<\varepsilon.$$

Aus (4) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}v_D&=[g(\vartheta_1)-g(a)+\varepsilon_1]-[g(\vartheta_2)-g(\vartheta_1)-(\varepsilon_2+\varepsilon_1)]+\ldots+[g(b)-g(\vartheta_{r-1})\pm\varepsilon_{r-1}]\\&\leqslant|g(\vartheta_1)-g(a)|+|g(\vartheta_2)-g(\vartheta_1)|+\ldots+|g(b)-g(\vartheta_{r-1})|+2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{r-1})\\&=v_{\Delta'_m}+2(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{r-1})\leqslant v_{\Delta_m}+2(N-1)\,\varepsilon,\quad\text{w. z. b. w.}\end{aligned}$$

§ 2.

Sprung- und Kontinuitätsfunktionen.

Neben der üblichen Zerlegung einer Funktion von beschränkter Schwankung g in deren Sprungfunktion σ und eine stetige Funktion γ sind für unsere Zwecke zwei andere Zerlegungsarten erforderlich: in die «linksseitige Sprungfunktion» $\sigma_l(x)$ und die «linksseitige Kontinuitätsfunktion» $g_l(x)$ von g in $[a,b]$ und die analogen «rechtsseitigen» Funktionen $\sigma_r(x)$ und $g_r(x)$, definiert durch

$$(5l)\quad \sigma_l(x)=\sum_{a<x_i\leq x}\overset{(-)}{\Delta} g(x_i),\quad (5r)\quad \sigma_r(x)=\sum_{a\leq x_i<x}\overset{(+)}{\Delta} g(x_i)\ \text{für}\ a<x\leqslant b,\ \sigma_l(a)=\sigma_r(a)=0,$$

$$(6l)\quad g(x)=g_l(x)+\sigma_l(x),\quad (6r)\quad g(x)=g_r(x)+\sigma_r(x).$$

(Dabei wird die in § 1, Punkt 2, verwendete Bezeichnungsweise beibehalten.) — Es ist leicht zu verifizieren, dass $\sigma_r(x)$ linksseitig stetig in $(a,b]$ ist, woraus dasselbe für $g_l(x)=\gamma(x)+\sigma_r(x)$ folgt, während analog die Funktionen $\sigma_l(x)$ und $g_r(x)$ rechtsseitig stetig in $[a,b)$ sind.

Eine Funktion, die in $[a,b]$ ihre eigene links- bzw. rechtsseitige Sprungfunktion ist, heisse dort schlechthin «links»- bzw. «rechtsseitige Sprungfunktion». Eine Konstruktionsvorschrift für derartige Funktionen liefert

Satz 3: Konvergiert die Reihe $\Sigma|\varphi(x_i)|$, falls die Folge $\{x_i\}$ von Punkten des Intervalls $[a,b]$ unendlich ist, so sind

$$(7l)\qquad \psi(x)=\sum_{a<x_i\leq x}\varphi(x_i)\quad \text{für}\quad a<x\leqslant b,\ \psi(a)=0$$

$$(7r)\qquad \chi(x)=\sum_{a\leq x_i<x}\varphi(x_i)\quad \text{für}\quad a<x\leqslant b,\ \chi(a)=0$$

entsprechend links- und rechtsseitige Sprungfunktionen in $[a,b]$ mit den (einzigen) Sprungstellen x_i und $\overset{(-)}{\Delta}\psi(x_i)=\overset{(+)}{\Delta}\chi(x_i)=\varphi(x_i)$.

Beweis: Ist $a\leqslant t_n<x$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=x$, so gilt, falls x einer der Punkte x_i ist,

$$\psi(x)-\psi(t_n)=\sum_{t_n<x_i\leq x}\varphi(x_i)=\sum_{t_n<x_i<x}\varphi(x_i)+\varphi(x),$$

falls x keiner der Punkte x_i ist,

$$\psi(x)-\psi(t_n)=\sum_{t_n<x_i<x}\varphi(x_i).$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{t_n<x_i<x} \varphi(x_i) = 0$ folgt im ersteren Falle $\overset{(-)}{\Delta}\psi(x) = \varphi(x)$, im zweiten $\overset{(-)}{\Delta}\psi(x) = 0$, so dass ($7\iota$) die Gestalt von ($5\iota$) mit ψ an Stelle von σ_ι und g annimmt. — Analog ist die die Funktion χ betreffende Behauptung zu beweisen.

2. Aus Satz 3 und den Formeln (5) und (6) folgt insbesondere, dass $\sigma_\iota, \sigma_r, g_\iota$ und g_r überall von derselben Seite wie g stetig sind.

In Verschärfung des bekannten Satzes, dass alle drei Variationen einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung ebenfalls stetig sind [1]), erhält man ferner folgendes

Korollar zum Satz 2: Alle drei Variationen einer Funktion von beschränkter Schwankung g sind überall von derselben Seite wie g stetig. Daher lässt sich g als Differenz zweier nichtfallender überall von derselben Seite wie g stetiger Funktionen darstellen.

Beweis: Angesichts der Relationen

$$(8)\quad g^{(p)}(x) = \frac{1}{2}[V(x) + g(x) - g(a)],\; g^{(n)}(x) = \frac{1}{2}[V(x) + g(a) - g(x)],$$

wobei $g^{(p)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ und $V(x)$ entsprechend die positive, negative und totale Variation von g in $[a, x]$ bezeichnen ($g^{(p)}(a) = g^{(n)}(a) = V(a) = 0$), genügt der Beweis für die Funktion V. — Ist nun g in (a, b) seitlich stetig und im Punkte $a < \xi \leqslant b$ z. B. linksseitig stetig, $\{D_n\}$ eine normale Folge von Einteilungen des Intervalls $[a, \xi]$, ξ_n der letzte Teilungspunkt von D_n vor ξ, so folgt aus

$$v_{D_n} \leqslant V(\xi_n) + |g(\xi) - g(\xi_n)|$$

sowie Satz 2: $V(\xi) \leqslant V(\xi - 0)$, und die nichtfallende Funktion V ist (wegen $V(\xi - 0) \leqslant V(\xi)$) in ξ linksseitig stetig; analog ist dann der Beweis bei rechtsseitiger Stetigkeit von g in $a \leqslant \xi < b$. — Im allgemeinen Falle sind daher mit den seitlich stetigen Funktionen g_ι, σ_ι überall deren totale Variationen von derselben Seite wie g stetig, und da auf jedem Intervall die totale Variation einer Summe höchstens der Summe der totalen Variationen der Summanden gleichkommt, folgt aus (6ι) die Behauptung.

---

[1]) Vgl. Lebesgue (1), S. 54.

3. *Satz 4:* Die Formeln (6ι) bzw. ($6r$) liefern entsprechend die einzigen Zerlegungen einer Funktion von beschränkter Schwankung g in eine linksseitige Sprungfunktion in $[a, b]$ und eine in $(a, b]$ linksseitig stetige Funktion bzw. in eine rechtsseitige Sprungfunktion in $[a, b]$ und eine in $[a, b)$ rechtsseitig stetige Funktion.

Beweis: Aus den Darstellungen (5) und Satz 3 folgt, dass die Funktionen σ_ι bzw. σ_r entsprechend links- und rechtsseitige Sprungfunktionen in $[a, b]$ sind.

Ist in der Zerlegung $g(x) = \gamma_\iota(x) + s_\iota(x)$ auch s_ι eine linksseitige Sprungfunktion in $[a, b]$ und γ_ι linksseitig stetig in $(a, b]$, so ist

$$g_\iota(x) - \gamma_\iota(x) = s_\iota(x) - \sigma_\iota(x) \tag{9}$$

linksseitig stetig, also $\overset{(-)}{\Delta} s_\iota(x) - \overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x) \equiv 0$ in $(a, b]$, woraus $s_\iota(x) \equiv \sigma_\iota(x)$ in $[a, b]$ und angesichts (9) auch $g_\iota(x) \equiv \gamma_\iota(x)$ folgt. — Analog ergibt sich die symmetrische Behauptung.

Satz 5: Alle drei Variationen einer links- bzw. rechtsseitigen Sprungfunktion g in $[a, b]$ sind ebensolche Sprungfunktionen, und deren Sprungstellen sind in den ihrigen enthalten.

Beweis: Ist z. B. g linksseitige Sprungfunktion in $[a, b]$, so existiert für die Folge $\{\xi_i\}$ deren Sprungstellen in $(a, x]$ und $\varepsilon > 0$ ein Index m mit $\sum\limits_{i>m} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(\xi_i) \right| < \varepsilon$. — Liegen in keinem der Teilintervalle einer Einteilung D von $[a, x]$ zwei der Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_m$, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(\xi_i) \right| - \varepsilon \leqslant v_D \leqslant \sum_{i} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(\xi_i) \right|.$$

Für eine normale Einteilungsfolge $\{D_n\}$ von $[a, x]$ ist daher angesichts der rechtsseitigen Stetigkeit von g in $[a, b)$ und Satz 2

$$\lim_{n \to \infty} v_{D_n} = V(x) = \sum_{i} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(\xi_i) \right| = \sum_{a < x_i \leq x} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) \right|.$$

Aus der Darstellung $g(x) = \sum\limits_{a < x_i \leq x} \overset{(-)}{\Delta} g(x_i)$, $g(a) = 0$ und Formel (8) folgt

$$g^{(p)}(x) = \sum_{a < x'_i \leq x} \left| \overset{(-)}{\Delta} g(x'_i) \right|, \quad g^{(n)}(x) = \sum_{a < x''_i \leq x} \left| \overset{(+)}{\Delta} g(x''_i) \right|,$$

wobei x'_i bzw. x''_i entsprechend Punkte x_i mit $\overset{(-)}{\Delta} g(x_i) > 0$ bzw. $\overset{(-)}{\Delta} g(x_i) < 0$ sind. Satz 3 liefert alsdann die Behauptung.

§ 3.

Nullmengen.

1. Das Mass einer Menge E bezüglich einer nichtfallenden Funktion g sei $g\{E\}$ [1]). «Nullmengen» bezüglich einer Funktion von beschränkter Schwankung g nennen wir Mengen N mit $g^{(p)}\{N\} = g^{(n)}\{N\} = 0$, was mit $V\{N\} = 0$ gleichbedeutend ist.

Wird $g^*(x) = g(-x)$ für $-b \leqslant x \leqslant -a$ gesetzt und die linksseitige Kontinuitätsfunktion bzw. Sprungfunktion von g^* in $[-b, -a]$ mit g^*_ι bzw. σ^*_ι bezeichnet, so ist leicht zu verifizieren, dass für jedes $a \leqslant x \leqslant b$ $\sigma^*_\iota(-x) = \sigma_r(x) - \sigma_r(b)$, demnach $g^*_\iota(-x) = g_r(x) + \sigma_r(b)$ ist. Ferner gilt

Bemerkung 1: Die Menge N^* aller der und nur der Punkte x, für die $-x$ zu N gehört, ist dann und nur dann eine Nullmenge bezüglich g^*_ι, wenn die Menge N eine Nullmenge bezüglich g_r ist.

Beweis: Ist $\{I^*_k\}$ eine Folge von die Menge N^* vollkommen überdeckenden Intervallen und I_k das zu I^*_k bezüglich des Nullpunktes spiegelsymmetrische Intervall, so überdeckt die Folge $\{I_k\}$ vollkommen die Menge N und umgekehrt. Für alle α und β ist ferner $|g^*_\iota(-\alpha) - g^*_\iota(-\beta)| = |g_r(\beta) - g_r(\alpha)|$, also sind für spiegelsymmetrische Einteilungen von bezüglich des Nullpunktes spiegelsymmetrischen Intervallen die entsprechenden Variationen von g^*_ι und g_r einander gleich, und dasselbe gilt für die totalen Variationen, woraus die Bemerkung folgt.

Bemerkung 2: Eine Nullmenge bezüglich der Funktionen g_1 und g_2 ist es auch bezüglich der Funktionen $g_1 \pm g_2$.

Auf jedem Intervall ist nämlich die totale Variation von $g_1 \pm g_2$ nicht grösser als die Summe derjenigen von g_1 und g_2.

Bemerkung 3: Das Komplement $[a, b] - M$ der Menge M sämtlicher in $[a, b]$ gelegener Unstetigkeitspunkte x der Funktion von beschränkter Schwankung g ist eine Nullmenge bezüglich jeder links-

---

[1]) Wird $G(I) = g(b) - g(a)$ für $I = [a, b]$ gesetzt, so bildet bekanntlich die untere Grenze $g_a\{E\}$ solcher Summen $\sum\limits_k G(I_k)$, dass $\{I_k\}$ eine Folge von die Menge E vollkommen überdeckenden Intervallen ist, ein äusseres Mass im Sinne von *Carathéodory*. Für die bezüglich $g_a\{E\}$ messbaren Mengen e ist nun $g\{e\} = g_a\{e\}$. Insbesondere ist $g\{[a, b]\} = g(b+0) - g(a-0)$, $g\{[a, b)\} = g(b-0) - g(a-0)$, $g\{(a, b]\} = g(b+0) - g(a+0)$, $g\{(a, b)\} = g(b-0) - g(a+0)$.

oder rechtsseitigen Sprungfunktion in $[a, b]$, deren sämtliche Unstetigkeitspunkte in M enthalten sind. Insbesondere ist $[a, b] - M$ eine Nullmenge bezüglich σ_l und σ_r.

Beweis: Für eine nichtfallende linksseitige Sprungfunktion G in $[a, b]$, deren sämtliche Unstetigkeitspunkte ξ_i in M enthalten sind, ist wegen ihrer rechtsseitigen Stetigkeit, der Relation (5ι) und $-\overset{(-)}{\Delta} G(a) = G(a-0)$:

$$G\{[a, b]\} = G(b) - G(a-0) = \sum_{a \leq \xi_i \leq b} \overset{(-)}{\Delta} G(\xi_i).$$

Dies ist aber der Wert von $G\{M\}$, woraus $G\{[a, b] - M\} = 0$ folgt. Vermöge des Satzes 5 ergibt sich die Behauptung für alle linksseitigen Sprungfunktionen der Bemerkung 3. Für eine rechtsseitige Sprungfunktion G der Bemerkung 3 ergibt sie sich analog (oder unter Verwendung der Relation $G(x) = [G^*(x)]^*$ und der Bemerkung 1).

Abschnitt 2.

Theorie der links- und rechtsseitigen Stieltjesintegrale.

§ 1.

Elementare Rechenregeln.

