Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 42 (1942)

Artikel: Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe

Autor: Fischer, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966917

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe.

Von *Ernst Fischer,* Basel.

Einleitung.

Die versicherungstechnischen Grundgrössen sind in der Personenversicherung allgemein Funktionen des *Rechnungszinsfusses* und der *Voraussetzungen,* nach denen der Eintritt des versicherten Ereignisses stattfindet oder ausbleibt. Die numerische Berechnung dieser Grundgrössen lässt sich rationell gestalten, wenn, dem Vorschlag von *Tetens* [1]) folgend, Systeme geeigneter Hilfsgrössen, sogenannte Kommutationswerte, eingeführt werden. Diese sind immer von *beiden* Rechnungsvoraussetzungen — Zinsfuss, Annahmen über Eintritt oder Nichteintritt des versicherten Ereignisses — abhängig; daher bedingt eine auch nur partielle Änderung in den Rechnungsvoraussetzungen stets die vollständige Neuberechnung des ganzen Systems der zugehörigen Kommutationswerte.

Die erhebliche Rechenarbeit der Neuaufstellung der Kommutationswerte lohnt sich nun nicht, will man bloss einige Einzelwerte bei geändertem Rechnungszinsfuss und gleichgebliebenen demographischen Annahmen kennen. Man wird in diesem Fall vielmehr darnach trachten, die Versicherungswerte zum neuen Zinsfuss unmittelbar als Funktion der Zinsfussänderung und der zum alten Zinsfuss berechneten Versicherungswerte und Kommutationszahlen auszudrücken. Diese Aufgabe pflegt man als **Zinsfussproblem** zu bezeichnen. Es hat, teilweise auch mit etwas andern Annahmen über die als bekannt und veränderlich vorauszusetzenden Grössen und teilweise auch mit anderer Zielsetzung, in der Literatur reiche Beachtung

[1]) *Johann Nikolaus Tetens* (1736—1807), Einführung der diskontierten Zahlen (Kolumnarmethode) 1785/86, nach *Braun* [30].

gefunden. Zusammenfassend unterrichten darüber die sehr schönen Arbeiten von *Christen* [1] und *Meissner* [2]. Während in diesen beiden Darstellungen die Lösungsvorschläge der verschiedenen Autoren im wesentlichen in zeitlicher Reihenfolge einzeln und meist ohne weitere gegenseitige Bezugnahme aufeinander dargelegt sind, hat *Frucht* [3] mit Erfolg den bedeutungsvollen Versuch unternommen, Gruppen verwandter Lösungsmethoden zu bilden, deren Gemeinsamkeit zu kennzeichnen und Zusammenhänge aufzusuchen, die nicht nur zwischen einzelnen Lösungen, sondern auch zwischen Gruppen von Lösungen bestehen. Dieses Vorgehen weiter auszubauen und die von *Frucht* gewonnenen Erkenntnisse zu vertiefen und weiter zu klären, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Dabei lässt sich ein Zusammenfassen der wichtigsten Literatur zum Zinsfussproblem nicht ganz umgehen; um aber eine Wiederholung der Darstellungen von *Christen* und *Meissner* möglichst zu vermeiden, sehen wir überall da, wo es nicht für unsere spätern Betrachtungen von unbedingtem Wert ist, grundsätzlich davon ab, den Lösungen ihre Begründung beizugeben. Dagegen wollen wir die Gelegenheit benützen, die Kenntnis von einigen, in den genannten Darstellungen von *Christen* und *Meissner* noch nicht gegebenen, neuern und beachtenswerten Beiträgen zum Zinsfussproblem zu vermitteln.

Die in der Literatur bekannten Lösungen des Zinsfussproblems beschränken sich grösstenteils auf den Leibrentenbarwert, da sich alle weitern Versicherungswerte auf ihn zurückführen lassen. Wir werden uns in unsern Betrachtungen diesem bewährten Vorgehen anschliessen; immerhin suchen wir die grundsätzlichen Überlegungen so allgemein wie möglich durchzuführen. Denn so lässt sich beiläufig erkennen, einmal wie weit sinngemässes Abändern und Verallgemeinern der verschiedenen bekannten Lösungsmethoden noch zu neuen, brauchbaren Verfahren für den Leibrentenbarwert führt, und weiter, ob sich nicht bestimmte Ergebnisse auch auf die andern versicherungstechnischen Grundgrössen, wie z. B. auf Prämien, Reserven usw., übertragen lassen. Es sei schon hier festgestellt, dass dies in der Tat möglich ist und die Kenntnis der Ableitungen der Versicherungswerte nach den Zinsmassen eine erhebliche Rolle spielt.

Den Lösungen, wie sie von den verschiedenen Autoren gegeben worden sind, liegen nicht immer die gleichen Voraussetzungen über die Darstellung der Versicherungswerte und die Bemessung des Zinses zugrunde. Wir schicken daher zweckmässigerweise unsern Ausführungen in einem ersten Kapitel eine knapp gehaltene, allgemeine Darstellung der Berechnung der Versicherungswerte voraus und schliessen ihr gleich noch eine Zusammenstellung der Ableitungen der Versicherungswerte nach den Zinsmassen an. Als zweites Kapitel folgt hierauf eine Besprechung der verschiedenen bekannten Lösungen des Zinsfussproblems. Im dritten Kapitel endlich wenden wir uns der eigentlichen Hauptaufgabe zu, nämlich das Zinsfussproblem in der Auffassung als Interpolationsaufgabe zu behandeln.

1. Kapitel.

§ 1.

Die Grundlagen zur Berechnung von Versicherungswerten.

a) Die Zinsmasse.

Als effektiven Zinssatz bezeichnet man den Zins, den das Kapital «1» in der Zeiteinheit — in der Regel 1 Jahr — trägt; er sei mit i bezeichnet. In die Rechnungen geht meistens nicht i, sondern eine wohlbestimmte Funktion von i ein, nämlich der Aufzinsungsfaktor

$$r(i) = r = 1 + i,$$

der Diskontierungsfaktor

$$v(i) = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$$

oder die Zinsintensität

$$\delta(i) = \delta = ln(1+i), \quad \text{mit} \quad i = e^{\delta} - 1,$$

die dem nominellen Zinssatz für die Zeiteinheit bei kontinuierlicher Verzinsung gleichwertig ist und bisweilen auch logarithmischer Diskont genannt wird.

In allen für die Versicherungsrechnung praktisch in Betracht fallenden Wertebereichen sind die Funktionen $r(i)$, $v(i)$, $\delta(i)$ mit i und auch unter sich eindeutig umkehrbar; folglich kann jede von ihnen mit gleichem Recht neben oder statt i als unabhängige Zinsvariable angesehen und verwendet werden. Ihre geschickte Wahl kann auf die Rechnungen oft einen erheblich vereinfachenden Einfluss ausüben.

Lediglich der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass die versicherungstechnischen Rechnungen immer zusammengesetzte Verzinsung voraussetzen, und dass nur durch eine Abmachung bestimmt werden kann, wie der Zins für einen Zeitraum zu bemessen

ist, der kein ganzzahliges Vielfaches der Zeiteinheit darstellt. Als solche ist mathematisch die vernünftigste, die Aufzinsungsformel

$$K_t = K_0 r^t = K_0 (1 + i)^t = K_0 e^{\delta t}$$

mit $K_0 =$ Kapital im Zeitpunkt $t = 0$, $K_t =$ Kapital im Zeitpunkt $t = t$ nicht nur für positive oder negative ganze, sondern für jeden reellen (für theoretische Zwecke gegebenenfalls auch komplexen) Wert t gelten zu lassen.

b) Diskontinuierliche und kontinuierliche Betrachtungsweise.

Die mathematische Darstellung versicherungswirtschaftlicher Vorgänge ist immer nach zwei Betrachtungsweisen möglich. Sie unterscheiden sich grundsätzlich schon in der Festsetzung, die die Veränderungen in den beteiligten Personengesamtheiten mit den Zahlungen von Leistung und Gegenleistung verknüpft.

Die *diskontinuierliche* Methode geht von den rechnungsmässigen Bestandesänderungen aus, die jeweils nach Ablauf eines festen *endlichen* Intervalls, allgemein $\frac{1}{m}$ Jahr (wo m eine beliebige natürliche Zahl ist), eingetreten sind. Damit diese Annahme eine vollständig exakte Rechnung aufzubauen gestattet, ist über die Zahlungen festzulegen, dass sie nicht in kürzern als je $\frac{1}{m}$-jährigen Abständen erfolgen. Die Versicherungswerte sind dann durch Summenbildungen zu erhalten oder setzen sich aus solchen zusammen.

Im allgemeinen wird das statistische Beobachtungsmaterial auf *einjährige* Wahrscheinlichkeiten ausgewertet, und ihr Veranschaulichungsmittel, die *Ausscheideordnungen,* schreiten nach einjährigen Intervallen fort. Aus diesen praktisch vorliegenden Rechnungsgrundlagen lassen sich daher die Versicherungswerte nur bei Voraussetzung *jährlicher* Zahlungsweise mathematisch vollständig exakt geben. Will man die Rechnung auf *unterjähriger* (meist vierteljährlicher oder monatlicher) Zahlungsweise aufbauen, so reichen für die praktischen Bedürfnisse die *Näherungen* vollständig aus, die sich durch geeignete Annahmen über den Verlauf der Belastung und Entlastung im jährlichen Intervall und durch Anwendung besonderer

Verfahren aus den Werten der jährlichen Zahlungsweise gewinnen lassen. Ohne es immer zu wiederholen, verstehen wir unter diskontinuierlicher Rechnungsweise für unsere Aufgabe grundsätzlich immer Zahlung in jährlichen Abständen auf Grund der in jährlichen Intervallen erfolgten Änderungen in den Personengesamtheiten.

Als Zinsmasse haben in der Literatur alle drei, v, i und δ Eingang gefunden und weisen gleichermassen Vorzüge und Nachteile auf. Wir werden, wo es im folgenden nötig und wünschenswert ist, stets alle Masse diskutieren und auf die Unterschiede hinweisen, die bei Verwendung verschiedener dieser Masszahlen erwachsen.

Ähnlich wie bei der Anwendung der Mathematik auf Fragen der Naturwissenschaften ist es auch in der Versicherungsrechnung methodisch oft von Vorteil, Vorgänge im Infinitesimalen zu betrachten und in *unendlich kleinen* Abständen erfolgende Zahlungen bei *kontinuierlich sich ändernden* Personengesamtheiten anzunehmen. Die Ordnungen setzt man dann mit Vorteil gerade als analytische Funktionen voraus. Doch will das nicht etwa heissen, dass diese Ordnungen durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck, ein «Ausscheidegesetz» explizit dargestellt sein müssen; mit den Methoden der numerischen Differentiation und Integration lassen sich, wenn nötig, die durch die *kontinuierliche* Methode dargestellten Versicherungswerte genügend genau aus den einjährigen Wahrscheinlichkeiten und den aus ihnen hervorgehenden diskontinuierlich gerechneten Werten direkt berechnen. Der Wert des Ansatzes liegt im Methodischen; die an Stelle der Summen der diskontinuierlichen Rechnungsweise tretenden Integrale lassen sich meist einfacher und übersichtlicher umformen. Die Verzinsungsdauer ist dann auch eine stetige Veränderliche; bestes Zinsmass ist die Zinsintensität und wird in der Literatur dann auch allein verwendet.

c) Die Kommutationszahlen.

Durch die Einführung der Kommutationszahlen wird die numerische Berechnung der Versicherungswerte wesentlich erleichtert und die *äussere* Übersichtlichkeit der versicherungsmathematischen Formeln stark erhöht, dieses allerdings nur auf Kosten einer Verwischung ihres *innern* Gehalts. Mit Rücksicht auf die nicht einheitlich gehandhabte Bezeichnungsweise durch *Poukka, Christen, Meissner, Hantsch*

u. a. soll nachfolgend das von uns verwendete System festgesetzt werden.

Ausgehend von der diskontierten Zahl der Lebenden $D_x = v^x l_x = e^{-\delta x} l_x$ wird definiert

diskontinuierliche Betrachtungsweise	kontinuierliche Betrachtungsweise
$S_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} S_{x+t}^{(k-1)}$	$\bar{S}_x^{(k)} = \int_0^\infty S_{x+t}^{(k-1)}\,dt$ [1]
it $S_x^{(0)} = N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}$	$\bar{S}_x^{(0)} = \bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\,dt$
$S_x^{(1)} = S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} S_{x+t}^{(0)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t}$	$\bar{S}_x^{(1)} = \bar{S}_x = \int_0^\infty \bar{S}_{x+t}^{(0)}\,dt = \int_0^\infty \bar{N}_{x+t}\,dt$.

Die «höhern Summen» der diskontierten Zahlen lassen sich auch durch die Zahlen D_x selber darstellen; es gilt [2])

$$S_x^{(r)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{t+r}{r} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{t+r}{r} D_{x+t} \tag{1}$$

$$\bar{S}_x^{(r)} = \int_0^\infty \frac{t^r}{r!} D_{x+t}\,dt\,. \tag{2}$$

d) Ausscheidegesetze.

Zur Entlastung der spätern Darlegungen sollen an dieser Stelle noch einige allgemeine Bemerkungen folgen über die Ersetzung der

---

[1]) Es mutet vielleicht etwas sonderbar an, dass wir bei der diskontinuierlichen Rechnungsweise mit einer endlichen Zahl als oberer Summationsgrenze rechnen, im Integral der kontinuierlichen Rechnungsweise dagegen ∞ als Grenze einsetzen. Wir tun dies aus rein opportunistischen Gründen: während im ersten Fall es praktisch wertlos ist, die Untersuchungen durch Einführung unendlicher Reihen zu erschweren, sind im zweiten Fall die uneigentlichen Integrale oft besser zu handhaben; dabei lässt sich ja jedes endliche Integral als uneigentliches schreiben.

[2]) Hinsichtlich des Beweises vgl. für die erste der beiden Formeln *Poukka* [4] und *Hantsch* [5], für die zweite *Berger* [31] und *Meissner* [2].

allgemeinen Ausscheideordnungen durch ein formelmässiges *Ausscheide«gesetz»*, d. h. durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck, der für alle in Betracht fallenden Werte des Altersarguments x oder des Zeitarguments t den funktionellen Zusammenhang zwischen diesem und der zugehörigen Bestandesgrösse herstellt. Die Kennzeichnung einer Ordnung durch eine wenigstens näherungsweise zutreffende Gesetzmässigkeit befriedigt nicht nur theoretische Interessen, indem erst in diesem Fall die Veränderlichkeit einer Personengesamtheit vollständig und elegant mathematisiert erscheint, sondern kommt auch bestimmten praktischen Bedürfnissen entgegen. Sie liefert nämlich Anhaltspunkte für eine geeignete Ausgleichung der aus der Statistik hervorgegangenen rohen Werte. Im weitern bietet die Annahme eines Ausscheidegesetzes gerade der Behandlung des Zinsfussproblems neue Möglichkeiten — Lösungen *Blaschke-Gram* —, und endlich eröffnet sich die Aussicht, einen Versicherungswert ohne Zuhilfenahme von Kommutationsgrössen direkt als Funktion der ihn kennzeichnenden Grössen (Alter, Dauer, Aufschubzeit usw.), des Rechnungszinssatzes und der Parameter des Ausscheidegesetzes darstellen zu können. Für die numerische Rechnung kann sich die Fiktion allerdings nicht so überzeugend auswirken, wie man vielleicht zuerst erwarten mag, denn nur für die einfachsten Ausscheidegesetze lassen sich die einen Versicherungswert darstellenden endlichen (je nachdem auch unendlichen) Reihen und Integrale durch eine Summenfunktion ersetzen beziehungsweise mittels der elementaren und bekanntesten einfachen transzendenten Funktionen in geschlossener Form integrieren.

Als Beispiele derartiger Ausscheidegesetze wollen wir drei anführen:

1. Das aus der einfachsten Annahme über die Sterbeintensität, nämlich dass sie konstant sei, entspringende Gesetz

$$l_x = k \cdot s^x$$

$(0 < s < 1)$, das von *Dormoy* [33] der Aufstellung der Gesetze von Gompertz und Makeham natürlich nur als einführendes Beispiel vorausgeschickt wurde und nun gewöhnlich wenig glücklich seinen Namen trägt.

2. Das Gesetz von *Gompertz-Makeham*

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}.$$

Über seine Bedeutung für die versicherungstechnische Praxis ist kaum eine Bemerkung nötig; hinsichtlich der positiven Parameter c, s und g sei erinnert, dass $c > 1$ ist, während s und $g < 1$ sind.

3. Das Gesetz von *Achard*

$$l_x = l_{x_0} (\omega - x)^m,$$

wo ω das Schlussalter der Tafel bedeutet ($l_\omega = 0$, $l_{\omega-1} > 0$) und $\omega - x$ als Lebensergänzung bezeichnet wird. Es ist die Verallgemeinerung der alten Hypothese von *Moivre*, die in ihm als Spezialfall $m = 1$ enthalten ist, und von *Achard* [7] gelegentlich einer eleganten Lösung des Zinsfussproblems am Barwert der kontinuierlichen, lebenslänglichen Leibrente in die Literatur eingeführt worden.

Die Darstellung der Leibrentenbarwerte als direkte Funktion des Eintrittsalters x, der Dauer n, des Zinsmasses und der Parameter des Ausscheidegesetzes führt zu den folgenden Ergebnissen:

1. Gleichgültig, um welche Art von Leibrente es sich handelt, ist bei Zugrundelegung des Ausscheidegesetzes von *Dormoy* der Rentenbarwert unabhängig vom Alter und gleich dem Barwert der entsprechenden Zeitrente, berechnet mit der Zinsintensität $\delta^* = \delta + \mu$, d. h. mit dem Diskontierungsfaktor $v^* = vs$, wo s und damit $\mu = -\ln s =$ konstant die Parameter des Ausscheidegesetzes bedeuten.

2. Folgt die Ausscheideordnung dem Gesetz von *Makeham*, so müssen wir uns auf die Darstellung kontinuierlich gerechneter Leibrentenbarwerte beschränken. Der Barwert der *lebenslänglichen* Rente

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$$

lässt sich dann durch die Formel

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^h \cdot \ln c} Q(\lambda, h) \tag{3}$$

geben [1]); dabei sind λ und h mit den Ausgangsgrössen durch die Ausdrücke

$$\lambda = -c^x \ln g, \quad h = -\frac{\delta - \ln s}{\ln c}$$

verknüpft, und $Q(\lambda, h)$ bedeutet die unvollständige Γ-Funktion $Q(\lambda, h) = \int_\lambda^\infty u^{h-1} e^{-u}\, du$. Dank der verdienstvollen Berechnung und Tabellierung der Funktion $e^\lambda \lambda^{-h} Q(\lambda, h)$ für die in der versicherungstechnischen Praxis gebräuchlichen Werte durch *Thalmann* [34] ist (3) nicht nur theoretisch interessant, sondern lässt auch praktisch mit wenig Mühe einen gesuchten Rentenbarwert berechnen.

Auch bei der *Achardschen* Hypothese müssen wir uns mit der kontinuierlichen Rechnungsweise bescheiden. Durch einige einfache Substitutionen [2]) lässt sich der Barwert der temporären Rente $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ durch das Integral

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\delta h^m e^h} \int_{h-\delta n}^{h} t^m e^t\, dt \qquad h = \delta(\omega - x)$$

darstellen, das in geschlossener Form ausgewertet werden kann. Es ist nämlich (durch wiederholte partielle Integration) unbestimmt integriert

$$\int t^m e^t\, dt = e^t \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \mu! \binom{m}{\mu} t^{m-\mu}.$$

---

[1]) Für den Beweis vgl. etwa *Friedli* [33], wo auch die Originalliteratur genannt ist. Ersetzt man im Integral für $\bar{a}_x$ die obere Grenze ∞ durch den endlichen Wert n, so ergibt sich leicht als Ausdruck für den Barwert $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ der temporären Rente

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{e^\lambda}{\lambda^h \ln c} \left\{ Q(\lambda, h) - Q(z, h) \right\},$$

wobei $z = \lambda \cdot c^n$ zu setzen ist. Für diesen Wert $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ kann man dann auch

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{e^\lambda}{\lambda^h \ln c} \left\{ P(z, h) - P(\lambda, h) \right\}$$

schreiben, wo

$$P(\lambda, h) = \Gamma(h) - Q(\lambda, h) = \int_0^\lambda u^{h-1} e^{-u}\, du \quad \text{ist.}$$

[2]) Man vgl. hierzu etwa *Christen* [1].

woraus

$$\bar{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1}{\delta h^m} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \mu! \binom{m}{\mu} \left\{ h^{m-\mu} - \frac{(h-\delta n)^{m-\mu}}{e^{\delta n}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta h^m} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \mu! \binom{m}{\mu} h^{m-\mu} \left\{ 1 - \frac{\left(1 - \frac{n}{\omega - x}\right)^{m-\mu}}{e^{\delta \cdot n}} \right\}$$

folgt. Setzt man die Dauer n der Rente der Lebensergänzung $\omega - x$ gleich, so erhält man den Barwert der lebenslänglichen Rente $\bar{a}_x$; dabei ist, wie auch schon aus der Integraldarstellung hervorgeht, bemerkenswert, dass dieser Barwert das Produkt von $\frac{1}{\delta}$ mit einer Funktion $F(h)$ ist, die nur von $h = (\omega - x)\,\delta$ abhängt,

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} \left\{ \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \frac{\mu! \binom{m}{\mu}}{h^\mu} - \frac{1}{e^h} \right\}.$$

§ 2.

Die Ableitungen der Versicherungswerte nach den Zinsmassen.

a) Rentenbarwerte.

Wir geben zunächst die Derivierten (Ableitungen) des Barwerts a_x der diskontinuierlich lebenslänglich nachschüssig zahlbaren Leibrente «1» an; eine besondere Herleitung erübrigt sich, da die Formeln sich aus einem später zu behandelnden allgemeinern Fall durch Spezialisieren ohne weiteres ergeben [1]).

[1]) Es sei noch daran erinnert, dass schon *James Meikle* [8] die Ableitung des *diskontinuierlichen* Rentenbarwerts nach v benützte; die Ableitung nach i dürfte zuerst bei *van Dorsten* [9] stehen, einen ausgeführten, bei *Hantsch* [5] wieder abgedruckten Beweis hat aber erst *Poukka* [4] gegeben. Die Ableitung nach δ hat *Berger* [6] in die Literatur eingeführt. Für den *kontinuierlichen* Rentenbarwert hat ebenfalls *Berger* [31] und *Meissner* [2] die Ableitung aufgestellt. Endlich sei noch vermerkt, dass *Wyss* [10] durch einen interessanten Umformungsprozess ohne Differentiationen die Taylorreihen von a_x und $\bar{a}_x$ nach δ hergeleitet hat.

$$
(5) \qquad \begin{cases}
\dfrac{d^r a_x}{d v^r} = \dfrac{1}{v^r} r! \dfrac{S^{(r)}_{x+r}}{D_x} \\[2ex]
\dfrac{d^r a_x}{d i^r} = (-1)^r v^r r! \dfrac{S^{(r)}_{x+1}}{D_x} \\[2ex]
\dfrac{d^r a_x}{d \delta^r} = (-1)^r \dfrac{\sum\limits_{t=1}^{\omega-x} t^r D_{x+t}}{D_x} .
\end{cases}
$$

Aus der bekannten Beziehung $\mathsf{a}_x = a_x + 1$ folgert man sofort, dass (5) auch die Ableitungen des Barwerts der lebenslänglich vorschüssig zahlbaren Leibrente «1» darstellt.

Wir gehen jetzt zum Barwert der um n Jahre aufgeschobenen Rente über und bestimmen zunächst die Derivierte von ${}_{n|}a_x$ nach v. Es wird

$$
\frac{d^r {}_{n|}a_x}{d v^r} = \frac{d^r}{d v^r} \frac{1}{l_x} \sum_{t=n+1}^{\omega-x} v^t l_{x+t} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=n+1}^{\omega-x} t(t-1)\ldots(t-r+1) v^{t-r} l_{x+t}
$$

$$
= \frac{1}{v^r} r! \frac{1}{l_x} \sum_{t=n+1}^{\omega-x} \binom{t}{r} v^t l_{x+t} = \frac{1}{v^r} r! \frac{1}{D_x} \sum_{t=n+1}^{\omega-x} \binom{t}{r} D_{x+t}
$$

$$
= \frac{1}{v^r} r! \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\omega-x-n-1} \binom{t+n+1}{r} D_{x+n+1+t} .
$$

Für die weitere Umformung müssen wir getrennte Wege einschlagen, je nachdem $r \leqq n$ oder $r > n$ ist. Im ersten Fall müssen wir auf die Formel

$$
(6) \qquad \sum_{\varrho=0}^{r} \binom{n-\varrho}{r-\varrho} \binom{t+\varrho}{\varrho} = \binom{n+t+1}{r}
$$

zurückgreifen, die gerade unter der Annahme $r \leqq n$ gilt [1]). Wir erhalten damit zunächst

[1]) Die Formel (6) lässt sich am einfachsten in der folgenden Weise gewinnen. Wir multiplizieren die beiden Reihen.

$$\frac{d^r\,{}_{n|}a_x}{dv^r} = \frac{1}{v^r}\,r!\,\frac{1}{D_x}\sum_{\varrho=0}^{r}\binom{n-\varrho}{r-\varrho}\sum_{t=0}^{\omega-x-n-1}\binom{t+\varrho}{\varrho}D_{x+n+1+t}$$

Für $r \geqq n+1$ hingegen wird unmittelbar

$$\sum_{t=0}^{\omega-x-n-1}\binom{t+n+1}{r}D_{x+n+1+t} = \sum_{t=r-n-1}^{\omega-x-n-1}\binom{t+n+1}{r}D_{x+n+1+t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{\omega-x-r}\binom{t+r}{r}D_{x+r+t}\,.$$

Mittels unserer Beziehung (1) ergibt sich dann sofort

$$(7a)\qquad \frac{d^r\,{}_{n|}a_x}{dv^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{v^r}\,r!\,\dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{r}\binom{n-\varrho}{r-\varrho}S^{(\varrho)}_{x+n+1} & r \leqq n \\[2ex] \dfrac{1}{v^r}\,r!\,\dfrac{S^{(r)}_{x+r}}{D_x} & r > n\,. \end{cases}$$

Ebenfalls unter Benützung von (6) wird die Derivierte nach i

$$(1-u)^{-n+r-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{-n+r-1}{\nu}u^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n-r+\nu}{\nu}u^\nu$$

und

$$(1-u)^{-t-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\binom{-t-1}{\mu}u^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{t+\mu}{\mu}u^\mu$$

gliedweise aus und vergleichen die Koeffizienten der so erhaltenen Reihe

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\varrho=0}^{\sigma}\binom{n-r+\sigma-\varrho}{\sigma-\varrho}\binom{t+\varrho}{\varrho}u^\sigma = (1-u)^{-n+r-t-2}$$

mit denjenigen der direkten Entwicklung

$$(1-u)^{-n+r-t-2} = \sum_{\sigma=0}^{\infty}(-1)^\sigma\binom{-n+r-t-2}{\sigma}u^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\binom{n+t-r+1+\sigma}{\sigma}u^\sigma$$

Unsere Formel ist dann gerade der Ausdruck der Gleichheit der Koeffizienten zur Potenz u^r.

$$(7b) \qquad \frac{d^r\,{}_{n|}a_x}{d\,i^r} = (-1)^r\, r!\, v^r \sum_{\varrho=0}^{r} \binom{r+n-\varrho-1}{r-\varrho} \frac{S^{(\varrho)}_{x+n+1}}{D_x},$$

während die Derivierte nach δ am einfachsten durch Anwendung der Leibnizschen Regel auf die Grundbeziehung

$${}_{n|}a_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\, v^n a_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}\, e^{-\delta n} a_{x+n}$$

gewonnen wird,

$$(7c) \qquad \frac{d^r\,{}_{n|}a_x}{d\,\delta^r} = (-1)^r \sum_{\varrho=0}^{r} \binom{r}{\varrho} n^{r-\varrho} \frac{\sum\limits_{t=1}^{\omega-x-n-1} t^\varrho D_{x+n+t}}{D_x}.$$

Setzen wir $n = 0$, so ersehen wir leicht, dass die drei Formeln (7 *a*, *b*, *c*), wie es sein muss, in die entsprechenden Werte (5) übergehen.

Hinsichtlich der Derivierten vorschüssig zahlbarer, aufgeschobener Renten zeigt die bekannte Beziehung ${}_{n|}a_x = {}_{n-1|}a_x$, dass die Derivierten einer um n Jahre aufgeschobenen, vorschüssig zahlbaren Rente gleich den Derivierten der um $(n-1)$ Jahre aufgeschobenen, nachschüssig zahlbaren Rente sind.

Die Derivierten der Barwerte temporärer Renten von der Dauer n schliesslich ergeben sich einfach als Differenz der entsprechenden Werte (5) für die sofort beginnende und (7) für die um n Jahre aufgeschobene Rente.

