

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	41 (1941)
Artikel:	Zerfällung einer Gesamtheit in Aktiven- und Invalidengruppen
Autor:	Kreis, H.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-966759

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zerfällung einer Gesamtheit in Aktiven- und Invalidengruppen.

Von H. Kreis, Winterthur.

Es seien eine Überlebensordnung

$$l_x = C \cdot f(x) \quad (1)$$

und eine Aktivitätsordnung

$$l_x^{aa} = k \cdot f^{aa}(x) \quad (2)$$

gegeben. Die Ordnungsfunktionen $f(x)$ und $f^{aa}(x)$ seien so definiert, dass sie für das gemeinsame Anfangsalter beider Reihen, z. B. $x = 15$, den Wert 1 haben. Die Zahl C fassen wir als Konstante, die Zahl k als Parameter auf. Es sei ferner z das Schlussalter der ersten Reihe, $z' < z$, dasjenige der zweiten Reihe, z. B. $z = 104$ und $z' = 80$. Über den Charakter der Aktivenordnung setzen wir nichts voraus. Die Abgangsursachen, Invalidität und Ableben, können voneinander abhängig, d. h. miteinander verknüpft, oder aber, voneinander unabhängig, d. h. mehr oder weniger willkürlich voneinander getrennt sein.

Von einem beliebigen Alter w an lassen wir, im Sinne von *Schaertlin*¹⁾, die Gesamtheit l_x in eine Gruppe von Aktiven und eine solche von Invaliden zerfallen und wollen die so entstehenden Bestandteile bestimmen.

Für $x \geq w$ besteht nun die allgemeine Beziehung

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii} \quad (3)$$

mit der Anfangsbedingung

$$l_w^{aa} = l_w. \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) ergibt sich für den Parameter k der Wert

¹⁾ *Schaertlin*: Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung. Bern 1907.

$$k = C \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)}. \quad (5)$$

Hieraus folgt aus (3) die Anzahl l_x^{ii} der Invaliden vom Alter x der betrachteten Sondergesamtheit von w bis z .

$$\begin{aligned} l_x^{ii} &= l_x - l_x^{aa} = C \cdot f(x) - C \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)} \cdot f^{aa}(x) \\ &= C \cdot f(w) \cdot \left(\frac{f(x)}{f(w)} - \frac{f^{aa}(x)}{f^{aa}(w)} \right) \end{aligned}$$

oder

$$l_x^{ii} = l_w \cdot \left(\frac{f(x)}{f(w)} - \frac{f^{aa}(x)}{f^{aa}(w)} \right). \quad (6)$$

Man findet selbstverständlich für $x = w$, $l_w^{ii} = 0$ und für $x > z'$

$$l_x^{ii} = l_w \cdot \frac{f(x)}{f(w)} = l_x.$$

Da die Gleichung (6) nur dann brauchbare Werte für l_x^{ii} liefert, wenn der auf der rechten Seite stehende Klammerausdruck positiv ist, muss für alle Werte von x und w , die den Ungleichheiten genügen

$$15 \leqq w < x \leqq z$$

folgende Bedingung erfüllt sein

$$\frac{f^{aa}(15)}{f(15)} \geqq \frac{f^{aa}(w)}{f(w)} > \frac{f^{aa}(x)}{f(x)} \geqq \frac{f^{aa}(z)}{f(z)}$$

oder, da $f^{aa}(15) = f(15) = 1$ und $f^{aa}(z) = 0$ ist

$$1 \geqq \frac{f^{aa}(w)}{f(w)} > \frac{f^{aa}(x)}{f(x)} \geqq 0. \quad (7)$$

Die verschiedenen Altersklassen der Gesamtheit (1) lassen sich infolgedessen auf Grund der Aktivenordnung (2) nicht unbedingt auf die geschilderte Art abbauen. Die Ungleichheit (7) stellt offensichtlich die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gelingen der Zerfällung der Gesamtheit in Aktiven- und Invalidenbestände dar. Daraus ergibt sich der *Zerfällungssatz*:

Die Zerfällung der Gesamtheit $C \cdot f(x)$ in Aktiven- und Invalidengruppen mit Hilfe der Aktivitätsordnung $k \cdot f^{aa}(x)$ ist dann und nur dann lückenlos möglich, wenn das Verhältnis der beiden Ordnungsfunktionen $f^{aa}(x)$ zu $f(x)$ mit wachsendem x beständig von 1 bis 0 abnimmt.

Auf Grund dieses Kriteriums lässt sich die Ordnungsfunktion $f^{aa}(x)$ der Aktivenreihe (2) auf die Form

$$f^{aa}(x) = f(x) \cdot v(x) \quad (8)$$

bringen, wo $v(x)$ eine Abbaufunktion bedeutet, die mit wachsendem x von 1 bis 0 beständig abnimmt. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} k \cdot f^{aa}(x) &= C \cdot f(x) \cdot \frac{k}{C} \cdot v(x) \\ \text{oder} \quad k \cdot f^{aa}(x) &= C f(x) \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)} v(x). \end{aligned} \quad (9)$$

D. h. jede die Zerfällungsbedingung erfüllende Aktivenordnung lässt sich als Produkt aus der zu zerfallenden Überlebensordnung $C \cdot f(x)$ und einer eigentlichen Abfallordnung $\frac{f(w)}{f^{aa}(w)} \cdot v(x)$ darstellen.