Die Definition der Integrale $\overset{(-)}{\int}{}_a^b f\,dg$, $\overset{(+)}{\int}{}_a^b f\,dg$, die in der Einleitung für $a < b$ gegeben wurde, ergänzen wir durch die Festsetzungen:

$$\overset{(\sim)}{\int}{}_\alpha^\alpha f\,dg = 0, \quad \overset{(\sim)}{\int}{}_\beta^\alpha f\,dg = -\overset{(\sim)}{\int}{}_\alpha^\beta f\,dg \quad \text{für } \beta > \alpha,$$

worin $\sim$ eines der Zeichen $+$, $-$ ersetzt. Alsdann gilt für jede α, β, γ aus $[a, b]$:

$$\overset{(\sim)}{\int}{}_\alpha^\beta f\,dg + \overset{(\sim)}{\int}{}_\beta^\gamma f\,dg + \overset{(\sim)}{\int}{}_\gamma^\alpha f\,dg = 0.$$

Einfache Zusammenhänge zwischen den eingeführten Integralen ergeben sich:

a) Durch folgendes «Spiegelungsprinzip»:

Wird für $-b \leqslant t \leqslant -a$: $f^*(t) = f(-t)$, $g^*(t) = g(-t)$ gesetzt, so ist die Existenz von $\int_a^{(-)b} f\,dg$ bzw. $\int_a^{(+)b} f\,dg$ entsprechend mit derjenigen von $\int_{-b}^{(+)-a} f^*\,dg^*$ bzw. $\int_{-b}^{(-)-a} f^*\,dg^*$ äquivalent, und es ist

$$\int_a^{(-)b} f\,dg = -\int_{-b}^{(+)-a} f^*\,dg^*, \quad \int_a^{(+)b} f\,dg = -\int_{-b}^{(-)-a} f^*\,dg^*. \tag{10}$$

Beweis: Sind D und D^* entsprechend spiegelsymmetrische Einteilungen der Intervalle $[a, b]$ und $[-b, -a]$, so ist $\overset{(-)}{A}_D[f, g] = -\overset{(+)}{A}_{D^*}[f^*, g^*]$, woraus durch Grenzübergang die erste Behauptung folgt, aus dieser aber vermöge der Relation $[f^*(t)]^* = f(t)$ die zweite.

b) Durch «partielle Integration»:

Die Existenz von $\int_a^{(-)b} f\,dg$ ist äquivalent mit derjenigen von $\int_a^{(+)b} g\,df$, und es ist

$$\int_a^{(-)b} f\,dg = fg\Big]_a^b - \int_a^{(+)b} g\,df. \tag{11}$$

Dies folgt durch Grenzübergang aus der Gleichheit

$$\overset{(-)}{A}_D[f, g] = fg\Big]_a^b - \overset{(+)}{A}_D[g, f].$$

Ferner ist:

$$\int_a^{(\sim)b} (f_1 \pm f_2)\,dg = \int_a^{(\sim)b} f_1\,dg \pm \int_a^{(\sim)b} f_2\,dg, \tag{12}$$

$$\int_a^{(\sim)b} f\,d(g_1 \pm g_2) = \int_a^{(\sim)b} f\,dg_1 \pm \int_a^{(\sim)b} f\,dg_2, \tag{13}$$

$$\int_a^{(\sim)b} f\,dg = 0 \quad \text{für} \quad g = \text{const.}, \tag{14}$$

$$\int_a^{(\sim)b} dg = g(b) - g(a). \tag{15}$$

Dabei zieht in (12) und (13) die Existenz der Integrale zur rechten Seite diejenige des Integrals zur linken nach sich.

Obige Relationen folgen aus analogen für die A-Summen bestehenden.

§ 2.

Existenzsätze.

1. Fundamental für die weiteren Betrachtungen ist folgender

Satz 6: Ist im Intervall $[a, b]$ die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung, so ist es für die Existenz von $\overset{(-)}{\int_a^b} f\,dg$ notwendig und hinreichend, dass

1° in jedem linksseitigen im Intervall $(a, b]$ gelegenen Unstetigkeitspunkt x der Funktion g die Funktion f eine linksseitige Grenze $f(x-0)$ hat;

2° die Menge N der linksseitigen im Inneren von $[a, b]$ gelegenen Unstetigkeitspunkte der Funktion f eine Nullmenge bezüglich der linksseitigen Kontinuitätsfunktion g_ι von g ist.

Dann existiert das Lebesgue-Stieltjessche Integral $\int_{[a,b)} f\,dg_\iota$ über dem Intervall $[a, b)$, und es ist

$$\overset{(-)}{\int_a^b} f\,dg = \int_{[a,b)} f\,dg_\iota + \sum_{a<x_i\leq b} f(x_i - 0)\overset{(-)}{\Delta} g(x_i)\,, \tag{16}$$

wobei die Summation sich auf alle im Intervall $(a, b]$ gelegenen linksseitigen Unstetigkeitspunkte x_i der Funktion g erstreckt.

Beweis: Obige Bedingungen sind hinreichend. Es sei nämlich zunächst die Funktion g_ι nichtfallend und $g_\iota\{N\} = 0$. Bilden die Einteilungen D_n von $[a, b]$ mit den Teilungspunkten $a = t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{r_n}^{(n)} = b$ eine normale Folge, so sind die streckenweise konstanten, als $f_n(t) = f(t_i^{(n)})$ für $t_i^{(n)} \leqslant t < t_{i+1}^{(n)}$, $(i = 0, 1, \ldots, r_n - 1)$, definierten Funktionen, B— messbar in $[a, b)$, also messbar bezüglich g_ι. Für $t_{i_n(x)}^{(n)} \leqslant x < t_{i_n(x)+1}^{(n)}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} t_{i_n(x)}^{(n)} = x$ und wenn $x = a$ oder die Funktion f in x linksseitig stetig ist, also für x aus $[a, b) - N$,

$$\lim f_n(x) = f(x)\,. \tag{17}$$

Die Funktion f ist daher sowohl auf $[a, b) - N$ als Grenzwert bezüglich g_ι messbarer Funktionen, wie auch auf N, als einer Nullmenge, und demnach in $[a, b)$ bezüglich g_ι messbar. Da die Wertmenge von f_n für jedes n durch die Grenzen derjenigen von f beschränkt ist, folgt aus (17) auf Grund eines bekannten Satzes von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b)-N} f_n dg_\iota = \int\limits_{[a,b)-N} f dg_\iota$$

und wegen

$$\int\limits_N f_n dg_\iota = \int\limits_N f dg_\iota = 0$$

sogar

$$\lim \int\limits_{[a,b)} f_n dg_\iota = \int\limits_{[a,b)} f dg_\iota .$$

Anderseits ist angesichts $g_\iota\{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})\} = g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(t_i^{(n)})$:

$$\int\limits_{[a,b)} f_n dg_\iota = \sum_{i=0}^{r_n-1} \int\limits_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})} f_n dg_\iota = \sum_{i=0}^{r_n-1} \int\limits_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})} f(t_i^{(n)})\, dg_\iota = \sum_{i=0}^{r_n-1} f(t_i^{(n)}) \cdot g_\iota\{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})\} = \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, g_\iota].$$

Daher ergibt sich $\overset{(-)}{\int_a^b} f dg_\iota = \int\limits_{[a,b)} f dg_\iota$, was sich vermöge der Korrolars zum Satz 2 und der Relation (13) auf jede den Bedingungen des Satzes 6 genügende Funktion g_ι überträgt. Wegen $g(t) = g_\iota(t) + \sigma_\iota(t)$ ist dann nur noch

$$\overset{(-)}{\int_a^b} f d\sigma_\iota = \sum_{a<x_i\leq b} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i)$$

zu beweisen. Dies geht aus der Existenz der linksseitigen Grenze von f in den Sprungstellen von σ_ι durch folgende Fallunterscheidung hervor:

a) Die Funktion σ_ι hat in $(a, b]$ endlichviele Sprungstellen.

Für genügend grosse n liegt dann in einem Teilintervall von D_n höchstens eine dieser Stellen $x_i (i = 1, \ldots, m)$. Zählen wir sie demjenigen Teilintervall $(\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]$ zu, in dessen Innerem oder rechtem Ende sie liegt, so ist

$$\overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i^{(n)}) \cdot \overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i)$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_i^{(n)}) = f(x_i - 0)$, also es existiert

$$\overset{(-)}{\int_a^b} f d\sigma_\iota = \sum_{i=1}^{m} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i) = \sum_{a<x_i\leq b} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i).$$

b) Die Funktion σ_ι hat in $(a, b]$ abzählbar viele Sprungstellen.

Ist K die obere Grenze von $|f|$ in $[a, b]$ und $\varepsilon > 0$, so ist dann für einen Index N: $K \cdot \sum_{i=N}^{\infty} |\overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i)| < \varepsilon$. Sind ferner $\sigma^{(m)}$ und $\varrho^{(m)}$ linksseitige Sprungfunktionen in $[a, b]$ mit den Sprungstellen $x_1, \ldots, x_m$ bzw. $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$, wobei in x_i der Sprung $\overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i)$ beträgt, so ist $\sigma_\iota(t) = \sigma^{(m)}(t) + \varrho^{(m)}(t)$ für jedes m und $a \leqslant t \leqslant b$. Für $m > N$ ist also

$$\left|\overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] - \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma^{(m)}]\right| = \left|\overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \varrho^{(m)}]\right| \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} K \cdot |\overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i)| \leqslant K \cdot \sum_{i=N}^{\infty} |\overset{(-)}{\Delta} \sigma_\iota(x_i)| < \varepsilon,$$

demnach

$$\overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma^{(m)}] - \varepsilon < \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] < \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma^{(m)}] + \varepsilon.$$

In der Grenze ist zufolge *a)*

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - \varepsilon \leqslant \liminf_{n \succ \infty} \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] \leqslant \limsup_{n \succ \infty} \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) + \varepsilon,$$

was angesichts der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i)$ [1]) auch für $m = \infty$ gilt, woraus sich wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \succ \infty} \overset{(-)}{A}_{D_n}[f, \sigma_\iota] = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) = \sum_{a < x_i \leq b} f(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i)$$

ergibt, w. z. b. w.

2. Den Notwendigkeitsbeweis stützen wir auf 3 Lemmen.

Lemma 1: Ist für die unendlichen Zahlenfolgen $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ von einem Index an $a \leqslant x_n \leqslant y_n < z_n \leqslant b$ und konvergieren alle diese

---

[1]) Sie folgt aus derjenigen von $\sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(-)}{\Delta} g(x_i)|$ und der Beschränktheit von f.

Folgen gegen denselben Punkt des Intervalls $[a, b]$, so ist es für die Existenz von $\int_a^{(-)b} f\,dg$ notwendig, dass

$$*)\ \lim_{n\to\infty} [f(x_n) - f(y_n)] \cdot [g(z_n) - g(y_n)] = 0$$

ist.

Beweis: Es sei $\{D_n\}$ eine solche normale Einteilungsfolge, dass x_n und z_n benachbarte Teilungspunkte von D_n sind. Die durch Hinzufügung des Teilungspunktes y_n entstehende Unterteilung Δ_n von D_n durchläuft ebenfalls eine normale Folge, daher ist

$$0 = \lim_{n\to\infty} \{\overset{(-)}{A}_{D_n}[f,g] - \overset{(-)}{A}_{\Delta_n}[f,g]\} = \lim_{n\to\infty} \{f(x_n) \cdot [g(z_n) - g(x_n)] -$$

$$- f(x_n)[g(y_n) - g(x_n)] - f(y_n)[g(z_n) - g(y_n)]\} = \lim_{n\to\infty} [f(x_n) - f(y_n)] \cdot [g(z_n) - g(y_n)].$$

Lemma 2: Für die Existenz von $\int_a^{(-)b} f\,dg$ ist es notwendig, dass

1° die Funktion f in jedem in $(a, b]$ gelegenen linksseitigen Unstetigkeitspunkt von g eine linksseitige Grenze hat,

2° die Funktion f in jedem in (a, b) gelegenen rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt von g linksseitig stetig ist.

Beweis: Ist x ein linksseitiger Unstetigkeitspunkt von g und $a < x \leqq b$, so existiert eine solche Punktfolge $\{\zeta_n\}$, dass

$$a \leqq \zeta_n < x, \lim_{n\to\infty} \zeta_n = x, \lim_{n\to\infty} g(\zeta_n) = A \neq g(x)$$

ist. Ferner existiert eine solche Teilfolge $\{\eta_n\}$ von $\{\zeta_n\}$, dass die Folge $\{f(\eta_n)\}$ einen Grenzwert B hat. Endlich ist in $\{\eta_n\}$ zu jeder Folge $\{x_n\}$ mit $x_n < x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ eine solche Teilfolge $\{y_n\}$ enthalten, dass $x_n \leqq y_n$ ist. Setzen wir $z_n = x$, so sind für die Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ die Voraussetzungen des Lemmas 1 erfüllt. Daher ist es für die Existenz von $\int_a^{(-)b} f\,dg$ notwendig, dass $*)$ gilt, oder wegen $\lim\limits_{n\to\infty} [g(z_n) - g(y_n)] = g(x) - A \neq 0$:

$0 = \lim_{n \to \infty} [f(x_n) - f(y_n)] = \lim_{n \to \infty} f(x_n) - B$, was angesichts der Beliebigkeit der linksseitig gegen x konvergierenden Folge $\{x_n\}$ besagt, dass f in x die linksseitige Grenze B hat.

Ist x ein im Intervall (a, b) gelegener rechtsseitiger Unstetigkeitspunkt von g, so existiert eine rechtsseitig gegen x konvergierende Punktfolge $\{z_n\}$, für die $\{g(z_n)\}$ eine von $g(x)$ verschiedene Grenze hat. Für eine beliebige gegen x linksseitig konvergierende Punktfolge $\{x_n\}$ und $y_n = x$ sind wieder die Voraussetzungen des Lemmas 1 erfüllt, daher ist es für die Existenz von $\overset{(-)b}{\int_a} f dg$ notwendig, dass $\lim_{n \to \infty} [f(x_n) - f(x)] \cdot [g(z_n) - g(x)] = 0$ ist und wegen $\lim_{n \to \infty} [g(z_n) - g(x)] \neq 0$ muss $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$, also f in x linksseitig stetig sein.