Bei der kontinuierlichen Rechnungsweise dürfen wir uns auf die Derivierten nach δ beschränken, wie dies auch bisher in der Literatur geschehen ist. Es gilt

$$(8) \qquad \frac{d^r\,\bar{a}_x}{d\,\delta^r} = (-1)^r \frac{1}{D_x} \int_0^\infty t^r D_{x+t}\, dt = (-1)^r\, r!\, \frac{S^{(r)}_x}{D_x}$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} \frac{d^r\,{}_{n|}\bar{a}_x}{d\,\delta^r} &= (-1)^r \frac{1}{D_x} \sum_{\varrho=0}^{r} \binom{r}{\varrho} n^{r-\varrho} \int_0^\infty t^\varrho D_{x+n+t}\, dt \\ &= (-1)^r \sum_{\varrho=0}^{r} r(r-1)\ldots(r-\varrho+1)\, n^{r-\varrho} \frac{\bar{S}^{(\varrho)}_{x+n}}{D_x}. \end{aligned}$$

Hier müssen wir noch an eine Bemerkung anknüpfen, die *Wyss* [10] und *Meissner* [2] über den Konvergenzradius der Taylorreihe von $\bar{a}_x$ gemacht haben. Wie von der Funktionentheorie her allgemein bekannt ist, kann man den Konvergenzradius der an einer beliebigen Stelle z_0 der komplexen Zahlenebene angesetzten Taylorschen Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ auf zwei Arten bestimmen. Einmal ist er arithmetisch nach *Cauchy-Hadamard* durch die Folge der Koeffizienten b_v der Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^\nu$ festgelegt,

$$\frac{1}{r} = \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|},$$

dann ist er aber auch als Abstand der Stelle z_0 von der im gleichen Blatt der Riemannschen Fläche nächstgelegenen singulären Stelle von $f(z)$ gegeben. Betrachten wir zunächst den Barwert $a'_x(i')$ der diskontinuierlich nachschüssig zahlbaren Leibrente in Abhängigkeit des Zinssatzes i', so ist er für alle x mit Ausnahme des höchsten vorkommenden Tafelalters $x = \omega - 1$ eine rational-gebrochene Funktion von i' mit einer einzigen singulären Stelle, nämlich einem Pol $(\omega - x - 1)$ ter Ordnung in $i' = -1$. Wenden wir jetzt das oben Gesagte auf die unter Berücksichtigung von (5) zu

$$a'_x = a_x(i') = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu \frac{S_{x+1}^{(\nu)}}{D_x} (i' - i)^\nu$$

sich ergebende Taylorentwicklung von a'_x an der Stelle $z_0 = i$ an und bedenken, dass, solange i reell und nicht negativ ist (was praktisch allein in Frage kommt), $\lim_{r \to \infty} S_x^{(r)} = \infty$ gilt, so folgt [1])

---

[1]) Diese Beziehung lässt sich auch direkt beweisen. Aus (1) folgen nämlich die Ungleichungsketten

$$0 < \binom{\omega - x + r - 1}{r} D_{\omega-1} = \binom{\omega - x + r - 1}{\omega - x - 1} D_{\omega-x} \leqq S_x^{(r)} \leqq$$

$$\leqq \binom{\omega - x + r - 1}{r} D_x(\omega - x - 1) = \binom{\omega - x + r - 1}{\omega - x - 1} (\omega - x - 1) D_x$$

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt[r]{S_x^{(r)}} = 1 .$$

Es wäre aber falsch, diese für die höhern Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden in der *diskontinuierlichen* Rechnungsweise gültige Beziehung stillschweigend auch als richtig für die Werte $\bar{S}_x^{(r)}$ der *kontinuierlichen* Rechnungsweise anzunehmen und weiter zu schliessen, dass die Reihe für $\bar{a}_x' = \bar{a}_x(\delta')$ [1])

$$\bar{a}_x' = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^\varrho \frac{\bar{S}_x^{(\varrho)}}{D_x} (\delta' - \delta)^\varrho$$

für $|\delta' - \delta| < 1$ konvergiere.

Denn gehen wir davon aus, dass der kontinuierliche Rentenbarwert

$$\bar{a}_x' = \int_0^\infty e^{-\delta' t} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$$

ein Laplace-Integral in δ' mit der L-Funktion $F(t) = l_{x+t} / l_x$ darstellt, so wissen wir zunächst, dass dieses Integral in einer Halbebene $\Re(\delta') > \beta$ konvergiert [2]). Nun ist die L-Funktion $F(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ stets $\geqq 0$. Für diesen Fall sagt aber ein bekannter Satz aus, dass dann die

---

$$\sqrt[r]{\omega - x + r - 1}\ \sqrt[r]{\omega - x + r - 2} \ldots \sqrt[r]{r+1}\ \sqrt[r]{\frac{D_{\omega-1}}{(\omega - x - 1)!}} \leqq \sqrt[r]{S_x} \leqq$$

$$\leqq \sqrt[r]{\omega - x + r - 1}\ \sqrt[r]{\omega - x + r - 2} \ldots \sqrt[r]{r+1}\ \sqrt[r]{\frac{D_x}{(\omega - x - 2)!}} ,$$

sodass $1 \leqq \lim_{r \to \infty} \sqrt[r]{S_x^{(r)}} \leqq 1$ wird.

[1]) Die Reihendarstellung ist bei *Wyss* etwas anders, man erkennt aber sehr leicht, dass sein Wert $ln\, m$ nichts anderes als $-(\delta' - \delta)$ ist. *Meissner* geht von $\delta = 0$ als Entwicklungszentrum der Reihe aus.

[2]) Da praktisch l_{x+t} nur so gewählt werden kann, dass $\beta < 0$ sein muss, sei nur für diesen Fall die von *Pincherle* [36] aufgefundene Bestimmung von β genannt;

$$\beta = \limsup_{\omega \to \infty} \frac{1}{\omega} ln \left| \int_\omega^\infty F(t)\, dt \right| .$$

Stelle β selber eine singuläre Stelle von $\bar{a}_x(\delta')$ ist [1]). Damit ist der Konvergenzradius R der Potenzreihe für $\bar{a}_x(\delta')$ mit dem (reellen) Mittelpunkt $\delta > 0$ gleich $R = \delta - \beta = \delta + |\beta|$ und im allgemeinen nicht $R = 1$ [2]). Aus diesem Ergebnis kann noch rückwärts geschlossen werden, dass

$$\limsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{\bar{S}_x^{(r)}} = \frac{1}{\delta + |\beta|}$$

gilt, solange $\delta > 0$ ist und $\beta \neq -\infty$ war.

b) Barwerte von Kapitalversicherungen, Prämien, Reserven.

Die Derivierten der Barwerte der lebenslänglichen, der um n Jahre aufgeschobenen und der temporären Todesfallversicherung sind den entsprechenden Rentenbarwerten analog, nur sind die $S_{x+1}^{(r)}$ durch die entsprechend gebildeten $R_x^{(r)}$ zu ersetzen. Die Ableitungen der gemischten Versicherung von der Dauer n gehen aus denen der temporären Todesfallversicherung durch Hinzufügen der Ableitung der Erlebensfallversicherung

$$\frac{d^r\, {}_nE_x}{d i^r} = (-1)^r r!\, v^r \binom{n+r}{r} {}_nE_x, \tag{10}$$

$$\frac{d^r\, {}_nE_x}{d v^r} = r! \binom{n}{r} \frac{{}_nE_x}{v^r}, \qquad \frac{d^r\, {}_nE_x}{d \delta^r} = (-1)^r n^r\, {}_nE_x$$

hervor.

Für die Prämien geht man vom allgemeinen Ansatz $P = \frac{A}{\mathsf{a}}$ aus und differenziert zunächst diesen. Doch ersieht man, dass hier wie auch noch mehr bei den Reserveformeln die allgemeinen Ausdrücke für die Ableitungen sehr rasch verwickelt und praktisch kaum mehr brauchbar werden.

---

[1]) Man vergleiche zu diesen Überlegungen auch *Doetsch* [36], für die letzte Bemerkung insbesondere Satz 1 [4, 5]. Dieser Satz ist zuerst von *Landau* [37], [38] bewiesen worden.

[2]) Wird beispielsweise als L-Funktion die Überlebensordnung nach *Achard*

$$l_{x+t} = \begin{cases} (\omega - x - t)^m & t \leqq \omega - x \\ 0 & t \geqq \omega - x \end{cases}$$

genommen, so ist $\bar{a}_x(\delta)$ eine ganze Funktion, und der Konvergenzradius ihrer Potenzreihenentwicklung ist ∞.

2. Kapitel.

§ 3.

Die verschiedenen Verfahren zur Lösung des Zinsfussproblems bei der Leibrente.

a) Der Einteilungsgrundsatz der Zusammenstellung.

Für die von uns angestrebte Einteilung ist nicht massgebend, auf welchem Wege die verschiedenen Lösungen von den Autoren hergeleitet wurden, sondern — was für die praktische Anwendung ungleich wichtiger ist — welche *Ausgangswerte* bekannt sein müssen. *Frucht* [3] gelangt in diesem Zusammenhang zur Unterscheidung von *drei* wesentlichen Lösungstypen. Seine Untersuchung beschränkte er allerdings auf den Barwert der lebenslänglichen Leibrente, und so musste er von einigen Lösungsmethoden absehen, die besonders an der temporären Leibrente entwickelt worden sind und deren Gesamtheit wir sehr einfach in eine *vierte* Lösungsgruppe zusammenfassen können. Wir besprechen diese letzte Gruppe an erster Stelle und schliessen die übrigen Gruppen in der umgekehrten Reihenfolge an, als wie sie Frucht untersucht hat.

Der gesuchte Versicherungswert und ebenso die auf ihn bezüglichen Grössen — soweit sie sich geändert haben — wie Zinsfuss, Alter, Dauer usw. kennzeichnen wir immer durch einen Akzent (′), die als bekannt vorauszusetzenden Ausgangswerte bleiben stets ohne Akzent. Sofern mehrere gleichartige Werte als gegeben gelten, sollen sie durch Indices gekennzeichnet werden. Den natürlichen Logarithmus bezeichnen wir mit *ln*, unter log verstehen wir ein Logarithmensystem zu einer beliebigen Basis. Weitere Festsetzungen geben wir unmittelbar an den für sie in Betracht fallenden Stellen an.

b) I. Gruppe: Verfahren unter Zuhilfenahme von Zeitrentenbarwerten.

Die Methoden, die Zeitrentenbarwerte zu Hilfe zu ziehen, gehen bis auf eine Ausnahme — Lösung (20) von *Steffensen* — alle von der Voraussetzung aus, der Barwert der Zeitrente als besonderer Hilfs-

wert liege schon zum *neuen* Zinsfuss berechnet vor. Sie suchen, den Barwert der temporären Leibrente durch den Barwert einer Zeitrente mit geeignet gewählter Dauer darzustellen. Allgemein sind die Lösungen um so genauer, je kürzer die Dauer n der temporären Leibrente ist. Lässt man die Dauer n in die Lebensergänzung $\omega - x$ übergehen, so lässt sich auch die lebenslängliche Leibrente erfassen; doch ist die Genauigkeit der Ergebnisse für diesen Grenzfall nicht besonders gross.

Mit den geringsten Kenntnissen an Ausgangswerten kommt *Borch* [11] aus. Für die jährlich nachschüssig zahlbare temporäre Leibrente findet er bei kurzen Dauern n den Ausdruck

$$a_{x\overline{n}|} \sim \frac{l_{x+\theta n}}{l_x}\, a_n \tag{11}$$

mit

$$\theta_n = \frac{1}{d} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$$

(d = Diskont) durch ziffernmässiges Nachrechnen gut bestätigt. Die Formel gilt unverändert auch für die entsprechende vorschüssig zahlbare temporäre Leibrente. Bei der kontinuierlich zahlbaren Rente ist θ_n durch $\bar{\theta}_n$ zu ersetzen mit

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{\delta} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\,.$$

Erhöhte Genauigkeit bei gleichen Annahmen über die als bekannt vorauszusetzenden Grössen erreicht ebenfalls *Borch* [11] mit

$$a_{x\overline{n}|} \sim \frac{\sum_{t=1}^{n} l_{x+t}}{n\, l_x} \cdot \psi(x,n,i') \cdot a'_{\overline{n}|}, \tag{12}$$

wo

$$\varphi(x,n,i') = 1 + i' \left(\frac{n+1}{2} - \frac{\sum_{t=1}^{n} t l_{x+t}}{\sum_{t=1}^{n} l_{x+t}} \right)$$

bedeutet.

Für den Fall, dass nicht nur der Barwert der Zeitrente zum Zinssatz i', sondern auch die Barwerte der temporären Leibrente und der Zeitrente zum Zinssatz i bekannt sind, findet *Borch* [11] die Beziehung

$$(13)\quad a'_{x\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|} \left[\frac{\sum_{t=1}^{n} l_{x+t}}{n\, l_x} \left(1 - \frac{i'}{i}\right)\left(\frac{i'}{i} + \varphi(x,n,i')\right) + \left(\frac{i'}{i}\right)^2 \frac{a_{x\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} \right];$$

etwas weniger genau, aber rechnerisch erheblich einfacher ist

$$(14)\qquad a'_{x\overline{n}|} \sim a'_{\overline{n}|} \left[\frac{\sum_{t=1}^{n} l_{x+t}}{n\, l_x} \left(1 - \frac{i'}{i}\right) + \frac{i'}{i} \cdot \frac{a_{x\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} \right].$$

Mit Benützung der gleichen Ausgangsgrössen hat schon früher *Weber* [12] das folgende Verfahren angegeben. Bedeutet

$$\begin{cases} k = \dfrac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} \\[2ex] \nu = \dfrac{\log a'_{\overline{n}|} - \log a_{\overline{n}|}}{\log(1+i) - \log(1+i')} = \dfrac{\log k}{\log(1+i) - \log(1+i')} = \dfrac{ln\, a'_{\overline{n}|} - ln\, a_{\overline{n}|}}{\delta - \delta'} = \dfrac{ln\, k}{\delta - \delta'} \end{cases}$$

so gilt angenähert

$$(15)\qquad \bar{a}'_{x\overline{n}|} \sim k\, \bar{a}_{x\overline{n}|} + \frac{\nu}{2}(1-k)\left(1 - \frac{l_{x+\frac{n+\nu}{2}}}{l_{x+\frac{\nu}{2}}}\right).$$

Wir haben dabei für k den Ansatz der Originalarbeit, $k = \dfrac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$ verwendet. *Christen* [1] geht bei ihrer Wiedergabe von

$$\bar{k} = \frac{\bar{a}'_{\overline{n}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}} = \frac{i'\,\delta}{\delta'\, i} \cdot k$$

aus. Wie ein genaues Studium der Herleitung von (15) zeigt, ist dies vollkommen unwesentlich, man kann ebensogut auch von

$$k^* = \frac{\mathsf{a}'_{\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} = \frac{v}{v'}\,\frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{i\,v\,\delta'}{i'\,v'\,\delta}\cdot\bar{k}$$

ausgehen. Wohl sind k, k^*, $\bar{k}$ voneinander verschieden; indem aber diese Grössen auch in ν vorkommen, wird ihr Unterschied im Rahmen der Genauigkeit von (15) voll kompensiert. Wie rein rechnerische Nachprüfungen gezeigt haben, darf man ebenso $\bar{a}'_{x\overline{n}|}$ und $\bar{a}_{x\overline{n}|}$ durch die Paarungen $a'_{x\overline{n}|}$ und $a_{x\overline{n}|}$ bzw. $\mathsf{a}'_{x\overline{n}|}$ und $\mathsf{a}_{x\overline{n}|}$ ersetzen.

Stehen die Barwerte der temporären Leibrente und der Zeitrente zu zwei Zinssätzen i_0 und i_1, die nicht unbedingt den neuen Zinssatz i' einschliessen müssen, zur Verfügung, so kann man sich mit Vorteil des folgenden, von *Lenzi* [13] entwickelten Verfahrens bedienen: Durch lineare Interpolation nach der Dauer ν bestimmt man aus der Tafel der Zeitrentenbarwerte zwei Dauern ν_0 und ν_1 derart, dass

$$a_{\overline{\nu_0}|}(i_0) = a_{x\overline{n}|}(i_0)$$

$$a_{\overline{\nu_1}|}(i_1) = a_{x\overline{n}|}(i_1)$$

ist. Hernach interpoliert man, ebenfalls linear, aus den beiden Dauern ν_0 und ν_1 nach dem Zinssatz i eine neue Dauer

$$\nu' = \nu_0 + \frac{i' - i_0}{i_1 - i_0}(\nu_1 - \nu_0).$$

Alsdann wird der gesuchte Leibrentenbarwert $a_{x\overline{n}|}(i')$ zum Zinssatz i' mit befriedigender Genauigkeit durch den Barwert $a_{\overline{\nu'}|}(i')$ der Zeitrente zu diesem Zinssatz und der Dauer ν' gegeben,

$$a'_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}}(i') \sim a_{\overline{\nu'}|}(i'). \tag{16}$$

Der Wert $a_{\overline{\nu'}|}(i')$ ist aus der nach ganzzahligem Argument fortschreitenden Tafel der Zeitrentenbarwerte ebenfalls wieder linear zu interpolieren. Weil dabei stets $a_{t+1}(i') - a_t(i) = v'^{t+1}$ gilt, so kann man, wenn t die ganze Zahl bedeutet, für die $t \leqq \nu < t+1$ ist, das Ergebnis auch schreiben:

$$a'_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|}(i') \sim a_{\overline{v'}|}(i') = a_{\overline{t}|}(i') + v'^{t+1}(\nu - t). \tag{16'}$$

Wir verzichten darauf, das zur Anwendung gekommene Interpolationsverfahren tiefergehend zu analysieren und bemerken nur noch,

dass es offensichtlich ebensogut mit den Barwerten der vorschüssig zahlbaren oder kontinuierlichen Renten durchführbar ist.

Es verbleiben uns in dieser ersten Lösungsgruppe noch zwei Verfahren zur Besprechung, die *Steffensen* [14] für den Barwert der lebenslänglichen Leibrente im Anschluss an die Aufstellung der Ungleichung

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt \leqq \int_{a}^{b} f(t)\,\varphi(t)\,dt \leqq \int_{a}^{a+\lambda} f(t)\,dt \tag{17}$$

$$\lambda = \int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt$$

entwickelt hat. Diese Ungleichung gilt, sobald die im Intervall $a \leqq t \leqq b$ definierten und integrierbaren Funktionen noch den Bedingungen $0 \leqq \varphi(t) \leqq 1$ und $f(t_2) \leqq f(t_1)$, $t_2 > t_1$, genügen. Setzen wir nun in (17) $f(t) = v'^t$ und $\varphi(t) = {}_tp_x$, so ergibt die obere Abschätzung

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt \leqq \int_0^{\bar{e}_x} v^t\,dt = \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|}. \tag{18}$$

Wenn wir $\bar{e}_x \sim e_x^0$ als kontinuierlich gerechnete vollständige mittlere Lebenserwartung bezeichnen und uns auf kontinuierlich gerechnete Rentenbarwerte beziehen, heisst dies: *Der Wert einer Leibrente ist kleiner als der Wert der während der (kontinuierlich gerechneten) vollständigen mittleren Lebenserwartung zahlbaren Zeitrente.*

Setzen wir in (17), mit $h = i' - i$, $f(t) = (1 + hv)^{-t} = e^{-(\delta'-\delta)t}$, $\varphi(t) = v^t\,{}_tp_x$, so wird $\lambda = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = \bar{a}_x$ und

$$\bar{a}'_x = \int_0^\infty (1+i')^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^\infty (1+hv)^{-t}\,v^t\,{}_tp_x\,dt \leqq \int_0^{\bar{a}_x} (1+hv)^{-t}\,dt$$

$$\bar{a}'_x \leqq \int_0^{\bar{a}_x} e^{-(\delta'-\delta)}\,dt = \bar{a}_{\overline{\bar{a}_x}|}(\delta' - \delta), \tag{19}$$

in Worten, wenn wir uns wiederum auf kontinuierlich gerechnete Rentenbarwerte beziehen:

Der Wert einer Leibrente zur Zinsintensität δ' ist kleiner als der Wert der Zeitrente zur Zinsintensität $\delta^* = \delta' - \delta$ und dem zur Zinsintensität δ berechneten Leibrentenbarwert $\bar{a}_x(\delta)$ als Dauer. Von diesen beiden mathematisch exakten Beziehungen ist (19) die allgemeinere, (18) ist in ihr als Sonderfall $\delta = 0$ enthalten. Durch geeignete Interpretation der Summation zu einer nicht ganzzahligen Summationsgrenze kann (17) auch in eine diskontinuierliche Fassung gebracht werden. Aus dieser lässt sich dann folgern, dass (18) und (19) ebenfalls gelten, wenn für die Barwerte die entsprechenden Werte nachschüssig zahlbarer Leibrenten (an die Stelle von $\bar{e}_x$ tritt dann die abgekürzte mittlere Lebenserwartung $e_x = \mathring{e}_x - \frac{1}{2}$) eingesetzt werden. Wir haben der kontinuierlichen Darstellung nur deshalb den Vorzug gegeben, weil die Formulierung etwas einfacher ist. Der Wert von (18) und (19) für das Zinsfussproblem liegt darin, dass die beiden Ungleichungen, als Gleichungen, aufgefasst eine erste grobe Annäherung eines gesuchten Leibrentenbarwerts geben. Wollen wir diese ersten Annäherungen verbessern, so können wir in der folgenden Weise vorgehen, wobei wir wieder zur diskontinuierlichen Darstellung zurückkehren.

Setzen wir den gesuchten Leibrentenbarwert $a'_x(i')$ dem Barwert $a_{\overline{n}|}(h) = \frac{1-(1+h)^{-n}}{h}$ einer Zeitrente zum Zinssatz $h = |i' - i|$ gleich, $a'_x(l') = a_{\overline{n}|}(h)$, so wird deren Dauer

$$n = -\frac{\log(1 - h\,a'_x)}{\log(1+h)} = -\frac{ln\,(1 - h\,a'_x)}{ln\,(1+h)}.$$

Entwickeln wir diesen Wert in eine Potenzreihe in h, wobei zu beachten ist, dass a'_x seinerseits durch die Potenzreihe in h

$$a'_x = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{d^\varrho a'_x}{d i^\varrho} \frac{h^\varrho}{\varrho!}$$

dargestellt wird, und brechen die Reihe nach der ersten Potenz von h ab, so erhalten wir für a'_x die Näherung

$$a'_x \sim a_{\overline{n}|}(h) = \frac{1-(1+h)^{-n}}{h}, \tag{20}$$

wobei

$$n = a_x - h\,\alpha$$

und

$$\alpha = \frac{v\,S_{x+1}}{D_x} - \frac{1}{2}\,a_x(a_x+1) = \frac{v\,S_{x+1}}{D_x} + 0{,}125 - \frac{1}{2}\left(a_x + \frac{1}{2}\right)^2$$

ist.

Setzen wir $i = 0$, so geht aus (20) als Sonderfall

$$a'_x \sim a'_{\overline{m}|} = a'_{\overline{m}|}(i') = \frac{1-v'^m}{i'} \tag{21}$$

mit

$$m = e_x - i'\,\varepsilon_x$$

und

$$\varepsilon_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\omega-x} t\,l_{x+t} - \frac{e_x}{2}\,(e_x+1) \sim \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\omega-x} t\,l_{x+t} + 0{,}125 - \frac{1}{2}\,(\mathring{e}_x)^2$$

hervor. Mit dieser Formel werden im allgemeinen weniger gute Ergebnisse erreicht als mit (20); sie wäre dann anzuwenden, wenn nicht schon ein System von Kommutationswerten zu einem Zinssatz $i > 0$ vorliegt.

c) II. Gruppe: Verfahren, die sich auf das Bestehen eines formelmässigen Ausscheidegesetzes gründen.

Die Methoden, die wir in dieser Gruppe anzuführen haben, weisen gegenüber allen andern einen erheblichen Vorteil auf: *Sie geben mathematisch vollständig exakte Lösungen.* Dafür haftet ihnen allerdings auch ein nicht zu übersehender Nachteil an: die Ausscheideordnung muss der dem Verfahren zugrunde liegenden, formelmässig gegebenen Gesetzmässigkeit gehorchen. Ferner kommt dazu, dass die Kenntnis der Rentenbarwerte und der Kommutationszahlen zum alten Zinssatz im allgemeinen nicht ausreicht; vielmehr ist eine in grösserm Umfang tabellierte Zusammenstellung von Hilfszahlen, eine sogenannte «Standardtafel» nötig.

Sehen wir das Wesentliche am Zinsfussproblem vor allem darin, das System der Kommutationswerte nicht neu berechnen zu müssen, so können wir die bereits früher (§ 1, Abschnitt *c*) gegebenen direkten Darstellungen der Leibrentenbarwerte aus den Parametern des Ausscheidegesetzes, dem Zinsmass, der Altersvariablen und gegebenenfalls der Dauer als Lösung der vorgegebenen Aufgabe ansehen. Von den Lösungen im engern Sinne ist die Lösung bei Bestehen einer *Makehamschen Überlebensordnung* praktisch am bedeutungsvollsten.

Sie geht aus dem Satz von *Blaschke-Gram* [1]) hervor: *Ist für die Gompertz-Makehamsche Ausscheideordnung mit den Konstanten c, s, g das vollständige Leibrentensystem, d. h. die zweidimensionale Gesamtheit der Leibrentenbarwerte* $\bar{a}_x(\delta)$ *für alle möglichen Alter und Verzinsungen bekannt, so sind damit auch die Leibrentenbarwerte* $\bar{a}'_{x'}(\delta')$ *für jede andere Gompertz-Makehamsche Ausscheideordnung mit den Konstanten* c', s', g' *und für jedes Alter* x' *sowie jede Verzinsung bekannt.* Und zwar führen sich solche Leibrentenbarwerte $\bar{a}'_{x'}(\delta')$ in der folgenden Weise auf die Werte $\bar{a}_x(\delta)$ des vollständigen Leibrentensystems zurück: Es ist,

$$\bar{a}'_{x'}(\delta') = \frac{1}{m}\,\bar{a}_x(\delta)\,, \tag{22}$$

wenn

$$x = m\,x' + n$$

$$\delta = \frac{\delta'}{m} - r$$

gesetzt wird mit

$$m = \frac{\log c'}{\log c}$$

$$n = \frac{\log\log\dfrac{1}{g'} - \log\log\dfrac{1}{g}}{\log c}$$

$$r = \frac{\log c}{\log c'}\log s' - \log s = \frac{\log s'}{m} - \log s\,.$$

---

[1]) Hinsichtlich der Arbeit von *Gram* [16], die umfassender ist und die Ergebnisse von *Blaschke* [15] einschliesst, vgl. auch *Jörgensen* [35], S. 200—205 und Tafel X, S. 394—403.

Das Zinsfussproblem ist bei Bestehen einer Gompertz-Makehamschen Ausscheideordnung damit praktisch vollständig exakt gelöst, wenn zu einer beliebigen Konstantenwahl c, g, s für alle Alter und, in genügend enger Abstufung, für alle gebräuchlichen Zinssätze eine Tafel der Rentenbarwerte $\bar{a}_x(\delta)$ ein für allemal berechnet ist. Eine solche *Standardtafel* hat auch *Blaschke* [15] seiner Arbeit beigegeben.

Suchen wir bei Vorliegen einer Makehamschen Ausscheideordnung in Ermangelung der Standardtafel nach «tafeleigenen» Lösungen, d. h. solchen, die nur die Kenntnis der alten Ausscheideordnung nötig machen, so müssen wir uns mit Näherungen zufrieden geben.

Eine erste, auf temporäre Renten bezügliche Lösung, die sehr einfach ist, aber nur gröbere Näherungen ergibt, stammt von *Christen* [1]; es ist

$$\bar{a}'_{x'\overline{n}|} \sim n \left(\frac{\bar{a}_{x\overline{n}|}}{n} \right)^k \tag{23}$$

mit

$$x = x' - \frac{\log k}{\log c}$$

und

$$k = \frac{\delta' - ln\, s}{\delta - ln\, s} = 1 + \frac{\delta' - \delta}{\delta - ln\, s} \cdot$$

Eine andere Lösung für die lebenslängliche Leibrente hat *Crosato* [17] gegeben. Diese Lösung beruht auf der Differenzengleichung der unvollständigen Γ-Funktion $Q(\lambda, h)$,

$$Q(\lambda, h+1) - h\, Q(\lambda, h) = e^{-\lambda} \lambda^h ,$$

aus der unter Berücksichtigung von (3) die Differenzengleichungen in $\bar{a}_x(\delta)$

$$\lambda\, ln\, c \cdot \bar{a}_x(\delta - ln\, c) + (\delta - ln\, s) \cdot \bar{a}_x(\delta) = 1$$

$$\text{oder} \quad \lambda\, ln\, c \cdot \bar{a}_x(\delta) + (\delta + ln\, c - ln\, s) \cdot \bar{a}_x(\delta + ln\, c) = 1 \tag{24}$$

hervorgehen. Damit kann man aber *zu einem gegebenen Rentenbarwert von der Zinsintensität δ die Barwerte zum gleichen Alter und zu denjenigen Zinsintensitäten genau berechnen, die um ganze Vielfache von $ln\, c$ von der Intensität des Ausgangsbarwerts abstehen.* Man könnte

nun denken, in der Folge der solchermassen hervorgegangenen Rentenbarwerte sei für einen beliebigen gesuchten Wert ein schon genügend genauer Näherungswert enthalten. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn, wie aus allen gebräuchlichen Tafeln hervorgeht, ändert die Makehamsche Konstante c ihren Wert nur sehr wenig von Tafel zu Tafel und kann rund $c \sim 1{,}096$, also $ln\, c \sim 0{,}09$ gesetzt werden. Das bedeutet aber, dass die Intensitäten und damit auch die Zinssätze der aus (24) hervorgehenden Folge von Rentenbarwerten um rund 9 % voneinander abstehen. Es bleibt daher nur übrig, den Barwert der Rente zur Zinsintensität $\delta' = \delta + (\delta' - \delta)$ nach einer grundsätzlich beliebigen Methode aus den genau vorgegebenen Werten zu den Argumenten $\delta = \mu + ln\, c$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, zu interpolieren.

