Über eine Anwendung des Zeichenbewahrungssatzes

Autor(en): **Schärf, Henryk**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **42 (1942)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966913

Über eine Anwendung des Zeichenbewahrungssatzes.

Von *Henryk Schärf,* z. Z. in Zürich.

1. Im vorigen Hefte hat Herr Hans Christen [1]) einen einfachen Beweis für einen von Lidstone [2]) für gemischte Versicherungen gefundenen Satz mitgeteilt. Gleichzeitig hat er gezeigt, dass dieser Satz auch für terme-fixe-Versicherungen gilt.

Früher hatte Herr Professor Insolera [3]) denselben Satz für lebenslängliche Todesfallversicherungen mit der kontinuierlichen Methode abgeleitet, ohne jedoch seine Identität mit dem Lidstoneschen Satz zu gewahren [4]).

In allen diesen Fällen wird mehr oder weniger deutlich eine Voraussetzung gemacht, derzufolge die Risikokapitalien der betrachteten Versicherung mit der Zeit abnehmen.

In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, dass gerade diese Voraussetzung für den Lidstoneschen Satz wesentlich, hingegen die Versicherungsform belanglos ist. Diese Verallgemeinerung ergibt sich sofort durch Spezialisierung eines vom Verfasser abgeleiteten «Zeichenbewahrungssatzes» [5]), der ein kräftiges Kriterium zur Fest-

[1]) H. Christen: «Eine Bemerkung zum Thema: Das Deckungskapital der gemischten und der terme-fixe-Versicherung bei Änderung der Sterblichkeit.» Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 41, Heft 2.

[2]) Lidstone: Changes in Pure Premium Policy-Values consequent upon variations in the Rate of Interest or the Rate of Mortality or upon the introduction of the Rate of Discontinuance. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. XXXIX, 1905, S. 209 ff.

[3]) F. Insolera: «Die Prämienreserven und die Veränderungen der Sterblichkeit in der Zeit», Blätter für Versicherungsmathematik, Bd. II (1931) und Bd. IV (1939).

[4]) Diese hier festgestellte Identität ist nicht nur Herrn Insolera, sondern auch Herrn Vasmoen entgangen, in dessen Arbeit: «Über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve» (Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1935) wohl die Lidstonesche Abhandlung zitiert, gleichzeitig aber der erwähnte Satz von Insolera angefochten wurde.

[5]) H. Schärf: «Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 41, Heft 2, S. 190.

stellung von Fällen liefert, in denen eine Reservevariation ihr Vorzeichen innerhalb [1]) der Versicherungsdauer bewahrt.

2. Den *Lidstoneschen* Satz formulieren wir folgendermassen [2]):

Werden die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_{x+t} $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$ der gemischten Versicherung eines x-jährigen auf n Jahre entsprechend um $\delta q_{x+t} > 0$ ermässigt, so steigen sämtliche Deckungskapitalien innerhalb der Versicherungsdauer, falls die Zahlen δq_{x+t} $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$:

a) konstant sind,

b) fallen.

Die analoge Aussage für den Fall einer Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeiten ergibt sich sofort durch Vertauschung der ursprünglichen und geänderten Versicherung.

Der Christensche Beweis setzt dabei die Ungleichung [3])

$$a_{x+k+1, \overline{n-k-1}|} > a_{x+k+2+\lambda, \overline{n-k-2-\lambda}|}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-2; \; \lambda=0, 1, \ldots, n-k-2)$$

voraus, aus der leicht das Fallen der Risikokapitalien abzuleiten ist.

Insolera beweist für lebenslängliche Todesfallversicherungen mit gleichbleibenden bis Versicherungsablauf zahlbaren Prämien, dass «wenn die Sterblichkeit im gleichen Alter mit der Zeit abnimmt und die Sterblichkeitsverminderung gleichzeitig mit der Alterszunahme abnimmt, die mathematische Reserve unter sonst gleichen Umständen mit der Zeit zunimmt». — Dies ist aber offenbar der Fall *b)* des Lidstoneschen Satzes. — Dabei setzt Insolera voraus, dass die Sterblichkeit mit dem Alter zunimmt, woraus wieder auf fallende Risikokapitalien geschlossen werden kann.

3. Wir behaupten nun allgemeiner:

Der Lidstonesche Satz gilt für jede Lebensversicherung mit gleichbleibenden bis Versicherungsablauf zahlbaren Prämien, deren Risiko-

---

[1]) D. h. mit Ausnahme des Anfangs- und Endzeitpunktes der Versicherung.

[2]) Da uns die Originalarbeit von Lidstone nicht zugänglich war, stützen wir uns auf die Formulierung von Christen. Letzterer unterscheidet noch den Fall:

c) $\delta q_{x+t} = K p_{x+t}$, K konstant, p_{x+t} mit wachsendem t abnehmend,

der aber offenbar ein Spezialfall von *b)* ist.

[3]) Unwesentlich ist, dass diese Voraussetzung von Christen für die geänderte Versicherung gemacht wird, da ursprüngliche und geänderte Versicherung vertauscht werden können.

kapital eine nichtwachsende Funktion der Zeit ist, ohne jedoch im Falle a) konstant zu sein, im Falle b) identisch zu verschwinden.

Beweis: Der erwähnte Zeichenbewahrungssatz besagt bei Spezialisierung auf die Variation der Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Lebensversicherung mit gleichbleibenden bis Versicherungsablauf zahlbaren Prämien und konstantem Rechnungszinsfuss, welche Variation als Übergang zu einer Sterbetafel zweiter Ordnung aufgefasst werden kann:

Bilden die Sterblichkeitsgewinne

$$k_t = \delta q_{x+t} \cdot (U_{t+1} - {}_{t+1}V) \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

eine nichtwachsende Folge, ohne konstant zu sein, so entspricht der Ermässigung der Sterbenswahrscheinlichkeiten um δq_{x+t} $(t = 0, 1, \ldots)$ eine Erhöhung sämtlicher Deckungskapitalien innerhalb der Versicherungsdauer.

(Dabei bezeichnen U_t, ${}_tV$ entsprechend die bei Ableben im t-ten Versicherungsjahre fällige Versicherungssumme und das Deckungskapital am Ende dieses Versicherungsjahres.)

Im Falle *a)* unterscheidet sich nun der Sterblichkeitsgewinn k_t vom Risikokapital $U_{t+1} - {}_{t+1}V$ lediglich um die multiplikative Konstante $\delta q_{x+t} > 0$. Sind daher die Risikokapitalien nichtwachsend, ohne jedoch konstant zu sein, so gilt dies auch von den Sterblichkeitsgewinnen, und laut Zeichenbewahrungssatz steigen sämtliche Deckungskapitalien innerhalb der Versicherungsdauer.

Im Falle *b)* bilden die Zahlen k_t, falls alle Risikokapitalien von 0 verschieden sind, sogar eine streng fallende Folge (nachdem hier die Zahlen δq_{x+t} fallen). Existieren aber auch verschwindende Risikokapitalien, so ist die dann nichtwachsende Folge der k_t nicht konstant, da sie dann voraussetzungsgemäss auch nichtverschwindende Glieder enthalten muss. Laut Zeichenbewahrungssatz steigen daher auch hier sämtliche Deckungskapitalien innerhalb der Versicherungsdauer.