Lemma 3: Die Einteilungen $D_n = [a = t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{r_n}^{(n)} = b]$ mögen eine normale Folge bilden. — Ist die Funktion V in $[a, b]$ nichtfallend und linksseitig stetig, die Funktion f in jedem rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von V in (a, b) linksseitig stetig, jedoch die Menge N der linksseitigen Unstetigkeitspunkte der Funktion f in (a, b) keine Nullmenge bezüglich V, so liegt in jedem Teilintervall $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$ von D_n ein solcher Punkt $\zeta_i^{(n)}$, dass

$$(18) \qquad \liminf_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{r_n - 1} \left| f(t_i^{(n)}) - f(\zeta_i^{(n)}) \right| \cdot [V(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)})] > 0 \text{ ist.}$$

Beweis: Die Menge N_α der Punkte x von (a, b), in denen die linksseitige Oszillation von f (d. i. die untere Grenze der Oszillationen von f in sämtlichen Intervallen, deren rechter Endpunkt x ist) mindestens α beträgt, ist für jedes $\alpha > 0$ linksseitig abgeschlossen, d. h. enthält alle ihre linksseitigen Häufungspunkte. — Liegen nämlich für jedes $\varepsilon > 0$ im Inneren des Intervalls $[x - \varepsilon, x]$ Punkte von N_α, so auch ein Intervall, in dem die Oszillation von f nicht kleiner als α ist; daher ist die Oszillation von f in $[x - \varepsilon, x]$ nicht kleiner als α und $x \in N_\alpha$. — Eine linksseitig abgeschlossene Menge ist aber die Differenz von zwei Borelschen Mengen: ihrer abgeschlossenen Hülle und einer Teilmenge der höchstens abzählbaren Menge derjenigen ihrer rechtsseitigen Häufungspunkte, die linksseitig von ihr isoliert sind. Für jedes $\alpha > 0$ ist daher N_α, also auch $N = \sum_{i=1}^{\infty} N_{\frac{1}{i}}$, eine Borelsche und demnach bezüglich V messbare Menge.

Ist nun $V\{N\} > 0$, so muss angesichts

$$V\{N\} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} V\{N_{\frac{1}{i}}\}$$

$V\{N_{3\alpha}\} > 0$ für ein $\alpha > 0$ sein und die Einteilung D_n Teilintervalle I mit $V\{N_{3\alpha} \cdot I\} > 0$ enthalten. Für diese nach wachsenden rechten Endpunkten angeordneten Teilintervalle $[a_j^{(n)}, b_j^{(n)}]$ $(j = 0, \ldots, s_n)$ ist

$$V\{N_{3\alpha} \cdot [a_j^{(n)}, b_j^{(n)}]\} = w_j^{(n)} > 0,\ w = V\{N_{3\alpha}\} = \sum_{j=0}^{s_n} w_j^{(n)}.$$

Es sei $\lambda_j^{(n)}$ die untere Grenze der Menge der rechtsseitigen Häufungspunkte von $N_{3\alpha} \cdot [a_j^{(n)}, b_j^{(n)}]$. Die Menge $N_{3\alpha} \cdot [a_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}]$ kann ausser $\lambda_j^{(n)}$ nur rechtsseitig isolierte Punkte enthalten, bildet daher als höchstens abzählbar eine Nullmenge bezüglich der voraussetzungsgemäss in den Punkten von $N_{3\alpha}$ stetigen Funktion V. Deshalb ist

$$w_j^{(n)} = V\{N_{3\alpha} \cdot (\lambda_j^{(n)}, b_j^{(n)})\} \leqslant V\{(\lambda_j^{(n)}, b_j^{(n)})\} = V(b_j^{(n)}) - V(\lambda_j^{(n)} + 0)$$

und da $\lambda_j^{(n)}$ ein rechtsseitiger Häufungspunkt von $N_{3\alpha}$ ist, existiert in $N_{3\alpha} \cdot (\lambda_j^{(n)}, b_j^{(n)})$ ein Punkt $\eta_j^{(n)}$ mit $V(b_j^{(n)}) - V(\eta_j^{(n)}) > \frac{1}{2} w_j^{(n)}$. Ferner existiert ein Punkt $a_j^{(n)} < \xi_j^{(n)} \leqslant \eta_j^{(n)}$ mit $|f(a_j^{(n)}) - f(\xi_j^{(n)})| > \alpha$. — Ansonsten wäre nämlich die Oszillation von f in $[a_j^{(n)}, \eta_j^{(n)}]$, also auch die linksseitige Oszillation von f in $\eta_j^{(n)}$, nicht grösser als 2α, obwohl $\eta_j^{(n)} \varepsilon N_{3\alpha}$ ist. Aus

$$V(b_j^{(n)}) - V(\xi_j^{(n)}) \geqslant V(b_j^{(n)}) - V(\eta_j^{(n)}) > \frac{1}{2} w_j^{(n)}$$

folgt daher

$$|f(a_j^{(n)}) - f(\xi_j^{(n)})| \cdot [V(b_j^{(n)}) - V(\xi_j^{(n)})] > \frac{1}{2} \alpha w_j^{(n)}$$

und

$$\sum_{j=0}^{s_n} |f(a_j^{(n)}) - f(\xi_j^{(n)})| \cdot [V(b_j^{(n)}) - V(\xi_j^{(n)})] > \frac{1}{2} \alpha w > 0.$$

Setzen wir nun $\zeta_i^{(n)} = t_i^{(n)}$, falls $t_i^{(n)}$ mit keinem der Punkte $a_j^{(n)}$ übereinstimmt, hingegen $\zeta_i^{(n)} = \xi_j^{(n)}$, falls $t_i^{(n)} = a_j^{(n)}$, so ist

$$\sum_{i=0}^{r_n-1} |f(t_i^{(n)}) - f(\zeta_i^{(n)})| \cdot [V(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)})] =$$

$$= \sum_{j=0}^{s_n} |f(a_j^{(n)}) - f(\xi_j^{(n)})| \cdot [V(b_j^{(n)}) - V(\xi_j^{(n)})] > \frac{1}{2}\alpha w > 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

3. Die Bedingungen des Satzes 6 sind notwendig. — Existiert nämlich $\overset{(-)}{\int}{}_a^b f\,dg$, so hat laut Lemma 2 die Funktion f in jedem in $(a, b]$ gelegenen linksseitigen Unstetigkeitspunkt von g, also auch von σ_ι, eine linksseitige Grenze. Daraus wurde aber beim Zulänglichkeitsbeweis die Existenz von $\overset{(-)}{\int}{}_a^b f\,d\sigma_\iota$ gefolgert. Gemäss (13) existiert daher wegen $g_\iota(t) = g(t) - \sigma_\iota(t)$ auch $\overset{(-)}{\int}{}_a^b f\,dg_\iota$.

Wäre nun N keine Nullmenge bezüglich g_ι, so auch nicht bezüglich deren totaler Variation in $[a, x]$: $V(x)$. Zufolge Korrolar zum Satz 2 ist aber V mit g_ι linksseitig stetig in $[a, b]$ und f gemäss Lemma 2 in jedem rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt von V in (a, b) linksseitig stetig, es müsste daher die Ungleichung (18) gelten. Sind jedoch Δ_n, D_n', D_n'' Unterteilungen von D_n, die entsprechend durch Hinzufügung als Teilungspunkte sämtlicher Punkte $\zeta_i^{(n)} (i = 0, \dots r_{n-1})$ bzw. sämtlicher Punkte $\zeta_i^{(n)}$ mit nichtpositivem bzw. mit positivem Wert von $[f(t_i^{(n)}) - f(\zeta_i^{(n)})] \cdot [g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})]$ entstehen, so muss

$$(18') \quad \lim_{n\to\infty} \{\overset{(-)}{A}_{D_n'}[f, g_\iota] - \overset{(-)}{A}_{D_n''}[f, g_\iota]\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} |f(t_i^{(n)}) - f(\zeta_i^{(n)})| \cdot |g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})| = 0$$

sein. — Ferner ist laut Satz 2 $\lim\limits_{n\to\infty} [V(b) - v_{\Delta_n}] = 0$ und

$$V(b) - v_{\Delta_n} = V(b) - V(a) - \sum_{i=0}^{r_n-1} [|g_\iota(\zeta_i^{(n)}) - g_\iota(t_i^{(n)})| + |g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})|] =$$

$$\sum_{i=0}^{r_n-1} [V(\zeta_i^{(n)}) - V(t_i^{(n)}) - |g_\iota(\zeta_i^{(n)}) - g_\iota(t_i^{(n)})|] + \sum_{i=0}^{r_n-1} [V(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)}) - |g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})|] \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=0}^{r_n-1} [V(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)}) - |g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})|] \geqq 0,$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} V[(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)}) - |g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)})|] = 0.$$

Wegen der Beschränktheit von f folgt daraus

$$(18'') \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} \left| f(t_i^{(n)}) - f(\zeta_i^{(n)}) \right| \cdot \left[V(t_{i+1}^{(n)}) - V(\zeta_i^{(n)}) - \left| g_\iota(t_{i+1}^{(n)}) - g_\iota(\zeta_i^{(n)}) \right| \right] = 0,$$

was nach Addition zu (18′) einen Widerspruch mit (18) liefert.

4. Vermöge des Spiegelungsprinzips und der Bemerkung 1 folgt aus Satz 6 mit Leichtigkeit [1]) der duale

Satz 6′: Ist in $[a, b]$ die Funktion f beschränkt und die Funktion g von beschränkter Schwankung, so ist es für die Existenz von $\overset{(+)}{\int_a^b} f\,dg$ notwendig und hinreichend, dass

1º die Funktion f in jedem in $[a, b)$ gelegenen rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt x der Funktion g eine rechtsseitige Grenze $f(x+0)$ hat;

2º die Menge der im Inneren von $[a, b]$ gelegenen rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte der Funktion f eine Nullmenge bezüglich der Funktion g_r ist.

Alsdann existiert $\int\limits_{[a,b]} f\,dg_r$, und es ist

$$(16') \qquad \overset{(+)}{\int_a^b} f\,dg = \int\limits_{[a,b]} f\,dg_r + \sum_{a \le x_i < b} f(x_i + 0) \cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i),$$

wobei die Summation sich auf alle in $[a, b)$ gelegenen rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte x_i der Funktion g erstreckt.

5. Als Frucht des Bewiesenen erhalten wir

Korollar 1 zum Satz 6: Die Funktion g sei in $[a, b]$ von beschränkter Schwankung. — Aus der Existenz von $\overset{(\sim)}{\int_a^b} f\,dg$ folgt:

a) diejenige von $\overset{(\sim)}{\int_a^b} |f|\,dg$, falls f in $[a, b]$ beschränkt ist;

b) diejenige von $\overset{(\sim)}{\int_a^b} \frac{1}{f}\,dg$, falls dort überdies $f \neq 0$ und $\frac{1}{f}$ beschränkt ist.

---

[1]) Dabei ist die wegen $g_\iota^*(x) = g_r(-x) + \sigma_r(b)$ geltende Gleichheit

$$\int\limits_{[-b,-a)} f^*\,dg_\iota^* = -\int\limits_{(a,b]} f\,dg_r$$

zu berücksichtigen.

Existieren ferner für die in $[a, b]$ beschränkten Funktionen f_1 und f_2 die Integrale $\overset{(\sim)b}{\int_a} f_1 dg, \overset{(\sim)b}{\int_a} f_2 dg$, so existiert auch $\overset{(\sim)b}{\int_a} f_1 f_2 dg$. (Darin vertritt $\sim$ das Zeichen $+$ bzw. $-$.)

Beweis: Die Mengen der links- bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von $|f|$ und $\frac{1}{f}$ bzw. $f_1 \cdot f_2$ sind in den analogen von f bzw. in der Summe der analogen für f_1 und f_2 enthalten, und in allen Punkten, in denen die links- bzw. rechtsseitigen Grenzen von f bzw. von f_1 und f_2 existieren, trifft dasselbe für $|f|$ und $\frac{1}{f}$ bzw. für $f_1 \cdot f_2$ zu.

Korollar 2 zum Satz 6: Sind in $[a, b]$ die Funktionen f und g von beschränkter Schwankung, so existiert $\overset{(-)b}{\int_a} f dg$ bzw. $\overset{(+)b}{\int_a} f dg$ dann und nur dann, wenn die Funktion g entsprechend in den in (a, b) gelegenen linksseitigen Unstetigkeitspunkten von f rechtsseitig bzw. in den rechtsseitigen linksseitig stetig ist.

Beweis: Die Funktion f hat dann überall eine links- und rechtsseitige Grenze und höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte. Die Menge ihrer links- bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte in (a, b) ist daher dann und nur dann entsprechend eine Nullmenge bezüglich g_l bzw. g_r, wenn es jeder dieser Punkte ist, d. i. wenn die Funktion g_l bzw. g_r und demnach auch g, in jedem dieser Punkte rechts- bzw. linksseitig stetig ist.

Korollar 3 zum Satz 6: Ist in $[a, b]$ die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung und existiert eines der Integrale $\overset{(-)b}{\int_a} f dg, \overset{(+)b}{\int_a} f dg$, so existiert auch das Lebesgue-Stieltjessche Integral $\int_{[a,b]} f dg$, und es bestehen die Zusammenhänge:

$$(19) \quad \overset{(-)b}{\int_a} f dg = \int_{[a,b]} f dg - \sum_{a < x_i \leq b} \overset{(-)}{\Delta} f(x_i) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - f(a) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) - f(b) \cdot \overset{(+)}{\Delta} g(b),$$

$$(19') \quad \overset{(+)b}{\int_a} f dg = \int_{[a,b]} f dg + \sum_{a \leq x_i < b} \overset{(+)}{\Delta} f(x_i) \cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i) - f(a) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) - f(b) \cdot \overset{(+)}{\Delta} g(b).$$

Überdies existiert dann das Perron-Stieltjessche Integral im Sinne von *Ward* (1) $(\mathrm{PS})\int_a^b f dg$, und es ist:

$$(19'') \qquad \int_a^{(-)b} f\,dg = (\mathrm{PS})\int_a^b f\,dg - \sum_{a<x_i\le b} \overset{(-)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i),$$

$$(19''') \qquad \int_a^{(+)b} f\,dg = (\mathrm{PS})\int_a^b f\,dg + \sum_{a\le x_i< b} \overset{(+)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i).$$

Beweis: Das Komplement $[a,b]-M$ der Menge M der in $[a,b]$ gelegenen Unstetigkeitspunkte x_i von g ist laut Bemerkung 3 eine Nullmenge bezüglich σ_ι. Daher existiert $\int_{[a,b]-M} f\,d\sigma_\iota = 0$, also auch

$$(19^*) \qquad \int_{[a,b]} f\,d\sigma_\iota = \int_M f\,d\sigma_\iota = \sum_{a\le x_i\le b} \int_{(x_i)} f\,d\sigma_\iota = \sum_{a\le x_i\le b} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i),$$

und es ist

$$\int_{(b)} f\,dg_\iota + \int_{[a,b]} f\,d\sigma_\iota - \sum_{a<x_i\le b} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - f(a)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) - f(b)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(b) = 0.$$

Die seitenweise Addition letzterer Gleichheit zu (16) liefert die Relation (19). Analog ergibt sich (19').