Für das Gesetz von *Dormoy* steckt die Lösung des Zinsfussproblems bei der Leibrente schon in einer früher gemachten Feststellung; danach handelt es sich auch bei ihr um die Darstellung eines gesuchten Leibrentenbarwerts mittels einer Standardtafel, derart, dass diese einfach gleich der Tafel der Zeitrenten für alle Dauern und Zinssätze ist. Ein Leibrentenbarwert aus der Ausscheideordnung mit der Konstanten s und zum Zinssatz i' ist dann gleich dem in Art und Dauer entsprechenden Standardwert zum Zinssatz

$$i = \frac{s}{1 + i'} - 1 .$$

Ganz andersartig ist die Lösung, die sich aus dem Bestehen eines *Achard*schen Ausscheidegesetzes ergibt [7], wenn wir uns auf den Barwert der lebenslänglich kontinuierlich zahlbaren Leibrente beschränken. In diesem Fall ist nämlich, wie wir schon früher bemerkt haben, $\bar{a}_x$ das Produkt von $\frac{1}{\delta}$ mit einer Funktion $F(h)$, die allein von $h = \delta(\omega - x)$ abhängt. Betrachten wir daher von den Rentenbarwerten zur Zinsintensität δ' denjenigen, $\bar{a}'_{x'}$ für den das Alter x' zum gleichen h-Wert $h = \delta'(\omega - x')$ führt, wie er aus den Werten x und δ von $\bar{a}_x$ hervorgeht, $h = \delta(\omega - x)$, so besteht zwischen den Werten $\delta' \bar{a}'_{x'}$ und $\delta \bar{a}_x$ Gleichheit. Damit ist aber unsere Aufgabe gelöst: *Der gesuchte Rentenbarwert $\bar{a}'_{x'}$ zum Alter x' und der Zinsintensität δ' lässt sich durch den Rentenbarwert $\bar{a}_x$ zum Alter x und zur Intensität δ als*

$$\bar{a}'_{x'} = \frac{\delta}{\delta'} \bar{a}_x \tag{25}$$

darstellen, wenn für x

$$x = \frac{\delta'}{\delta} x' + \omega \left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)$$

gewählt wird. Die Festlegung des Alters x können wir noch etwas anders formulieren. Wie man leicht nachrechnet, hat unter Voraussetzung einer Achardschen Ausscheideordnung die vollständige mittlere Lebenserwartung $\bar{e}_x \sim \mathring{e}_x$ den Wert $\bar{e}_x = \frac{\omega - x}{m+1}$. *Unser neues Alter* x *muss daher aus dem gegebenen Alter so hervorgehen, dass*

$$\bar{e}_x = \frac{\delta'}{\delta} \bar{e}_{x'}$$

gilt.

Diese beiden Formeln haben eine bemerkenswerte Eigenschaft. Der Parameter m des Ausscheidegesetzes — in der zweiten auch noch das Schlussalter ω der Tafel — tritt in ihnen nämlich nicht auf. Daher kann (25) auch Verwendung finden, wenn die Ausscheideordnung gar nicht nach einem Achardschen Gesetz folgt; doch ist in diesem Fall der Ausdruck nur eine Näherungslösung. Versuchsweise Berechnungen anhand der Tafel SM 1921—30 haben allerdings gezeigt, dass für diese Tafel die durch (25) gewonnenen Werte nicht genügend gute Näherungen geben.

d) Gemeinsame Merkmale der Verfahren der beiden ersten Gruppen; Unterschiede gegenüber denjenigen der beiden noch folgenden Gruppen.

Suchen wir für *alle* bisher besprochenen Lösungen des Zinsfussproblems eine gemeinsame Kennzeichnung, so können wir einmal feststellen, dass sie besonders auf den Leibrentenbarwert zugeschnitten sind und alle mit Ausnahme der Achardschen Lösung fremde *Versicherungswerte* heranziehen. In der ersten Gruppe sind es *Barwerte von Zeitrenten,* in der zweiten Gruppe *Leibrentenbarwerte,* wobei diese Hilfswerte mit *verändertem Alter* oder *anderer Dauer* auftreten. Dazu kommt, dass die veränderten Argumente keine ganzen Zahlen mehr

sind, die zugehörigen Barwerte also in keiner Tabelle stehen; die zu verwendenden Barwerte sind vielmehr durch Interpolation der gegebenen Tabellenwerte nach dem veränderlichen Alter oder nach der veränderlichen Dauer zu gewinnen, wozu meistens die einfache lineare Interpolation ausreicht. Dies wird bei den Lösungen der beiden nächsten Gruppen völlig anders. Hier wird nur die Kenntnis *ein- und desselben* Versicherungswertes bei gleichem Alter, gleicher Dauer usw. verlangt, der Barwert jedoch für *verschiedene Werte des Zinsfusses* benötigt (III. Gruppe), oder es werden noch Kommutationswerte zugezogen, die aber alle ein *ganzzahliges* Altersargument aufweisen, also direkt der Tafel entnommen werden können (IV. Gruppe).

e) III. Gruppe: Verfahren, welche die Kenntnis des gleichen Versicherungswerts zu mehreren, verschiedenen Zinssätzen verlangen.

Ungeachtet der grossen Allgemeingültigkeit des Ansatzes kann das Interpolieren mittels mehrerer einfacher Interpolationsstellen — hierum handelt es sich nämlich bei dieser Gruppe — dem Zinsfussproblem praktisch nur für die einfachsten Versicherungswerte nützlich sein. Denn nur für sie darf man erwarten, sie seien für mehrere Zinssätze, die meist zwischen $i = 0{,}03$ und $i = 0{,}06$ liegen, bekannt. Für die nachschüssige, lebenslänglich zahlbare Leibrente kann ausserdem der Barwert zum Zinssatz $i = 0$ als bekannt vorausgesetzt werden, denn dieser Sonderwert ist nichts anderes als die abgekürzte mittlere Lebenserwartung

$$a_x(0) = e_x = \mathring{e}_x - \frac{1}{2} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x-1} l_{x+t},$$

wo $\mathring{e}_x$ die in den Sterblichkeitstafeln meistens aufgeführte vollständige mittlere Lebenserwartung,

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t} + \frac{1}{2} \sim \bar{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, dt$$

bezeichnen soll. Da das Argument dieses Sonderwerts aber verhältnismässig weit von den übrigen, praktisch vorkommenden Werten absteht, ist immer wohl zu überlegen, ob man seine Kenntnis berücksichtigen will. Schon *Christen* [1] hat hierauf bei der Besprechung des

von *Fontaine* [18] vorgeschlagenen Verfahrens aufmerksam gemacht, welches im übrigen einfach auf Interpolationen mittels ganzer rationaler Funktionen hinausläuft.

Sind die Funktionswerte $f(i)$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_m$, für m verschiedene äquidistante Stellen vom Abstand h bekannt, so führt die Bildung der aufeinanderfolgenden Differenzen

$$\Delta^0 f(i) = f(i)$$

$$\Delta^1 f(i) = \Delta f(i) = f(i+h) - f(i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^r f(i) = \Delta^{r-1} f(i+h) - \Delta^{r-1} f(i) = \sum_{\varrho=0}^{r} (-1)^\varrho f(i + (r-\varrho)\, h)$$

schliesslich zu einem einzigen Wert der Differenzenfolge $(m-1)$-ter Ordnung $\Delta^{m-1} f(i)$. Indem wir diese Folge als konstant annehmen, was damit gleichbedeutend ist, dass wir die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom $(m-1)$-ten Grades approximieren, können wir mittels der Gregory-Newtonschen Interpolationsformel

$$f(x) = f(x_0 + th) \sim \sum_{\varrho=0}^{r} \binom{t}{\varrho} \Delta^\varrho f(x_0) \tag{26}$$

oder, wenn das Argument des gesuchten Funktionswerts gerade der Argumentfolge $i = i_1 + kh$, $k = 1, 2, \ldots$, angehört, durch Ergänzen des Differenzenschemas den gesuchten Wert näherungsweise angeben. Ist nun $f(0)$ auch noch bekannt, so können wir aus der Interpolationsformel (26), die wir dann zweckmässiger in der Form

$$f(0) = f(i_\mu - t_\mu h) = \sum_{\sigma=0}^{m} (-1)^\sigma \binom{t_\mu + m - 1}{\sigma} \Delta^\sigma f(i_\mu)$$

schreiben, rückwärts den Wert der m-ten Differenz $\Delta^m f(i_\mu)$ für dasjenige Argument i_μ bestimmen, für das die sämtlichen Differenzen niedrigerer Ordnung schon bekannt sind. Dann braucht aber erst die Folge der m-ten Differenzen als konstant angenommen werden.

Auf weitere Interpolationsverfahren und -formeln einzugehen ist hier nicht der Ort, da sich im nächsten Kapitel dazu noch genügend

Gelegenheit bieten wird; wir erinnern lediglich daran, dass *Hantsch* [5] im ersten Teil seiner Untersuchung eine systematische und ziemlich vollständige Zusammenstellung der einfachsten einschlägigen Interpolationsfunktionen gibt. Das reichhaltig beigegebene Zahlenmaterial leistet dabei einen schönen Beitrag an eine der Hauptfragen, die sich beim Interpolieren stellt, nämlich: *welches ist unter den verschiedenen möglichen Interpolationsformeln die ökonomischste?* In bezug auf die Interpolation des Barwerts der lebenslänglichen Leibrente finden wir, dass die ganzrationalen Funktionen sich sehr wenig eignen, und können deutlich erkennen, wieviel besser die Resultate bei gleicher Kenntnis an Ausgangswerten ausfallen, wenn mit rational gebrochenen und einfachen Exponentialfunktionen interpoliert wird.

f) IV. Gruppe: Verfahren, welche neben dem Rentenbarwert zu einem andern Zinsfuss noch die entsprechenden Kommutationswerte verwenden.

Die ursprüngliche Herleitung der Formeln durch die Autoren ist ganz verschieden. *Steffensen* [14] kommt zum Ausdruck

$$a'_x \sim a_x - \frac{hv\, S_{x+1}}{D_x} \tag{27}$$

durch Entwicklung der früher angegebenen Näherung (20) mittels eines Zeitrentenbarwertes in eine Potenzreihe und Abbrechen beim ersten Glied. Auf *Birger Meidells* [19] Formel

$$a'_x \sim a_x (1 + hv)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}} \tag{28}$$

wollen wir später in einem andern Zusammenhang eingehen.

Den meisten übrigen Formeln liegt ein sehr allgemeines Prinzip zugrunde, nämlich die Entwicklung des Rentenbarwerts in eine Potenzreihe

$$a'_x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^r a_x}{d i^r} \frac{(i'-i)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r v^r \frac{S^{(r)}_{x+1}}{D_x} h^r, \tag{29}$$

wo $h = i' - i$

gesetzt ist und die Kommutationszahlen zum Zinssatz i berechnet sind. Abbrechen nach dem zweiten Glied führt, wie man sofort sieht, zur Formel (27) von *Steffensen*. Berücksichtigen wir noch ein weiteres Glied, so erhalten wir eine Näherung, die zuerst von *van Dorsten* [9] angegeben wurde,

$$a'_x \sim a_x - hv \frac{S_{x+1}}{D_x} + h^2 v^2 \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x} . \tag{30}$$

Die Überlegungen, die *Palmqvist* [20] zu seiner Formel

$$a'_x \sim a_x \left(1 + \frac{hv\, S_{x+1}}{1{,}5\, N_{x+1}}\right)^{-1{,}5} \tag{31}$$

geführt haben, stellen wir vorläufig zurück und wenden uns eingehender dem Verfahren zu, das *Poukka* [4] zur «Verbesserung der Konvergenz» der Reihe (29) entwickelt hat. Der Grundgedanke des Poukkaschen Verfahrens kann in freier, hinsichtlich des Sinnes seiner spätern Auswertung aber, wie uns scheint, treffender Weise dahin ausgelegt werden, dass die *Potenzreihe*

$$a'_x = f(h) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^\varrho \frac{S^{(\varrho)}_{x+1} \cdot v^\varrho}{D_x} h^\varrho = \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho h^\varrho \tag{29'}$$

als Darstellungsform von $a'_x = a_x(i') = a_x(i + h)$ durch die allgemeinere *Reihe*

$$a'_x = F(\psi(h)) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} c_\varrho [\psi(h)]^\varrho \tag{32}$$

ersetzt wird, die nach den Potenzen einer nur durch die Bedingung

$$\psi(h) = 0 \ , \quad \psi'(h) \neq 0 \tag{33 a}$$

eingeschränkten analytischen Funktion von h,

$$z = \psi(h) \tag{33 b}$$

fortschreitet. Die Ermittlung der Koeffizienten c_ϱ ($\varrho = 0, 1, 2, \ldots$) von (32) ist sehr einfach: man entwickelt die Umkehrfunktion $h = h(z)$ in ihre Potenzreihe nach z

$$h = h(z) = z \sum_{\varrho=1}^{\infty} d_\varrho z^{\varrho-1}, \tag{34}$$

die wegen der getroffenen Voraussetzungen über $z = \psi(h)$ kein von z freies Glied besitzt, gewinnt durch wiederholtes Multiplizieren dieser Reihe (34) mit sich selber oder durch direkte Entwicklung der Funktionen $(h(z))^2$, $(h(z))^3, \ldots$ deren Potenzreihen in z, setzt diese in die für $a'_x = y = f(h)$ ursprünglich gegebene Reihe (29) ein, ordnet nach Potenzen von z und hat die gesuchte Reihendarstellung (32) bereits vor sich. Für die ersten der Koeffizienten c_ϱ erhält man hierbei

$$c_0 = b_0 \qquad c_1 = b_1 d_1$$

$$c_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1^2 \qquad c_3 = b_1 d_3 + 2 b_2 d_1 d_2 + b_3 d_1^3 .$$

Allgemein erkennt man, dass für jedes $r > 0$ der Koeffizient c_r eine lineare Form der r ersten Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_r$ der Potenzreihe (29) ist,

$$c_r = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{sr} b_s , \quad r = 1, 2, \cdots . \tag{35}$$

Die Koeffizienten γ_{sr} sind ihrerseits die Koeffizienten der r-ten Potenzen in den Entwicklungen von $(h(z))^s$. Insbesonders ist

$$\gamma_{1r} = d_r = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r h(z)}{dz^r}\right)_{z=0}, \quad r = 1, 2, \ldots ;$$

für die «Endkoeffizienten» γ_{rr} lässt sich aus der wiederholten Multiplikation der Reihe von $h(z)$ mit sich selber sofort

$$\gamma_{rr} = d_1^r = \left[\left(\frac{d\,h(z)}{dz}\right)_{z=0}\right]^r$$

ablesen.

Nun ist

$$d_1 = \left(\frac{d\,h(z)}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1}{\left(\frac{d\,z(h)}{dh}\right)_{h=0}} = \frac{1}{\left(\frac{d\,\psi(h)}{dh}\right)_{h=0}} \neq 0 ;$$

aus der alleinigen Voraussetzung, dass $z = \psi(h)$ in der Umgebung von $h = 0$ eindeutig umkehrbar sei, folgt dann aber, dass das Grössensystem (35) eindeutig nach den Grössen b_s aufgelöst werden kann,

$$(36) \qquad b_s = \sum_{r=1}^{s} \Gamma_{rs} c_r \quad (s = 1, 2, \ldots) .$$

Dieses Ergebnis ist eigentlich selbstverständlich. Gehen wir nämlich von der Darstellung von a'_x als Funktion von z, $a'_x = F(z) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} c_\varrho z^\varrho$ aus, setzen hierin $z = z(h)$ und ordnen nach Potenzen von h, so müssen wir wieder die Potenzreihe $a'_x = \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma h^\sigma$ erhalten. Für die Koeffizienten b_s ergibt sich dann in der Tat eine Darstellung in der Art von (36). Zwischen den Grössensystemen b_σ und c_ϱ besteht somit eine strenge, gegenseitig reziproke Verknüpfung. Wir merken uns für später noch die Bedeutung der Grössen Γ_{1s}:

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s z(h)}{d h^s}\right)_{h=0} = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s \psi(h)}{d h^s}\right)_{h=0} .$$

Nach diesen Darlegungen wissen wir jetzt folgendes. Man kann immer die Werte von gerade soviel aufeinanderfolgenden Koeffizienten c_r der Reihe (32) angeben, als man sukzessive Koeffizienten b_s in der ursprünglich vorgelegten Potenzreihe (29) berechnet hat. Zweck und Ziel des Reihenansatzes (32) werden damit klar. Wir müssen durch geeignete Wahl der Funktion $z = \psi(h)$ zu erreichen trachten, dass — wenigstens für die für uns in Betracht fallenden kleinen Absolutwerte von h — die gegebene Funktion $f(h)$ sich durch die Reihe (32) besser approximieren lässt als mittels der Reihe (29). Diese allgemeine Redewendung ist dabei zwar verschiedenartiger Auslegungen fähig [1]);

[1]) Wir können z. B. davon ausgehen, dass die Reihen (29) und (32) immer beide nach derselben Stelle abgebrochen werden, und dann verlangen, dass in den Beträgen das Restglied von (32) nie das Restglied (29) übertreffe,

$$| R_r^* | = | \sum_{\varrho=r+1}^{\infty} c_\varrho z^\varrho | \leqq | R_r | = | \sum_{\varrho=r+1}^{\infty} b_\varrho z^\varrho | , \quad r = 0, 1, 2, \ldots ,$$

oder wir gehen von einem vorgegebenen Genauigkeitsgrad $\varepsilon > 0$ aus, mit dem die Reihensumme angenähert werden soll, und verlangen, dass hierbei die Reihe

doch gleichgültig, in welcher Weise immer wir *genau* zu fassen suchen, was uns mit ihr nur *unbestimmt* vorschwebt, erkennen wir, dass unser Verlangen weit über dasjenige hinausgeht, das in den bekannten Konvergenzkriterien seine Erledigung findet. Diese dienen nämlich immer nur dem Nachweis einer sogenannten *infinitären* Eigenschaft, d. h. einer solchen, bei der eine Änderung an endlich vielen Reihengliedern nichts ausmacht — z. B. dass eine Reihe *überhaupt* konvergiert [1]) —, und zu welcher die Güte der Annäherung der Reihensumme durch eine Teilsumme der Reihe in schroffem Gegensatz steht. Wenn wir über eine Eigenschaft dieser letzten Art eine allgemeine Feststellung machen wollen, müssen wir uns daher bewusst sein, dass dies nur auf Kosten der den genannten Kriterien eigenen Strenge und Unbedingtheit möglich ist. Eine solche Aussage kann immer nur Ausdruck einer *Erwartung*, eines *Versprechens* sein, und einzig von dieser Auffassung her dürfen wir an die Feststellung herantreten, die *E. Lindelöf* [41] hinsichtlich unserer Zielsetzung ausgesprochen hat:

Konvergiert die Potenzreihe (29) *in einem Kreise vom Radius* R, *so wird sich dann* $f(h)$ *besser durch die Reihe* (32) *approximieren lassen, wenn die «Abbildungsfunktion»* $z = \psi(h)$ *bzw.* $h = h(z)$ *ein grösseres Gebiet* T *der* h*-Ebene als* $|h| < R$ *auf den Kreis* $|z| < R'$, mit $R' \leqq R$, *der komplexen* z*-Ebene abbildet.* Wie weit dieses bessere Approximieren schon für die einfachsten Teilsummen zutrifft, bleibt allerdings offen, man wird erwarten dürfen, dass es um so eher der Fall sein wird, je stärker in den Koeffizienten der Potenzreihe eine Gesetzmässigkeit zu erkennen ist. Eine Feststellung lässt sich jedoch noch auf Grund eines Satzes von *Ostrowski* [2]) machen. Der Potenztypus der Konvergenz bleibt bei jeder Lindelöfschen Transformation erhalten. Man kann daher insbesonders den Idealfall eines konvergenten Verfahrens, die quadratische Konvergenz — durch Ausführen eines jeden weitern Schrittes wird der verbleibende (kleine) Fehler im wesentlichen quadriert — nicht erreichen.

(32) an einer frühern oder höchstens an der gleichen Stelle abgebrochen werden kann wie die Reihe (29). Die gegenseitigen Beziehungen dieser beiden oder ähnlicher Definitionen abzuklären, ist natürlich hier nicht der Ort.

[1]) Es sei vermerkt, dass in der Literatur auch das «bessere oder raschere Konvergieren» einer Reihe als infinitäre Eigenschaft definiert wird (man vgl. etwa *Knopp* [40], § 37). Wir haben daher mit voller Absicht von einer Verwendung dieses Begriffs für unsere Belange Abstand genommen und von «besserm Approximieren» gesprochen.

[2]) [42], Satz 1 (S. 329).

Poukka [4] setzt die Reihe (32) mit der Funktion

$$z = \psi(h) = \frac{h}{\alpha + h} \tag{37}$$

$$h = \frac{\alpha z}{1 - z} = \alpha \sum_{\varrho=1}^{\infty} z^{\varrho} = z \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha z^{\varrho}$$

an, die die Halbebene $\Re(h) > -\frac{\alpha}{2}$ auf den Einheitskreis $|z| < 1$ abbildet, und bricht sie analog *van Dorsten* nach dem *dritten* Glied ab. Indem er nun den willkürlichen Parameter α nicht einfach beliebig wählt, sondern ihn als Funktion der Koeffizienten b_{ϱ} der zu ersetzenden Potenzreihe (29) so bestimmt, dass der Koeffizient

$$c_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1^2 = b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 = \alpha (b_1 + b_2 \alpha)$$

der Reihe (32) verschwindet,

$$\alpha = -\frac{b_2}{b_1},$$

erreicht er durch diesen kleinen Kunstgriff, dass trotzdem nur *zwei Summanden* stehen bleiben (nicht aber, dass die Kenntnis von b_2 umgangen werden kann, denn diese Grösse geht eben in α ein!):

$$f(h) \sim c_0 + c_1 \psi(h) = b_0 + b_1 \alpha \frac{h}{\alpha + h}$$

$$= b_0 + b_1 \frac{h}{1 + \frac{h}{\alpha}} = b_0 + \frac{b_1 h}{1 - \frac{b_2}{b_1} h}. \tag{38}$$

Durch die früher angegebenen Werte (5) und (7 *b*) erhalten wir für die Barwerte a'_x und a'_{xn}

$$a'_x \sim a_x - \frac{\frac{S_{x+1}}{D_x} v h}{1 + \frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} v h} = a_x - a_x \cdot \frac{\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} v h}{1 + \frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} v h} \tag{39}$$

und

$$(40)\quad a'_{x\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|} - \frac{\dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{D_x}\,v\,h}{1 + \dfrac{S^{(2)}_{x+1} - S^{(2)}_{x+n+1} - n\,S_{x+n+1} - \dfrac{n\,(n+1)}{2}\,N_{x+n+1}}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}\,v\,h}$$

$$= a_{x\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|}\,\frac{\dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}}\,v\,h}{1 + \dfrac{S^{(2)}_{x+1} - S^{(2)}_{x+n+1} - n\,S_{x+n+1} - \dfrac{n\,(n+1)}{2}\,N_{x+n+1}}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}\,v\,h}\,.$$

Diese beiden Formeln geben genauere Werte als die Formel von *van Dorsten*, leiden aber immer noch daran, dass sie die Kenntnis der Summen $S^{(2)}_x$ benötigen, die in der versicherungstechnischen Praxis sonst nicht gebraucht werden und daher üblicherweise auch nicht berechnet vorliegen. Hier hat nun *Poukka*, und zwar ohne irgendwelchen Zusammenhang zu den vorigen Entwicklungen, die sehr wertvolle Feststellung gemacht, dass für die gebräuchlichen Zinssätze und Alter das Verhältnis

$$(41\,a)\qquad k_x = \frac{S^{(2)}_x}{S_x} : \frac{S_x}{N_x}$$

sich nicht viel mit dem Zinssatz und dem Alter x verändert und als Konstante betrachtet werden darf, die für die Tafel des Text Book zu

$$k = 0{,}84$$

als bestem Mittelwert anzusetzen ist. Damit geht (39) in die Formel

$$(42)\qquad a'_x \sim a_x - a_x\,\frac{\dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\,v\,h}{1 + 0{,}84\,\dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\,v\,h}$$

über, die trotz der vorgenommenen Vereinfachung noch bessere Näherungen liefert als die Formel (29) von *van Dorsten*. Da wir auf

die beiden Formeln (39) und (42) noch verschiedentlich zurückkommen werden, wollen wir (39) als *erste* und (42) als *zweite* Poukkasche Formel fürderhin bezeichnen.

Für den Barwert der temporären Leibrente $a'_{x\overline{n}|}$ können wir das Verhältnis

$$(41\,b)\quad k_{x,n} = \frac{S_x^{(2)} - S_{x+n}^{(2)} - n\,S_{x+n} - \frac{n\,(n+1)}{2}\,N_{x+n}}{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}} : \frac{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

in erster Annäherung ebenfalls konstant zu 0,84 annehmen, worauf schon *Poukka* hingewiesen hat. *Hantsch* [4] hat im zweiten Teil seiner schon früher genannten Arbeit die Darstellung dieses Verhältnisses $k_{x,n}$ durch die Komponenten, Zinssatz und Überlebensordnung, untersucht und auf der Grundlage der Reichssterbetafel 1933, Frauen, gefunden, dass für Rentenschlussalter unter $s = x + n = 70$ recht gut

$$(43)\qquad k_{x,n} = k_{x,n}(i) \sim k_n(i) + \frac{{}_nq_x}{20} = k_n(i) + \frac{l_x - l_{x+n}}{20\,l_x}$$

gilt. Hierbei geht $k_n(i)$ seinerseits aus der Näherungsformel

$$k_n(i) \sim k_n(0) + n \cdot i \cdot c$$

hervor, wo c nur Funktion des Zinssatzes ist und als solche sogar konstant $= c = 0{,}06$ betrachtet werden darf, während

$$k_n(0) \sim \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

ist. Damit kann (40) ersetzt werden durch

$$(44)\qquad a'_{x\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|}\,\frac{\dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{N_{x+n} - N_{x+n+1}}\,v\,h}{1 + k_{x+1,n}\,\dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}}\,v\,h}$$

mit
$$k_{x+1,n} \sim \frac{2}{3}\,\frac{n+2}{n+1} + 0{,}06\,n\,i + \frac{l_{x+1} - l_{x+n+1}}{20\,l_{x+1}}\,.$$

Anhand einer grössern Zahl von Beispielen über alle Alter und Dauern konnten wir feststellen, dass innerhalb der schon genannten Abgrenzung die Werte (43) auch bei der Tafel SM 1921—30 [47] das Verhältnis (41 *b*) recht befriedigend wiedergeben; ebenfalls gibt (44) etwas bessere Annäherungen, wenn $k_{x,n}$ in der angegebenen Weise individuell abgestuft und nicht einfach konstant 0,84 genommen wird, allerdings ohne ganz die Güte von (40) zu erreichen.

Im Anschluss an die Herleitung seiner Formeln hat *Poukka* noch einen neuen Weg zur Gewinnung der Formel von *Palmqvist* (31) entwickelt. Folgt das angewandte Verfahren auch in weitem Masse demjenigen, das zu den beiden Poukkaschen Formeln (39) und (42) führt, so weist es daneben doch auch ganz andere, neuartige Momente auf, die veranlassen und rechtfertigen, von ihm als von einem besondern, *zweiten* Poukkaschen Verfahren zu sprechen im Gegensatz zum *ersten*, im Vorausgegangenen eingehend dargelegten.

Der grundsätzliche Unterschied im Vorgehen liegt nicht oder wenigstens nicht allein in der zu verwendenden Abbildungsfunktion

$$z = \psi(h) = 1 - (1 + \alpha h)^{-\beta} \qquad \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0$$

$$h = \frac{(1-z)^{-\frac{1}{\beta}} - 1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta} z + \frac{1+\beta}{2\alpha\beta^2} z^2 + \dots ,$$

die nach *Poukka* einen Bereich, der den zwischen den Punkten $h = -\frac{1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}}{\alpha}$ und $h = \infty$ liegenden Teil der reellen Achse enthält, auf den Einheitskreis $|z| < 1$ abbildet. Dass in ihr im Gegensatz zum Ausdruck (37) mit nur einem willkürlichen Parameter α deren zwei, α und β, auftreten, fällt nämlich erst dann wesentlich ins Gewicht, wenn wir nicht durch Abbrechen der Reihe (32) nach dem vierten Glied und Nullsetzen der zwei letzten Koeffizienten c_2 und c_3 das *erste* Poukkasche Verfahren sinngemäss erweitern, sondern daran festhalten, (32) schon beim zweiten Glied abzubrechen. Die Bedingung, die neben die alte,

$$\text{i)} \quad c_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1^2 = b_1 \frac{1+\beta}{2\alpha\beta^2} + b_2 \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left\{b_1 \frac{\alpha(1+\beta)}{2} + b_2\right\} = 0$$

noch zu treten hat, damit

$$(46) \qquad f(h) \sim c_0 + c_1 z = c_0 + c_1 \psi(h) = b_0 + b_1 d_1 \psi(h)$$

vollständig bestimmt ist, finden wir in der im obigen Ausdruck schon benützten Aufspaltungsmöglichkeit von $z = \psi(h) = 1 + z^*$ in zwei Summanden; wir verlangen, dass der «von h unabhängige», besser gesagt, der von $(1 + \alpha h)$ unabhängige Teil in (46) verschwinde,

$$(45\,b) \qquad b_0 + b_1 \frac{1}{\alpha \beta} = 0 \quad .$$

Doch ist nicht zu verkennen, dass mit dieser Festlegung eigentlich der Verzicht auf die Darstellung von $f(h)$ durch Potenzen der Abbildungsfunktion $z = \psi(h)$ ausgesprochen wird. Die verbleibende Formel

$$f(h) \sim - \frac{b_1}{\alpha \beta} (1 + \alpha h)^{-\beta}$$

erinnert weit mehr an eine Entwicklung von $f(h)$ nach Potenzen einer nicht gleichzeitig mit h verschwindenden Funktion $z^* = \psi^*(h) = = - (1 + \alpha h)^{-\beta}$. Wir verzichten darauf, diese Deutung weiter zu verfolgen, da sie kaum zu fruchtbaren und praktisch wertvollen Erkenntnissen führt.