Wir nehmen nun an, die geforderte Bedingung werde durch die Funktionen f und f^{aa} erfüllt, und gehen zur eigentlichen Aufgabe über, indem wir zuerst auf bekannte Art die Anzahl L_w der Personen vom Alter w bis zum Schlussalter z der Gesamtheit ermitteln. Es ist

$$\begin{aligned} L_w &= \int_w^z l_x dx \sim \left(\frac{l_w + l_{w+1}}{2} + \dots + \frac{l_z}{2} \right) \\ &= l_w + l_{w+1} + \dots + l_z - \frac{1}{2} \cdot l_w \\ L_w &= l_w \cdot \dot{e}_w \end{aligned} \quad (10)$$

wobei e_w die mittlere Lebenserwartung für einen w -jährigen bedeutet. Ebenso ist die Anzahl L_w^{aa} der Aktiven vom Alter w bis zum Schlussalter z' der Aktivenordnung gleich

$$L_w^{aa} = \int_w^{z'} l_x^{aa} \cdot dx \sim l_w \cdot \dot{e}_w^{aa} \quad (11)$$

wobei \dot{e}_w^{aa} die mittlere Aktivitätsdauer für einen w -jährigen bedeutet. Ferner ist die Anzahl der Invaliden, die aus der Gesamtheit w bis z hervorgehen

$$L_w^{ii} = L_w - L_w^{aa} = l_w \cdot (\dot{e}_w - \dot{e}_w^{aa}). \quad (12)$$

Bedeutet schliesslich s die Altersgrenze, bei der die Aktiven aus Altersgründen aus der Aktivengruppe ausscheiden, so vermindert sich der durch (11) angegebene Aktivenbestand um

auf

$$\int_s^{z'} l_x^{aa} \cdot dx \sim l_s^{aa} \cdot \dot{e}_s^{aa}$$

$$L_{w(s)}^{aa} = l_w \cdot \dot{e}_w^{aa} - l_s^{aa} \cdot \dot{e}_s^{aa}$$

$$= l_w \cdot \left(\dot{e}_w^{aa} - \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \dot{e}_s^{aa} \right). \quad (13)$$

Entsprechend wird die Anzahl der aus der Sondergesamtheit w bis z hervorgegangenen Invaliden und der übrigen Angehörigen der Gesamtheit vom Mindestalter s gleich

$$L_{w(s)}^{ii} = l_w \cdot \left(\dot{e}_w - \dot{e}_w^{aa} + \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \dot{e}_s^{aa} \right). \quad (14)$$

Falls die Werte \dot{e}_w und \dot{e}_w^{aa} tabelliert vorliegen, lassen sich die Formeln (10) bis (14) für alle gewünschten Kombinationen von w und s mit Leichtigkeit auswerten.

Man kann auch unmittelbar für den Beharrungszustand das Verhältnis der Anzahlen der Aktiven und Invaliden, die aus der Gesamtheit $(w; z)$ hervorgehen, angeben

$$L_w^{aa} : L_w^{ii} = e_w^{aa} : (\dot{e}_w - \dot{e}_w^{aa}) = 1 : \left(\frac{\dot{e}_w}{\dot{e}_w^{aa}} - 1 \right) \quad (15)$$

oder, im Falle des Vorhandenseins einer Altersgrenze s , das Verhältnis der Anzahl der Aktiven zu der der Invaliden und der aus Altersgründen zurückgetretenen Aktiven

$$L_{w(s)}^{aa} : L_{w(s)}^{ii} = 1 : \left(\frac{\dot{e}_w}{\dot{e}_w^{aa} - \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \dot{e}_w^{aa}} - 1 \right). \quad (16)$$

Sämtliche entwickelten Formeln können z. B. auf die Tafeln der von der Direktorenkonferenz der Schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften herausgegebenen Tabellensammlung¹⁾ angewendet werden. Die in dem Werk verwendete, zusammengesetzte Aktivitätsordnung ist nämlich das Produkt aus der zu zerfallenden Überlebensordnung und einer einfachen Aktivitätsordnung mit Ausscheidung durch Invalidität allein. Auf Grund ihrer Struktur genügt die so gebildete, zusammengesetzte Aktivitätsordnung der durch den Zerfällungssatz geforderten Bedingung.

Der in dieser Arbeit bewiesene Satz scheint mir deshalb von besonderem Interesse zu sein, weil er indirekt eine Beziehung allgemeiner Art zwischen beobachteten abhängigen und abgeleiteten unabhängigen Wahrscheinlichkeiten liefert. Er zeigt für den Fall von zwei Abgangsursachen, unter welchen Bedingungen die Verwandlung von abhängigen in unabhängige oder korrigierte Wahrscheinlichkeiten vollzogen werden kann. Dass eine solche Überführung nicht ohne Willkür durchführbar ist, geht aus verschiedenen in den Mitteilungen veröffentlichten Arbeiten hervor²⁾. Von einem neuen Gesichtspunkte aus erfährt aber diese Willkür durch den Zerfällungssatz eine nicht unwesentliche Deutungsmöglichkeit.

¹⁾ «Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen»; Mai 1939.

Die Veröffentlichung dieser Grundlagen hat mich zu der vorliegenden Untersuchung veranlasst.

²⁾ *E. Marchand*: Probabilités expérimentales, M. V. S. V., 33. Heft; *J. Meier*: Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, M. V. S. V., 39. Heft.