Nun existiert bekanntlich[1] mit $\int_{[a,b]} f\,dg$ auch $(\mathrm{PS})\int_a^b f\,dg$, wobei

$$(\overline{19}) \qquad (\mathrm{PS})\int_a^b f\,dg = \int_{[a,b]} f\,dg - f(a)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) - f(b)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(b)$$

ist, was die Formeln (19) und (19') entsprechend in (19'') und (19''') überführt. — Insbesondere stimmt daher $\int_a^{(-)b} f\,dg$ oder $\int_a^{(+)b} f\,dg$ mit $(\mathrm{PS})\int_a^b f\,dg$ überein, wenn die Funktionen f und g entsprechend keine gemeinsamen links- oder rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte haben.

6. Wie mildern sich die Existenzbedingungen für das linksseitige Integral, wenn das rechtsseitige existiert? Die Antwort enthält

Satz 7: Ist in $[a, b]$ die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung und existiert eines der Integrale $\int_a^{(-)b} f\,dg$, $\int_a^{(+)b} f\,dg$, so ist die Menge sämtlicher Unstetigkeitspunkte

[1]) Vgl. Saks (1), S. 208.

der Funktion f in $[a, b]$ eine Nullmenge bezüglich der Funktion $\gamma(x) = g(x) - \sigma(x)$ (σ = Sprungfunktion von g). — Für die Existenz des zweiten obiger Integrale sind dann die notwendigen Bedingungen des Lemmas 2 (bzw. die sich durch Vertauschung sämtlicher Bezeichnungen «rechtsseitig», «linksseitig» ergebenden dualen Bedingungen) auch hinreichend.

Beweis: Es seien $N^{(l)}$ und $N^{(r)}$ entsprechend die Mengen der links- und rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von f in (a, b), $N_\alpha^{(l)}$ und $N_\alpha^{(r)}$ die Mengen der Punkte, in denen die links- bzw. rechtsseitige Oszillation von f mindestens α beträgt, $\Gamma(x)$ die Totalvariation von γ in $[a, x]$. — Entsteht $N_\alpha^{(l)\prime}$ aus $N_\alpha^{(l)}$ durch Streichung der höchstens abzählbaren Menge ihrer sämtlichen rechtsseitig isolierten Punkte (die eine Nullmenge bezüglich der stetigen Funktion Γ ist), so ist $\Gamma\{N_\alpha^{(l)\prime}\} = \Gamma\{N_\alpha^{(l)}\}$. — Anderseits ist für x aus $N_\alpha^{(l)\prime}$ bei jedem $\varepsilon > 0$ in $\overset{[+]}{\mathrm{I}}(x, \varepsilon)$ ein Punkt von $N_\alpha^{(l)}$ enthalten, also auch ein Intervall, in dem die Oszillation von f mindestens α beträgt. Daher ist $N_\alpha^{(l)\prime} < N_\alpha^{(r)}$, also $\Gamma\{N_\alpha^{(l)}\} = \Gamma\{N_\alpha^{(l)\prime}\} \leqslant \Gamma\{N_\alpha^{(r)}\}$.

Analog beweist man $\Gamma\{N_\alpha^{(r)}\} \leqslant \Gamma\{N_\alpha^{(l)}\}$, also $\Gamma\{N_\alpha^{(l)}\} = \Gamma\{N_\alpha^{(r)}\}$. Aus

$$\Gamma\{N^{(l)}\} = \lim_{k \to \infty} \Gamma\{N_{\frac{1}{k}}^{(l)}\}, \quad \Gamma\{N^{(r)}\} = \lim_{k \to \infty} \Gamma\{N_{\frac{1}{k}}^{(r)}\}$$

folgt dann
$$\Gamma\{N^{(l)}\} = \Gamma\{N^{(r)}\}.$$

Existiert nun $\overset{(+)b}{\int_a} f\,dg$, so ist $N^{(r)}$ laut Satz 6′ eine Nullmenge bezüglich g_r, liegt daher im Komplement der Menge der Unstetigkeitspunkte von σ_l, ist also zufolge Bemerkung 3 eine Nullmenge bezüglich σ_l und gemäss Bemerkung 2 auch bezüglich $\gamma = g_r - \sigma_l$. Dann ist $\Gamma\{N^{(l)}\} = \Gamma\{N^{(r)}\} = 0$, woraus sofort die erste Behauptung des Satzes 7 folgt. — Ist ferner f in den rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von g in (a, b) linksseitig stetig (2. Bedingung des Lemmas 2), so enthält $N^{(l)}$ keine Unstetigkeitspunkte von σ_r, bildet also eine Nullmenge bezüglich σ_r und demnach auch bezüglich $g_l = \gamma + \sigma_r$. Die Hinzufügung der ersten Bedingung des Lemmas 2 sichert dann zufolge Satz 6 die Existenz von $\overset{(-)b}{\int_a} f\,dg$. — Existiert $\overset{(-)b}{\int_a} f\,dg$, so liefert das Spiegelungsprinzip die entsprechenden Existenzbedingungen für $\overset{(+)b}{\int_a} f\,dg$.

§ 3.

Anwendungen auf andere Integralbegriffe.

1. Interessante Konsequenzen folgen aus den Sätzen 6 und 7 für andere Integralbegriffe. So liefert ein «massfreies» Existenzkriterium für das Riemann-Stieltjessche Integral $\int_a^b f dg$ der

Satz 8: Ist in $[a, b]$ die Funktion f beschränkt und die Funktion g von beschränkter Schwankung, so ist es für die Existenz von $\int_a^b f dg$ notwendig und hinreichend, dass

1° eines der Integrale $\int_a^{(-)b} f dg$, $\int_a^{(+)b} f dg$ existiert;

2° die Funktionen f und g keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte in $[a, b]$ besitzen.

Beweis: die Notwendigkeit obiger Bedingungen ist bekannt. Sind sie erfüllt, so ist zufolge Satz 7 die Menge sämtlicher Unstetigkeitspunkte der Funktion f in $[a, b]$ eine Nullmenge bezüglich γ. Überdies liegt sie dann im Komplement der Menge der Unstetigkeitspunkte von g, bildet daher gemäss Bemerkung 3 auch eine Nullmenge bezüglich σ_l und σ_r, also gemäss Bemerkung 2 bezüglich der Funktion $g = \gamma + \sigma_l + \sigma_r$. Letzteres genügt aber nach einem Satz von *Bliss*[1]) (1) für die Existenz von $\int_a^b f dg$.

Insbesondere genügt für die Existenz des Riemannschen Integrals $\int_a^b f(x) dx$ bei beschränktem f sowohl die Konvergenz der Summen $\Sigma f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ wie auch diejenige der Summen $\Sigma f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$[2]). *Cauchy* hatte ursprünglich das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ gerade als Grenzwert der ersteren Summen definiert — allerdings nur für stetige $f(x)$. Die als Spezialfall des Satzes 8 resultierende vollständige Äquivalenz dieser Cauchyschen mit der Riemannschen Integraldefinition ist bereits von *Gillespie* (1) bewiesen worden.

---

[1]) Vgl. auch *Carmichael* (1).

[2]) In Verschärfung des Lebesgueschen Kriteriums ist es daher angesichts des Satzes 6 für die Existenz von $\int_a^b f(x) dx$ notwendig und hinreichend, dass die Menge der links- *oder* rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von f in (a, b) das Lebesguesche Mass 0 hat.

Ferner wird der Zusammenhang zwischen $\int\limits_a^b f\,dg$ und $\int\limits_{[a,b]} f\,dg$ vollständig übersichtlich durch folgende Spezialisierung des Korollars 3 zum Satz 6:

Satz 8a: Ist in $[a, b]$ die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung und existiert das Riemann-Stieltjessche Integral $\int\limits_a^b f\,dg$, so existiert auch das Lebesgue-Stieltjessche Integral $\int\limits_{[a,b]} f\,dg$, und es ist

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_{[a,b]} f\,dg - f(a)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) - f(b)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(b).$$

2. *H. L. Smith* (1) und *J. F. Steffensen* (1) haben für beschränkte Funktionen f, g den Grenzwert der Summen

$$\sum \frac{1}{2}\,[f(x_i) + f(x_{i+1})]\cdot[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

bei einer normalen Einteilungsfolge des Intervalls $[a, b]$ betrachtet. Das so definierte «mittlere» Stieltjesintegral $\overset{(\frac{1}{2})}{\int} f\,dg$ ist offenbar das arithmetische Mittel unserer links- und rechtsseitigen, und dessen Existenz und Rechenregeln folgen aus denjenigen der letzteren, während eine Umkehrung im allgemeinen unrichtig wäre. — Insbesondere liefert das Korollar 2 zum Satz 6 folgendes Ergebnis von *Fréchet* (1): Sind in $[a, b]$ die Funktionen f und g von beschränkter Schwankung und in jedem gemeinsamen Unstetigkeitspunkt «gleichseitig stetig», so existiert $\overset{(\frac{1}{2})}{\int} f\,dg$.

3. Schliesslich sind wir nun imstande, die allgemeine Regel der partiellen Integration für das Lebesgue-Stieltjessche Integral anzugeben. Es besagt nämlich

Satz 9: Für beliebige zwei Funktionen von beschränkter Schwankung in $[a, b]$, f und g, ist

$$(20)\quad \int\limits_{[a,b]} f\,dg + \int\limits_{[a,b]} g\,df = fg\Big]_{a-0}^{b+0} + \sum_{a\le x_i\le b}\Big[\overset{(-)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - \overset{(+)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i)\Big],$$

(wobei sich die Summation über sämtliche gemeinsamen Unstetigkeitspunkte von f und g in $[a, b]$ erstreckt).

Beweis: Existiert $\overset{(-)b}{\int_a} f\,dg$, so existiert auch $\overset{(+)b}{\int_a} g\,df$, und angesichts Formel (11) folgt aus (19) und (19′) nach leichter Umformung

$$\int\limits_{[a,b]} f\,dg = f(b)\,g(b+0) - f(a)\,g(a) + f(a-0)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(a) + \sum_{a<x_i<b} \overset{(-)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - \overset{(+)b}{\int_a} g\,df,$$

$$\int\limits_{[a,b]} g\,df = \overset{(+)}{\Delta} f(b)\cdot g(b+0) + g(a)\cdot \overset{(-)}{\Delta} f(a) - \sum_{a<x_i<b} \overset{(+)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i) + \overset{(+)b}{\int_a} g\,df,$$

was zusammen die Formel (20) ergibt.

Sind f, g zwei in $[a, b]$ nichtfallende Funktionen, ξ_i die rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von g in $[a, b]$, so sei $\varphi(\xi_i) = f(\xi_i - 0)$, sonst aber $\varphi(x) = f(x)$. Da die Funktion φ nichtfallend und in den Punkten ξ_i linksseitig stetig ist, existiert gemäss Korollar 2 zum Satz 6 $\overset{(-)b}{\int_a} \varphi\,dg$, also gilt Formel (20) mit φ statt f. Nun hat aber φ dieselben links- und rechtsseitigen Grenzen wie f, also ist einerseits $\varphi g\big]_{a-0}^{b+0} = f g\big]_{a-0}^{b+0}$ und

$$\sum_{a<x_i<b} \{\overset{(-)}{\Delta}[f(x_i) - \varphi(x_i)]\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - \overset{(+)}{\Delta}[f(x_i) - \varphi(x_i)]\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i)\} =$$

$$= \sum_{a<x_i<b} [f(x_i) - \varphi(x_i)]\cdot \Delta g(x_i) = \sum_{a\leq \xi_i\leq b} \overset{(-)}{\Delta} f(\xi_i)\,\Delta g(\xi_i),$$

demnach

$$\int\limits_{[a,b]} \varphi\,dg + \int\limits_{[a,b]} g\,d\varphi + \sum_{a\leq\xi_i\leq b} \overset{(-)}{\Delta} f(\xi_i)\cdot \Delta g(\xi_i) = f g\big]_{a-0}^{b+0} + \sum_{a<x_i<b} [\overset{(-)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) - \overset{(+)}{\Delta} f(x_i)\cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i)],$$

anderseits definiert die Funktion φ dasselbe Mass wie f, also ist

$$\int\limits_{[a,b]} g\,d\varphi = \int\limits_{[a,b]} g\,df.$$

Wird überdies

$$\int\limits_{[a,b]} (f - \varphi)\,dg = \sum_{a\leq\xi_i\leq b} \int\limits_{(\xi_i)} \overset{(-)}{\Delta} f\,dg = \sum_{a\leq\xi_i\leq b} \overset{(-)}{\Delta} f(\xi_i)\cdot \Delta g(\xi_i)$$

berücksichtigt, so ergibt sich wieder die Formel (20). — Da beide Seiten von (20) linear in f und g sind und jede Funktion von beschränkter Schwankung die Differenz zweier nichtfallender ist, resultiert die allgemeine Behauptung des Satzes 9.

In der Literatur (u. zw. bei Saks (1), S. 102) finde ich nur folgenden Spezialfall des Satzes 9:

Haben die Funktionen von beschränkter Schwankung f und g in $[a, b]$ keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte oder sind dort beide regulär, so ist

$$\int_{[a,b]} f dg + \int_{[a,b]} g df = fg\Big]_{a-0}^{b+0}.$$

In diesen Fällen ist entsprechend

$$\overset{(-)}{\varDelta} f(x) \cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x) \equiv \overset{(+)}{\varDelta} f(x) \cdot \overset{(+)}{\varDelta} g(x) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \overset{(+)}{\varDelta} f(x) \equiv \overset{(-)}{\varDelta} f(x), \overset{(+)}{\varDelta} g(x) \equiv \overset{(-)}{\varDelta} g(x),$$

also verschwindet der Summenausdruck in Formel (20).