Mit den Lösungen

$$\alpha = \frac{b_1}{b_0} - 2 \frac{b_2}{b_1} = - \frac{b_1}{b_0} \left(2 \frac{b_0 b_2}{b_1^2} - 1 \right)$$

$$\beta = - \frac{b_1}{b_0 \alpha} = \frac{1}{2 \dfrac{b_0 b_2}{b_1^2} - 1}$$

der beiden Bedingungen (45 a) und (45 b) erhalten wir dann

$$(47) \qquad f(h) \sim b_0 \left\{ 1 - \frac{b_1}{b_0} \left(2 \frac{b_0 b_2}{b_1^2} - 1 \right) h \right\}^{- \dfrac{1}{2 \dfrac{b_0 b_2}{b_1^2} - 1}} ,$$

woraus für den Spezialfall der Leibrentenbarwerte a_x und $a_{x\overline{n}|}$ und mit k_x und $k_{x,n}$ als den früher ((41 *a*) und (41 *b*)) erklärten Verhältnissen von Kommutationszahlen

$$(48) \qquad a'_x \sim a_x \left(1 + \frac{h\,v}{\frac{1}{2k_{x+1}-1}} \cdot \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)^{-\frac{1}{2k_{x+1}-1}}$$

$$(49) \qquad a'_{x\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|} \left(1 + \frac{h\,v}{\frac{1}{2k_{x+1,n}-1}} \cdot \frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-n\,N_{x+n+1}}{N_{x+1}-N_{x+n+1}}\right)^{-\frac{1}{2k_{x+1,n}-1}}$$

folgt. Aus dem Poukkaschen konstanten Verhältnis $k_x \sim k = 0{,}84$ folgt aber weiter $\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{0{,}68} = 1{,}47 \sim 1{,}5$, und (49) geht in (31) über, während mit

$$\frac{1}{k^*_{x+1,n}} = 2k_{x+1,n} - 1 \sim \frac{4}{3}\,\frac{n+2}{n+1} + 0{,}12\,ni + \frac{l_{x+1}-l_{x+n+1}}{10\,l_{x+1}} - \frac{3}{3} \cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$k^*_{x+1,n} \sim \frac{1}{\frac{n+5}{3\,(n+1)} + 0{,}12\,ni + \frac{l_{x+1}-l_{x+n+1}}{10\,l_{x+1}}}$$

$$(50) \qquad a'_{x\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|} \left(1 + \frac{h\,v}{k^*_{x+1,n}} \cdot \frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-n\,N_{x+n+1}}{N_{x+1}-N_{x+n+1}}\right)^{-\frac{1}{k^*_{x+1,n}}}$$

die Modifikation der Formel von Palmqvist für den Barwert der temporären Leibrente im Sinne der Ergebnisse von *Hantsch* ist. Numerische Nachprüfungen haben gezeigt, dass (50) im allgemeinen wiederum leicht bessere Annäherungen ergibt, als wenn in (49) $k^*_{x+1,n}$ konstant zu 1,5 gesetzt wird.

Christen [1], [20] hat aus dem ersten Poukkaschen Verfahren mittels der Abbildungsfunktion

$$(51)\qquad \begin{aligned} z &= 1 - e^{-\beta h} \\ h &= -\frac{1}{\beta}\, ln\,(1-z) \end{aligned}$$

die Annäherung

$$(52)\qquad a'_x \sim a_x - \frac{(S_{x+1})^2}{2\,D_x\,S^{(2)}_{x+1}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{S^{(2)}_{x+1}\cdot 2\,v\,h}{S_{x+1}}}\right)$$

hergeleitet und daran eine Methode zur näherungsweisen Berechnung der höhern Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden angeschlossen. Sind noch die Zahlen S_x tabelliert, so kann man mit ihrer Verwendung

$$(53)\qquad \left\{ \begin{aligned} & S^{(2)}_x \sim S_x \left(\frac{\omega - x}{m+1} + \frac{1}{2}\right) \\ & S^{(3)}_x \sim S_x \frac{\omega - x}{m+1}\left(\frac{\omega - x}{m+2} + 1\right) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & S^{(k)}_x \sim S_x \frac{(\omega - x)^{k-2}}{(m+1)\,(m+2)\dots(m+k-2)}\left(\frac{\omega - x}{m+k-1} + \frac{k-1}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

setzen, gültig für $k \geqq 2$; m ist dabei als Mittelwert der für verschiedene t annähernd gleichen Werte

$$m\,(x_0, t) = \frac{\log S_{x_0+t} - \log S_{x_0}}{\log\,(\omega - x_0 - t) - \log\,(\omega - x_0)}$$

zu bestimmen (x_0 ist ein Anfangsalter, etwa $x_0 = 20$). Stehen die Zahlen S_x jedoch nicht zur Verfügung, so kann man die Beziehungen (53) so anpassen, dass man S_x durch N_x und je $S^{(k)}_x$ durch das nächstniedrigere $S^{(k-1)}_x$ ersetzt. (52) geht mit dem Ansatz (53) in

$$(54)\qquad a'_x \sim a_x - \frac{S_{x+1}}{2\,D_x\left(\frac{\omega - x - 1}{m+1} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(1 - e^{-2hv\left(\frac{\omega - x - 1}{m+1} + \frac{1}{2}\right)}\right)$$

über. Die Ausdehnung der Formeln auf den Barwert der temporären Rente übergehen wir, da sie keine Schwierigkeiten bereitet. Selbstverständlich hätten wir in (52) auch von der Poukkaschen Beziehung $k = 0{,}84$ Gebrauch machen und damit

$$(55) \qquad a'_x \sim a_x - a_x \cdot 0{,}60 \left(1 - e^{-1{,}68\, vh \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}\right)$$

erhalten können. In der Genauigkeit entsprechen diese Formeln ungefähr den Poukkaschen und werden bei grössern Unterschieden im Zinssatz diesen überlegen; nachteilig wirkt sich aus, dass die Ausrechnung nicht mit der Rechenmaschine allein bewerkstelligt werden kann, vielmehr noch die Benützung einer Logarithmentafel nötig wird.

Schliesslich sei noch die Formel von *Berger* [6], [31] genannt,

$$(56) \qquad a'_x \sim a_x - a_x \frac{\dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}} (\delta' - \delta)}{1 + \dfrac{S^{(2)}_{x+1} + S^{(2)}_{x+2}}{2\, S_{x+1}} (\delta' - \delta)},$$

die in vollkommener Nachbildung der Herleitung der Poukkaschen Formel aus der Taylorentwicklung von a'_x nach der Zinsintensität

$$a'_x = a'_x(\delta') = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{d^\varrho a_x}{d\,\delta^\varrho} \frac{(\delta' - \delta)^\varrho}{\varrho\,!} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^\varrho \frac{(\delta' - \delta)^\varrho}{\varrho\,!} \frac{\sum\limits_{t=1}^{w-x} t^\varrho D_{x+t}}{D_x}$$

folgt und mittels der Näherung [1])

---

[1]) $$\frac{1}{hv} = \frac{1}{(i' - i)\, v} = \frac{1}{[(e^{\delta'} - 1) - (e^{\delta} - 1)]\, v} = \frac{1}{(e^{\delta'} - e^{\delta})\, v} = \frac{1}{(e^{(\delta' - \delta)} - 1)\, e^{\delta}\, v}$$

$$= \frac{1}{e^{(\delta' - \delta)} - 1} = \frac{1}{\delta' - \delta} \cdot \frac{\delta' - \delta}{e^{(\delta' - \delta)} - 1} = \frac{1}{\delta' - \delta} \left\{ B_0 + \frac{B_1}{1\,!} (\delta' - \delta) + \right.$$

$$\left. + \frac{B_2}{2\,!} (\delta' - \delta)^2 + \ldots \right\},$$

wo $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, ... die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Abbrechen der Reihe in der Klammer nach dem 2. Glied ergibt die angegebene Näherungsformel.

$$\frac{1}{hv} \sim \frac{1}{\delta' - \delta} - \frac{1}{2}$$

leicht in die erste Poukkasche Formel (39) übergeführt werden kann.

§ 4.

Die Problemstellung unserer weitern Untersuchungen.

Wir gehen jetzt daran, die weitere Zielsetzung unserer Arbeit zu umschreiben. Schon in der Einleitung haben wir kurz bemerkt, dass *Frucht* [3] nicht dabei stehen geblieben ist, bloss eine Ordnung in die grosse Mannigfaltigkeit der Lösungsvorschläge zum Zinsfussproblem zu bringen; vielmehr hat er anhand verschiedener Beispiele darauf hingewiesen, dass ein enger Zusammenhang zwischen den in unserer dritten und vierten Gruppe zusammengefassten Lösungen besteht: Durch Elimination der Kommutationszahlen geht jede Formel der vierten Lösungsgruppe in eine solche der dritten über, und umgekehrt kann durch einen geeigneten Grenzübergang — nämlich durch Zusammenrücken der Interpolationsstellen in eine einzige, mehrfach zählende — aus jeder Formel der dritten Lösungsgruppe eine solche gewonnen werden, die Kommutationszahlen enthält. Doch hat er darauf verzichtet, die Folgerungen aus diesen Erkenntnissen endgültig zu ziehen und unter Verwendung des Begriffes der oskulierenden Interpolation seine Betrachtungen in einer Formulierung so abzurunden, dass dem Bestehen der aufgedeckten Beziehungen jede Besonderheit genommen und der Zusammenhang der beiden Formelgruppen in seiner vollen Allgemeinheit klar aufgedeckt ist: *Zwischen den Formeln der dritten und vierten Lösungsgruppe besteht überhaupt kein tieferer Unterschied, sie sind alle Interpolationsformeln mit dem Zinsmass als einziger Veränderlicher. Nur handelt es sich in dem einen Fall um Interpolationen mit nur einfach zählenden Interpolationsstellen, im andern um rein oskulierende Interpolationen, d. h. um Interpolationen mit einer einzigen, mehrfach zählenden Interpolationsstelle.*

Diese Feststellung ist kein «Satz», der im üblichen Sinne «allgemein zu beweisen» wäre. Dass die Formeln der beiden Lösungsgruppen ineinander übergeführt werden können, ist eigentlich ein trivialer Sachverhalt und mit der ausgesprochenen Bemerkung über

Elimination der Kommutationszahlen und Zusammenrücken von Interpolationsstellen vollständig erledigt; der Rest aber drückt einfach eine bestimmte Auffassung des gegebenen Sachverhalts aus. Unsere Aufgabe kann es daher nur sein, diese Auffassung durch Beispiele eingehend klarzustellen und vertraut zu machen, durch sie die Verfahren, die *Poukka* und *Palmqvist* zur Herleitung ihrer Formeln entwickelt haben, von einer neuen Seite aus zu beleuchten und überhaupt genauere Einsicht in das Übergehen der Lösungen ineinander zu gewinnen.

Wenn wir hie und da auch etwas mehr, als es vielleicht nötig erscheinen mag, Bekanntes wiederholen und ausführlich darlegen, so scheint es uns doch das geeignetste Vorgehen, die verschiedenen Möglichkeiten von Interpolationsansätzen systematisch zu durchgehen und je an den passenden Stellen die Anwendungen auf das Zinsfussproblem einzuflechten.

3. Kapitel.

§ 5.

Das Zinsfussproblem bei der Leibrente als Interpolationsaufgabe.

a) Der Begriff des Interpolierens; Interpolation mit einfachen Interpolationsstellen.

Interpolieren kann man bezeichnen als Ersetzen einer Funktion $y = f(x)$ durch eine leicht und rasch zu berechnende andere, $y = \varphi(x)$, deren Werte innerhalb gewisser Grenzen mit den entsprechenden der ursprünglich gegebenen Funktion angenähert übereinstimmen und beim praktischen Rechnen an Stelle von diesen zur Verwendung kommen. Voraussetzung zur Angabe einer solchen Näherungsfunktion ist immer, dass die genauen numerischen Werte von $y = f(x)$ (und gegebenenfalls auch einiger ihrer sukzessiven Ableitungen) [1]) für gewisse Argumentstellen schon bekannt sind, sei es, dass $f(x)$ überhaupt nur durch eine Folge diskreter Wertepaare (x_ϱ, y_ϱ) $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r$, gegeben wird, oder dass ein genaues mathematisches Funk-

[1]) Ohne es jeweilen besonders zu erwähnen, nehmen wir unsere Funktionen stets als analytische an.

tionsgesetz vorliegt und die benötigten numerischen Werte aus ihm direkt berechnet worden sind [1]). Diese Kenntnisse müssen dazu dienen, gerade soviel unabhängige Bedingungen aufzustellen, als $\varphi(x)$ verfügbare Parameter besitzt oder enthalten darf, und zwar besteht das naheliegende, für tiefergehende theoretische Untersuchungen jedoch nicht immer unbedingt zu empfehlende Prinzip in der Forderung, *dass die Werte (Funktionswerte und Werte der Ableitungen) in Bezug auf $\varphi(x)$, die den bekannten Werten in Bezug auf $f(x)$ entsprechen, mit diesen vollständig exakt übereinstimmen sollen.*

Der Wahl des Typus der Interpolationsformel, d. h. der Funktion $y = \varphi(x)$, ist durch diese Festlegung aber in keiner Weise ein Weg gewiesen. Nach völlig freiem Ermessen können wir, wenn vom Fall, dass $f(x)$ eine periodische Funktion sei, abgesehen wird, unter rationalen ganzen oder gebrochenen Funktionen und einfachen Ausdrücken in Exponential- und Logarithmusfunktionen diejenige auswählen, für die wir bei aller Wahrung einer einfachen Berechnung die möglichst beste Anpassung an den Verlauf von $f(x)$ vermuten. Diese Wahlfreiheit wird man sich vor allem dann angelegen sein lassen, wenn, wie das beim Zinsfussproblem auch der Fall ist, nur wenige Interpolationsstellen Verwendung finden sollen oder können. Bei einer grössern Zahl von Interpolationsstellen kommt dagegen praktisch nur noch die Interpolation durch den einfachsten Funktionstypus, die ganzrationale Funktion niedersten Grades in Frage.

Ohne in eine weitergehende Erörterung von Interpolationsformeln einzutreten, die keinen direkten Bezug zum Zinsfussproblem haben oder für dieses Problem praktisch bedeutungslos sind, seien noch zwei Bemerkungen gemacht. Einmal sei daran erinnert, dass die bekannte Formel von *Waring-Lagrange*

$$\varphi(x) = \sum_{\varrho=0}^{r} y_\varrho \frac{\psi(x)}{\psi'(x_\varrho) \cdot (x - x_\varrho)}, \tag{57}$$

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_r),$$

[1]) Im ersten Fall ist dann das Interpolieren das überhaupt einzige Mittel, Auskunft über die Funktion an andern als den gegebenen Stellen zu erhalten. Im zweiten dagegen hat es den Zweck, weitere Funktionswerte bequemer als unter Anwendung der genauen Funktionsvorschrift zu vermitteln, doch um den Preis, dass nur mehr oder weniger gute Näherungswerte erhalten werden.

und die allgemeine Formel von *Newton*

$$(58) \qquad \varphi(x) = \sum_{\varrho=0}^{r} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_\varrho) f(x_0, x_1, \ldots, x_\varrho),$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \qquad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_\varrho) = \frac{f(x_0, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}) - f(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)}{x_0 - x_\varrho},$$

einfach die allgemeine Durchbildung dieser Interpolationsart für den einfachsten Interpolationsfall sind, dass nämlich die Funktionswerte $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_r = f(x_r)$ zu den $r + 1$ Argumentstellen $x_0, x_1, \ldots, x_r$ als genau bekannt angenommen werden. Die Bedeutung der Formeln (57) und (58) liegt darin, dass durch sie $\varphi(x)$ schon explizit vorliegt und seine $r + 1$ willkürlichen Konstanten nicht erst mehr oder weniger mühsam mit Hilfe des Systems der $r + 1$ Bedingungsgleichungen

$$(59) \qquad \varphi(x_0) = y_0, \ \varphi(x_1) = y_1, \ldots, \varphi(x_r) = y_r$$

gewonnen werden müssen. Doch tritt, wie erwähnt, beim Zinsfussproblem dieser Nutzen wenig hervor, indem bei der geringen Zahl von Interpolationsstellen das Einsetzen in die Formeln (57) und (58) und Umformen dieser Ausdrücke kaum einfacher ist als das direkte, individuelle Ermitteln der gesuchten Konstanten aus dem System (59), wie es für allgemeinere Interpolationsfunktionen ohnehin der Fall sein muss. Damit ist auch schon der Nutzen der nach *Gregory-Newton, Gauss, Stirling, Everett, Bessel* benannten und anderer ähnlicher Formeln für das Zinsfussproblem entschieden, indem diese alle bloss Spezialfälle der Formel (58) für äquidistante Argumente sind und je nach der Lage der Berechnungsstelle zu den Interpolationsstellen ihren besondern Vorteil besitzen.

Ferner sei noch die Interpolationsformel von *Thiele* [43], [44] hervorgehoben. Die genannte Formel verwendet ähnliche Bildungen wie die in (58) gegebenen Steigungen $f(x_0, x_1, \ldots, x_\varrho)$, nämlich sogenannte *reziproke Differenzen,* hat die Gestalt einer im allgemeinen nicht abbrechenden Kettenbruchentwicklung und spielt die gleiche

Rolle für Annäherungen durch rationale Funktionen wie die allgemeine Formel von *Newton* für Näherungen durch Polynome. Wenn die zu interpolierende Funktion $f(x)$ nicht selber ein Polynom ist, so vermittelt sie meistens bessere Werte als die entsprechenden Abschnitte von (58). Lässt man alle Interpolationsstellen in eine einzige zusammenfallen, so geht die Thielesche Interpolationsformel in einen Kettenbruch über, dessen Koeffizienten Aggregate der Ableitungen der zu interpolierenden Funktion sind. Man nennt diese Ausdrücke *reziproke Ableitungen*, der Kettenbruch selber wird in der Literatur als *Thielescher Kettenbruch* bezeichnet; die schon früher gefundene Formel (38) ist nichts anderes als der zweite Näherungsbruch von *Thiele*.

b) Oskulierendes Interpolieren.

Die Ausweitung des Interpolationsansatzes auf den Fall, dass neben Funktionswerten auch noch Werte sukzessiver Ableitungen bekannt sind, ist nach dem gegebenen Prinzip klar: liegen an der Stelle x_k — ohne Einschränkung der Allgemeinheit brauchen wir nur eine einzige Stelle zu betrachten — neben $f(x_k) = y_k$ auch noch die Werte $y_k' = f'(x_k)$, $y_k'' = f''(x_k)$, ..., $y_k^{(m-1)} = f^{(m-1)}(x_k)$ der $m-1$ ersten sukzessiven Ableitungen von $f(x)$ vor, so bestehen an dieser Stelle für die Interpolationsfunktion $y = \varphi(x)$ die Bedingungsgleichungen

$$(60) \qquad \varphi(x_k) = y_k, \varphi'(x_k) = y_k', \ldots, \varphi^{(m-1)}(x_k) = y_k^{(m-1)}.$$

Da diese m Bedingungen an der einen Stelle x_k an Zahl gerade denjenigen von m verschiedenen Interpolationsstellen entsprechen, bei denen je der Wert der Funktion allein bekannt ist, liegt es nahe, in x_k das Zusammenfallen von m einfachen Interpolationsstellen zu sehen. In der Tat geht auch aus den, den m verschiedenen Stellen x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m-1} zugehörenden Bedingungsgleichungen

$$(59\,a) \qquad \varphi(x_k) = y_k, \varphi(x_{k+1}) = y_{k+1}, \ldots, \varphi(x_{k+m-1}) = y_{k+m-1}$$

beim Zusammenrücken aller dieser Stellen in die einzige x_k nicht allein die Beziehung $\varphi(x_k) = y_k$ hervor, sondern es lässt sich dazu noch an den $m-1$ voneinander unabhängigen Gleichungen von Differenzenquotienten (dividierten Differenzen)

$$\frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} = \varphi(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} =$$

$$= f(x_k, x_{k+1})$$

$$\varphi(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1}) = f(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1})$$

je der Grenzübergang durchführen, was unter wiederholter Anwendung des Rolleschen Satzes gerade die restlichen m—1 Beziehungen von (60) erbringt. Ergänzend zu den frühern Feststellungen können wir dann noch sagen, dass *die Zahl der Interpolationsstellen, jede ihrer Mehrfachheit entsprechend gezählt, gerade der Zahl der verfügbaren Parameter der Interpolationsfunktion entsprechen muss.*

Während die überwiegend gebrauchte Interpolation mit einfachen Interpolationsstellen — wir wollen bei ihr künftig als von der *einfachen Interpolation* sprechen — geometrisch darauf hinausläuft, in einem x, y-Koordinatensystem eine Kurve $y = \varphi(x)$ zu legen, die durch die $r + 1$, dem Bild der Funktion $y = f(x)$ ebenfalls angehörenden Punkte x_ϱ, y_ϱ, $\varrho = 0, 1, \ldots, r$, geht und somit die Kurve $y = f(x)$ im allgemeinen in diesen Punkten schneidet, lassen die Bedingungen in der Art von (60) die Kurve $y = \varphi(x)$ nicht beliebig durch den Punkt x_k, y_k gehen und $f(x)$ schneiden, sondern nur so, dass sie die Kurve $y = f(x)$ (m—1)-fach berührt oder oskuliert. Daher pflegt man die Interpolation mit mehrfachen Interpolationsstellen gesamthaft als *oskulierende* zu bezeichnen. Doch geht diesem Begriff noch mehr als dem der einfachen Interpolationen eine Eindeutigkeit der Fragestellung ab. Nicht nur, dass in der Wahl des Typus der Funktion $y = \varphi(x)$ wieder volle Freiheit besteht, sondern es kommt nun auch noch die Auswahl in bezug auf die Zahl der voneinander verschieden bleibenden Interpolationsstellen und die Ordnung des Oskulierens an den einzelnen Stellen dazu, die, wenn $y = \varphi(x)$ eine grössere Zahl von verfügbaren Parametern enthält, recht erheblich wird [1]).

Die obige Bemerkung über das Zusammenrücken von Interpolationsstellen in eine einzige weist einen Weg, wie für oskulierende

[1]) Rechnet man die einfache Interpolation mit, so gibt es für eine einzige bestimmt gewählte Interpolationsfunktion $y = \varphi(x)$ gerade soviel Ansätze, als die Zahl der verfügbaren Parameter von $\varphi(x)$ in kleinere Summanden, mit Wiederholung, zerfällt werden kann.

Interpolationen ausser aus dem System von Bedingungsgleichungen (59) und (60) die Formel zur Interpolationsfunktion $y = \varphi(x)$ gefunden werden kann: ist nämlich für die einfache oder eine weniger weit reichende oskulierende Interpolation mittels der Funktion $y = \varphi(x)$ die Formel schon bekannt, so folgt allein durch geeignetes Zusammenrücken der Interpolationsstellen die gesuchte Formel. Wie weit allerdings diese Methode einfacher ist als die ursprünglich genannte, hängt ganz vom Einzelfall ab und kann nur für jeden gesondert beurteilt werden.

Frucht [3] hat an einem schönen Beispiel von diesem Vorgehen Gebrauch gemacht; es sei auch hier dargelegt, um so mehr, als es auf eine ebenfalls recht nützliche, bisher aber wenig beachtete Interpolationsformel führt [1]). In origineller Weise geht der Autor von einer besondern arithmetischen Eigenschaft aus, welche die gewählte, eine gleichseitige Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten darstellende Interpolationsfunktion $y = \varphi(x) = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{1 + \alpha_2 x}$ besitzt. Fassen wir sie nämlich als Transformation auf, welche die Argumentwerte x in ihre zugehörigen Funktionswerte y überführt und die Eigenschaft besitzt, das Doppelverhältnis von vier Grössen invariant zu lassen, so können wir die Formel für die einfache Interpolation sofort angeben (y_1, y_2, y_3 bedeuten dabei die gegebenen Funktionswerte zu den Stellen x_1, x_2, x_3, y_2' der nachher als gegeben zu betrachtende Wert von $f'(x)$ an der Stelle x_2):

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

und

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \cdot \frac{(y_3 - y_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)(y_3 - y_2)} . \tag{61}$$

Geht dann $x_3 \to x_2$, so folgt daraus

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \cdot \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2'}$$

---

[1]) [3], Formel [19]. *Hantsch* [5], S. 16—17, wendet die Formel zwar auch an, aber nur im Sonderfall, dass der eine Rentenbarwert an der Stelle $i = 0$ benützt wird, womit die Bedeutung der Formel gerade nicht deutlich hervortritt.

und, nach einfacher Umformung,

$$(62) \qquad y = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{1 - \frac{(x - x_2)(x_1 - x_2)}{x - x_1} \cdot \frac{y_2'}{y_1 - y_2}}$$

oder

$$(62') \qquad y = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{1 - \frac{x - x_1}{(x - x_2)(x_1 - x_2)} \cdot \frac{y_1 - y_2}{y_2'}} .$$

Aus diesen beiden gleichberechtigt nebeneinander bestehenden allgemeinen Formeln gehen dann für den Barwert der lebenslänglichen Leibrente

$$(63) \qquad a_x' \sim a_x(i_1) - \frac{a_x(i_1) - a_x(i_2)}{1 + \frac{(i_1 - i_2)(i' - i_2)}{(i' - i_1)} \cdot v \frac{{}^2S_{x+1}}{{}^2D_x} \frac{1}{a_x(i_1) - a_x(i_2)}}$$

oder

$$(63') \qquad a_x' \sim a_x(i_2) + \frac{a_x(i_1) - a_x(i_2)}{1 + \frac{i' - i_1}{(i_1 - i_2)(i' - i_2)} (a_x(i_1) - a_x(i_2)) \frac{{}^2D_x}{v\, {}^2S_{x+1}}}$$

hervor, wobei der links von den Kommutationswerten angebrachte Index «2» darauf hinweisen soll, dass diese zum Zinssatz $i = i_2$ zu nehmen sind.

Lassen wir weiter $i_1 \to i_2$ gehen und schreiben statt i_2 wieder i, so ergibt sich die erste *Poukka*sche Formel

$$(39) \qquad a_x' \sim a_x - \frac{\frac{S_{x+1}}{D_x} v h}{1 + \frac{S_{x+1}^{(2)}}{S_{x+1}} v h} = a_x - a_x \frac{\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} v h}{1 + \frac{S_{x+1}^{(2)}}{S_{x+1}} v h} ,$$

die demnach nichts anderes ist als die Interpolationsformel mittels der an der Stelle i vollständig oskulierenden gleichseitigen Hyperbel mit achsenparallelen Asymptoten, was übrigens *Poukka* schon selber am Schluss seiner Arbeit angemerkt hat.

Lösen wir dagegen (61) nach y auf und ordnen durch eine elementare Umformung diese Auflösung so, dass sie in den Indices 1 und 2 symmetrisch wird und damit den Index 3 besonders hervorkehrt,

$$(61') \quad y = y_3 - \frac{(y_3-y_1)(y_3-y_2)(x-x_3)(x_2-x_1)}{(x-x_3)\{(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\}-(x_3-x_2)(x_3-x_1)(y_2-y_1)},$$

so erhalten wir die Formel für die einfache Interpolation in einer Form, wie sie *Palmqvist* [22] gegeben hat [1]). Allerdings hat er sich auf den besondern Fall beschränkt, dass die Argumente äquidistant seien; soll dabei x_3 das mittlere unter ihnen bedeuten, so liegt es nahe $x_3 = x$, $x_1 = x - \varepsilon$, $x_2 = x + \varepsilon$ zu setzen, wobei dann das bisher durch x bezeichnete Argument des gesuchten Funktionswerts seinerseits am besten durch die Bezeichnung $x + h$ ersetzt wird. Der Weg selber, der ihn zur angegebenen Formel geführt hat, ist der vorangegangenen Betrachtung gerade entgegengesetzt; Ausgangspunkt ist die nach dem ersten *Poukka*schen Verfahren hergeleitete Formel (38), aus der die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ eliminiert werden.

Schliesslich hat *Franckx* [23] mittels der der Nomographie eigenen Methoden den organischen Zusammenhang unserer drei Formeln (38), (62) und (61') [2]) nochmals dargestellt. Wir haben schon darauf hingewiesen, dass die der ersten Poukkaschen Formel (39) zugrunde liegende Formel (38) einfach der zweite Näherungsbruch des Thieleschen Kettenbruchs ist; gleichermassen stellt (61') die nach dem zweiten Glied abgebrochene Interpolationsformel von *Thiele* dar.

c) Die rein oskulierende Interpolation.

Wie unter den verschiedenen Möglichkeiten oskulierenden Interpolierens schon der Spezialfall der *einfachen* Interpolation besonders hervorgetreten ist, so trifft dies auch für das andere Extrem zu, dass *alle* Interpolationsstellen in eine einzige, x_0, zusammenfallen. In diesem Fall, welchen wir als den der *rein oskulierenden* Interpolation bezeichnen wollen, sind dann die Koeffizienten der Interpolationsformel $y = \varphi(x)$ Stellenfunktionen zum Argument x_0, d. h. sie setzen sich aus den Werten $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$, ..., $y_0^r = f^{(r)}(x_0)$ der

[1]) [22], Formel (5).
[2]) [23], Formeln (4), (6) und (3).

gegebenen Funktion $y = f(x)$ und ihrer Ableitungen an der Stelle x_0 zusammen.