Aus Formel (20) und $(\overline{19})$ folgt eine Regel der partiellen Integration für das Perron-Stieltjessche Integral, ausgedrückt als

Korollar zum Satz 9: Für beliebige zwei Funktionen von beschränkter Schwankung in $[a, b]$, f und g, ist

$$(20') \quad (\mathrm{PS})\int_a^b f dg + (\mathrm{PS})\int_a^b g df = fg\Big]_a^b + \sum_{a<x_i\leq b} \overset{(-)}{\varDelta} f(x_i) \cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x_i) - \sum_{a\leq x_i<b} \overset{(+)}{\varDelta} f(x_i) \cdot \overset{(+)}{\varDelta} g(x_i).$$

Haben die Funktionen f und g keine «gleichseitigen» Unstetigkeitspunkte gemeinsam, so vereinfacht sich letztere Formel durch Fortfallen der Summenausdrücke.

§ 4.

Die unbestimmten Integrale.

Mit Leichtigkeit kann nun auch die Struktur der unbestimmten links- und rechtsseitigen Integrale ermittelt werden. Es gilt nämlich

Satz 10: Ist im Intervall $[a, b]$ die Funktion f beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung, so sind dort die Funktionen

$$F(x) = \overset{(-)}{\int_a^x} f dg, \quad \varPhi(x) = \overset{(+)}{\int_a^x} f dg \text{ [1]}$$

von beschränkter Schwankung, und jede Nullmenge bezüglich g ist es auch bezüglich F und $\varPhi$. Die links- bzw. rechtsseitigen Kontinuitäts-

[1]) Deren Existenz folgt hier aus derjenigen von $\overset{(-)}{\int_a^b} f dg$ bzw. $\overset{(+)}{\int_a^b} f dg$ auf Grund von Satz 6 bzw. 6', könnte aber aus derselben auch direkt ohne Voraussetzung der beschränkten Schwankung von g abgeleitet werden.

funktionen F_ι, F_r, sowie Sprungfunktionen S_ι, S_r der Funktion F in $[a, b]$ bzw. die analogen Bestandteile Φ_ι, Φ_r, Σ_ι, Σ_r der Funktion Φ betragen dabei für $a \leqq x \leqq b$:

$$(21\iota) \qquad F_\iota(x) = \int_{[a,x)} f\,dg_\iota, \qquad S_\iota(x) = \sum_{a<x_i\leq x} f(x_i-0)\cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x_i),$$

$$(21r) \qquad F_r(x) = \int_{[a,x)} f\,d\gamma + S_\iota(x), \qquad S_r(x) = \sum_{a\leq x_i<x} f(x_i)\cdot \overset{(+)}{\varDelta} g(x_i),$$

$$(21'r) \qquad \Phi_r(x) = \int_{(a,x]} f\,dg_r, \qquad \Sigma_r(x) = \sum_{a\leq x_i<x} f(x_i+0)\cdot \overset{(+)}{\varDelta} g(x_i),$$

$$(21'\iota) \qquad \Phi_\iota(x) = \int_{(a,x]} f\,d\gamma + \Sigma_r(x), \qquad \Sigma_\iota(x) = \sum_{a<x_i\leq x} f(x_i)\cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x_i).$$

Beweis: Ist $V(t;g)$ die totale Variation der Funktion g in $[a, t]$, K die obere Grenze von $|f(t)|$ für $a \leqq t \leqq b$, v_D die einer Einteilung D des Intervalls $[t', t'']$ mit $a \leqq t' < t'' \leqq b$ entsprechende Variation von g, so ist $|\overset{(-)}{A}_D[f, g]| \leqq K \cdot v_D \leqq K[V(t'';g) - V(t';g)]$. Durchläuft D eine normale Einteilungsfolge, so resultiert in der Grenze

$$(21^*) \qquad |F(t'') - F(t')| \leqq K[V(t'';g) - V(t';g)].$$

Daher ist für jede Einteilung $\varDelta\{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ von $[\alpha, \beta]$ mit $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$

$$\sum_{i=0}^{m-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)| \leqq K[V(\beta;g) - V(\alpha;g)],$$

also auch $V(\beta;F) - V(\alpha;F) \leqq K \cdot [V(\beta;g) - V(\alpha;g)]$, weshalb jede Nullmenge bezüglich g es auch bezüglich F ist und für $\alpha = a$, $\beta = b$ die beschränkte Schwankung von F in $[a, b]$ folgt. — Analog ergeben sich die entsprechenden Behauptungen für Φ. — Aus (21*) und dem Korollar zum Satz 2 folgt ferner, dass $\overset{(-)}{\int}{}_a^x f\,dg_\iota$ und $\overset{(-)}{\int}{}_a^x f\,dg_r$ zusammen mit g_ι bzw. g_r entsprechend linksseitig stetig in $(a, b]$ bzw. rechtsseitig stetig in $[a, b)$ sind. Anderseits ist $\overset{(-)}{\int}{}_a^x f\,d\sigma_\iota = \sum_{a<x_i\leq x} f(x_i-0)\cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x_i)$ von der Form (7ι), also angesichts der Konvergenz von

$$\sum_{a<x_i\leq x} |f(x_i-0)\cdot \overset{(-)}{\varDelta} g(x_i)| \leqq K \cdot \sum_{a<x_i\leq x} |\overset{(-)}{\varDelta} g(x_i)|$$

eine linksseitige Sprungfunktion in $[a, b]$, während für $\int_a^{(-)x} f\,d\sigma_r = \int\limits_{[a,x)} f\,d\sigma_r$ wie bei Formel (19*) die absolut konvergente Darstellung $\sum\limits_{a \leq x_i < x} f(x_i) \cdot \overset{(+)}{\Delta} g(x_i)$ ableitbar, es also laut Satz 3 eine rechtsseitige Sprungfunktion in $[a, b]$ ist.

Angesichts der Zerlegungen

$$F(x) = \int_a^{(-)x} f\,dg_\iota + \int_a^{(-)x} f\,d\sigma_\iota = \int_a^{(-)x} f\,dg_r + \int_a^{(-)x} f\,d\sigma_r$$

und der Gleichheiten

$$\int_a^{(-)x} f\,dg_\iota = \int\limits_{[a,x)} f\,dg_\iota, \quad \int_a^{(-)x} f\,dg_r = \int\limits_{[a,x)} f\,d\gamma + \int_a^{(-)x} f\,d\sigma_\iota$$

gelten zufolge Satz 4 die Formeln (21). — Analog sind die Formeln (21′) zu beweisen.

§ 5.

Iterierte Integrale.

Einige auch für die versicherungsmathematischen Anwendungen benötigte Sätze über iterierte Integrale sollen in voller Allgemeinheit bewiesen werden.

Satz 11: Sind in $[a, b]$ die Funktionen f_1 und f_2 beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung, so gilt jede der Relationen

(22a) $$\int_a^{(-)b} f_1\,d\int_a^{(-)x} f_2\,dg = \int_a^{(-)b} f_1 f_2\,dg;$$

(22b) $$\int_a^{(-)b} f_1\,d\int_a^{(-)x} f_2\,dg = \int_a^{(-)b} f_2\,d\int_a^{(-)x} f_1\,dg;$$

(22′a) $$\int_a^{(+)b} f_1\,d\int_a^{(+)x} f_2\,dg = \int_a^{(+)b} f_1 f_2\,dg;$$

(22′b) $$\int_a^{(+)b} f_1\,d\int_a^{(+)x} f_2\,dg = \int_a^{(+)b} f_2\,d\int_a^{(+)x} f_1\,dg,$$

falls die in ihr auftretenden Integrale existieren. Hiezu genügt für die Relationen (22) bzw. (22′) entsprechend die Existenz von $\int_a^{(-)b} f_1\,dg$ und $\int_a^{(-)b} f_2\,dg$ bzw. von $\int_a^{(+)b} f_1\,dg$ und $\int_a^{(+)b} f_2\,dg$.

Beweis: Existieren die Integrale in Formel (22a), so ergibt die Anwendung der Formeln (21ι) auf $F(x) = \int_a^{(-)x} f_2\,dg$ und $\int_a^{(-)b} f_1\,dF$ wegen

$$\int\limits_{[a,b)} f_1 d \int\limits_{[a,x)} f_2 dg_\iota = \int\limits_{[a,b)} f_1 f_2 dg_\iota :$$

$$\int_a^{(-)b} f_1 d \int_a^{(-)x} f_2 dg = \sum_{a<x_i\leq b} f_1(x_i - 0) f_2(x_i - 0) \cdot \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) + \int\limits_{[a,b)} f_1 f_2 dg_\iota .$$

Darin stellt die rechte Seite einerseits [gemäss (16)] das Integral $\int_a^{(-)b} f_1 f_2 dg$ dar, anderseits ist sie symmetrisch in f_1 und f_2, was entsprechend die Relationen (22a) und (22b) liefert.

Mit $\int_a^{(-)b} f_1 dg$ und $\int_a^{(-)b} f_2 dg$ existiert nun laut Korollar 1 zum Satz 6 auch $\int_a^{(-)b} f_1 f_2 dg$. Ferner bilden die linksseitigen Unstetigkeitspunkte von f_1 in (a, b) eine Nullmenge bezüglich g_ι, also laut Satz 10 auch bezüglich F_ι. Da die Funktion f_1 in den linksseitigen Unstetigkeitspunkten von F in $(a, b]$ (die unter den analogen von g enthalten sind) eine linksseitige Grenze hat, existiert laut Satz 6 $\int_a^{(-)b} f_1 dF = \int_a^{(-)b} f_1 d \int_a^{(-)x} f_2 dg$ und aus Symmetriegründen auch $\int_a^{(-)b} f_2 d \int_a^{(-)x} f_1 dg$. — Vermöge des Spiegelungsprinzips resultieren daraus die entsprechenden Behauptungen für die rechtsseitigen Integrale.

Die partielle Integration der inneren Integrale in (22a) bzw. (22$'a$) liefert

Korollar 1 zum Satz 11: Unter den Voraussetzungen des Satzes 11 gelten die Formeln

$$\int_a^{(-)b} f_1 d(f_2 g) = \int_a^{(-)b} f_1 f_2 dg + \int_a^{(-)b} f_1 d \int_a^{(+)x} g df_2, \tag{23}$$

$$\int_a^{(+)b} f_1 d(f_2 g) = \int_a^{(+)b} f_1 f_2 dg + \int_a^{(+)b} f_1 d \int_a^{(-)x} g df_2, \tag{23'}$$

falls entsprechend die in den Formeln (22a) bzw. (22$'a$) auftretenden Integrale existieren.

Mit Leichtigkeit ergibt sich auch

Korollar 2 zum Satz 11: Es seien in $[a, b]$ die Funktion g von beschränkter Schwankung, die Funktionen $f \neq 0$ und $\frac{1}{f}$ beschränkt. Existiert dann $\int_a^{(-)b} f dg$ bzw. $\int_a^{(+)b} f dg$, so ist entsprechend für $a \leqq t \leqq b$

$$g(t) = g(a) + \int_a^{(-)t} \frac{1}{f}\, dF \text{ mit } F(t) = \int_a^{(-)t} f\, dg \tag{24}$$

bzw.

$$g(t) = g(a) + \int_a^{(+)t} \frac{1}{f}\, d\Phi \text{ mit } \Phi(t) = \int_a^{(+)t} f\, dg. \tag{24'}$$

Beweis: Gemäss Korollar 1 zum Satz 6 existiert in diesen Fällen $\int_a^{(-)b} \frac{1}{f}\, dg$ bzw. $\int_a^{(+)b} \frac{1}{f}\, dg$. Für $f_1(t) = \frac{1}{f(t)}$, $f_2(t) = f(t)$ gehen daher die Formeln (22a) bzw. (22$'a$) nach Ersetzung von b durch t entsprechend in (24) bzw. (24') über. — Ferner gilt folgender

Zusatz zum Satz 11: In den Formeln (22) existieren mit den Integralen zur Linken auch diejenigen zur Rechten, falls $f_2 \neq 0$ und $\frac{1}{f_2}$ beschränkt in $[a, b]$ ist.

Beweis: Aus vorigem Korollar folgt dann

$$g_\iota(t) = g_\iota(a) + \int_a^{(-)t} \frac{1}{f_2}\, dF_\iota \text{ mit } F(t) = \int_a^{(-)t} f_2\, dg,\, g(t) = g(a) + \int_a^{(-)t} \frac{1}{f_2}\, dF.$$

Also ist laut Satz 10 jede Nullmenge bezüglich F_ι eine ebensolche bezüglich g_ι, die Menge der linksseitigen Unstetigkeitspunkte von g in $(a, b]$ in der analogen von F enthalten, und aus der Existenz von $\int_a^{(-)b} f_1\, dF$ und Satz 6 folgt diejenige von $\int_a^{(-)b} f_1\, dg$, was samt der Existenz von $\int_a^{(-)b} f_2\, dg$ laut Satz 11 für die Geltung von (22a) genügt. Analog ergeben sich die übrigen Behauptungen. — Satz 11 wird schliesslich ergänzt durch

Satz 12: Sind in $[a, b]$ die Funktionen f_1 und f_2 beschränkt, die Funktion g von beschränkter Schwankung und existieren $\int_a^{(-)b} f_1 dg$, $\int_a^{(+)b} f_2 dg$, so ist

$$\int_a^{(-)b} f_1\, d\int_a^{(+)x} f_2\, dg = \int_a^{(+)b} f_2\, d\int_a^{(-)x} f_1\, dg, \tag{25}$$

wobei beide letzteren Integrale existieren.

Beweis: Die Menge N_1 der linksseitigen Unstetigkeitspunkte von f_1 in (a, b) ist dann eine Nullmenge bezüglich g_ι, also auch bezüglich $\Phi_\iota(x) = \overset{(+)x}{\int_a} f_2 dg_\iota$. Überdies hat f_1 in den linksseitigen Unstetigkeitspunkten von $\Phi(x) = \overset{(+)x}{\int_a} f_2 dg$ (die unter den analogen von g enthalten sind) eine linksseitige Grenze, so dass laut Satz 6 $\overset{(-)b}{\int_a} f_1 d\Phi = \overset{(-)b}{\int_a} f_1 d \overset{(+)x}{\int_a} f_2 dg = I_1$ existiert. Analog ergibt sich die Existenz von $\overset{(+)b}{\int_a} f_2 d \overset{(-)x}{\int_a} f_1 dg = I_2$. Die Berechnung von I_1 und I_2 mittels der Formeln (21) und (21′) liefert nun für beide Integrale den Wert

$$\int_{[a,b]} f_1 f_2 d\gamma + \sum_{a<x_i\leq b} f_1(x_i - 0) f_2(x_i) \overset{(-)}{\Delta} g(x_i) + \sum_{a\leq x_i<b} f_1(x_i) f_2(x_i + 0) \overset{(+)}{\Delta} g(x_i).$$

§ 6.

Ergänzungen.

1. Es können folgende Sätze, in denen $\sim$ das Zeichen $+$ bzw. $-$ ersetzt, bewiesen werden.

Konvergiert im Intervall $[a, b]$ die Folge der beschränkten Funktionen f_n gleichmässig gegen die Funktion f und existieren für die Funktion von beschränkter Schwankung g die Integrale $\overset{(\sim)b}{\int_a} f_n dg$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so existiert auch $\overset{(\sim)b}{\int_a} f dg$, und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(\sim)b}{\int_a} f_n dg = \overset{(\sim)b}{\int_a} f dg. \tag{26}$$

Bei gewöhnlicher Konvergenz der Funktionenfolge $\{f_n\}$ muss hingegen für die Geltung von (26) ausser der gleichmässigen Beschränktheit der f_n in $[a, b]$ und der Existenz von $\overset{(\sim)b}{\int_a} f_n dg$ noch diejenige von $\overset{(\sim)b}{\int_a} f dg$ vorausgesetzt und verlangt werden, dass in den im Integrationsintervall gelegenen $\sim$-seitigen Unstetigkeitspunkten x_i von g: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_i \sim 0) = f(x_i \sim 0)$ ist.

2. Die eingeführten Integraldefinitionen können folgendermassen auf Integrationsmengen erstreckt werden.

Es sei E eine beschränkte lineare Punktmenge, die ihre untere Grenze a und obere b enthält. Eine Folge $\{D_n\}$ von Einteilungen des Intervalls $[a, b]$ heisse «normal bezüglich der Menge E», wenn für jedes n alle Teilungspunkte von D_n zu E gehören und für jedes $x \varepsilon E$ eine solche gegen x konvergente Punktfolge $\{x_n\}$ existiert, dass x_n ein Teilungspunkt von D_n ist. Der Grenzwert, der sich zufolge Ersetzung in der Definition von $\int_a^{(\sim)b} f\,dg$ der normalen Einteilungsfolgen des Intervalls $[a, b]$ durch bezüglich der Menge E normale ergibt, sei mit $\int_{E}^{(\sim)} f\,dg$ bezeichnet.

Es können stets zwei solche Funktionen $\bar{f}, \bar{g}$ in $[a, b]$ definiert werden, dass für $t \varepsilon E : \bar{f}(t) = f(t), \bar{g}(t) = g(t)$ ist, aus der Existenz von $\int_{E}^{(\sim)} f\,dg$ diejenige von $\int_a^{(\sim)b} \bar{f}\,d\bar{g}$ folgt (die Umkehrung erfordert gewisse Zusatzbedingungen) und für jeden Punkt x der Menge E $\int_{E[a,x]}^{(\sim)} f\,dg = \int_a^{(\sim)x} \bar{f}\,d\bar{g}$ gilt.

Der Fall, dass a oder b nicht zu E gehören, kann auf den besprochenen durch passende Erweiterung der Funktionen f und g zurückgeführt werden.

3. Die Erstreckung der eingeführten Integrale auf mehrere Dimensionen kann am kürzesten mit Hilfe des *Burkillschen* Integralbegriffes[1]) formuliert werden. Schon $\int_a^{(-)b} f\,dg$ bzw. $\int_a^{(+)b} f\,dg$ könnten entsprechend als die Burkillschen Integrale $\int_{[a,b]}^{(-)} U$ bzw. $\int_{[a,b]}^{(+)} U$ der Intervallfunktionen

$$\overset{(-)}{U}(I) = f(\alpha) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)], \quad \overset{(+)}{U}(I) = f(\beta) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)], \quad I = [\alpha, \beta]$$

definiert werden.

Zwecks Definitionserstreckung auf zwei Dimensionen ordnen wir der im Rechteck R definierten Punktfunktion f und additiven Intervallfunktion $g(\mathrm{I})$ (wobei I das Intervall $\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \gamma \leqslant y \leqslant \delta$ sei) die vier Intervallfunktionen

$$\overset{(-,-)}{U}(I) = f(\alpha, \gamma) \cdot g(I), \quad \overset{(-,+)}{U}(I) = f(\alpha, \delta) \cdot g(I), \quad \overset{(+,-)}{U}(I) = f(\beta, \gamma) \cdot g(I), \quad \overset{(+,+)}{U}(I) = f(\beta, \delta) \cdot g(I)$$

---

1) Bezüglich dieses Begriffes vgl. z. B. Saks (1), S. 165.

zu und setzen

$$\int\limits_R^{(-,-)} f\,dg = \int\limits_R^{(-,-)} U, \quad \int\limits_R^{(-,+)} f\,dg = \int\limits_R^{(-,+)} U, \quad \int\limits_R^{(+,-)} f\,dg = \int\limits_R^{(+,-)} U, \quad \int\limits_R^{(+,+)} f\,dg = \int\limits_R^{(+,+)} U.$$

Man sieht sofort, dass im n-dimensionalen Raume für eine Punktfunktion f und additive Intervallfunktion g analog $2n$ einseitige Stieltjesintegrale definiert werden können. — Der Verzicht auf die Additivität von g liefert eine weitere Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integralbegriffes.

Abschnitt III.

Versicherungsmathematische Anwendungen.

§ 1.

Einheitliche Darstellung der Grundgrössen der diskontinuierlichen und kontinuierlichen Versicherungsmathematik.

1. Die Einführung des gewöhnlichen Riemann-Stieltjesschen Integrals in die Versicherungsmathematik durch *A. Loewy* (1) eröffnete Aussichten auf die aus arbeitsökonomischen und erkenntnistheoretischen Gründen erwünschte Beseitigung der traditionellen Doppelspurigkeit zwischen diskontinuierlichen und kontinuierlichen Methoden der Versicherungsmathematik [vgl. dazu *Breuer* (1) und *Jacob* (1)]. Dieses Integral existiert jedoch öfters unter den für die diskontinuierliche Versicherungsmathematik charakteristischen Voraussetzungen nicht, was es zur allgemeinen Problemlösung ungeeignet macht. Hingegen soll nun gezeigt werden, dass die hier eingeführten Integrale den Aufbau einer übergeordneten Theorie ermöglichen, aus der sich die kontinuierliche bzw. diskontinuierliche Versicherungsmathematik durch charakteristische — meistens entsprechend von Differentiation bzw. Differenzenbildung begleitete — Spezialisierungen ergibt.

2. Der klassische Begriff der Sterbensintensität $\mu(t) = -\dfrac{1}{l(t)}\dfrac{dl(t)}{dt}$, der die Differenzierbarkeit der Lebendenzahl $l(t)$ einer Sterbetafel zur Zeit t erfordert, wurde von Loewy (2) durch den auch bei blosser Stetigkeit von l definierten der «Integralsterbensintensität»

$\overline{M}(t) = -\int\limits_0^t \frac{dl}{l}$ ersetzt. Für differenzierbares l ist nämlich

$$\frac{d\overline{M}(t)}{dt} = \mu(t).$$

Bei diskontinuierlicher Darstellung ist aber l eine in den Intervallen $[x-1, x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ konstante Funktion, die wie $\frac{1}{l}$ in den Punkten $x = 1, 2, \ldots$ unstetig ist, also existiert $\int\limits_0^t \frac{dl}{l}$ nicht. Deshalb kann das gewöhnliche Riemann-Stieltjessche Integral diejenigen Methoden der kontinuierlichen Versicherungsmathematik, die sich des Intensitätsbegriffes bedienen, auf die diskontinuierliche nicht übertragen. Wird jedoch

$$M(t) = -\int\limits_0^{(-)t} \frac{dl}{l}$$

gesetzt, so ist bei stetigem l: $M(t) = \overline{M}(t)$, hingegen im diskontinuierlichen Falle für natürliche t laut Formel (16): $M(t) = \sum\limits_{x=0}^{t-1} q_x$ mit $q_x = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)}$. Der Sterbensintensität $\frac{dM(t)}{dt} = \mu(t)$ des kontinuierlichen Falles entspricht danach im diskontinuierlichen die Sterbenswahrscheinlichkeit $M(t+1) - M(t) = q_t$.

Betrachten wir allgemeiner eine fingierte Elementengesamtheit, die sich durch Aus- und Eintritte aus m einander ausschliessenden Gründen ändert. Ist $f^{(i)}(t)$ die Zahl der in der Zeit 0 bis t aus dem $i$ten Grunde ausgetretenen Elemente (bei Austrittsgrund) bzw. die mit dem Minuszeichen versehene Zahl der eingetretenen Elemente (bei Eintrittsgrund), so bildet die Elementenzahl zur Zeit t

$$L(t) = L(0) - \sum_{i=1}^{m} f^{(i)}(t)$$

eine Funktion von beschränkter Schwankung in $[0, n]$, die dort überdies positiv sei. — Wir setzen

$$(27) \qquad M^{(i)}(t) = \int_0^{(-)t} \frac{df^{(i)}}{L}, \; M(t) = \sum_{i=1}^{m} M^{(i)}(t) = -\int_0^{(-)t} \frac{dL}{L}.$$

Im «diskontinuierlichen Falle» mit

$f^{(i)}(t) = f_s^{(i)}$, $L(t) = L_s$ für $s \leqslant t < s + 1$ $(s = 0, 1 \ldots, n-1)$ bzw. im «kontinuierlichen Falle» mit stetig differenzierbarem $f^{(i)}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant n)$ entsprechen einander:

$$M^{(i)}(s+1) - M^{(i)}(s) = q_s^{(i)}\,{}^{1)} = \frac{f_{s+1}^{(i)} - f_s^{(i)}}{L_s} \quad \text{und} \quad \frac{dM^{(i)}(t)}{dt} = \mu^{(i)}(t),$$

$$M(s+1) - M(s) = q_s \qquad \text{und} \quad \frac{dM(t)}{dt} = \mu(t).$$

3. Auch die finanziellen Voraussetzungen der Versicherungsmathematik können mittels der eingeführten Integrale einheitlich formuliert werden. Es bezeichne $w(t)$ den auf den Zeitpunkt 0 bezogenen Barwert des im Zeitpunkt t zahlbaren Betrages 1. Definieren wir die «Integralzinsintensität» als

$$(28) \qquad \Delta(t) = -\int_0^{(-)t} \frac{dw}{w},$$

so entsprechen einander im «diskontinuierlichen Falle» mit $w(t) = w_s$ für $s \leqslant t < s + 1$[2]) bzw. im «kontinuierlichen Falle» mit stetig differenzierbarem $w(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant n)$: die Diskontrate $\Delta(s+1) - \Delta(s) =$ $= d_s = 1 - v_s, \left(v_s = \frac{w_{s+1}}{w_s}\right)$ und die Zinsintensität $\frac{d\Delta(t)}{dt} = \delta(t)$.

Die für die Versicherungsmathematik charakteristische Verquickung der demographischen und finanziellen Voraussetzungen führen wir nun wie folgt durch.

---

[1]) $q_s^{(i)}$ bezeichnet dabei die dem i-ten Grunde entsprechende «abhängige» Austrittswahrscheinlichkeit bzw. die analoge mit dem Minuszeichen versehene Eintrittswahrscheinlichkeit.

[2]) Bei unterjähriger Verzinsung wäre $w(t)$ in passend modifizierten Intervallen als konstant anzunehmen.

«Total» von durchschnittlich auf ein Element entfallenden Zahlungen nennen wir deren Betrag $F(t)$ in der Zeit 0 bis t, wenn $F(0)=0$ und $F(t)$ im diskontinuierlichen Falle in den Intervallen $[s, s+1)$ $(s=0, 1, \ldots, n-1)$ konstant, im kontinuierlichen Falle in $[0, n]$ stetig differenzierbar ist. — Die Elementengesamtheit heisse «Versicherungsgesamtheit» bei folgenden

Einnahmen: Anfangszahlungen zur Zeit $t=0$ im Gesamtbetrage $L(0)\cdot A$, sowie Prämienzahlungen mit dem Total $P(t)$;

Ausgaben: Rentenzahlungen mit dem Total $R(t)$, Entschädigungen für Aus- bzw. Eintritte von $\int_{t_1}^{(+)t_2} U^{(i)}\,df^{(i)}$ für die Zeitperiode $t_1 < t \leqslant t_2$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant n)$ und den $i$ten Grund $(i=1, \ldots, m)$, sowie Endzahlungen im Gesamtbetrage $L(n)\cdot T$.

Wir definieren entsprechend:

1° den Kapitalwert im Zeitpunkt t der bis dahin erfolgten Einnahmen bzw. Ausgaben als

$$\frac{1}{w(t)}\left[L(0)\,A+\int_0^{(-)t} Lw\,dP\right] \text{ bzw. } \frac{1}{w(t)}\left[\int_0^{(-)t} Lw\,dR+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{(+)t} U^{(i)}w\,df^{(i)}\right];$$

2° denjenigen der nachherigen Einnahmen bzw. Ausgaben als

$$\frac{1}{w(t)}\cdot\int_t^{(-)n} Lw\,dP \text{ bzw. } \frac{1}{w(t)}\left[\int_t^{(-)n} Lw\,dR+\sum_{i=1}^{m}\int_t^{(+)n} U^{(i)}w\,df^{(i)}+w(n)\,L(n)\,T\right];$$

3° die «retrospektive Gesamtrücklage» $\tilde{V}^{(r)}(t)$ bzw. «prospektive» $\tilde{V}^{(p)}(t)$ als Differenz der Kapitalwerte im Zeitpunkt t der bis dahin erfolgten Einnahmen und Ausgaben bzw. nachher erfolgten Ausgaben und Einnahmen, die entsprechenden «Durchschnittsrücklagen» $V^{(r)}(t)$ bzw. $V^{(p)}(t)$ als den damaligen durchschnittlichen Anteil eines Elementes an der betreffenden Gesamtrücklage.