Da damit einerseits der Stelle x_0 eine überragende Sonderstellung zufällt, andererseits eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = 0$ im allgemeinen merklich einfacher als an einer andern Stelle zu untersuchen ist, wird es zu einem erheblichen Vorteil gereichen, $y = \varphi(x)$ und damit auch die gewählte Interpolationsfunktion $y = \varphi(x)$ nicht mehr weiter im x, y-Koordinatensystem zu betrachten, sondern in dem aus ihm durch die Schiebung $h = x - x_0$, $y = y$ hervorgehenden h, y-System als Funktionen $y = \bar{f}(h) = \bar{f}(x - x_0)$ und $y = \bar{\varphi}(h) = \bar{\varphi}(x - x_0)$; $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ lassen sich dann übrigens auch noch in der Form $y = f(x_0 + h)$ und $y = \varphi(x_0 + h)$ schreiben. Damit gehen die r + 1 Bedingungen

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(r)}(x_0) = y_0^{(r)} \tag{64}$$

für die Festlegung der Konstanten von $y = \varphi(x)$ gerade in solche an der Stelle $h = 0$ über,

$$\bar{\varphi}(0) = y_0, \quad \bar{\varphi}'(0) = y_0', \quad \ldots, \quad \bar{\varphi}^{(r)}(0) = y_0^{(r)} \tag{64'}$$

allerdings dann zunächst die Koeffizienten von $y = \bar{\varphi}(h)$ bestimmend. Dass hierbei für eine bestimmt gegebene Interpolationskurve (oder anders gesagt, für ein bestimmt gedachtes Interpolationsgesetz) $\varphi(x) = \varphi(x_0 + h)$ und $\bar{\varphi}(h) = \bar{\varphi}(x - x_0)$ vom genau gleichen allgemeinen analytischen Ansatz sind und sich nur durch die Verschiedenheit der Koeffizienten voneinander unterscheiden, ist eine eigentlich trivale Folgerung aus dem zur Anwendung gelangten Transformationstypus[1]).

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts wollen wir noch ein konkretes Beispiel geben, welches zugleich mit einer Formel bekannt macht, die für das Zinsfussproblem von erheblichem Wert ist.

---

[1]) Dieser Sachverhalt soll auch in der Bezeichnungsweise ihren Ausdruck finden, indem für beide Variable x und h das gleiche Funktionssymbol φ benützt wird. Dass im einen Fall die Konstanten $b_0, b_1, \ldots, b_r$, im andern die Konstanten $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$ vorliegen, ist dadurch ausgedrückt, dass im letztern das Funktionssymbol φ beibehalten, doch quer überstrichen ist. Um die Darstellung aber nicht unnötig zu überlasten, und wo keine Verwechslungen möglich sind, lassen wir dieses Unterscheidungszeichen überhaupt weg oder benützen das ungestrichene Symbol im h, y-System und den Querstrich für das x, y-System. Im übrigen sollen in den Interpolationsformeln die verfügbaren Parameter mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden, sind sie durch die gegebenen Ausgangsbedingungen bestimmt gedacht, so soll dies durch Verwendung lateinischer Buchstaben angedeutet sein.

Wollen wir beispielsweise für die Interpolationsfunktion

$$(65) \qquad y = \varphi(x) = \beta_0 e^{\frac{\beta_1 x}{1+\beta_2 x}}$$

die zu ihr identische Funktion $\overline{\varphi}(h)$ bekommen, so haben wir einfach x durch $x_0 + h$ zu ersetzen und erhalten nach einigen elementaren Umformungen

$$(65') \qquad y = \overline{\varphi}(h) = \varphi(x_0 + h) = \varphi(x) = \beta_0 e^{\frac{\beta_0 x_0}{1+\beta_2 x_0}} \cdot e^{\frac{\frac{\beta_1}{(1+\beta_2 x_0)^2} h}{1+\frac{\beta_2}{1+\beta_2 x_0} h}}.$$

Setzen wir dann als neue Konstante

$$\gamma_0 = \beta_0 e^{\frac{\beta_0 x_0}{1+\beta_2 x_0}}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{(1 + \beta_2 x_0)^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{1 + \beta_2 x}$$

an, so hat $y = \overline{\varphi}(h)$ in der Tat die gleiche Gestalt wie $y = \varphi(h)$:

$$(65'') \qquad y = \overline{\varphi}(h) = \gamma_0 \cdot e^{\frac{\gamma_1 h}{1+\gamma_2 h}}.$$

Gehen wir mit dieser Interpolationsfunktion (65″) weiter zur rein oskulierenden Interpolation über, d. h. nehmen $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$, $y_0'' = f''(x_0)$ als gegeben an, so besteht für die Bestimmung ihrer Konstanten c_0, c_1, c_2 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(0) &= c_0 = y_0 \\ \overline{\varphi}'(0) &= c_0 c_1 = y_0' \\ \overline{\varphi}''(0) &= c_0 c_1 (-2c_2 + c_1) = y_0'', \end{aligned}$$

welches

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{y_0'}{y_0}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_0'}{y_0} - \frac{y_0''}{y_0'}\right)$$

zur Lösung hat.

Indem wir noch für y_0 den Barwert der lebenslänglichen Leibrente zum Zinssatz i, für y_0' und y_0'' deren bekannte Derivierte (5) einsetzen, folgt mit $h = i' - i$

$$(66) \qquad a'_x \sim a_x \cdot e^{-\frac{v \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} h}{1+v\left(\frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} - \frac{1}{2}\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)h}}.$$

Auf diese Formel, allerdings in einer etwas andern Gestalt, ist zuerst *Hantsch* im Zuge seiner schon genannten systematischen Untersuchung gestossen [1]; sie ist ein Beispiel dafür, wie eine funktionelle Zuordnung oft analytisch verschiedenartig formuliert werden kann. (65″) können wir nämlich auch in der Form

$$(65''') \qquad \bar{\varphi}(h) = e^{\frac{\alpha_0+\alpha_1 h}{1+\alpha_2 h}}$$

darstellen, indem wir die neuen Konstanten

$$\alpha_0 = ln\,\gamma_0, \quad \alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_2 ln\,\gamma_0, \quad \alpha_2 = \gamma_2$$

einführen; mit

$$\alpha_0 = ln\,a_x \qquad \alpha_2 = v\left(\frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} - \frac{1}{2}\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)$$

$$\alpha_1 = -v\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} + ln\,a_x \cdot v\left(\frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} - \frac{1}{2}\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)$$

ist dann (65‴) die allerdings auch schon etwas vereinfachte Form, die *Hantsch* (66) gegeben hat. Sie weist gegenüber der unsrigen den Vorteil auf, dass mit der Ermittlung des Potenzwerts gerade das fertige Ergebnis vorliegt und die Multiplikation mit a_x in Wegfall kommt, dafür verlangt die Berechnung ihrer Konstanten mehr Arbeit. Verwenden wir wieder die Poukkasche Beziehung $k = 0{,}84$, so erhalten wir aus (66)

$$(67) \qquad a'_x = a_x \cdot e^{-\frac{\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} vh}{1+0{,}34\frac{S_{v+1}}{N_{x+1}} vh}},$$

eine Formel, die ebenfalls schon *Frucht* [3] angegeben hat. Die beiden Formeln (66) und (67) leiden wie schon die Formeln von *Christen* (52)

[1]) [5], Seite 26.

und (54) daran, dass sie den Gebrauch einer Logarithmentafel nötig machen; bemerkenswert ist, dass sie auch bei grössern Zinssatzspannen noch recht gute Annäherungen ergeben und hierin die entsprechenden Poukkaschen Formeln übertreffen.

d) Die beiden Poukkaschen Verfahren und ihr Zusammenhang mit der rein oskulierenden Interpolation.

Wollen wir die allgemeine Formel für die rein oskulierende Interpolation von der Stelle $h = 0$ aus mittels des Polynoms r-ten Grades

$$y = \varphi(h) = \beta_0 + \beta_1 h + \ldots + \beta_r h^r \tag{68}$$

bestimmen, so werden die Bedingungsgleichungen (64′) besonders einfach, nämlich

$$\varphi^{(\varrho)}(0) = \varrho!\, b_\varrho = y_0^{(\varrho)} \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, r,$$

und die aus ihnen eindeutig hervorgehende Lösung

$$\beta_\varrho = \frac{y_0^{(\varrho)}}{\varrho!} = b_\varrho \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, r$$

gibt nichts anderes als die ersten $r + 1$ Entwicklungskoeffizienten der Taylorreihe von $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0 + h) = f(h)$ an der Stelle $x = x_0$ bzw. $h = 0$,

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0 + h) = f(h) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} b_\varrho h^\varrho. \tag{69}$$

Es gilt somit der Satz: *Die Formel für die rein oskulierende Interpolation von $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0 + h) = f(h)$ von der Stelle $h = 0$ aus mittels des Polynoms r-ten Grades* (68) *ist durch die r-te Teilsumme der an der Stelle $x = x_0$ bzw. $h = 0$ angesetzten Taylorschen Entwicklung* (69) *von $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0 + h) = f(h)$ gegeben, und umgekehrt bedeutet Abbrechen dieser Taylorreihe* (69) *nach der r-ten Potenz von h nichts anderes als rein oskulierendes Interpolieren von $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0 + h) = f(h)$ von der Stelle $h = 0$ aus mittels des eindeutig bestimmten Polynoms r-ten Grades* (68).

Diese bekannte, elementare Tatsache, aus der auch sofort die Deutung der Formeln (27) und (30) von *Steffensen* und *van Dorsten* als Interpolationsformeln hervorgeht, legt die Vermutung nahe, dass

auch zwischen den beiden *Poukka*schen Verfahren und dem rein oskulierenden Interpolieren ein enger Zusammenhang bestehe, denn es ist bei diesen Verfahren ebenfalls ein wesentlicher Zug, die ihnen zugrunde liegende Reihe (32) an geeigneter Stelle abzubrechen. Dieses vermutete Verhalten lässt sich in der Tat vollständig bestätigen, doch wird sich erweisen, dass der gesuchte Zusammenhang in einer andern Richtung liegt, als man auf Grund des vorangegangenen Satzes und der schon im zweiten Kapitel gewonnenen und in den Formeln (35) und (36) zusammengefassten Erkenntnisse über die Beziehungen der Koeffizienten b_s und c_r der beiden Reihen (29) und (32) vielleicht zunächst zu vermeinen glaubt.

Wir haben nämlich früher die Verknüpfung der Koeffizientensysteme b_s und c_r vom Standpunkt aus betrachtet, dass die eine der beiden Koeffizientenfolgen gegeben, die andere gesucht sei. Dabei waren die beiden Folgen durch eine analytische Funktion $z = \psi(h)$ verknüpft, die mit einer geringfügigen Einschränkung zwar beliebig wählbar, doch *fest vorgegeben* sein sollte, d. h. in welcher weder im analytischen Ansatz noch in den in ihm enthaltenen Parametern willkürliche Verfügungen mehr möglich oder nötig waren. Diese Annahme über Gegebenes und Gesuchtes müssen wir aufgeben, wenn wir nun an die Untersuchung der beiden *Poukka*schen Verfahren gehen. Wir setzen wohl unverändert die Kenntnis der ersten $r+1$ Koeffizienten b_s der Potenzreihe (29) als Ausgangspunkt voraus. Neu kommt dagegen hinzu, dass wir auch über die Werte der Koeffizienten c_r, und zwar in sehr einschneidender Weise, Vorschriften machen, wofür wir darauf verzichten, die Funktion $z = \psi(h)$ fest vorzugeben. Vielmehr schält sich gerade als Aufgabe heraus, die in einem fest vorgegebenen analytischen Ansatz von $z = \psi(h)$ noch verfügbar gelassenen Parameter so zu bestimmen, dass sie mit den vorgegebenen Bedingungen über die Werte c_r im Einklang stehen. Dabei erkennen wir unmittelbar, dass $z = \psi(h)$ wenigstens soviel verfügbare Parameter enthalten muss, als Vorschriften über die Koeffizienten c_r bestehen, aber auch nicht deren mehr enthalten darf, wenn kein Parameter mehr willkürlich wählbar sein soll.

Wenden wir uns jetzt vorerst allein dem *ersten* Poukkaschen Verfahren zu, so haben wir es mit der folgenden Vorschrift zu tun: wir setzen die «Abbildungsfunktion» $z = \psi(h)$ mit $r-1$ verfügbaren Parametern $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r$ an und verlangen, dass diese Parameter die

$r-1$ Koeffizienten $c_2, c_3, \ldots, c_r$ der Reihe (32) zum Verschwinden bringen sollen,

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_r = 0.$$

Es ist offensichtlich, was wir damit bezwecken: trotz Abbrechen der Reihe (32) erst nach der r-ten Potenz von $z = \psi(h)$ bleibt als Näherung für $f(h)$ doch nur der zweigliedrige Ausdruck

$$(70) \qquad f(h) \sim \Psi(h) = c_0 + c_1\, \psi(h, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r)$$

stehen. Von den $r+1$ unbestimmten Parametern $c_0 = \pi_0$, $c_1 = \pi_1$, $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r$ von (70) wird der erste explizit durch die gegebenen Koeffizienten b_s der Reihe (29) dargestellt;

$$(71\,a) \qquad \pi_0 = b_0 = y_0,$$

der zweite drückt sich ebenfalls explizit durch die b_s und die verbleibenden Parameter $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r$ aus,

$$(71\,b) \qquad \pi_1 = b_1\, d_1 = b_1 \cdot \gamma_{11}(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r),$$

während nach *Poukkas* Vorbild die restlichen Parameter $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r$ implizit durch das System der $r-1$ Gleichungen mit $r-1$ Unbekannten

$$(71c) \quad \begin{cases} c_2 = 0 = \gamma_{12}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_1 + \gamma_{22}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_2 \\ c_3 = 0 = \gamma_{13}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_1 + \gamma_{23}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_2 + \\ \qquad\qquad + \gamma_{33}(\pi_2, \ldots, \pi_r)\, b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r = 0 = \gamma_{1r}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_1 + \gamma_{2r}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot b_2 + \ldots + \\ \qquad\qquad + \gamma_{rr}(\pi_2, \ldots, \pi_r)\, b_r \end{cases}$$

festgelegt sind. Die Beifügung der Werte $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r$ zu den Koeffizienten γ_{rs} — die Bildung dieser Koeffizienten γ_{rs} haben wir im Anschluss an Formel (35) angegeben — soll dabei daran erinnern, welches die Unbekannten im System (71 c) sind. Mit wenig Mühe lässt sich aber jetzt weiter zeigen, dass das aus (71 a), (71 b), (71 c) zusammengesetzte System (71) von $r+1$ Gleichungen mit $r+1$ Unbekannten mit dem folgenden äquivalent ist, d. h. die gleichen Lösungen p_0, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ besitzt:

$$(72)\qquad \begin{cases} b_0 = y_0 = \pi_0 \\ b_1 = \Gamma_{11}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot \pi_1 \\ b_2 = \Gamma_{12}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot \pi_1 \\ b_3 = \Gamma_{13}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot \pi_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_r = \Gamma_{1r}(\pi_2, \ldots, \pi_r) \cdot \pi_1 . \end{cases}$$

Denn, $p_0^* = b_0, p_1^*, p_2^*, \ldots, p_r^*$ sei eine Lösung von (71), bedeutet, dass die gegebene Koeffizientenfolge $b_0, b_1, \ldots, b_r$ vermittels $\psi(h, p_2^*, p_3^*, \ldots, p_r^*)$ in die Folge $c_0 = b_0, c_1 = p_1^*, c_2 = c_3 = \ldots = c_r = 0$ übergeführt wird. Nun ist aber diese Beziehung umkehrbar eindeutig und findet nach (36) gerade ihren Ausdruck im System (72), wenn wir in ihm für die Parameter $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$ die Folge $p_0^*, p_1^*, \ldots, p_r^*$ einsetzen. Damit ist aber schon gezeigt, dass $p_0^*, p_1^*, \ldots, p_r^*$ (72) befriedigt, also Lösung dieses Gleichungssystems ist; entsprechend zeigt man, dass auch umgekehrt jede Lösung von (72) Lösung von (71) sein muss.

Dieses Gleichungssystem (72) können wir noch etwas umformen, wenn wir uns einerseits der früher gegebenen Beziehung

$$\Gamma_{1s} = \frac{1}{s!}\left(\frac{d^s \psi(h)}{dh^s}\right)_{h=0}$$

erinnern und andererseits beachten, dass für die durch (70) definierte Funktion $\Psi(h)$ $\Psi(0) = c_0 = \pi_0 = b_0$, $\Psi'(h) = \pi_1 \psi'(h, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_r)$ gilt. Wir erhalten

$$(72'a)\qquad \begin{cases} \Psi(0) = c_0 = b_0 = y_0 \\ \Psi'(0) = \pi_1 \psi'(0) = b_1 = y_0' \end{cases}$$

$$(72'b)\qquad \begin{cases} \Psi''(0) = \pi_1 \psi''(0) = 2!\, b_3 = y_0'' \\ \Psi'''(0) = \pi_1 \psi'''(0) = 3!\, b_3 = y_0''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi^{(r)}(0) = \pi_1 \psi^{(r)}(0) = r!\, b_r = y_0^{(r)} \end{cases}$$

und erkennen, dass wir nichts anderes als die Bedingungsgleichungen (64′) für $y = \Psi(h)$ als Interpolationsfunktion vor uns haben, womit der einfache Satz gilt:

Das Bestimmen eines Näherungswerts

$$f(h) \sim y_0 + \frac{y_0'}{\psi'(0)} \psi(h) \tag{70'}$$

einer Funktion $f(h)$ durch das erste Poukkasche Verfahren mittels der $(r-1)$-parametrigen «Abbildungsfunktion» $\psi(h)$ ist nichts anderes als das rein oskulierende Interpolieren von $f(h)$ von der Stelle $h = 0$ aus mittels der $(r+1)$-parametrigen Interpolationsfunktion.

$$\varphi(h) = \gamma_0 + \gamma_1 \psi(h). \tag{73}$$

Die etwas merkwürdig erscheinende Gestalt von $\varphi(h)$ hat dabei zur Folge, dass γ_0 und γ_1 immer durch die gegebenen Werte y_0 und y_0' und die Parameter von $\psi(h)$ angegeben werden können und $\varphi(h)$ praktisch als Funktion

$$\psi(h) = y_0 + y \frac{y_0'}{\psi'(0)} \psi(h) \tag{73'}$$

allein mit den Parametern von $\psi(h)$ aufgefasst werden kann, zu deren Bestimmung dann nur das Teilsystem (72′ b) zu verwenden ist.

Vergleichen wir (72′ b) mit (71 c) und bedenken, dass für jede Funktion, sei sie einfach oder verwickelter, es ungefähr den gleichen Arbeitsaufwand braucht, sie bzw. ihre Umkehrfunktion in die zugehörige Potenzreihe zu entwickeln oder die beiden Funktionen direkt zu differenzieren, so kommen wir nicht um die Feststellung herum, dass das erste Poukkasche Verfahren einfach die Lösung einer gegebenen Interpolationsaufgabe auf einem mehr oder weniger komplizierten Umweg bedeutet. Eine positiv zu wertende Tatsache bleibt am Verfahren und den daran geknüpften Betrachtungen allerdings bestehen; durch Anwendung des Lindelöfschen Kriteriums lässt sich, jedoch auch nur unter den früher gemachten Vorbehalten, beurteilen, ob durch die Interpolation mittels $\varphi(h)$ ein besseres Ergebnis erwartet werden darf als bei Abbrechen der Potenzreihe (29).

Nehmen wir, um die Ansätze (73′) und (72′ *b*) an einem Beispiel zu belegen, die von *Christen* verwendete «Abbildungsfunktion» $z = \psi(h) = 1 - e^{-\beta h}$, d. h. setzen

$$\varphi(h) = y_0 + \frac{y_0'}{\psi'(0)}\,\psi(h) = y_0 + \frac{y_0'}{\beta}\,(1 - e^{-\beta h}),$$

so wird

$$\varphi''(0) = -y_0'\beta = y_0'', \quad \beta = -\frac{y_0''}{y_0'} \text{ und } \varphi(h) = y_0 - \frac{y_0'^2}{y_0''}\left(1 - e^{\frac{y_0''}{y_0'}h}\right),$$

was unter Berücksichtigung von (5) in der Tat zu (52) führt.

Mit der in das *erste* Poukkasche Verfahren gewonnenen Einsicht ist es leicht, auch das *zweite* vollständig zu durchschauen. Um eine möglichst weitgehende Anlehnung an das erste Verfahren zu erlangen, fassen wir seine ebenfalls sinngemäss verallgemeinerte Vorschrift so, dass wir wie bei diesem das Verschwinden der $r - 1$ Koeffizienten $c_2, c_3, \ldots, c_r$ und Abbrechen der Reihe (32) nach der r-ten Potenz von $z = \psi(h)$ verlangen, abweichend von ihm aber $\psi(h)$ mit einem willkürlichen Parameter mehr, also insgesamt deren r, $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{r+1}$ ansetzen. Zur Aufstellung einer hierdurch notwendig gewordenen zusätzlichen Bedingung zu den schon genannten Bedingungen gehen wir vom Ergebnis (70) des ersten Verfahrens aus. Lässt sich nämlich $\psi(h)$ in der Gestalt

$$\psi(h) = K + \varkappa(h)$$

schreiben, wo K eine feste, von den r willkürlichen Parametern $\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}$ unabhängige Konstante ist und wegen $\psi(0) = 0$ $\varkappa(0) = -K$ sein muss, so wird (70)

$$\psi(h) = c_0 + c_1\psi(h, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) = c_0 + c_1 K + c_1\varkappa(h, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}).$$

In diesem durch die gegebene Aufteilung von $\psi(h)$ dreigliedrig gewordenen Ausdruck verlockt es nun, den von h oder, genauer gesagt, den von $\varkappa(h)$ freien Teil zum Verschwinden zu bringen,

$$c_0 + c_1 K = 0,$$

so dass dann nur der eingliedrige Ausdruck

$$\psi(h) = c_1 \varkappa(h, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \tag{74}$$

stehen bleibt. Setzen wir, um zu betonen, dass c_0 und c_1 auch verfügbare Parameter sind, wieder wie früher $\pi_0 = c_0$, $\pi_1 = c_1$, so dient uns dann zur Bestimmung der $r+2$ Parameter $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}$ das System von $r+2$ Gleichungen

$$\tag{75} \left\{ \begin{aligned} & \pi_0 = b_0 = y_0 \\ & \pi_0 + K\pi_1 = 0 \\ & \pi_1 = b_1 \gamma_{11}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \\ & c_2 = 0 = \gamma_{12}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_1 + \gamma_{22}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_2 \\ & c_3 = 0 = \gamma_{13}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_1 + \gamma_{23}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_2 + \\ & \qquad\qquad + \gamma_{33}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) b_3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & c_r = 0 = \gamma_{1r}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_1 + \gamma_{2r}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_2 + \\ & \qquad\qquad + \ldots + \gamma_{rr}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot b_r . \end{aligned} \right.$$

Durch die genau gleiche Beweisführung, wie wir sie zum Nachweis der Äquivalenz der Systeme (71) und (72) verwendeten, ergibt sich aber, dass (75) zu

$$\tag{76} \left\{ \begin{aligned} & \pi_0 = b_0 = y_0 \\ & \pi_0 + K\pi_1 = 0 \\ & b_1 = \Gamma_{11}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 \\ & b_2 = \Gamma_{12}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & b_r = \Gamma_{1r}(\pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 \end{aligned} \right.$$

äquivalent ist, welches System seinerseits wegen $\psi^{(s)}(h) = \varkappa^{(s)}(h)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ und $\varkappa(0) = -K$ als System der $r+1$ Gleichungen mit den $r+1$ Unbekannten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}$

$$(76') \quad \begin{cases} y_0 = \varkappa(0, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 = \varphi(0) \\ y_0' = \varkappa'(0, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 = \varphi'(0) \\ y_0'' = \varkappa''(0, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 = \varphi''(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(r)} = \varkappa^{(r)}(0, \pi_2, \ldots, \pi_{r+1}) \cdot \pi_1 = \varphi^{(r)}(0) \end{cases}$$

geschrieben werden kann. Dieses ist aber wiederum nichts anderes als das System der Bedingungsgleichungen (64′) für $\varphi(h) = \pi_1 \cdot \varkappa(h)$ als Interpolationsfunktion. Damit gilt der dem vorangegangenen Satz über das erste Poukkasche Verfahren analoge Satz:

Das Bestimmen des Näherungswerts

$$(74') \qquad f(h) \sim -\frac{y_0}{K}\varkappa(h)$$

einer Funktion $f(h)$ durch das zweite Poukkasche Verfahren mittels der r-parametrigen «Abbildungsfunktion» $\psi(h) = K + \varkappa(h)$ — nur bei dieser Zerlegungsmöglichkeit von $\psi(h)$ ist das Verfahren durchführbar — ist nichts anderes als das rein oskulierende Interpolieren von $f(h)$ von der Stelle $h = 0$ aus mittels der $(r+1)$-parametrigen Interpolationsfunktion

$$(77) \qquad \varphi(h) = \gamma_1 \cdot \varkappa(h).$$

Wie bei der dem ersten Poukkaschen Verfahren zugeordneten Interpolationsfunktion γ_0 und γ_1 explizit durch die bekannten Ausgangswerte und die andern Parameter ausgedrückt werden können, ist dies auch bei (77) mit γ_1 der Fall, so dass (77) als Funktion

$$(77') \qquad \varphi(h) = -\frac{y_0}{K}\varkappa(h) = -y_0\frac{\varkappa(h)}{\varkappa(0)}$$

aufgefasst werden kann, die allein die r Parameter von $\varkappa(h)$ enthält, zu deren Bestimmung dann vom System (76′) die erste Gleichung wegfällt.

Als Beispiel zu diesem Satz wollen wir eine «Abbildungsfunktion» $\psi(h)$ — wie man an (77′) sofort erkennt, ist als Umkehrung von $\varphi(h)$ $\varkappa(h)$ nur bis auf einen willkürlichen Parameter bestimmt — zu der von *Hantsch* erwähnten Interpolationsfunktion

$$(65''') \qquad y = \varphi(h) = y_0\, e^{\frac{\gamma_1 h}{1+\gamma_2 h}}$$

angeben. Weil die Exponentialfunktion für $h = 0$ eins wird, lautet sie am einfachsten

$$\psi(h) = 1 - e^{\frac{\gamma_1 h}{1+\gamma_2 h}} = 1 - e^{\frac{\frac{y_0'}{y_0} h}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0'}{y_0} - \frac{y_0''}{y_0'}\right)}} .$$

e) Eine weitere Ausdehnung des Interpolationsansatzes; die Formeln von Palmqvist und Birger Meidell als Interpolationsformeln.

Wir nehmen eine letzte Ausweitung des Interpolationsansatzes in dem Sinne vor, dass wir nicht mehr die vorgelegte Funktion $y = f(x)$, sondern eine fest vorgegebene Funktion $Y = \psi(y)$ von ihr — diese ist dann eine mittelbar gegebene Funktion von x, $Y = \psi(f(x)) = F(x)$, — mittels der Funktion $Y = \Phi(x)$ interpolieren. Dabei stellen sich gleich zwei Fragen:

1. Kann diese Interpolation von $Y = \Psi(y) = \Psi(f(x))$ mittels $Y = \Phi(x)$ immer auch als Interpolation von $y = f(x)$ mittels einer Funktion $y = \varphi(x)$ gedeutet werden, und welcher Zusammenhang besteht dann zwischen $\Phi(x)$ und $\varphi(x)$?

2. Bietet diese Ausdehnung des Interpolationsansatzes überhaupt Interpolationsmöglichkeiten, die in anderer Fassung nicht auch schon aus den Ansätzen der direkten Interpolation hervorgehen, und wenn ja, in welchem Falle?

Die erste Frage findet ihre vollständige Beantwortung im folgenden Satze, in dem $y = \psi^{-1}(Y)$ die Umkehrfunktion von $Y = \psi(y)$ bedeuten soll: *Wird statt der vorgelegten Funktion $y = f(x)$ eine wohlbestimmte Funktion $Y = \Psi(y) = \Psi(f(x))$ von ihr interpoliert, und zwar mittels der Interpolationsfunktion $Y = \Phi(x)$, so ist die Interpolation identisch mit derjenigen von $y = f(x)$ mittels der Funktion*

$$y = \varphi(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x)) .$$

Hinsichtlich der zweiten Frage erkennen wir unmittelbar, dass dann neue Interpolationsansätze entstehen, wenn $\psi^{-1}(Y)$ sich nicht als geschlossener Ausdruck der geläufigen algebraischen und transzendenten Funktionen darstellen lässt. Im andern Fall wird einfach ein schon bekannter Interpolationsvorgang in einer andern Formu-

lierung geboten. Dies kann oft von praktischem Nutzen sein; soll z. B. $y = f(x)$ durch eine Interpolationsfunktion $\varphi(x) = e^{\Phi(x)}$ dargestellt werden, so wird man geläufiger $Y = ln\, f(x)$ oder $Y = \log f(x)$ mittels $Y = \Phi(x)$ interpolieren. Als Beispiel hierzu sei erwähnt, dass *Frucht* gerade von dieser Seite her zur Formel (67) gelangt ist, die wir auf dem Wege über die Formel (66) von *Hantsch* erhalten haben.

Betrachten wir die rein oskulierende Interpolation, so gehen die früher genannten Bedingungsgleichungen (64) in die folgenden über

$$\Phi(x_0) = Y_0,\ \Phi'(x_0) = Y_0',\ \ldots,\ \Phi^{(r)}(x_0) = Y_0^{(r)},$$

wo

$$Y_0^{(\varrho)} = \frac{d^\varrho}{d\,x^\varrho}\left(\psi\left(f(x)\right)\right)_{x=x_0}$$

aus den gegebenen Werten $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$, $\ldots$, $y_0^{(r)} = f^{(r)}(x_0)$ und den Werten der Ableitungen von $\psi(y)$ nach y an der Stelle $y = y_0$ zu berechnen ist.

Wir benützen hier die günstige Gelegenheit, auch noch die Wirkung zu untersuchen, die das Ändern des Arguments einer Funktion auf deren Interpolieren ausübt. Es gilt der Satz: *Wird die vorgelegte Funktion $y = f(x)$ als Funktion $y = F(X)$ eines neuen Arguments $X = \psi(x)$ aufgefasst, und bedeutet $x = \psi^{-1}(X)$ die Umkehrfunktion von $X = \psi(x)$, so ist das Interpolieren von $y = f(x)$ mittels der Funktion $y = \varphi(x)$ identisch mit dem Interpolieren von $y = F(X)$ mittels*

$$y = \Phi(X) = \varphi\left(\psi^{-1}(X)\right).$$

Betrachten wir wiederum besonders die rein oskulierende Interpolation, so ist zwar hinsichtlich der Bestimmungsgleichungen (64) kaum eine Bemerkung nötig, hingegen lohnt es sich, auf eine wohl zu beachtende Besonderheit hinzuweisen. Sobald wir, von den Stellen $x = x_0$, $X = X_0 = \psi(x_0)$ aus interpolierend, diese zum Ursprung der Koordinatensysteme machen und die vorgelegte Funktion $y = f(x) = F(X)$ als Funktion $y = f(x_0 + h) = \bar{f}(h) = F(X_0 + H) = \bar{F}(H)$ der Differenzen $h = x - x_0$, $H = X - X_0$ betrachten, besteht zwischen h und H nicht die Beziehung $H = \psi(h)$, sondern die folgende

$$H = \psi(x_0 + h) - \psi(x_0),\ \ h = \psi^{-1}(X_0 + H) - \psi^{-1}(X_0),$$

die in allgemeiner Weise nicht weiter vereinfacht werden kann.

Wollen wir dann beim Zinsfussproblem in einer Formel die Differenz $h = i' - i$ der Zinssätze durch die Differenz $\delta' - \delta$ der entsprechenden Zinsintensitäten oder die Differenz $v' - v$ der entsprechenden Abzinsungsfaktoren ersetzen, so besteht daher die Verknüpfung der genannten Argumente in den leicht zu errechnenden Transformationen

$$(78)\quad \begin{cases} h = -\dfrac{v'-v}{v^2+v(v'-v)} = -\dfrac{v'-v}{v\,v'} & v'-v = -\dfrac{h\,v^2}{1+h\,v} \\[2ex] h = \dfrac{e^{(\delta'-\delta)}-1}{v} = (1+i)\left(e^{(\delta'-\delta)}-1\right) & \delta'-\delta = ln\,(1+v\,h)\,. \end{cases}$$

Als erstes Beispiel zu den vorangegangenen Überlegungen deuten wir die beiden von *Birger Meidell* [19] gegebenen Formeln

$$(79)\qquad a'_x \sim e_x \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta'}{\delta}},$$

wo e_x wieder die abgekürzte mittlere Lebensdauer bedeutet, und

$$(28)\qquad a'_x \sim a_x\,(1+h\,v)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}$$

als Interpolationsformeln. *Meidell* hat sie aus gewissen Ungleichungen von Jensen [45] hergeleitet. Diese lauten

$$(80)\qquad \varphi\left(\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{r} b_\varrho\, x_\varrho}{\sum\limits_{\varrho=1}^{r} b_\varrho}\right) \lesseqgtr \frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{r} b_\varrho\, \varphi(x_\varrho)}{\sum\limits_{\varrho=1}^{r} b_\varrho},$$

wobei das obere oder untere Ungleichheitszeichen gilt, je nachdem die über dem Intervall, dem die beliebigen reellen Werte x_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$) entnommen sind, stetige Funktion $\varphi(x)$ durchwegs konvex oder konkav ist; b_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$) sind beliebige positive Werte. Wenn $\varphi(x)$ dagegen die lineare ganze Funktion ist, und nur in diesem Falle, besteht zwischen den beiden Seiten von (80) Gleichheit. Weicht

nun das Bild von $\varphi(x)$ innerhalb des zu betrachtenden Intervalls nicht stark von der Geraden ab, so darf (80) noch näherungsweise als Gleichung aufgefasst werden. Wählen wir als eine solche passende Funktion $\varphi(x) = x^{1+\varepsilon}$, setzen $1 + \varepsilon = \frac{\delta'}{\delta}$, $x_\varrho = v^\varrho$, womit $\varphi(x_\varrho) = v'^\varrho$ wird, und $b_\varrho = {}_\varrho p_x$, so folgt (79), während (28) sich aus dem Ansatz

$$b_\varrho = v^\varrho {}_\varrho p_x, \; x_\varrho = \varrho, \; \varphi(x) = (1 + h\,v)^{-x} = e^{-(\delta'-\delta)\,x}, \; \varphi(x_\varrho) = e^{(\delta'-\delta)\varrho} = \frac{v'^\varrho}{v^\varrho}$$

ergibt. Durch Zurückgehen auf die genaue Beziehung (80) können wir in wertvoller Weise *mathematisch exakt* bestimmen, ob die durch (79) und (28) gegebenen Näherungswerte zu gross oder zu klein ausfallen. Wie man leicht nachrechnet, *gibt* (79) *zu grosse oder zu kleine Näherungswerte, je nachdem* $\delta \gtrless \delta'$ *ist;* (28) *dagegen gibt immer zu kleine Näherungen.*

Durch Logarithmieren der beiden Gleichungen (79) und (28) zu einer beliebigen Basis b erhalten wir zunächst

$$(79') \qquad \frac{\log a'_x - \log e_x}{\delta'} = \frac{\log a_x - \log e_x}{\delta}$$

und

$$(28) \qquad \log a'_x = \log a_x - \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} \log(1 + h\,v) = \log a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{N_{x+1}} \log_b e \cdot ln\,(1 + h\,v).$$

Bedenken wir nun, dass e_x der Rentenbarwert zum Argument $\delta = 0$ ist, ferner

$$-\frac{S_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{1}{a_x} \cdot \log_b e = \frac{d \log a_x}{d\,\delta}$$

und nach (78) $ln\,(1 + h\,v) = \delta' - \delta$ wird, so erkennen wir, *dass die beiden Formeln* (79) *und* (28) *von Birger Meidell sich auf ein und dieselbe Interpolation beziehen, nämlich die lineare Interpolation des Logarithmus des Leibrentenbarwertes* a_x *mit* δ' *als Argument. Nur liegen im ersten Falle zwei verschiedene Interpolationsstellen, nämlich* $\delta = 0$ *und* δ *vor, während im zweiten von der Stelle* δ *aus rein oskulierend interpoliert wird.*

Als Hauptanwendung der Interpolation einer Funktion $Y = \Psi(y)$ der gegebenen Funktion $y = f(h)$ untersuchen wir das Verfahren, das *Palmqvist* [20] zur Herleitung seiner bekannten Formel

$$a'_x \sim a_x \left(1 + \frac{h\, v\, S_{x+1}}{1{,}5\, N_{x+1}}\right)^{-1{,}5} \tag{31}$$

gegeben hat, auf seinen Interpolationscharakter hin. In einer schon von *Palmqvist* selber bemerkten Verallgemeinerung besteht das Vorgehen im folgenden: Man setzt die vorgelegte Funktion $y = f(h)$ von der ihr Wert und die Werte ihrer r ersten sukzessiven Ableitungen an der Stelle $h = 0$, $y_0 = f(0)$, $y'_0 = f'(0)$, $\ldots$, $y_0^{(r)} = f^{(r)}(0)$ oder, mit andern Worten, die ersten $r + 1$ Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_r$ der Potenzreihe (29) numerisch gegeben sein sollen, einer Funktion $y = \psi(Y)$[1]) gleich, wodurch dann Y implizit als Funktion von h, $Y = Y(h)$ definiert wird, und entwickelt diese Funktion ihrerseits in die Taylorsche Reihe an der Stelle $h = 0$

$$Y(h) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} B_\varrho\, h^\varrho. \tag{81}$$

Durch Abbrechen dieser Reihe nach der r-ten Potenz von h — wie leicht zu überlegen ist, können wir die numerischen Werte der Koeffizienten B_ϱ gerade bis zu dieser Potenz angeben — erhalten wir für $Y(h)$ einen Näherungswert $Y_2(h)$, der, in $y = \psi(Y)$ eingesetzt, seinerseits einen Näherungswert $y_2 = \psi(Y_2)$ für $y = f(h)$ liefert.

Veranlassung zu dieser zunächst etwas merkwürdig und umständlich erscheinenden Vorschrift hat *Palmqvist* die Formel (20) von *Steffensen*, $a'_x = a_{\overline{n}|}(h)$, gegeben. Diese läuft nämlich darauf hinaus, zuerst die Dauer n der Zeitrente $a_{\overline{n}|}(h)$ als Funktion von h und i zu berechnen, und die hierbei gefundene Näherung für n, $n \sim a_x - h\,\alpha_x$ ist nichts anderes als die nach der ersten Potenz von h abgebrochene Entwicklung von n nach Potenzen von h. Das weitere Ziel, das Palmqvist mit dem dargelegten Ansatz verfolgt, besteht darin, $Y = \Psi(y)$ geeignet so zu wählen, dass die Annäherung für $y = f(h)$

$$y_2 \sim f(Y_2) = f(B_0 + B_1 h + \ldots + B_r h^r)$$

[1]) Um mit der von uns bisher benützten Bezeichnungsweise im Einklang zu bleiben, müssen wir auf die Originalbezeichnung von *Palmqvist* verzichten und «Y» statt seines «y» setzen.

besser wird als die durch die r-te Teilsumme der Potenzreihe (29) dargestellte $y_1 \sim b_0 + b_1 h + \ldots + b_r h^r$. Dies zu erreichen, ist für die praktisch wohl einzig in Frage kommenden Fälle $r = 1$ und $r = 2$ nicht schwer; ist $y = f(x)$ im Intervall $(0, h)$ eine monotone Funktion, so genügt es im ersten Fall, dass $\psi'(Y)$ im Intervall der zugehörenden Y-Werte nicht verschwindet, während im zweiten Fall noch dazukommt, dass $\psi''(Y)$ stets das entgegengesetzte Vorzeichen von $\psi'(Y)$ hat.

Fragen wir jetzt nach dem Sinn der Reihe (81), so erkennen wir, dass sie einfach die Taylorsche Entwicklung der Umkehrfunktion $Y = \Psi(y) = \psi^{-1}(y)$ von $y = \psi(Y)$ ist, und ihre Koeffizienten B_ϱ das $\frac{1}{\varrho!}$-fache der Ableitungen von $Y = \Psi(y) = \Psi(f(h))$ nach h sind. Erinnern wir uns des früher ausgesprochenen Satzes über das Abbrechen einer Potenzreihe, so können wir daher sagen:

Das vorgängig dargelegte Palmqvistsche Verfahren zur Erlangung eines Näherungswerts der Funktion $y = f(h)$ ist identisch mit der rein oskulierenden Interpolation der Funktion $Y = \Psi(y) = \Psi(f(h))$ von der Stelle $h = 0$ aus mittels des Polynoms r-ten Grades $Y = \Phi(h)$, wobei die gegebene Funktion $Y = \Psi(y)$ die Umkehrfunktion von $y = \psi(Y)$ ist.

Nach dem zu Beginn dieses Abschnittes gegebenen Satz können wir das Verfahren auch so deuten, dass *die vorgelegte Funktion $y = f(h)$ von der Stelle $h = 0$ aus rein oskulierend mittels der Funktion $y = \varphi(h) = \psi(\Phi(h))$ interpoliert wird.*

Palmqvist wählt als einfachsten Ansatz einer solchen Funktion

$$y = \frac{1}{Y^{k^*}},$$

wo k^* eine beliebige Konstante $\neq 0$ ist. Das Abbrechen von (81) nach der ersten Potenz von h bedeutet dann, dass die Interpolationsfunktion von $Y = \Psi(y)$ die lineare ganze, $Y = \gamma_0 + \gamma_1 h$ ist, somit wird $y = f(h)$ von $h = 0$ aus rein oskulierend interpoliert durch

$$y = \varphi(h) = (\tilde{\gamma}_0 + \tilde{\gamma}_1 h)^{k^*} = \gamma_0 (1 + \gamma_1 h)^{k^*},$$

und die Gleichungen (64′) zur Bestimmung der Konstanten γ_0, γ_1 lauten

$$y_0 = \varphi(0) = \gamma_0, \qquad y_0' = \varphi'(0) = \gamma_0 \gamma_1 k^*.$$

Zur Interpolation des Barwertes der lebenslänglichen Leibrente ergibt sich daher

$$a'_x = a_x \left(1 - \frac{S_{x+1}\, h\, v}{k^*\, N_{x+1}}\right)^{k^*}. \tag{82}$$

Rein ziffernmässig durchgeführte Prüfungen haben *Palmqvist* erwiesen, dass diese Formel die besten Ergebnisse liefert, wenn $k^* \sim -1{,}5$ gewählt wird. Auf den von *Poukka* bemerkten engen Zusammenhang zwischen seiner Konstanten $k \sim 0{,}84$ und k^* haben wir schon früher hingewiesen. *Esscher* [24] und später unabhängig von ihm und mit der Präzisierung, dass k^* nur in bezug auf das Zinsmass konstant sein muss, *Güttinger* [25] haben ihn in höchst einfacher Weise formulieren können. *Formel* (82) *ist die Lösung der durch das Poukkasche Verhältnis* k_x (41) *gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung*

$$\frac{S^{(2)}_{x+1}}{S_{x+1}} : \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} = \frac{\dfrac{d^2 a'_x}{di^2}}{2\,\dfrac{d\,a'_x}{di}} : \frac{\dfrac{d\,a'_x}{di}}{a'_x} = \frac{a_x \dfrac{d^2 a'_x}{di^2}}{2\left(\dfrac{d\,a'_x}{di}\right)^2} = k$$

zu den Anfangsbedingungen

$$a'_x = a_x(i) = a_x\,, \qquad \frac{d\,a'_x}{di} = \frac{d\,a_x}{di} = -\,v\,\frac{S_{x+1}}{D_x}\,.$$

Aus der mit dieser Differentialgleichung identischen

$$\left\{ a_x \frac{d^2 a_x}{di^2} - \left(\frac{d\,a_x}{di}\right)^2 \right\} \Bigg/ \left(\frac{d\,a_x}{di}\right)^2 = \frac{d}{di}\left(-\,\frac{a_x}{\dfrac{d\,a_x}{di}}\right) = 2\,k - 1$$

folgt nämlich

$$\frac{\dfrac{d\,a'_x}{di}}{a'_x} = \frac{d}{di}\, ln\, a'_x = \frac{1}{(2\,k-1)\,i' + \gamma_1} = \frac{d}{di}\,\frac{ln\,\{(2\,k-1)\,i' + \tilde{\gamma}_1\}}{-\,(2\,k-1)}$$

$$ln\, a'_x = ln\,\{\tilde{\gamma}_1 + (2\,k-1)\,i'\}^{-\frac{1}{2k-1}} + \tilde{\gamma}_0$$

$$a'_x = \tilde{\gamma}_0\,\{\tilde{\gamma}_1 + (2\,k-1)\,i'\}^{-\frac{1}{2k-1}} = \gamma_0 \left\{1 + \frac{\gamma_1\,(i'-i)}{k^*}\right\}^{-k^*}.$$

f) Die natürlichen Näherungen (Böhmer).

Meissner [2] hat als Abschluss seiner Zusammenstellung der wichtigsten Arbeiten über das Zinsfussproblem die von *Böhmer* [46] definierten n-ten «natürlichen Näherungen» einer analytischen Abhängigkeit $\Phi(x, y) = 0$ zur Lösung des Problems herangezogen. Doch haben sich keine neuen Formeln ergeben. Die erste dieser Näherungen ist einfach die Formel für die oskulierende Interpolation mittels der Geraden und ergibt im besondern Fall des Leibrentenbarwerts a'_x die Formel (27) von *Steffensen;* die zweite Näherung ist mit der Interpolationsformel (38) identisch, die für a'_x als zu interpolierender Funktion die erste Formel von *Poukka* (39) ergibt. Die weitern Näherungen aber kommen für das Zinsfussproblem schon deshalb praktisch nicht in Frage, weil sie die Kenntnis der dritten Ableitungen der Rentenbarwerte und somit der Grössen $S_x^{(3)}$ verlangen. Es sei nur noch vermerkt, dass es funktionentheoretisch-geometrische Gesichtspunkte waren, die *Böhmer* zur Einführung dieser Näherungen und ihrer Bezeichnung als «natürliche» veranlasst haben. Eine Deutung des Begriffes «natürlich» in dem Sinne, dass mit den natürlichen Näherungen besonders gute Näherungen zu erzielen seien, wäre daher verfehlt.

g) Die zweite Formel von Poukka als Interpolationsformel; eine Formel von Güttinger.

Nachdem wir von verschiedenen Standpunkten aus die *erste* Poukkasche Formel (39) als Interpolationsformel haben interpretieren können, liegt es nahe, zu fragen, ob auch eine Interpolationsvorschrift besteht, aus der für den Fall rein oskulierender Interpolation unmittelbar die *zweite* Poukkasche Formel

$$a'_x \sim a_x - a_x \frac{\dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}} h v}{1 + k \dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}} h v} \tag{42}$$

hervorgeht, in welcher k als eine fest vorgegebene Konstante aufzufassen ist. Eine solche kann in der Tat konstruiert werden; doch dürfen wir bei dem starken Eingriff, den wir durch das Konstantsetzen des Verhältnisses k_x (41) in der ersten Poukkaschen Formel vor-

genommen haben, nicht darüber erstaunt sein, von bisher nicht verwendeten und etwas künstlich gebildeten Vorstellungen Gebrauch machen zu müssen. Wir können (42) deuten als Formel der rein oskulierenden Interpolation mittels einer der mannigfachen Interpolationsfunktionen

$$y = \varphi(h) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 h}{1+\gamma_2 h}$$

die die «normalen» Bedingungen

$$\varphi(0) = y_0, \quad \varphi(h_1) = y_1 \text{ oder auch} \tag{83}$$

$$\varphi(0) = y_0, \quad \varphi'(0) = y_0' \tag{84}$$

erfüllen, und deren Koeffizienten γ_0, γ_1, γ_2 der zusätzlichen «Grenzbedingung»

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{\gamma_0(h_1) \cdot \gamma_2(h_1)}{\gamma_1(h_1)} = k \tag{85}$$

genügen. Gehen wir von den Voraussetzungen (84) aus, so ist in (85) die Limesbeziehung nicht nötig, es hat $\frac{\gamma_0 \gamma_2}{\gamma_1} = k$ selber zu gelten; beim Ausgehen von (83) wäre dagegen diese letztere Bedingung zu streng. Dies ersehen wir an einer Interpolationsformel, die *Güttinger* [26] gegeben hat. Sind die Rentenbarwerte $a_x(i_1)$ und $a_x(i_2)$ zu den beiden Zinssätzen i_1 und i_2 bekannt, und wird zur Abkürzung

$$\frac{i'-i_1}{i_2-i_1} = A\,, \quad \frac{i_2-i'}{i_2-i_1} = B\,, \quad A+B = 1\,,$$

$$a_x(i_2) - a_x(l_1) = D$$

gesetzt, so kann die für den Barwert $a_x' = a_x(i')$ zum Zinssatz i' durch lineare Interpolation gewonnene erste Annäherung

$$L = B\, a_x(i_1) + A\, a_x(i_2) = a_x(i_1) + A\, D$$

in einfacher Weise durch das Korrekturglied

$$0{,}84\; AB \frac{D^2}{L} = 0{,}84\, A\,(1-A) \frac{D^2}{L} = 0{,}84\, A - 0{,}84\, A^2 \frac{D^2}{L}$$

verbessert und a'_x durch

$$a'_x \sim L - 0{,}84\, A\, (1-\mathrm{A}) \cdot \frac{D^2}{L} \tag{86}$$

dargestellt werden. Ordnen wir (86), von dieser gedrängten, für den praktischen Gebrauch aber sehr nützlichen Gestalt abgehend, nach Potenzen von A,

$$a'_x = \frac{a_x^2(i) + 2\, a_x(i) \cdot AD + A^2 D^2 - (0{,}84\, A - 0{,}84\, A^2)\, D^2}{a_x(i_1) + AD}$$

$$= \frac{a_x(i_1) + \left\{ 2 - \dfrac{k\, D}{a_x(i_1)} \right\} D \cdot A + \dfrac{(1+k)\, D^2}{a_x(i_1)} A^2}{1 + \dfrac{D}{a_x(i_1)} A},$$

und ersetzen

$$AD = \frac{a_x(i_2) - a_x(i_1)}{i_2 - i_1} (i' - i_1) \text{ durch } C \cdot h\,,\ C = \frac{a_x(i_2) - a_x(i_1)}{i_2 - i_1} h = (i' - i_1)\,,$$

so können wir (86) oder

$$a'_x = \frac{a_x(i_1) + \left(2 - \dfrac{k\, D}{a_x(i_1)}\right) C \cdot (i' - i_1) + \dfrac{(1+k)\, C^2}{a_x(i_1)} (i' - i_1)^2}{1 + \dfrac{C}{a_x(i_1)} (i' - i_1)} \tag{86'}$$

deuten als Interpolation mittels einer der Funktionen

$$\overline{\varphi}(h) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 h + \gamma_2 h^2}{1 + \gamma_3 h}\,,$$

deren Koeffizienten aus den beiden «normalen» Bedingungen

$$\overline{\varphi}(0) = a_x(i_1)\,,\ \overline{\varphi}(h) = \overline{\varphi}(i_2 - i_1) = a(i_2)\,,$$

der «normalen Zusatzbedingung»

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_0 \gamma_2^2} = 1 + k$$

und der zusätzlichen «Grenzbedingung»

$$\lim_{i_2 \to i_1} \frac{\gamma_1(i_1, i_2)}{\gamma_0(i_1, i_2) \cdot \gamma_3(i_1, i_2)} = 2$$

hervorgehen.

Auf ein Weiterverfolgen der gegebenen oder ähnlicher Beziehungen können wir ruhig verzichten, da dies doch eher auf eine Spielerei hinauslaufen würde. Wir haben das erste Beispiel nur angeführt, um den tiefgehenden Unterschied zu zeigen, der zwischen den beiden Poukkaschen Formeln besteht. Mit dem zweiten Beispiel aber wollten wir nicht versäumen, auf die sehr nützliche Formel (86) von *Güttinger* hinzuweisen. Dass sie unmittelbar auch auf die Barwerte temporärer Leibrenten und Zeitrenten übertragen werden darf, dürfte aus den dargelegten Überlegungen hinlänglich hervorgehen. Es lässt sich dies aber auch aus der Herleitung von (86) nach *Güttinger* ablesen, wenn man bedenkt, dass innerhalb der dort nötigen Vernachlässigungen das Verhältnis $k_{x,n}$ (43) ruhig auch konstant 0,84 angenommen werden darf.

§ 6.

Der «metodo dei quozienti» von Frucht und Vellat.

Als Abschluss unserer Untersuchungen wollen wir noch eine ausführlichere Betrachtung einem Interpolationsansatz widmen, den die beiden italienischen Aktuare *Frucht* und *Vellat* [27] unter der Bezeichnung «*metodo dei quozienti*» in die versicherungsmathematische Literatur eingeführt haben. Wir hätten zwar die Elemente auch schon an früherer Stelle passend einflechten können, haben es aber vorgezogen, den ganzen Fragenkreis im Zusammenhang zur Sprache zu bringen.

Als Ausgangspunkt setzen wir voraus, es seien von der Funktion $y = f(x)$ die drei Funktionswerte

$$y_{-1} = f(x_{-1}), \quad y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1)$$

bekannt, die zu den um h äquidistanten Argumenten

$$(87\,a) \qquad x_{-1} = x_0 - h, \quad x_0, \quad x_1 = x_0 + h$$

gehören und — der Grund dieser Einschränkung wird sich später leicht einsehen lassen — alle gleichzeitig positiv oder negativ sind. Wollen wir das Verfahren zunächst allein dazu anwenden, die Werte der vorgelegten Funktion $y = f(x)$ in den äquidistanten Argumentstellen

$$(87\,b) \qquad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \ldots, \quad x_r = x_0 + rh$$

zu interpolieren, so liegt es nahe, die Annahme zu treffen, dass die Quotienten von je zwei aufeinanderfolgenden interpolierten Werten

$$(88\,a) \qquad q_2 = \frac{\varphi(x_2)}{\varphi(x_1)}, \quad q_3 = \frac{\varphi(x_3)}{\varphi(x_2)}, \ldots, \quad q_r = \frac{\varphi(x_r)}{\varphi(x_{r-1})}$$

eine arithmetische Folge erster Ordnung

$$(89\,a) \qquad q_2 = q_0 + 2d, \quad q_3 = q_0 + 3d, \ldots, \quad q_r = q_0 + rd$$

mit dem Anfangsglied q_0 und der Differenz d,

$$(89\,b) \qquad q_0 = \frac{y_0}{y_{-1}}, \quad q_1 = \frac{y_1}{y_0}, \quad d = q_1 - q_0 = \frac{y_1}{y_0} - \frac{y_0}{y_{-1}},$$

bilden sollen. In einfachster Weise ergeben sich dann die gesuchten Werte zu

$$(90\,a) \qquad f(x_r) \sim \varphi(x_r) = \varphi(x_0 + rh) = \prod_{\varrho=1}^{r} y_0 q_\varrho = \prod_{\varrho=1}^{r} y_0 (q_0 + \varrho d).$$

Für die praktische Anwendung wird man mit Vorteil statt von y_0 vom ebenfalls noch vorgegebenen Wert y_1 ausgehen, man erspart sich eine Multiplikation und erhält

$$(90\,a') \qquad \begin{cases} f(x_2) \sim q_2 y_1 = (q_1 + d)\, y_1 \\ f(x_3) \sim q_2 q_3 y_1 = (q_1 + d)(q_2 + 2d)\, y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_r) \sim \prod_{\varrho=1}^{r-1} y_1 (q_1 + \varrho d) \qquad r \geqq 2. \end{cases}$$

Dehnen wir die Definition der Quotienten (88 a) auch auf negative Indizes aus,

$$(88\,b)\qquad q_{-1} = \frac{\varphi(x_{-1})}{\varphi(x_{-2})}, \quad q_{-2} = \frac{\varphi(x_{-2})}{\varphi(x_{-3})}, \ldots, \quad q_{-r+1} = \frac{\varphi(x_{-r+1})}{\varphi(x_{-r})},$$

und setzen die Folge (93 a) nach rückwärts fort ($r > 0$)

$$(89\,b)\qquad q_{-1} = q_0 - d, \quad q_{-2} = q_0 - 2d, \quad \ldots, \quad q_{-r+1} = q_0 - (r-1)\,d,$$

so erhalten wir als Ergänzung zu (94 a) für die Interpolation von $f(x)$ in den Argumenten

$$(87\,c)\qquad x_{-2} = x_0 - 2\,h, \quad x_{-3} = x_0 - 3\,h, \quad \ldots, \quad x_{-r} = x_0 - r\,h$$

$$(90\,b)\qquad f(x_{-r}) = \varphi(x_{-r}) = \varphi(x_0 - r\,h) =$$

$$= \frac{y_0}{\prod\limits_{\varrho=0}^{r-1} q_{-\varrho}} = \frac{y_0}{\prod\limits_{\varrho=0}^{r-1} (q_0 - \varrho\,d)} = \frac{y_{-1}}{\prod\limits_{\varrho=1}^{r\;1} (q_0 - \varrho\,d)}.$$

Hinsichtlich der Frage, innerhalb welchen Bereiches die Formeln (90 a) und 90 b) überhaupt sinnvoll sind, bemerken wir vorläufig nur, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind. Ist d *positiv*, so ist die Interpolation von $f(x)$ für jedes Argument mit positivem Index, x_2, x_3, ..., möglich; für ein Argument mit negativem Index $-r$, $r > 0$, jedoch nur so lange, als $q_{-r+1} = q_0 - (r-1)\,d$ noch positiv bleibt, d. h.

$$(91)\qquad -r > -\frac{q_0}{d} - 1 = -\frac{q_1}{d}$$

ist. Bei *negativen* d dagegen sind die Verhältnisse gerade entgegengesetzt: unbeschränkte Interpolationsmöglichkeit von x_0 aus rückwärts, für ein $x_r = x_0 + r\,h$ mit $r > 0$ jetzt aber nur so weit, als $q_r = q_0 + r\,d$ positiv bleibt, d. h.

$$(92)\qquad r < \frac{q_0}{-d} = \frac{q_0}{|d|}$$

ist.

Lässt sich das Argument des gesuchten Funktionswerts nicht in die durch die Ausgangswerte festgelegte Folge äquidistanter Argumente einordnen, so versagt die gegebene einfache Darstellung der interpolierten Funktionswerte, und wir haben explizit auf die der verwendeten Interpolationsvorschrift zugrunde liegende Interpolationsfunktion $y = \varphi(x)$ zurückzugehen. Diese muss offenbar der Differenzengleichung

$$\frac{\varphi(x+3h)}{\varphi(x+2h} - 2\,\frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} + \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = 0 \tag{93}$$

genügen, die aus dem einfachern, die benützte Vorschrift deutlicher wiedergebenden Differenzenausdruck

$$\frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} - \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = d \tag{94}$$

durch Elimination der von den Anfangsbedingungen

$$\varphi(x_{-1}) = \varphi(x_0 - h) = y_{-1},\quad \varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = \varphi(x_0 + h) = y_1$$

abhängenden Konstanten d hervorgeht, und von der dann (94) das erste Integral bedeutet.