Nachdem $A=V^{(r)}(0)$, $T=V^{(p)}(n)$ ist, gelten bei $E(t)=\dfrac{w(t)\,L(t)}{L(0)}$ für die Durchschnittsrücklagen (und damit Leibrenten, Einmalprämien u. dgl.) die einheitlichen Formeln:

$$(29r)\quad \frac{w(t)}{L(0)} \cdot \tilde{V}^{(r)}(t) = \mathsf{E}(t)\, V^{(r)}(t) = V^{(r)}(0) + \int_0^{(-)t} \mathsf{E}\, d(P-R) - \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(+)t} \frac{U^{(i)} w}{L(0)}\, df^{(i)},$$

$$(29p)\quad \frac{w(t)}{L(0)} \cdot \tilde{V}^{(p)}(t) = \mathsf{E}(t)\, V^{(p)}(t) = \mathsf{E}(n)\, V^{(p)}(n) - \left[\int_t^{(-)n} \mathsf{E}\, d(P-R) - \sum_{i=1}^{m} \int_t^{(+)n} \frac{U^{(i)} w}{L(0)}\, df^{(i)}\right].$$

Wird im diskontinuierlichen bzw. kontinuierlichen Falle

$$\mathsf{E}(s) = \mathsf{E}_s,\ P(s+1) - P(s) = \pi_s,\ R(s+1) - R(s) = \varrho_s,\ (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

bzw.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \pi(t),\ \frac{dR(t)}{dt} = \varrho(t),\ (0 \leqq t \leqq n)$$

gesetzt, so entsprechen einander die Formeln:

$$\mathsf{E}_t\, V_t^{(r)} = V_0^{(r)} + \sum_{s=0}^{t-1} \mathsf{E}_s \left(\pi_s - \varrho_s - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} U_{s+1}^{(i)}\right),$$

$$\mathsf{E}_t\, V_t^{(p)} = \mathsf{E}_n\, V_n^{(p)} - \sum_{s=t}^{n-1} \mathsf{E}_s \left(\pi_s - \varrho_s - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} U_{s+1}^{(i)}\right)$$

bzw.

$$\mathsf{E}(t)\, V^{(r)}(t) = V^{(r)}(0) + \int_0^t \mathsf{E}(\tau) \left[\pi(\tau) - \varrho(\tau) - \sum_{i=1}^{m} \mu^{(i)}(\tau)\, U^{(i)}(\tau)\right] d\tau,$$

$$\mathsf{E}(t)\, V^{(p)}(t) = \mathsf{E}(n)\, V^{(p)}(n) - \int_t^n \mathsf{E}(\tau) \left[\pi(\tau) - \varrho(\tau) - \sum_{i=1}^{m} \mu^{(i)}(\tau)\, U^{(i)}(\tau)\right] d\tau.$$

§ 2.

Funktionalgleichungen der Durchschnittsrücklagen. Prämienzerlegung in Spar- und Risikoteil.

1. Die in den letzten Zeiten auf verschiedensten Wegen abgeleiteten Funktionalgleichungen von Deckungsrücklagen können auf eine rein formale Integralgleichung zurückgeführt und dadurch unter wesentlicher Beweisvereinfachung verallgemeinert werden.

Es existiere nämlich für die Funktionen von beschränkter Schwankung $E \neq 0, W$ das Integral

$$(30) \qquad T(t) = \int_0^{(-)t} \frac{1}{E}\, d(EW), \; (0 \leqslant t \leqslant n).$$

Mit $\int_0^{(-)n} E'\,dT$ existiert dann laut Zusatz zu Satz 11 auch

$$\int_0^{(-)n} \frac{E'}{E}\, d(EW) = \int_0^{(-)n} E'\,dT,$$

und die Formel (23) liefert für $f_1 = 1,\, f_2 = \frac{E'}{E},\, g = EW,\, a = k,\; b = t$ die *Volterrasche Integralgleichung zweiter Art* für W:

$$(31) \qquad E'(t)\,W(t) = E'(k)\,W(k) + \int_k^{(-)t} E'\,dT + \int_k^{(+)t} EW\,d\frac{E'}{E},$$

die sich für $E'(t) = E(t)$ [1]) vereinfacht zu:

$$(32) \qquad E(t)\,W(t) = E(k)\,Wk + \int_k^{(-)t} E\,dT.$$

Für $E(t) = \mathsf{E}(t)$ und bei Wahl der retrospektiven oder prospektiven Durchschnittsrücklage als $W(t)$ liefern beidemal die Formeln (29)

$$(30') \qquad T(t) = P(t) - P^{(N)}(t) \text{ mit}$$

$$(30'') \qquad P^{(N)}(t) = R(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(+)t} w\, U^{(i)}\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w}\, dM^{(i)}\ ^{2)}.$$

Aus den Formeln (31) und (32) folgt daher

Satz 13: Sowohl die retrospektiven wie auch die prospektiven Durchschnittsrücklagen einer Versicherungsgesamtheit genügen für sämtliche $0 \leqslant t \leqslant n,\; 0 \leqslant k \leqslant n$ den Funktionalgleichungen:

---

[1]) In diesem Falle existiert $\int_0^{(-)n} E'\,dT = \int_0^{(-)n} E\,d\int_0^{(-)t} \frac{1}{E}\, d(EW)$ zufolge Satz 11, nachdem mit $\int_0^{(-)n} \frac{1}{E}\, d(EW)$ laut Korollar 2 zum Satz 6 auch $\int_0^{(-)n} E\,d(EW)$ existiert.

[2]) Wird in (32′) $k = 0$, $V(0) = 0$ und $P(t) \equiv P^{(N)}(t)$ gesetzt, so folgt $V(t) \equiv 0$; daher ist $P^{(N)}(t)$ das «natürliche Prämientotal» der Versicherungsgesamtheit.

$$(32') \qquad \mathsf{E}(t)\,V(t) = \mathsf{E}(k)\,V(k) + \overset{(-)\,t}{\int_k} \mathsf{E}\,d(P - P^{(N)}),$$

$$(31') \qquad E'(t)\,V(t) = E'(k)\,V(k) + \overset{(-)\,t}{\int_k} E'\,d(P - P^{(N)}) + \overset{(+)\,t}{\int_k} \mathsf{E}\,V\,d\,\frac{E'}{\mathsf{E}},$$

wobei über die Funktion E' beliebig verfügt werden kann, sofern nur $\overset{(-)n}{\int_0} E'\,d(P - P^{(N)})$ existiert.

Für $k = 0$ bzw. $k = n$ wird (32′) entsprechend zu (29r) bzw. (29p). Zufolge Satz 13 genügt also die prospektive Durchschnittsrücklage auch ohne Voraussetzung des Äquivalenzprinzips der Definitionsgleichung der retrospektiven und umgekehrt; eine Tatsache, die bisher unbekannt sein dürfte.

Die Integralgleichung (31′) kann umgeformt werden in

$$(31'') \qquad E'(t)\,V(t) = E'(k)\,V(k) + \overset{(-)t}{\int_k} E'\,d(P - P^{(N)}) +$$

$$+ \overset{(+)t}{\int_k} V \left[d(E' + \overset{(-)\tau}{\int_0} E'\,dM) + L\,d \overset{(-)\tau}{\int_0} \frac{E'}{L}\,d\Delta \right].$$

(Laut (22b), (11), (23), (25) und (22a) ist nämlich

$$\overset{(+)t}{\int_k} \mathsf{E}\,V\,d\,\frac{E'}{\mathsf{E}} = \overset{(+)t}{\int_k} V\,d \overset{(+)\tau}{\int_0} \mathsf{E}\,d\left(\frac{E'}{\mathsf{E}}\right) = \overset{(+)t}{\int_k} V\,d\left(E' - \overset{(-)\tau}{\int_0} \frac{E'}{\mathsf{E}}\,d\mathsf{E}\right) =$$

$$= \overset{(+)t}{\int_k} V \left[d\left(E' - \overset{(-)\tau}{\int_0} \frac{E'}{L}\,dL\right) - L\,d \overset{(-)\tau}{\int_0} \frac{E'}{Lw}\,dw \right] = \overset{(+)t}{\int_k} V \left[d(E' + \overset{(-)\tau}{\int_0} E'\,dM) + L\,d \overset{(-)\tau}{\int_0} \frac{E'}{L}\,d\Delta \right].$$

2. Im diskontinuierlichen bzw. kontinuierlichen Falle entsprechen einander:

1° die Ausdrücke für die natürliche Prämie und natürliche Prämienintensität:

$$P^{(N)}(t+1) - P^{(N)}(t) = \pi_t^{(N)} = \varrho_t + \sum_{i=1}^{m} v_t\, U_{t+1}^{(i)}\, q_t^{(i)} \quad (t = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\frac{d}{dt} P^{(N)}(t) = \pi^{(N)}(t) = \varrho(t) + \sum_{i=1}^{m} U^{(i)}(t)\, \mu^{(i)}(t) \text{ [1]};$$

2° die aus Formel (32′) für $t = k+1$ resultierende *Rekursionsformel der Deckungsrücklage*

$$V_{k+1} = \frac{1}{v_k \dfrac{L_{k+1}}{L_k}} \left(V_k + \pi_k - \pi_k^{(N)}\right)$$

und die durch Differentiation sich ergebende *Thielesche Differentialgleichung:*

$$\frac{dV(t)}{dt} = [\mu(t) + \delta(t)] \cdot V(t) + \pi(t) - \pi^{(N)}(t) \; ;$$

3° die aus Formel (31″) für $k < t$ resultierende *Summengleichung*

$$E'_t V_t = E'_k V_k + \sum_{s=k}^{t-1} E'_s \left\{ (\pi_s - \pi_s^{(N)}) + V_{s+1} \left[\frac{E'_{s+1}}{E'_s} - v_s (1 - q_s) \right] \right\}$$

und die *Integralgleichung der Deckungsrücklage*

$$E'(t)\, V(t) = E'(k)\, V(k) + \int_k^t E'(\tau) \left\{ [\pi(\tau) - \pi^{(N)}(\tau)] + V(\tau) \left[\frac{1}{E'(\tau)} \frac{dE'(\tau)}{d\tau} - \mu(\tau) - \delta(\tau) \right] \right\} d\tau .$$

Bei blosser Voraussetzung der Stetigkeit der auftretenden Grössen wird (31″) zu

$$(31^{\text{III}}) \quad E'(t)\, V(t) = E'(k)\, V(k) + \int_k^t E'\, d(P - P^{(N)}) + \int_k^t V E' \left(\frac{dE'}{E'} + dM + d\Delta \right).$$

Spezialfälle von (31^{III}) sind für einen geschlossenen Bestand gleichaltriger Personen abgeleitet worden, und zwar für die retro-

---

[1]) Bei blosser Stetigkeit von w, $U^{(i)}$ und $f^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, m$) wird aus (30″):

$$P^{(N)}(t) = R(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{U^{(i)}}{L}\, df^{(i)}.$$

spektive Durchschnittsrücklage mit $k = 0$ und daraus für die prospektive unter Voraussetzung des Äquivalenzprinzips mit $k = n$ [vgl. Jacob (1), Loewy (1), Berger (1)].

Die gemeinsame Form (31^{III}) dieser Integralgleichungen und deren Geltung sowohl für retrospektive wie auch prospektive Rücklagen — und zwar ohne Voraussetzung des Äquivalenzprinzips — wurde nicht erkannt.

3. Auch die Prämienzerlegung einer allgemeinen Versicherung in Spar- und Risikoteil kann auf eine den diskontinuierlichen und kontinuierlichen Fall umfassende Art vorgenommen werden, und zwar laut

Satz 14: Das Prämientotal $P(t)$ einer Versicherungsgesamtheit ist in ein «Sparprämientotal»

$$P^{(S)}(t) = \int_0^{(-)t} \frac{1}{w}\, d(wV) = V(t) - V(0) - \int_0^{(+)t} V\, d\Delta \tag{33 S}$$

und in ein «Risikoprämientotal»

$$P^{(R)}(t) = R(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{(+)t} w\,(U^{(i)} - V)\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w}\, dM^{(i)} \tag{33 R}$$

zerlegbar, wobei als $V(t)$ die retrospektive oder prospektive Durchschnittsrücklage der Versicherungsgesamtheit gewählt werden kann. Dann kann $V(t)$ durch reinen Sparprozess aus $V(0)$ und Beträgen von der Summe $P^{(S)}(t)$ im Zeitintervall $<0, t>$ gebildet werden.

Beweis: Wird in (30) $E(t) = \dfrac{L(t)\, w(t)}{L(0)}$, $W(t) = V(t)$ gesetzt und Formel (23) mit $f_1 = \dfrac{1}{Lw}$, $f_2 = L$, $g = wV$ angewendet, so folgt

$$T(t) = P(t) - P^{(N)}(t) = \int_0^{(-)t} \frac{1}{w}\, d(w\, V) + \int_0^{(-)t} \frac{1}{Lw}\, d \int_0^{(+)\tau} wV\, dL =$$

$$= P^{(S)}(t) + \int_0^{(+)t} w\, V d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{Lw}\, dL,$$

woraus unter Berücksichtigung von (30″) und (27) $P(t) = P^{(S)}(t) + P^{(R)}(t)$ resultiert. — Die Formeln (23) und (28) liefern überdies

$$\int_0^{(-)t} \frac{1}{w}\, d(wV) = V(t) - V(0) - \int_0^{(+)t} V\, d\Delta .$$

Anderseits ist aber gemäss (30) $P^{(S)}(t)$ der Wert von $T(t)$ für $E(t) = w(t)$, $W(t) = V(t)$, und Formel (32) drückt hiebei für $k = 0$ die behauptete Kapitalisationsbildung von V aus.

Im diskontinuierlichen bzw. kontinuierlichen [1]) Falle entsprechen einander die Spar- und Risikoprämien

$$P^{(S)}(t+1) - P^{(S)}(t) = \pi_t^{(S)} = v_t \cdot V_{t+1} - V_t ,$$

$$P^{(R)}(t+1) - P^{(R)}(t) = \pi_t^{(R)} = \varrho_t + \sum_{i=1}^{m} v_t q_t^{(i)} (U_{t+1}^{(i)} - V_{t+1}) \; (t = 0, 1 \ldots, n-1)$$

bzw. Spar- und Risikoprämienintensitäten

$$\frac{dP^{(S)}(t)}{dt} = \pi^{(S)}(t) = \frac{dV(t)}{dt} - V(t) \cdot \delta(t),$$

$$\frac{dP^{(R)}(t)}{dt} = \pi^{(R)}(t) = \varrho(t) + \sum_{i=1}^{m} \mu^{(i)}(t) \left[U^{(i)}(t) - V(t) \right].$$

§ 3.

Gewinnermittlung und Rücklagenvariation.