Wie sich unter Zurückgehen auf die Definitionsgleichung

$$\Gamma(z+1) - z\,\Gamma(z) = 0 \tag{95}$$

der Eulerschen Γ-Funktion leicht nachprüfen lässt, hat diese Differenzgleichung (93)

$$\varphi(x) = \gamma_0 \cdot \gamma_1^{\frac{x}{h}} \cdot \Gamma\left(\frac{x}{h} + \gamma_2\right) \cdot \Omega_h(x) \tag{96}$$

zur allgemeinen Lösung; wegen des Eulerschen Ergänzungssatzes

$$\Gamma(z)\,.\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

können wir diese Funktion auch in der Gestalt

$$(96') \qquad \varphi^*(x) = \frac{\gamma_0^* \cdot \gamma_1^{*\frac{x}{h}}}{\Gamma\left(-\frac{x}{h} + \gamma_2^*\right)} \cdot \Omega_h^*(x)$$

schreiben. Dabei bedeuten $\Omega h(x)$ bzw. $\Omega_h^*(x)$ vollkommen willkürliche periodische Funktionen von der Periode h, während $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ bzw. $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ Konstante sind, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Sie ergeben sich in unserm Falle als

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma_1 = -\gamma_1^* = \frac{y_1}{y_0} - \frac{y_0}{y_{-1}} = d \\
&\gamma_2 = \frac{y_1}{y_0 d} - \frac{x_0}{h} = \frac{q_1}{d} - \frac{x_0}{h}, \quad \gamma_2^* = -\frac{y_0}{y_{-1} d} + \frac{x_0}{h} = -\frac{q_0}{d} + \frac{x_0}{h} \\
&\gamma_0 = \frac{y_0}{d^{\frac{x_0}{h}} \cdot \Gamma\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right)} = \frac{y_0}{d^{\frac{x_0}{h}}\, \Gamma\left(\frac{q_1}{d}\right)}, \\
&\qquad y_0^* = \frac{y_0}{(-d)^{\frac{x_0}{h}}}\, \Gamma\left(-\frac{y_0}{y_{-1} d}\right) = \frac{y_0}{(-d)^{\frac{x_0}{h}}}\, \Gamma\left(-\frac{q_0}{d}\right)
\end{aligned}\right.$$

und führen zu den Darstellungen

$$(97) \qquad \varphi(x) = y_0 d^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right)}{\Gamma\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right)} \Omega_h(x) =$$

$$= y_0 d^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{q_1}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_1}{d}\right)} \Omega_h(x)$$

$$(97') \qquad \varphi^*(x) = y_0 (-d)^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(-\frac{y_0}{y_{-1}d}\right)}{\Gamma\left(-\frac{x-x_0}{h}+\frac{y_0}{y_{-1}d}\right)} \Omega_h^*(x) =$$

$$= y_0 (-d)^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(-\frac{q_0}{d}\right)}{\Gamma\left\{-\left(\frac{x-x_0}{h}-\frac{q_0}{d}\right)\right\}} \Omega_h^*(x),$$

wobei für ein und dieselbe Interpolationsfunktion $y = \varphi(x) = \varphi^*(x)$ zwischen den zugehörigen willkürlichen Funktionen $\Omega_h(x)$ und $\Omega_h^*(x)$ die Beziehung

$$\frac{\Omega_h^*(x)}{\Omega_h(x)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_0}{d}\right)\Gamma\left(\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_1}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_1}{d}\right)\Gamma\left(-\frac{q_0}{d}\right)} \cdot \frac{d^{\frac{x-x_0}{h}}}{(-d)^{\frac{x-x_0}{h}}}$$

$$= \frac{\Gamma\left\{1-\left(\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_1}{d}\right)\right\} \cdot \Gamma\left(\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_1}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_1}{d}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{q_1}{d}\right)} (-1)^{\frac{x-x_0}{h}}$$

$$= \frac{\sin\frac{q_1}{d}\pi}{\sin\left(\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_1}{d}\right)\pi} (-1)^{\frac{x-x_0}{h}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{q_0}{d}\pi}{\sin\left(\frac{x-x_0}{h}+\frac{q_0}{d}\right)\pi} (-1)^{\frac{x-x_0}{h}}$$

besteht.

Für die Wahl von $\Omega_h(x)$ bzw. $\Omega_h^*(x)$ ist es wieder nötig, zwischen den Fällen $d > 0$ und $d < 0$ zu unterscheiden; der Ausartung der beiden Fälle in $d = 0$ eine Bemerkung zu widmen, wird sich später eine geeignetere Gelegenheit bieten. Ist $d > 0$, so wählen wir $\Omega_h(x) = 1$ und verwenden (97):

(98)
$$\varphi(x) = y_0 d^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right)}{\Gamma\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right)} = y_0 d^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{q_1}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_1}{d}\right)};$$

für $d < 0$, womit dann $-d > 0$ ist, gehen wir hingegen von (97′) aus und setzen $\Omega_h^*(x) = 1$:

(99)
$$^*(x) = y_0 |d|^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{y_0}{y_{-1}|d|}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_0-x}{h} + \frac{y_0}{y_{-1}|d|}\right)} = y_0 |d|^{\frac{x-x_0}{h}} \frac{\Gamma\left(\frac{q_0}{|d|}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_0-x}{h} + \frac{q_0}{|d|}\right)}.$$

Durch Verwendung der Grundgleichung (95) der Γ-Funktion lässt sich leicht bestätigen, dass für Argumente x, die um Vielfache von h von x_0 abstehen, jede der beiden Formeln (98) und (99) mit dem Ansatz (90 a/b) identisch ist. Was aber die durch (91) und (92) gegebenen Schranken für die Anwendbarkeit des «metodo dei quozienti» anbetrifft, so finden sie ihr Gegenstück und ihre tiefere Begründung darin, dass die Γ-Funktion, die im Endlichen nie null wird, nur für $z > 0$ einen zusammenhängenden, stetigen Kurvenzweig besitzt, während sie in $z = 0$ und allen negativ-ganzzahligen Argumentstellen unstetig wird. Hierdurch bleiben (98) und (99) als Interpolationsfunktionen nur vernünftig, solange $\frac{x-x_0}{h} + \frac{q_1}{d} > 0$ bzw. $-\frac{x-x_0}{h} + \frac{q_0}{|d|} > 0$ sind, was wir auch in der Gestalt

(91′)
$$\frac{x-x_0}{h} > -\frac{q_1}{d},$$

wenn $d > 0$, und

$$\frac{x - x_0}{h} < \frac{q_0}{|d|} = -\frac{q_0}{d}, \tag{92'}$$

wenn $d < 0$ ist, schreiben können. Bedenken wir nun, dass $\vartheta = \frac{x - x_0}{h}$ angibt, um welches Vielfache von h x von x_0 absteht, so erkennen wir in diesen beiden Beziehungen (91′) und (92′) nichts anderes als (91) und (92) wieder, nur mit dem Unterschied, dass jetzt ϑ im Gegensatz zu r als stetige Veränderliche betrachtet wird.

Fragen wir uns nach der Ursache der Asymmetrie in der Anwendbarkeit der Formeln (90 a/b) oder (98) und (99), so müssen wir sie darin erkennen, dass die Bildung der Quotienten q_ϱ schon asymmetrisch ist: stets wird der Funktionswert höhern Arguments zu demjenigen des um h niedrigern Arguments ins Verhältnis gesetzt. Wir können daher die bisherigen Entwicklungen zutreffend als den «metodo dei quozienti» mit «*aufsteigender*» *Quotientenbildung* präzisieren, und es ist dann naheliegend, ihm einen solchen mit «*absteigend*» gebildeten Quotienten entgegenzusetzen zu versuchen. Wir haben in diesem Fall

$$\tilde{q}_2 = \frac{\tilde{\varphi}(x_1)}{\tilde{\varphi}(x_2)}, \quad \tilde{q}_3 = \frac{\tilde{\varphi}(x_2)}{\tilde{\varphi}(x_3)}, \quad \ldots, \quad \tilde{q}_r = \frac{\tilde{\varphi}(x_{r-1})}{\tilde{\varphi}(x_r)}$$

$$\tilde{q}_{-1} = \frac{\tilde{\varphi}(x_{-2})}{\tilde{\varphi}(x_{-1})}, \quad q_{-2} = \frac{\tilde{\varphi}(x_{-3})}{\varphi(x_{-2})}, \quad \ldots, \quad \tilde{q}_{-r+1} = \frac{\tilde{\varphi}(x_{-r})}{\tilde{\varphi}(x_{-r+1})}$$

zu definieren, entsprechend (89 b)

$$\tilde{q}_1 = \frac{y_0}{y_1}, \quad \tilde{q}_0 = \frac{y_{-1}}{y_0}, \quad \tilde{d} = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_0 = \frac{y_0}{y_1} - \frac{y_{-1}}{y_0}$$

festzusetzen und zu verlangen, dass diese Quotienten wiederum eine arithmetische Folge erster Ordnung bilden:

$$\tilde{q}_2 = \tilde{q}_0 + 2\tilde{d}, \quad \tilde{q}_3 = \tilde{q}_0 + 3\tilde{d}, \quad \ldots, \quad \tilde{q}_r = \tilde{q}_0 + r\tilde{d}.$$

Damit werden wir zu den interpolierten Funktionswerten

$$
\begin{aligned}
f(x_r) \sim \tilde{\varphi}(x_r) = \tilde{\varphi}(x_0 + rh) &= \frac{y_0}{\prod\limits_{\varrho=1}^{r} \tilde{q}_\varrho} = \frac{y_0}{\prod\limits_{\varrho=1}^{r} (\tilde{q}_0 + \varrho \tilde{d})} = \frac{y_1}{\prod\limits_{\varrho=1}^{r-1} (\tilde{q}_1 + \varrho \tilde{d})} \\
f(x_{-r}) \sim \tilde{\varphi}(x_{-r}) = \tilde{\varphi}(x_0 - rh) &= y_0 \prod_{\varrho=0}^{r-1} \tilde{q}_\varrho = y_0 \prod_{\varrho=1}^{r-1} (\tilde{q}_0 - \varrho \tilde{d}) = y_{-1} \prod_{\varrho=1}^{r-1} (\tilde{q}_0 - \varrho \tilde{d})
\end{aligned}
\tag{100}
$$

geführt mit den formelentsprechenden Anwendungsbereichen, wie sie für (90 a/b) festgestellt worden sind. Indem aber aus

$$
\tilde{d} = \frac{y_0}{y_1} - \frac{y_{-1}}{y_0} = \frac{y_{-1}}{y_1}\left(\frac{y_0}{y_{-1}} - \frac{y_1}{y_0}\right) = -\frac{y_{-1}}{y_1} d = -\frac{d}{q_0 q_1} = -\tilde{q}_0 \tilde{q}_1 d
$$

hervorgeht, dass $\tilde{d}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie d hat, haben wir durch diese «absteigende» Bildung von Quotienten erreicht, dass der auf ihnen aufgebaute Metodo dei quozienti gerade da unbeschränktes Interpolieren grundsätzlich zulässt, wo der auf «aufsteigend» gebildeten Quotienten fussende eine Beschränkung vorsieht, wofür dann umgekehrt der erstere in der Anwendung beschränkt bleibt, wenn der letztere unbeschränkte Gültigkeit des Ansatzes vorsieht.

Dieses Ergebnis bestätigt sich auch bei der allgemeinen Behandlung der dem Ansatz (100) zugrunde liegenden Interpolationsfunktion. Da die Überlegungen den früher durchgeführten Überlegungen vollkommen analog verlaufen, können wir uns kurz fassen und nur die Hauptergebnisse anführen. Jetzt von der Differenzgleichung

$$
\frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+3h)} - 2\frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x+2h)} + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+h)} = 0
$$

mit dem ersten Integral

$$
\frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x+2h)} - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+h)} = \tilde{d}
$$

ausgehend, ist die Interpolationsfunktion $\tilde{\varphi}(x)$ von der allgemeinen Gestalt

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1^{-\frac{x}{h}} \Gamma\left(-\frac{x}{h} + \tilde{\gamma}_2\right) \cdot \tilde{\Omega}_h(x) \tag{101}$$

und

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \frac{\tilde{\gamma}_0^* \tilde{\gamma}_1^{*-\frac{x}{h}}}{\Gamma\left(\frac{x}{h} + \tilde{\gamma}_2^*\right)} \tilde{\Omega}_h^*(x)\,; \tag{101'}$$

die Konstanten ergeben sich zu

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_1 = -\tilde{\gamma}_1^* = \dfrac{y_{-1}}{y_0} - \dfrac{y_0}{y_1} = -\tilde{d} \\[2ex] \tilde{\gamma}_2 = \dfrac{x_0}{h} - \dfrac{y_{-1}}{y_0 \tilde{d}} = \dfrac{x_0}{h} - \dfrac{\tilde{q}_0}{\tilde{d}}\,; \quad \tilde{\gamma}_2^* = \dfrac{y_0}{y_1 \tilde{d}} - \dfrac{x_0}{h} = \dfrac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}} - \dfrac{x_0}{h} \\[2ex] \tilde{\gamma}_0 = \dfrac{y_0 (-\tilde{d})^{\frac{x_0}{h}}}{\Gamma\left(-\dfrac{\tilde{q}_0}{\tilde{d}}\right)} \qquad\qquad \tilde{\gamma}_0^* = y_0 \tilde{d}^{\frac{x_0}{h}} \Gamma\left(\dfrac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}}\right). \end{cases}$$

Ist $\tilde{d} > 0$, so gehen wir jetzt von (101′) aus und wählen $\Omega_h^*(x) = 1$:

$$\tilde{\varphi}(x) = y_0 \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}}\right)}{\tilde{d}^{\frac{x-x_0}{h}} \Gamma\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}}\right)}, \tag{102}$$

für $\tilde{d} < 0$ dagegen wird unter Berücksichtigung von $\tilde{\Omega}_h(x) = 1$ aus (101)

$$\tilde{\varphi}(x) = y_0 \frac{\Gamma\left(\frac{x_0 - x}{h} + \frac{\tilde{q}_0}{|\tilde{d}|}\right)}{|\tilde{d}|^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \Gamma\left(\frac{\tilde{q}_0}{|\tilde{d}|}\right)}. \tag{103}$$

Für (102) ergibt sich als Anwendungsbereich

$$\frac{x - x_0}{h} > -\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}}, \tag{104}$$

für (103)

$$\frac{x - x_0}{h} < \frac{\tilde{q}_0}{|\tilde{d}|} = -\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{d}}, \tag{105}$$

welche beiden Bedingungen (91′) und (92′) formal wieder vollkommen entsprechen. Indem aber

$$\frac{\tilde{q}_0}{\tilde{d}} = -\frac{q_1}{d}, \quad \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}} = -\frac{q_0}{d}$$

gilt, spiegelt sich in der daraus hervorgehenden inhaltlichen Verschiedenheit von (104) und (105) gegenüber (91′) und (92′) nochmals die Inversion der Anwendungsbereiche der einander entsprechenden Interpolationsfunktion $\varphi(x)$ und $\tilde{\varphi}(x)$, $\varphi^*(x)$ und $\tilde{\varphi}^*(x)$ wieder. Für diese Paare einander entsprechender Funktionen gelten schliesslich noch die Verhältnisse

$$\frac{\varphi(x)}{\tilde{\varphi}(x)} = \left(d^2 \frac{y_{-1}}{y_1}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{d} + \frac{x - x_0}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_1}{d} - \frac{x - x_0}{h}\right)} = \left(\tilde{d}^2 \frac{y_1}{y_{-1}}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{q}_0}{|\tilde{d}|} + \frac{x - x_0}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{q}_1}{|\tilde{d}|} - \frac{x - x_0}{h}\right)}$$

$$\frac{\varphi^*(x)}{\tilde{\varphi}^*(x)} = \left(d^2 \frac{y_{-1}}{y_1}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q_0}{|d|} + \frac{x - x_0}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_0}{|d|} - \frac{x - x_0}{h}\right)} = \left(\tilde{d}^2 \frac{y_1}{y_{-1}}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}} + \frac{x - x_0}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{d}} - \frac{x - x_0}{h}\right)}.$$

Gehen wir dazu über, die dem «metodo dei quozienti» sinngemäss entsprechende Formel für die rein oskulierende Interpolation zu bestimmen, so genügt es, den Grenzübergang $h \to 0$ an einer einzigen der gegebenen vier Interpolationsformeln, etwa an (98) zu vollziehen. Hierbei müssen wir beachten, dass mit $h \to 0$ auch die «Konstante» $d = d(h)$ nach null strebt, und zwar mindestens wie h^2, was unmittelbar aus der für sie noch möglichen Darstellung

$$d = d(h) = \frac{y_1}{y_0} - \frac{y_0}{y_{-1}} = \frac{y_1 y_{-1} - y_0^2}{y_0 y_{-1}} = \frac{y_{-1}(y_{-1} - 2y_0 + y_1) - (y_0 - y_1)^2}{y_0 y_{-1}} =$$

$$= \frac{y_{-1} \Delta^2 f(x_{-1}) - (\Delta f(x))^2}{y_0 y_{-1}} = h^2 \cdot \psi(x_{-1}, h) \cdot \frac{1}{y_{-1} y_0}$$

hervorgeht, indem nach einem elementaren und bekannten Satz über den Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differentialquotienten

$$\lim_{h \to 0} \Psi(x_{-1}, h) = \lim_{h \to 0} \left\{ y_{-1} \frac{\Delta^2 f(x_{-1})}{h^2} - \left(\frac{\Delta f(x_{-1})}{h} \right)^2 \right\} = \left\{ y_0 \frac{d^2 f(x)}{d x^2} - \left(\frac{d f(x)}{d x} \right)^2 \right\}_x$$

wird, sobald nur $f''(x)$ für $x = x_0$ existiert und stetig ist. Auf Grund dieser Erkenntnis und unter Verwendung der Stirlingschen Formel

$$\Gamma(u) = u^{u - \frac{1}{2}} e^{-u} \sqrt{2\pi}\, e^{\mu(u)},$$

$$\mu(u) = \frac{\vartheta}{12 u} \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

formen wir $\dfrac{\varphi(x_0)}{y_0}$ zunächst in der folgenden Weise um:

$$\frac{\varphi(x)}{y_0} = d^{\frac{x - x_0}{h}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right)} \left(\frac{x - x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} \right)^{\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\mu\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right)}}{e^{-\frac{y_1}{y_0 d}} \left(\frac{y_1}{y_0 d} \right)^{\left(\frac{y_1}{y_0 d} - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\mu\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right)}}$$

$$= d^{\frac{x - x_0}{h}} \cdot \frac{\left(\frac{y_1}{y_0 d} \right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot e^{-\frac{x-x_0}{h}} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} \right)^{\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\mu\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right)}}{\left(\frac{y_1}{y_0 d} \right)^{\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\mu\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right)}}$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot e^{-\frac{x-x_0}{h}} \cdot \left(1 + \frac{(x - x_0)\, y_0 d}{h\, y_1} \right)^{\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d} - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{\left\{\mu\left(\frac{x-x_0}{h} + \frac{y_1}{y_0 d}\right) - \mu\left(\frac{y_1}{y_0 d}\right.\right.}$$

$$= \left(1 + \frac{y_1 - y_0}{y_0}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \left(1 + h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} \cdot \left\{e^{-\frac{x-x_0}{h}} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(1 + h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right)^{\frac{y_1 y_{-1}}{h^2 \psi\,(x_{-1}, h)}}\right\} \cdot \left(1 + h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot\, e^{\mu\left\{\frac{1}{h^2}\left(h\,(x-x_0) + \frac{y_1 y_{-1}}{\psi\,(x_{-1}, h)}\right)\right\}} \cdot e^{-\mu\left\{\frac{1}{h^2}\,\frac{y_1 y_{-1}}{\psi\,(x_{-1}, h)}\right\}}.$$

Von den drei letzten dieser sechs Faktoren von $\frac{\varphi\,(x)}{y_0}$ erkennen wir unmittelbar, dass sie für $h \to 0$ nach 1 streben; zur Ermittlung der Limites der drei andern Faktoren empfiehlt es sich, zuerst die Grenzwerte für $h \to 0$ ihrer Logarithmen zu bestimmen. Diese ergeben sich zu

$$\lim_{h \to 0} ln\left(1 + \frac{y_1 - y_0}{y_0}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x_0}{h}\, ln\left(1 + \frac{y_1 - y_0}{y_0}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - x_0}{h} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho-1} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{y_1 - y_0}{y_0}\right)^{\varrho} = (x - x_0) \lim_{h \to 0} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho-1} \frac{h^{\varrho-1}}{\varrho} \left(\frac{y_1 - y_0}{h \cdot y_0}\right)^{\varrho} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h \cdot y_0}\right) = \frac{f'\,(x_0)}{y_0},$$

$$\lim_{h \to 0} ln\left(1 + h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right)^{\frac{x-x_0}{h}} = (x - x_0) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\, ln\left(1 + h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right) =$$

$$= (x - x_0) \lim_{h \to 0} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{h} (-1)^{\varrho-1} \frac{1}{\varrho} \left(h\,\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right)^{\varrho} =$$

$$= (x - x_0) \lim_{h \to 0} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho-1} \frac{h^{\varrho-1}}{\varrho} \left(\frac{(x - x_0)\,\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}}\right) =$$

$$= (x - x_0)^2 \lim_{h \to 0} \frac{\psi\,(x_{-1}, h)}{y_1\,y_{-1}} = (x - x_0)^2 \left\{\frac{f''\,(x_0)}{y_0} - \left(\frac{f'\,(x_0)}{y_0}\right)^2\right\},$$

$$\lim_{h \to 0} ln \left\{ e^{-\frac{x-x_0}{h}} \cdot \left(1 + h \frac{(x-x_0)\,\psi(x_{-1}, h)}{y_1\, y_{-1}}\right)^{\frac{y_1\, y_{-1}}{h^2\, \psi(x_{-1}, h)}} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{x-x_0}{h} + \frac{1}{h^2} \frac{y_1\, y_{-1}}{\psi(x_{-1}, h)} \right) \sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho-1} \frac{1}{\varrho} \left(h \frac{(x-x_0)\,\psi(x_{-1}, h)}{y_1\, y_{-1}} \right)^{\varrho} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{\varrho=2}^{\infty} (-1)^{\varrho-1} \frac{h^{\varrho-2}}{\varrho} (x-x_0)^{\varrho} \left(\frac{\psi(x_{-1}, h)}{y_1\, y_{-1}} \right)^{\varrho-1} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{2} (x-x_0)^2 \frac{\psi(x_{-1}, h)}{y_1\, y_{-1}} =$$

$$= -\frac{(x-x_0)^2}{2} \left\{ \frac{f''(x_0)}{y_0} - \left(\frac{f'(x_0)}{y_0} \right)^2 \right\}.$$

Damit wird aber, wenn in gewohnter Weise y_0' und y_0'' die als vorgegeben zu betrachtenden Werte $y_0' = f'(x_0)$ und $y_0'' = f''(x_0)$ der ersten und zweiten Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bedeuten,

$$\lim_{h \to 0} \varphi(x) = y_0\, e^{\left\{ (x-x_0) \frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 \left(\frac{y_0''}{y_0} - \left(\frac{y_0'}{y_0} \right)^2 \right) \right\}}.$$

Der «metodo dei quozienti» geht für rein oskulierendes Interpolieren in dasjenige mittels der Exponentialfunktion

(106) $$y = \varphi(x) = \gamma_0\, e^{(\gamma_1 (x-x_0) + \gamma_2 (x-x_0)^2)} = \bar{\gamma}_0\, e^{(\bar{\gamma}_1 x + \bar{\gamma}_2 x^2)}$$

über.

Dieses Ergebnis befremdet zunächst etwas, denn für jede (endliche) Spanne h genügt die angegebene Exponentialfunktion der Differenzengleichung

(107) $$\frac{\varphi(x+3h)}{\varphi(x+2h)} \Bigg/ \frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} = \frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} \Bigg/ \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)}$$

oder

(107′) $$\frac{\varphi(x+3h)\,\varphi(x+h)}{[\varphi(x+2h)]^2} - \frac{\varphi(x+2h)\,\varphi(x)}{[\varphi(x+h)]^2} = 0$$

mit dem ersten Integral

$$\frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} \Big/ \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x+2h)\,\varphi(x)}{[\varphi(x+h)]^2} = d^*$$

und nicht der Gleichung (93). Der scheinbare Widerspruch klärt sich aber leicht auf: die beiden Differenzengleichungen 3. Ordnung gehen mit $h \to 0$ in ein- und dieselbe Differentialgleichung 3. Ordnung

$$(108) \qquad \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)} - 3\,\frac{\varphi''(x)\cdot\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2} + 2\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^3 = 0$$

über, die auch in der Gestalt

$$\frac{d^3\, ln\, \varphi(x)}{d\,x^3} = 0$$

geschrieben werden kann und offensichtlich (106) zum Integral besitzt. Mittels der bekannten Beziehungen $\varphi(x+h) = \varphi(x) + \Delta\,\varphi(x)$, $\varphi(x+2h) = \varphi(x) + 2\,\Delta\,\varphi(x) + \Delta^2\,\varphi(x)$, $\varphi(x+3h) = \varphi(x) + 3\,\Delta\,\varphi(x) + 3\,\Delta^2\,\varphi(x) + \Delta^3\,\varphi(x)$ können wir nämlich durch eine elementare Umformung, die wir der Kürze halber auslassen wollen, (93) und (107) in die Gestalt

$$(93''a/107''a) \quad \frac{(\varphi(x))^2\,\Delta^3\,\varphi(x) - 3\,\varphi(x)\,\Delta^2\,\varphi(x)\cdot\Delta\,\varphi(x) + 2\,(\Delta\,\varphi(x))^3 - R}{K} = 0$$

überführen, wobei für (97) K zu $K_1 = [\varphi(x+2h)\,\varphi(x+h)\,\varphi(x)]$ und R zu

$$(93''b) \quad R_1 = \Delta^3\,\varphi(x)\cdot\Delta\,\varphi(x) - 2\,[\Delta^2\,\varphi(x)]^2\,\varphi(x) + [\Delta\,\varphi(x)]^2\,\Delta^2\,\varphi(x)$$

anzusetzen ist, während für (111″) $K = K_2 = \dfrac{[\varphi(x+2h)\cdot\varphi(x+h)]^2}{\varphi(x)}$

und

(107″ b)

$$R = R_2 = \Delta^3 \varphi(x)\,[\Delta\,\varphi(x)]^3 - [\Delta^2 \varphi(x)]^3 \varphi(x) +$$
$$3\,\{\Delta^2 \varphi(x)\,[\Delta\,\varphi(x)]^3 - 2\,[\Delta^2\,\varphi(x)]^2\,\Delta\,\varphi(x) + \Delta^3 \varphi(x)\,[\Delta\,\varphi(x)]^2\,\varphi(x)\}$$
$$+ 3\,\{\Delta^3 \varphi(x) \cdot \Delta\,\varphi(x) \cdot [\varphi(x)]^2 - \Delta^2 \varphi(x)\,[\Delta\,\varphi(x)]^2 \varphi(x) -$$
$$- [\Delta^2 \varphi(x)]^2\,[\varphi(x)]^2 + [\Delta\,\varphi(x)]^4\}$$

bedeutet. Dividieren wir dann die Differenzengleichungen (93″ a/107″ a) durch h^3 und lassen anschliessend $h \to 0$ streben, so geht der ausgeschriebene Teil in der Tat in das $K = (\varphi(x))^3$-fache von (108) über, während in beiden Fällen die Reste R verschwinden.

Analog dem «metodo dei quozienti» von *Frucht* und *Vellat*, dessen Interpolationsvorschrift die Differenzengleichung (93) ist, können wir auch von der Differenzengleichung (107) aus eine «*Quotientenmethode*» entwickeln, die in gewissem Sinn diese Bezeichnung mit noch grösserm Recht verdient und gestattet, für Argumente x_r, die einer Argumentenfolge (87 a/b) angehören, die Funktionswerte $y = f(x_r)$ aus den drei gegebenen Werten $y_{-1} = f(x_{-1})$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ mittels der Funktion (106) $\varphi(x) = \gamma_0\, e^{\gamma_1 x + \gamma_2 x^2}$ ohne Zuhilfenahme einer Logarithmentafel zu interpolieren. Unter Verwendung der Bezeichnungsweise (88) — man ersieht leicht, dass die Differenzengleichung (107) sowohl die «aufsteigende» wie die «absteigende» Quotientenbildung kennzeichnet, und dass es daher ausreicht, allein die erstere zu betrachten — lautet hiernach unsere Vorschrift (107)

$$\frac{q_r}{q_{r-1}} = \ldots = \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_0}{q_{-1}} = \ldots = \frac{q_{-r+1}}{q_{-r}} = q\,,$$

wo q durch

$$q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{y_1 / y_0}{y_0 / y_{-1}} = \frac{y_1\, y_{-1}}{y_0^2}$$

gegeben ist. Multiplizieren wir alle diese Doppelquotienten q, so erhalten wir

$$q_r = q_0\, q^r = q_1\, q^{r-1}\,,$$

multiplizieren wir hierauf alle Einzelquotienten q_ϱ ($\varrho = 0, 1, \ldots r$ bzw. $\varrho = 0, -1, -2, \ldots, -r+1$), so folgen die Endformeln

(109)

$$\prod_{\varrho=1}^{r} q_\varrho = \frac{\varphi(x_r)}{y_0} = q_1^r q^{1+2+\ldots+(r-1)} = q_1^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} = q_0^r q^{\frac{r(r+1)}{2}}$$

$$\prod_{\varrho=1}^{r} q_{-\varrho} = \frac{y_0}{\varphi(x_{-r})} = \frac{q_0^r}{q^{1+2+\ldots+(r-1)}} = \frac{q_0^r}{q^{\frac{r(r-1)}{2}}} = \frac{q_1^r}{q^{\frac{r(r+1)}{2}}}$$

$$f(x_r) \sim \varphi(x_r) = \varphi(x_0 + rh) = y_0 \prod_{\varrho=1}^{r} q_\varrho = y_0 q_1^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} = y_0 q_0^r q^{\frac{r(r+1)}{2}}$$

$$f(x_{-r}) \sim \varphi(x_{-r}) = \varphi(x_0 - rh) = \frac{y_0}{\prod_{\varrho=1}^{r} q_{-\varrho}} = \frac{y_0 q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{q_0^r} = \frac{y_0 q^{\frac{r(r+1)}{2}}}{q_1^r}.$$

Die Anwendungsmöglichkeit dieser Formel ist grundsätzlich unbegrenzt, es bestätigt sich hierin noch einmal, dass die Bildung einer Folge «absteigender» Quotienten $\tilde{q}'$ überflüssig ist.

Veranlassung zur Ansetzung der Differenzengleichungen 3. Ordnung (93) und (107) zur Definition von Interpolationsfunktionen hat der Umstand gegeben, dass — wenigstens für die praktisch vorkommenden Spannen — die einfachere Differenzengleichung 2. Ordnung

$$\frac{\varphi(x+2h)}{\varphi(x+h)} - \frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = 0 \tag{110}$$

mit dem ersten Integral

$$\frac{\varphi(x+h)}{\varphi(x)} = Q \tag{111}$$

auch nicht annähernd von $f(x)$ erfüllt wird, während dann durch die getroffenen Erweiterungen in den Voraussetzungen über $\varphi(x)$ dieses die Funktion $f(x)$ befriedigend anzunähern vermag. Anstatt nun die *Differenzengleichung* (110), die sich als ausgearteter Sonderfall $d = 0$ bzw. $q = 1$ der Gleichungen (93) und (107) erweist, in den durchgeführten Weisen zu *erweitern*, können wir auch die zu interpolierende *Funktion* so zu *ändern* und in eine Funktion $y = F(x)$ überzuführen suchen, dass die aus den vorgegebenen Werten $y_{-1} = f(x_{-1})$, $y = f(x_0)$,

$y_1 = f(x_1)$ hervorgehenden Werte $Y_{-1} = F(x_{-1})$, $Y_0 = F(x_0)$, $Y_1 = F(x_1)$ von $y = F(x)$ (110) befriedigen, wodurch dann eine Interpolation von $y = F(x)$ mittels der Lösungsfunktion von (110) statthaft erscheint. Am einfachsten ist es, $f(x)$ durch eine additive Konstante c zu «korrigieren», also

$$F(x) = f(x) - c$$

aus dem Ansatz (110) heraus zu interpolieren; dabei muss c wegen der Bedingung

$$\frac{Y_1}{Y_0} - \frac{Y_0}{Y_{-1}} = \frac{y_1 - c}{y_0 - c} - \frac{y_0 - c}{y_{-1} - c} = 0$$

zu

$$c = \frac{y_1 y_{-1} - y_0^2}{y_1 - 2 y_0 + y_{-1}}$$

gewählt werden [1]). Indem wir die willkürliche periodische Funktion $\Omega_h(x)$ in der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung (114) vorweg gleich 1 setzen, hat dann, wie man selber leicht nachprüft, (114) die Funktion

$$Y = \varphi(x) = \alpha Q^x = \bar{\alpha} Q^{(x-x_0)} = e^{\gamma_1 + \gamma_2 x} = e^{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 (x - x_0)}$$

zur Lösung, dabei ist Q die im ersten Integral (111) von (110) enthaltene Konstante und ergibt sich aus unseren Anfangswerten $Y_{-1} = y_{-1} - c$, $Y_0 = y_0 - c$, $Y_1 = y_1 - c$ zu

$$Q = \frac{y_1 - y_0}{y_0 - y_{-1}},$$

während $\bar{\alpha}$ offensichtlich zu $\bar{\alpha} = y_0$ angesetzt werden muss. Zu $f(x)$ selber wieder zurückkehrend, können wir sagen, dass der dargelegte

[1]) Dass der Nenner in c um ein Erhebliches von 0 abweicht, ist selbstverständlich. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde schon die aus der Differenzengleichung $\Delta^2 f(x) = 0$ hervorgehende Parabel 2. Grades als Interpolationsfunktion taugen und die ganze vorliegende Bemühung sich erübrigen.

Ansatz einfach die Interpolation von $y = f(x)$ mittels der Interpolationsfunktion

$$(112) \qquad y = \varphi(x) = \gamma_0 + e^{\gamma_1 + \gamma_2 x} = \bar{\gamma}_0 + e^{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 (x - x_0)}$$

bedeutet. Praktisch wirkt sich das Verfahren, das auch schon von *Frucht* und *Vellat* [27] entwickelt und als «*metodo dei quozienti ragguagliati*» (Methode der ausgeglichenen Quotienten) bezeichnet worden ist, so aus: Sei zunächst x_r wieder ein Argument der Folge (87), wo r eine beliebige ganze Zahl bedeuten kann, so erhält man

(113 *a*)

$$F(x_r) = F(x_0 + rh) \sim \varphi(x_0 + rh) = Y_0 Q^r = Y_{-1} Q^{r+1} = Y_1 Q^{r-1},$$

wo $Y_0 = y_0 - c$, $Y_{-1} = y_{-1} - c$, $Y_1 = y_1 - c$ ist, und daraus weiter

$$(113\,b) \qquad f(x_r) = F(x_0 + rh) + c \sim \varphi(x_0 + rh) + c = (y_0 - c)\, Q^r + c = \\ = (y_{-1} - c)\, Q^{r+1} + c = (y_1 - c)\, Q^{r-1} + c.$$

Wie bei unserer «Quotientenmethode» können wir also auch im vorliegenden Fall im Prinzip ohne Verwendung einer Logarithmentafel die Werte zu den um ganzzahlige Vielfache von h abstchenden Argumenten interpolieren. Für ein beliebiges $x = x_0 + \vartheta h$ bleibt formal die Formel die gleiche,

$$(113') \qquad f(x) = f(x_0 + \vartheta h) = F(x_0 + \vartheta h) + c \sim \varphi(x_0 + \vartheta h) + c = \\ = Y_0 Q^{\vartheta} + c = (y_0 - c)\, Q^{\vartheta} + c.$$

Q^{ϑ} ist aber jetzt entweder aus ganzzahligen Potenzwerten von Q geeignet zu interpolieren oder logarithmisch zu berechnen.

Dass, wie *Frucht* [3] festgestellt hat, beim Übergang zur rein oskulierenden Interpolation die Formel von *Christen* (52), herauskommt, ist nicht erstaunlich, denn (112) ist ja gerade die Interpolationsfunktion, die dieser Formel zugrunde liegt.

Wie aus den der Originalarbeit [27] beigegebenen Zahlenbeispielen deutlich hervorgeht, gibt für die Interpolation der Leibrentenbarwerte der «metodo dei quozienti» bessere Näherungen, als wie sie aus den gleichen Ausgangsgrössen mittels der gewöhnlichen parabolischen

Interpolation hervorgehen. Die Autoren des «metodo» haben daher auch einen analytischen Beweis für diese Feststellung versucht, der noch von *Mazzoni* [28] in einigen Punkten ergänzt worden ist. Doch hat schon *Broggi* [30] darauf aufmerksam gemacht, dass die gezogenen Schlüsse nicht stichhaltig sind und das angeführte Verhalten sehr einfach durch die Feststellung plausibel wird, dass die dem «metodo» zugrunde liegende Interpolationsfunktion ein ähnlicheres Verhalten zur gegebenen Funktion zeigt als die Parabel zweiten Grades. Mit diesem Hinweis wollen wir uns ebenfalls begnügen und darauf verzichten, nach einem einwandfreien analytischen Beweis zu suchen. Ein solcher würde doch immer sich auf Feststellungen stützen müssen, die nur durch erhebliche numerische Rechnungen zu gewinnen wären, und der dabei zu erbringende Arbeitsaufwand würde in keinem Verhältnis zum erzielten Ergebnis stehen. Numerische Nachprüfungen zeigen im übrigen noch, dass die Güte der Annäherungen, die aus den verschiedenen Quotientenbildungen hervorgehen, für alle von der gleichen *Grössenordnung* ist. Es lag uns mit unserer Untersuchung auch gar nicht daran, die von *Frucht* und *Vellat* gemachten Ansätze so zu erweitern und zu ergänzen, dass bessere Ergebnisse zu erreichen wären. Wir wollten vielmehr nur zeigen, wie die bei einem genauern Hinsehen sich aufwerfenden Fragen nach dem möglichen Anwendungsbereich der Ansätze zu beantworten und zu begründen sind und in welcher Weise eine Abänderung und Erweiterung der Ansätze möglich ist.

Zusammenfassung und Schlusswort.

Wir blicken zurück und fassen die hauptsächlichen Ergebnisse der zwei getrennte Teile umfassenden Untersuchung zusammen. Nach einer kurzen Darstellung der Grundlagen zur Berechnung von Versicherungswerten und der Derivierten der Versicherungswerte nach den Zinsmassen gaben wir eine gedrängte *Zusammenstellung der wichtigsten Lösungsvorschläge zum Zinsfussproblem bei der Leibrente.* Wohl bestehen schon derartige Zusammenfassungen, und der Grundgedanke des zur Anwendung gekommenen, äusserst wertvollen Ordnungsprinzips ist keine vollständige Neuschöpfung. Wir sind uns dieser beiden Tatsachen bewusst, glauben aber doch, die Ausfüllung einer Lücke vollzogen zu haben, die sich vor allem dem in der Praxis stehenden Aktuar nützlich zeigen wird. Er findet hier die Beziehungen von allem für ihre Anwendung unnötigen Beiwerk der oft nur zufälligen Herleitung entkleidet und kann dank der befolgten Anordnung ohne grosses Suchen entscheiden, welche der Formeln ihm bei seiner Kenntnis an Ausgangswerten grundsätzlich zur Verfügung stehen, oder umgekehrt, welche Werte bekannt sein müssen, damit eine bestimmte Formel verwendbar wird. Als Ausdruck für die Güte der mit den einzelnen Formeln zu erreichenden Darstellung soll eine im *Anhang* gegebene Übersicht durchgerechneter Zahlenbeispiele dienen.

Im zweiten und Hauptteil unserer Arbeit, der im dritten Kapitel seine Darstellung gefunden hat, wandten wir die *Theorie der Interpolation* mit einer Veränderlichen allgemein auf den Leibrentenbarwert als Funktion des Zinsmasses an und deuteten die Lösungen des Zinsfussproblems, welche Kommutationszahlen enthalten und in der vorangegangenen Zusammenstellung als vierte Lösungsgruppe bezeichnet worden sind, als Interpolationsformeln. Im besondern richteten wir unser Augenmerk auf die Verfahren, die *Poukka* (zwei Verfahren) und *Palmqvist* zur Herleitung geeigneter Lösungen des Zinsfussproblems entwickelt haben. Wir konnten von ihnen zeigen, und zwar in weitgehender sinngemässer Verallgemeinerung, dass sie *stets durch rein oskulierende Interpolationen ersetzbar sind, welche im allgemeinen einfacher und natürlicher zur gesuchten Näherungsformel führen als die genannten Verfahren.* Damit haben wir die erste von uns auf-

geworfene Frage vollständig erledigt: *die von Poukka und Palmqvist entwickelten Verfahren können nicht als besondere Quellen neuer Näherungen angesehen werden.* Als zweite Frage gaben wir vor, zu entscheiden, ob und wie die für die Leibrentenbarwerte gefundenen Näherungswerte auch unmittelbar auf andere Versicherungswerte ausgedehnt werden können. Sie beantwortet sich sehr leicht: *die Ausdehnungsmöglichkeit ist für die Lösungen der dritten und vierten Gruppe* unserer Zusammenstellung ohne weiteres gegeben; an Stelle der Leibrentenbarwerte und ihrer Derivierten sind die dem bezüglichen Versicherungswert entsprechenden Werte einzusetzen; eine systematische Zusammenstellung der Derivierten der Versicherungswerte schickten wir schon in § 2 unserer Arbeit voraus.

Eine letzte Frage lässt sich noch stellen und ist einer kurzen Erwähnung wert. Die Darstellung einer Ausscheideordnung durch ein Ausscheidegesetz kann als Interpolation der Werte der Ordnung mittels der das Gesetz bestimmenden Funktion aufgefasst werden. Kann daher das Lösen des Zinsfussproblems unter der Annahme, die Ordnung gehorche einem bestimmten Ausscheidegesetz, auch als Interpolieren gedeutet werden, und in welcher Weise hat die Deutung zu erfolgen? Wir verzichten darauf, auch noch dieser Frage in der vorliegenden Arbeit nachzugehen.

Anhang.

Die im folgenden zur Darstellung gelangenden Zahlentabellen bilden eine Ergänzung zu der in unserer Arbeit — vornehmlich in deren § 3 — gegebenen Zusammenstellung von Näherungsformeln zum Zinsfussproblem im Hinblick auf deren praktische Anwendung. Sie wollen einzig und allein ein Urteil darüber ermöglichen, welche *Grössenordnung* die in den einzelnen Näherungsformeln steckenden Fehler — absolut und relativ in $^0/_{00}$ des vorgelegten Rentenbarwerts — besitzen. Hierbei sei noch im besondern auf folgende Punkte aufmerksam gemacht.

1. Im Gegensatz zu *Meissner* [2] und *Hantsch* [5], deren Zahlenmaterial den Barwert der lebenslänglichen Leibrente betrifft und auf welches nachdrücklich hingewiesen sei, geben wir hier Zahlenwerte für die in der Praxis der privaten Lebensversicherung viel häufiger vorkommenden temporären Leibrenten, und zwar nehmen wir die Barwerte $a_{x,\overline{60-x}|}$ der *vorschüssig* zahlbaren temporären Leibrenten zum festen Schlussalter $s = x + n = 60$ und den Beginnaltern $x = 20, 30, 40, 50$ (Dauern $n = 40, 30, 20, 10$). Diese Werteauswahl reicht vollkommen aus, sie lässt die *Grössenordnung* der einschlägigen Fehler auch für andere Alterszusammenstellungen genügend gut beurteilen.

2. Wir legen unsern Berechnungen die schweizerische Volkssterbetafel SM 1921—1930 [47] und einen Ausgangszinsfuss von $3\frac{1}{2}$ % zugrunde; wo Rentenbarwerte zu noch andern Zinssätzen benötigt werden, ziehen wir diejenigen der 4- und $4\frac{1}{2}$ %igen Verzinsung heran. Da die von *Hantsch* und *Meissner* und den Originalverfassern der einschlägigen Formeln auf Grund anderer Sterbetafeln erhaltenen Werte den unsrigen im wesentlichen entsprechen, darf vermutet werden, dass mit Ausnahme der Formeln, die ganz besondere Bedingungen an die Ausscheideordnung stellen, die Änderung der Sterbetafel sich auf die *Grössenordnung* der Fehler der Näherungsformeln nicht auswirken wird. Indem wir dann die Rentenbarwerte zu 3 % und $2\frac{1}{2}$ % Verzinsung berechnen, gehen unsere Rechnungen in der Richtung, welche der jüngst vergangenen und noch gegenwärtigen Wirtschaftslage

(sinkende Zinssätze) entspricht. Da die Rentenbarwerte aber für kleine Zinssätze sich am stärksten ändern, sind unsere Fehlerwerte als eher ungünstig zu bewerten und können daher auch gut als *obere Fehlerschranken* aufgefasst werden.

3. Der heutigen Tendenz folgend, die Rentenbarwerte mit 4 Dezimalstellen anzugeben, haben auch wir *(neuberechnete) Rentenbarwerte mit 4 Dezimalstellen* verwendet, was bei der Beurteilung der Fehlergrössen bei Verwendung anderstelliger Rentenbarwerte gebührend zu beachten ist.

4. Unter dem positiv oder negativ zu nehmenden absoluten Fehler verstehen wir die Abweichung des Näherungswerts vom richtigen Wert, d. h. mit andern Worten die Korrektur, die am Näherungswert anzubringen ist, damit sich der richtige Wert ergibt.

5. Wir berücksichtigen die folgenden Formeln: (14) (Borch), (15) (Weber), (16) (Lenzi; in unserm Fall liegt Extrapolation vor), (27) (Steffensen), (30) (van Dorsten), (40) (Poukka I), (42) (Poukka II, $k_{x,n}$ = konstant = 0,84) (44) (Poukka mit den Werten (43) für $k_{x,n}$ [1]) von Hantsch), (31) (Palmqvist), (50) (Palmqvist mit abgestuften Werten (43) für $k_{x,n}$ [1])), (67) (Frucht), (63) (Frucht; $i_1 = 0{,}04$, $i_2 = 0{,}035$), (100) (Metodo dei quozienti, «absteigend» gebildete Quotienten).

---

[1]) Hierbei war zu beachten, dass beim vorschüssigen Rentenbarwert die im Nenner von (40) zu verwendenden Hilfswerte nicht mehr $k_{x+1,n}$ waren, sondern als $k_{x+1,n-1} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$ anzusetzen sind.

Übergang zu $i' = 0{,}025$

x	(14) (Borch)		(15) (Weber)		(16) (Lenzi)		(27) (Steffensen)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	+ 0,0170	0,72	— 0,0482	2,04	— 0,0208	0,88	+ 0,3472	14,71
30	+ 0,0074	0,38	— 0,0294	1,50	— 0,0129	0,66	+ 0,1834	9,32
40	+ 0,0022	0,15	— 0,0146	1,00	— 0,0027	0,18	+ 0,0687	4,69
50	+ 0,0002	0,02	— 0,0042	0,50	— 0,0004	0,05	+ 0,0111	1,33

x	(30) (van Dorsten)		(40) (Poukka I)		(42) (Poukka II)		(43) (Poukka, verbessert nach Hantsch)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	+ 0,0310	1,31	— 0,0101	0,43	— 0,0202	0,86	— 0,0107	0,45
30	+ 0,0131	0,67	— 0,0034	0,17	— 0,0117	0,59	— 0,0041	0,21
40	+ 0,0038	0,26	— 0,0005	0,03	— 0,0032	0,22	— 0,0006	0,04
50	+ 0,0003	0,04	— 0,0001	0,01	+ 0,0003	0,04	— 0,0001	0,01

x	(31) (Palmqvist)		(50) (Palmqvist, verbessert nach Hantsch)		(67) (Frucht)		(63) (Frucht)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	— 0,0135	0,57	— 0,0072	0,31	— 0,0142	0,60	— 0,0135	0,57
30	— 0,0087	0,44	— 0,0026	0,13	— 0,0093	0,47	— 0,0040	0,20
40	— 0,0022	0,16	— 0,0003	0,02	— 0,0026	0,18	— 0,0007	0,05
50	+ 0,0004	0,05	— 0,0001	0,01	+ 0,0003	0,04	— 0,0003	0,04

x	(100) (metodo dei quozienti)		Genaue Werte
	abs. F.	rel. F. (‰)	
20	+ 0,0121	0,51	23,6120
30	+ 0,0034	0,17	19,6867
40	+ 0,0007	0,05	14,6363
50	— 0,0005	0,06	8,3614

Übergang zu $i' = 0{,}03$

x	(14) (Borch)		(15) (Weber)		(16) (Lenzi)		(27) (Steffensen)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	+ 0,0096	0,44	— 0,0213	0,97	— 0,0057	0,26	+ 0,0826	3,76
30	+ 0,0041	0,22	— 0,0135	0,73	— 0,0033	0,15	+ 0,0444	2,39
40	+ 0,0014	0,10	— 0,0068	0,48	— 0,0007	0,05	+ 0,0169	1,20
50	+ 0,0001	0,01	— 0,0021	0,26	— 0,0002	0,02	+ 0,0026	0,32

x	(30) (van Dorsten)		(40) (Poukka I)		(42) (Poukka II)		(43) (Poukka, verbessert nach Hantsch)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	+ 0,0035	0,16	— 0,0012	0,05	— 0,0036	0,16	— 0,0014	0,06
30	+ 0,0016	0,09	— 0,0004	0,02	— 0,0023	0,12	— 0,0006	0,03
40	+ 0,0007	0,05	+ 0,0002	0,01	— 0,0004	0,03	+ 0,0002	0,01
50	— 0,0001	0,01	— 0,0001	0,01	0,0000	0	— 0,0001	0,01

x	(31) (Palmqvist)		(50) (Palmqvist, verbessert nach Hantsch)		(67) (Frucht)		(63) (Frucht)	
	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)	abs. F.	rel. F. (‰)
20	— 0,0026	0,12	— 0,0012	0,05	— 0,0029	0,13	— 0,0022	0,10
30	— 0,0018	0,10	— 0,0004	0,02	— 0,0020	0,11	— 0,0005	0,03
40	— 0,0002	0,01	+ 0,0002	0,01	— 0,0004	0,03	+ 0,0001	0,01
50	+ 0,0000	0	— 0,0001	0,01	0,0000	0	0,0000	0

x	(100) (metodo dei quozienti)		Genaue Werte
	abs. F.	rel. F. (‰)	
20	+ 0,0027	0,12	21,9410
30	+ 0,0006	0,03	18,5848
40	+ 0,0003	0,03	14,0645
50	— 0,0003	0,04	8,1951

Literatur.

Abkürzungen.

ak	Aktuaren.
avw	Archief voor de Verzekerings-Wetenschap.
biaf	Bulletin de l'Institut des Actuaires français.
bvm	Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete, Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft.
giia	Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari.
jia	Journal of the Institute of Actuaries.
mvöu	Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker.
mvsv	Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.
sa	Skandinavisk Aktuarietidskrift.
vdvw	Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft.

A. Zeitschriftenaufsätze, die sich unmittelbar auf das Zinsfussproblem beziehen.

[1] *Christen, H.:* Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. mvsv Heft 25, 1930, S. 251—325 und Diss. Bern (Univ.) 1930.

[2] *Meissner, W.:* Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. bvm 4. Band (10. Heft), 1939, S. 467—491.

[3] *Frucht, R.:* Sulle relazioni che esistono fra due tipi di formule proposte per il calcolo approssimato delle rendite vitalizie. giia a. 7, 1936, S. 327—339.

[4] *Poukka, K.:* Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses. sa Jahrgang 1923, S. 137—152.

[5] *Hantsch, E.:* Das Zinsfussproblem der Leibrenten. Diss. Techn. Hochsch. Dresden 1938. 64 S.

[6] *Berger, A.:* Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses. sa Jahrgang 1932, S. 78—81.

[7] *Achard, M. A:* Note sur le changement du taux dans le calcul des annuités viagères. biaf, tome 2, Nr. 7, 1892, S. 38—42.

[8] *Meikle, J.:* jia, vol. III, 1853, S. 325.

[9] *Van Dorsten, R. H.:* Benaderingsformules bij verandering van Rentevoet. avw Band 4, 1900, S. 284—313.

[10] *Wyss, H.:* Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem. sa Jahrgang 1932, S. 278—285.

[11] *Borch, Fr.:* Betrachtungen über die Darstellung von abgekürzten Leibrenten mittels Zeitrenten. sa Jahrgang 1933, S. 73—93.

[12] *Weber, L.:* Sur une méthode de calcul rapide de valeurs approchées des annuités viagères temporaires. biaf tome 27, Nr. 104, 1921, S. 17—26.

[13] *Lenzi, E.:* Problemi sulle rendite vitalizie e loro risoluzione. giia a. 2, 1931, S. 481—492.

[14] *Steffensen, J. F.:* On certain inequalities between mean values, and their applications to actuarial problems. sa Jahrgang 1918, S. 82—97.

[15] *Blaschke, E.:* Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz-Makeham. mvöu Heft 9, 1903, S. 3—20.

[16] *Gram, J. P.:* Om Makehams Dodelighedsformel og dens Anvendelse paa ikke normale Liv. ak, 1904, S. 57—90, dazu Auszug in Deutsch S. 91—97.

[17] *Crosato, P.:* Sulla variazione delle rendite al variare del tasso d'interesse. giia, a. 4, 1933, S. 10—25.

[18] *Fontaine, L.:* Note sur le calcul des rentes viagères, à différents taux, par interpolation. biaf tome 2, Nr. 7, 1892, S. 34—37.

[19] *Meidell, Birger:* Note sur quelques inégalités et formules d'approximation. sa Jahrgang 1918, S. 180—198.

[20] *Palmqvist, R.:* Sur une méthode d'approximation applicable à certains problèmes actuariels. sa Jahrgang 1921, S. 152—178.

[21] *Christen, H.:* Ein Beitrag zum Zinsfussproblem, sa Jahrgang 1930, S. 205 bis 218.

[22] *Palmqvist, R.:* Sur un problème d'interpolation actuariel, sa Jahrgang 1926, S. 164—171.

[23] *Franckx, E.:* Sur une méthode d'interpolation, sa Jahrgang 1936, S. 271—280.

[24] *Esscher, I.:* On some methods of interpolation, Forsäkringsaktiebolaget Skandia 1855—1930, 1930, II. S. 85—106.

[25] *Güttinger, P.:* Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem, mvsv Heft 30, 1935, S. 13—22.

[26] *Güttinger, P.:* Die Interpolation von Rentenbarwerten, mvsv Heft 34, 1937, S. 17—22.

[27] *Frucht, R.,* und *Vellat, A.:* Un metodo semplice di estrapolare le rendite vitalizie secondo il tasso d'interesse, giia a. 2, 1931, S. 475—480.

[28] *Mazzoni, P.:* Sul metodo dei quozienti per estrapolare le rendite vitalizie, giia a. 3, 1932, S. 182—186.

[29] *Broggi, U.:* Sul metodo dei quozienti per estrapolare le rendite vitalizie, giia a. 5, 1934, S. 14—18.

B. Weitere zur Verwendung gekommene Aufsätze und Lehrbücher versicherungsmathematischen und rein mathematischen Inhalts.

[30] *Braun, H.:* Urkunden und Materialien zur Geschichte der Lebensversicherung und Lebensversicherungstechnik, vdvw Heft 58, 1937.

[31] *Berger, A.:* Mathematik der Lebensversicherung. Wien 1939.

[32] *Dormoy, E.:* Théorie mathématique des assurances sur la vie, 2 vol., Paris 1878.

[33] *Friedli, W.:* Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen, mvsv Heft 13, 1918, S. 115—274, und Diss. Univ. Bern 1918.

[34] *Thalmann, W.:* Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten, mvsv Heft 26, 1931, S. 173—201.

[35] *Jörgensen, N. R.:* Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. Jena 1912.

[36] *Pincherle, S.:* Quelques remarques sur les fonctions déterminantes, Acta mathematica Bd. 36, 1913, S. 269—280.

[37] *Doetsch, G.:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

[38] *Landau, E.:* Über einen Satz von Tschebyschef, Mathematische Annalen, Bd. 61, 1905, S. 527—550.

[39] *Landau, E.:* Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, 1906, S. 151—218.

[40] *Knopp, K.:* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1931 (3. Aufl.).

[41] *Lindelöf, E.:* Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques. Acta societatis scientiarum fennicae, Tom. XXIV, 1898, Nr. 7 (39 S.).

[42] *Ostrowski, A.:* Über Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. 1, S. 327—350. 1922.

[43] *Thiele, T. N.:* Différences réciproques, Oversigt over de k. d. Videnskabernes Selskabs Forhandlinger (Stzber. Akad. Kopenhagen), 1906, S. 153—171.

[44] *Thiele, T. N.:* Interpolationsrechnung, Leipzig 1909.

[45] *Jensen, J. L. W. V.:* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta mathematica Bd. 30, 1906, S. 175—193.

[46] *Boehmer, P. E.:* Die Inversoren. Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, 84. Bd., 1932, S. 37—50.

C. Tafeln.

[47] *Eidgenössisches Versicherungsamt:* Grundzahlen und Nettowerte für die schweizerischen Volkssterbetafeln 1921—1930 und 1929—1932. Bern 1936. und

dasselbe, Zinsfüsse 2½% und 3%. Bern 1939.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 205

1. Kapitel.

§ 1. Die Grundlagen zur Berechnung von Versicherungswerten 208
a) Die Zinsmasse 208
b) Diskontinuierliche und kontinuierliche Betrachtungsweise 209
c) Die Kommutationszahlen 210
d) Ausscheidegesetze 211
§ 2. Die Ableitungen der Versicherungswerte nach den Zinsmassen . . . 215
a) Rentenbarwerte 215
b) Barwerte von Kapitalversicherungen, Prämien, Reserven 221

2. Kapitel.

§ 3. Die verschiedenen Verfahren zur Lösung des Zinsfussproblems bei der Leibrente 222
a) Der Einteilungsgrundsatz der Zusammenstellung 222
b) I. Gruppe: Verfahren unter Zuhilfenahme von Zeitrentenbarwerten 222
c) II. Gruppe: Verfahren, die sich auf das Bestehen eines formelmässigen Ausscheidegesetzes gründen 228
d) Gemeinsame Merkmale der Verfahren der beiden ersten Gruppen; Unterschiede gegenüber denjenigen der beiden noch folgenden Gruppen 232
e) III. Gruppe: Verfahren, welche die Kenntnis des gleichen Versicherungswertes zu mehreren, verschiedenen Zinssätzen verlangen 233
f) IV. Gruppe: Verfahren, welche neben dem Rentenbarwert zu einem andern Zinsfuss noch die entsprechenden Kommutationswerte verwenden. 235
§ 4. Die Problemstellung unserer weitern Untersuchungen 248

3. Kapitel.

§ 5. Das Zinsfussproblem bei der Leibrente als Interpolationsaufgabe . . 249
a) Der Begriff des Interpolierens; Interpolation mit einfachen Interpolationsstellen 249
b) Oskulierendes Interpolieren. 252
c) Die rein oskulierende Interpolation 256
d) Die beiden Poukkaschen Verfahren und ihr Zusammenhang mit der rein oskulierenden Interpolation 260
e) Eine weitere Ausdehnung des Interpolationsansatzes; die Formeln von Palmqvist und Birger Meidell als Interpolationsformeln . . . 268
f) Die natürlichen Näherungen (Böhmer) 275
g) Die zweite Formel von Poukka als Interpolationsformel; eine Formel von Güttinger 275
§ 6. Der «metodo dei quozienti» von Frucht und Vellat 278
Zusammenfassung und Schlusswort 298
Anhang 300
Tabellen 302
Literatur. 304