1. Es soll nun bei Übergang von einer Versicherungsgesamtheit zu einer zweiten, deren Grössen mit einem Strich bezeichnet seien, ein Zusammenhang zwischen der Rücklagenvariation und den entsprechenden Gewinnausdrücken abgeleitet werden, der trotz seiner Einfachheit bisher unbekannt sein dürfte. — Werden die ungestrichenen

---

[1]) Bei blosser Voraussetzung der Stetigkeit der auftretenden Grössen wird aus (33^R):

$$P^{(R)}(t) = R(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{U^{(i)} - V}{L}\, df^{(i)} .$$

Werte als der Geschäftsführung zugrunde liegend, hingegen die gestrichenen Rechnungsgrundlagen und Ausgaben als wirklichkeitstreu betrachtet und $\delta x = x' - x$ gesetzt, so beträgt der auf den Versicherungsbeginn diskontierte und auf ein Anfangsmitglied bezogene Gewinn für die Zeitperiode $[0, t]$:

$$G(t) = V(0) + \int_0^{(-)t} E' d(P - P'^{(N)}) - E'(t) \cdot V(t) =$$

$$= V'(0) + \int_0^{(-)t} E' d(P' - P'^{(N)}) - E'(t) \cdot V(t) - \delta V(0) - \int_0^{(-)t} E' d\delta P.$$

Für die «Gewinnfunktion» $\Gamma(t) = \int_0^{(-)t} \frac{1}{E'} dG$ gilt daher wegen $V'(0) + \int_0^{(-)t} E' d(P' - P'^{(N)}) = E'(t) V'(t)$:

$$\int_0^{(-)t} E' d\Gamma = G(t) = E'(t) \cdot \delta V(t) - \delta V(0) - \int_0^{(-)t} E' d\delta P. \tag{34}$$

Satz 15: Zwischen der Rücklagenvariation $\delta V(t)$ und Gewinnfunktion $\Gamma(t)$ besteht der Zusammenhang

$$E'(t) \cdot \delta V(t) = E'(k) \cdot \delta V(k) + \int_k^{(-)t} E' d(\delta P + \Gamma) \tag{35}$$

für alle $0 \leqslant t \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$, und es ist

$$\Gamma(t) = -\delta R(t) + \int_0^{(+)t} V d(\Delta' - \Delta) - \tag{36}$$
$$- \sum_{i=1}^{m} \left[\int_0^{(+)t} w'(U'^{(i)} - V) \, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w'} dM'^{(i)} - \int_0^{(+)t} w(U^{(i)} - V) \, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w} dM^{(i)} \right].$$

Die Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Werte liefert daher die dualen Formeln:

$$E(t) \cdot \delta V(t) = E(k) \cdot \delta V(k) + \int_k^{(-)t} E \, d(\delta P + \Gamma') \tag{35'}$$

mit

$$(36') \qquad \Gamma'(t) = -\delta R(t) + \int_0^{(+)t} V' d(\Delta' - \Delta) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \left[\int_0^{(+)t} w'(U'^{(i)} - V') d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w'} dM'^{(i)} - \int_0^{(+)t} w(U^{(i)} - V') d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w} dM^{(i)} \right].$$

Beweis: Durch Subtraktion von der Formel (34) derselben für $t = k$ angesetzten folgt (35). — Wird anderseits (31′) mit $E' = \mathsf{E}'$ von der für die gestrichenen Grössen angesetzten Relation (32′) subtrahiert, so ergibt sich

$$\mathsf{E}'(t) \cdot \delta V(t) = \mathsf{E}'(k) \cdot \delta V(k) + \int_k^{(-)t} \mathsf{E}' d(\delta P - \delta P'^{(N)}) - \int_k^{(+)t} \mathsf{E}\, V d \frac{\mathsf{E}'}{\mathsf{E}}.$$

Die Einsetzung in (35) liefert für $k = 0$

$$\int_0^{(-)t} \mathsf{E}' d\Gamma = -\int_0^{(-)t} \mathsf{E}' d\delta P^{(N)} - \int_0^{(+)t} \mathsf{E}\, V d \frac{\mathsf{E}'}{\mathsf{E}}.$$

Zufolge Formel (24) ist daher

$$(36^*) \qquad \Gamma(t) = -\delta P^{(N)} - \int_0^{(-)t} \frac{1}{\mathsf{E}'} d \int_0^{(+)\tau} \mathsf{E}\, V d \frac{\mathsf{E}'}{\mathsf{E}}.$$

Das letzte Integral wird durch partielle Integrationen zu

$$\int_0^{(-)t} \frac{1}{\mathsf{E}'} d \left[\mathsf{E}' V - \int_0^{(-)\tau} \frac{\mathsf{E}'}{\mathsf{E}} d(\mathsf{E}\, V) \right] = \int_0^{(-)t} \frac{1}{\mathsf{E}'} d(\mathsf{E}' V) - \int_0^{(-)t} \frac{1}{\mathsf{E}} d(\mathsf{E}\, V) =$$

$$= \int_0^{(+)t} \mathsf{E}\, V d\left(\frac{1}{\mathsf{E}}\right) - \int_0^{(+)t} \mathsf{E}' V d\left(\frac{1}{\mathsf{E}'}\right).$$

Aber

$$\overset{(+)t}{\int_0} \mathsf{E}\, V\, d\left(\frac{1}{\mathsf{E}}\right) = \overset{(+)t}{\int_0} V\, d \overset{(+)\tau}{\int_0} \mathsf{E}\, d\left(\frac{1}{\mathsf{E}}\right) = -\overset{(+)t}{\int_0} V\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{\mathsf{E}}\, d\,\mathsf{E} =$$

$$= -\overset{(+)t}{\int_0} V\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{Lw}\, d(Lw) = \overset{(+)t}{\int_0} V\, d\,\Delta - \overset{(+)t}{\int_0} w\, V\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{Lw}\, dL =$$

$$= \overset{(+)t}{\int_0} V\, d\,\Delta + \sum_{i=1}^{m} \overset{(+)t}{\int_0} w\, V\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w}\, d\, M^{(i)}.$$

Analog ist

$$\overset{(+)t}{\int_0} \mathsf{E}'\, V\, d\left(\frac{1}{\mathsf{E}'}\right) = \overset{(+)t}{\int_0} V\, d\,\Delta' + \sum_{i=1}^{m} \overset{(+)t}{\int_0} w'\, V\, d \int_0^{(-)\tau} \frac{1}{w'}\, d\, M'^{(i)}.$$

Wird noch für $P^{(N)}$ der Wert aus (30″) eingesetzt, so folgt aus (36*) die Formel (36), w. z. b. w.

Im diskontinuierlichen bzw. kontinuierlichen Falle wird aus (35) entsprechend

$$\mathsf{E}'_t \cdot \delta V_t = \mathsf{E}'_k \cdot \delta V_k + \sum_{s=k}^{t-1} \mathsf{E}'_s (\delta \pi_s + \gamma_s)$$

mit

$$(36^{**}) \qquad \gamma_s = \Gamma(s+1) - \Gamma(s) = -\delta \varrho_s - V_{s+1} \cdot \delta v_s -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \left[v'_s (U'^{(i)}_{s+1} - V_{s+1})\, q'^{(i)}_s - v_s (U^{(i)}_{s+1} - V_{s+1})\, q^{(i)}_s \right] \text{ [1]}$$

bzw.

$$\mathsf{E}'(t) \cdot \delta V(t) = \mathsf{E}'(k) \cdot \delta V(k) + \int_k^t \mathsf{E}'(\tau) \cdot [\delta \pi(\tau) + \gamma(\tau)]\, d\tau \text{ mit}$$

$$(36^{***}) \qquad \gamma(\tau) = \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = -\delta \varrho(\tau) + V(t) \cdot [\delta'(t) - \delta(\tau)] -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \left\{ [U'^{(i)}(\tau) - V'(\tau)] \cdot \mu'^{(i)}(\tau) - [U^{(i)}(\tau) - V(\tau)] \cdot \mu^{(i)}(\tau) \right\}.$$

---

[1]) Dieser Ausdruck kann laut Schärf (1), Formel 15, umgeformt werden in

$$\gamma_s = -\delta \varrho_s - \sum_{i=1}^{m} v'_s \left[(U'^{(i)}_{s+1} - V_{s+1}) \cdot \delta q^{(i)}_s + q^{(i)}_s \cdot \delta U^{(i)}_{s+1} \right] + \frac{\delta v_s}{v_s} (V_s + \pi_s - \varrho_s).$$

Dabei ist $\gamma_s = \frac{1}{\mathsf{E}'_s}[G(s+1)-G(s)]$ der auf den Beginn des $(s+1)$-ten Versicherungsjahres diskontierte, auf einen Versicherten entfallende Gewinn dieses Jahres, $\gamma(\tau) = \frac{1}{\mathsf{E}'(\tau)} \cdot \frac{dG(\tau)}{d\tau}$ die Gewinnintensität im Zeitpunkt τ.

Wird als $V(t)$ das ausreichende Deckungskapital und als $P(t)$ das Total der ausreichenden Prämie einer Lebensversicherung genommen, sowie $R(t) = \beta \cdot P(t) + N(t) + S(t)$ gesetzt, wobei β den Inkassokostensatz, $N(t)$ und $S(t)$ entsprechend die Totale der Verwaltungskosten und der Rentenzahlungen an Versicherte bezeichnen, so werden (36 **) bzw. (36 ***) entsprechend zu den bekannten Kontributionsformeln des diskontinuierlichen bzw. kontinuierlichen Falles.

2. Aus Satz 15 resultiert sofort folgende den diskontinuierlichen und kontinuierlichen Fall umfassende Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Theorie der Kapitalansammlung von *Cantelli* (1):

Die (prospektiven oder retrospektiven) Durchschnittsrücklagen $V(t)$ einer Versicherungsgesamtheit mit $R(t) \equiv 0$, $U^{(i)}(t) \equiv A^{(i)}(t)\, V(t)$ bleiben bei Streichung der Entschädigungszahlungen $U^{(i)}(t)$ und gleichzeitiger Ersetzung der $M^{(i)}(t)$ durch $M'^{(i)}(t) = \int_0^{(+)t} (1 - A^{(i)})\, dM^{(i)}$ ungeändert.

Man verifiziert nämlich, dass hiebei $\Gamma(t) \equiv 0$ ist, so dass wegen $\delta P \equiv 0$ und entsprechend $\delta V(0) = 0$ für retrospektive bzw. $\delta V(n) = 0$ für prospektive Durchschnittsrücklagen aus Formel (35) mit $k = 0$ bzw. $k = n$ die Behauptung folgt.

3. Satz 15 liefert insbesondere universelle — den diskontinuierlichen und kontinuierlichen Fall umfassende — Formeln für die Variation der laufenden Prämien, Einmalprämien und Deckungskapitalien der üblichen Versicherungsformen. — Bei diesen bleiben, falls die «Anfangsprämie» $\pi = P(1) \neq 0$ ist, die Rücklagen $V(0)$ und $V(n)$, der Endpunkt $t = n$, sowie die den Prämienverlauf charakterisierende Funktion $C(t) = \frac{1}{\pi} \cdot P(t)$ ungeändert. Daher folgt aus (35), wenn $k = 0$ gesetzt wird,

$$\mathsf{E}'(t) \cdot \delta V(t) = \delta\pi \cdot \int_0^{(-)t} \mathsf{E}'\, dC + \int_0^{(-)t} \mathsf{E}'\, d\Gamma$$

und wenn $t = n$ gesetzt wird

$$\delta\pi = -\frac{\int_0^{(-)n} \mathsf{E}'\, d\Gamma}{\int_0^{(-)n} \mathsf{E}'\, dC}.$$

Dies sind bereits universelle Variationsformeln für Versicherungen mit laufender Prämienzahlung. Analog folgen aus (35′) die dualen Formeln:

$$E(t) \cdot \delta V(t) = \delta\pi \cdot \int_0^{(-)t} E\,dC + \int_0^{(-)t} E\,d\Gamma', \ \delta\pi = -\frac{\int_0^{(-)n} E\,d\Gamma'}{\int_0^{(-)n} E\,dC}.$$

Für die Variation der Einmalprämie $V(0)$ einer dem Äquivalenzprinzip genügenden Versicherungsgesamtheit mit $P(t) \equiv 0$ liefern hingegen die Formeln (35) und (35′) bei ungeänderter Versicherungsdauer und Endzahlung $V(n)$ die Ausdrücke:

$$\delta V(0) = -\int_0^{(-)n} E'\,d\Gamma = -\int_0^{(-)n} E\,d\Gamma'.$$

Mit den dargestellten Anwendungen, die für die Beleuchtung der Rolle der eingeführten Integrale in der Versicherungsmathematik genügen dürften, müssen wir uns aus Raumgründen begnügen. — Es sei nur noch bemerkt, dass die versicherungsmathematischen Funktionen höchstens endlich viele Unstetigkeitspunkte aufweisen; bei Beschränkung auf solche Funktionen ist eine auch dem praktischen Versicherungsmathematiker zugängliche Darstellung der versicherungsmathematischen Anwendungen dieser Integrale möglich, die einer künftigen Arbeit vorbehalten bleiben dürfe.

Literaturverzeichnis.

Berger, A. (1) Über eine Funktionalgleichung des Deckungskapitals. Assekuranzjahrbuch, 1936.

Bliss, G. A. (1) A necessary and sufficient condition for the existence of a Stieltjes integral. Proceedings of the National Acad. U. S. A., 1917.

Breuer, S. (1) Die Verwertung des Stieltjesschen Integralbegriffs zur Darstellung von Renten und Bausparformeln. Versicherungsarchiv, 1931/32, Heft VIII.

Carmichael, R. D. (1) Conditions necessary and sufficient for the existence of a Stieltjes integral. Proceedings of the National Acad. U. S. A., 1919.

Fréchet, M. (1) Sur quelques définitions possibles de l'intégrale de Stieljes. Duke Math. Journ., 1936.

Gillespie, D. C. (1) The Cauchy definition of a definite integral. Ann. of Math., 1915.

Jacob, M. (1) Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale. Giorn. Ist. Ital. Attuari, 1932.

Lebesgue, H. (1) Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2e éd., Paris, 1928.

Loewy, A. (1) Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik, 1931.

— (2) Zur Bedeutung des Stieltjesschen Integrals in der Versicherungsmathematik, Assekuranzjahrbuch, 1935.

Saks, S. (1) Theory of the integral. Warszawa-Lwów, 1937.

Schärf, H. (1) Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik. Mitt. d. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1941.

Smith, H. L. (1) On the existence of the Stieltjes integral. Transactions of the Am. Math. Soc., 1925.

Steffensen, J. F. (1) On Stieltjes Integral and its application to actuarial questions. Journal of the Institute of Actuaries, 1932.

Ward, A. J. (1) The Perron-Stieltjes Integral. Mathematische Zeitschrift, 1936.