Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 41 (1941)

Artikel: Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung

Autor: Baltensperger, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966755

Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung.

Von *Paul Baltensperger*, Zürich.

Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung besteht aus drei Teilen.

Im ersten Teil wird die Sterblichkeit der männlichen schweizerischen Bevölkerung als Funktion des Alters und der Zeit untersucht. Über die Abhängigkeit von der Zeit liegen heute sozusagen keine systematischen Untersuchungen vor. Auf Grund einer Analyse der betreffenden Ergebnisse und unter Anwendung einfacher Hypothesen wird der wahrscheinliche Wert berechnet, gegen den die Sterbenswahrscheinlichkeit der männlichen schweizerischen Bevölkerung vermutlich ungefähr konvergiert. Generell wird für die Sterbenswahrscheinlichkeit der männlichen schweizerischen Bevölkerung eine Funktion von Alter und Zeit aufgestellt.

Im zweiten Teil wird versucht, einfache und brauchbare analytische Darstellungen der obigen Funktion von 2 Variabeln, der sogenannten Sterblichkeitsfläche, zu finden. Insbesondere wird gezeigt, dass für die männliche schweizerische Bevölkerung keine Makehamfläche in Betracht fällt. Dafür wird eine andere einfache und praktisch brauchbare analytische Darstellung gegeben.

Im dritten Teil werden auf Grund der obigen Untersuchungen zahlenmässige Angaben über die zukünftige vermutliche Entwicklung der männlichen schweizerischen Bevölkerung (vom Alter 25 an) gemacht.

Prinzipiell wertvoll waren bei der ganzen Untersuchung die vom Eidgenössischen Statistischen Amt über diesen Fragenkomplex berechneten und mir zur Verfügung gestellten Zahlen. Diesem Amt und auch dem Städtischen Statistischen Amt von Zürich möchte ich für das mir zur Einsichtnahme überlassene statistische Material herzlich danken.

Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. W. Saxer, Rektor der Eidgenössischen Technischen Hochschule, welcher das hier behandelte Thema seinerzeit angeregt hatte und welcher mir bei der Durchführung meiner Arbeit stets mit Rat und Tat zur Seite stand.

I. Teil.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit, oder kürzer die Sterblichkeit, eines Menschen ändert sich mit seinem Alter. Sie ändert sich aber auch, für ein festes Alter, im Laufe der Zeit. So hat in der Schweiz die Sterblichkeit während der letzten Jahrzehnte für die meisten Alter merklich abgenommen. Die Statistik lehrt überdies, dass die Sterblichkeit verschieden ist hinsichtlich des Geschlechts, dass aber ein weitgehender Parallelismus im Verlaufe der Sterblichkeit der beiden Geschlechter besteht. Alle Untersuchungen und Zahlen in dieser Arbeit beziehen sich ausschliesslich auf das männliche Geschlecht der schweizerischen Bevölkerung.

§ 1.

Konstruktion einer schweizerischen Sterblichkeitsfläche.

In dieser Arbeit soll unter Sterblichkeit stets die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit verstanden sein, d. h. die Wahrscheinlichkeit für einen Lebenden, im nächsten Jahre zu sterben. Man bezeichnet sie mit $q(x, t)$, wobei x das Alter des Lebenden und t das Kalenderjahr bedeutet. Die Sterblichkeit ist also abhängig von diesen 2 Variabeln. Ordnet man in einem dreidimensionalen Kartesischen Koordinatensystem einer Axe die Zeit t, der zweiten das Alter x, und der dritten die Werte $q(x, t)$ zu, so entsteht eine Fläche, die wir *Sterblichkeitsfläche* nennen wollen.

A. Das amtliche statistische Material.

Bezeichnet man mit $U(x, t)$ die Anzahl der Lebenden vom Alter $x - \frac{1}{2}$ bis $x + \frac{1}{2}$ zur Zeit t, so ist

$$q(x, t) = \frac{U(x, t) - U(x+1, t+1)}{U(x, t)}.$$

Für eine genaue Untersuchung der Sterblichkeitsfläche wäre die Kenntnis der Zahlen $q(x, t)$ für jedes Alters- und Kalenderjahr erforderlich. Diese Zahlen sind aber bei den zuständigen Amtsstellen nicht erhältlich. Hingegen hat das Eidgenössische Statistische Amt im Jahre 1935 eine Zusammenstellung der schweizerischen Volkssterbetafeln 1876 bis 1932 herausgegeben [1]. Darin findet man mittlere Werte von $q(x)$ für folgende 8 Zeitspannen: 1876/80, 1881/88, 1889/1900, 1901/10, 1910/11, 1920/21, 1921/30, 1929/32. Die Zahlen $q(x)$ wurden nach der bekannten Methode von Becker-Zeuner [2] ermittelt. Sie sind ausgeglichen und unausgeglichen publiziert; die Ausgleichung erfolgte aber nicht immer nach der gleichen Methode [1]. Da wir bei unseren Betrachtungen nicht annehmen können, dass die Sterblichkeit während einer Zeitspanne von mehreren Jahren (z. B. 12 Jahre von 1889 bis 1900) konstant bleibt, müssen wir jeder der 8 Wertereihen $q(x)$ ein bestimmtes Kalenderjahr zuordnen. Man wählt dafür vernünftigerweise je den mittleren Zeitpunkt der betreffenden Zeitspanne, also: 1. 7. 1878, 1. 1. 1885, 1. 1. 1895, 1. 1. 1906, 1. 1. 1911, 1. 1. 1921, 1. 1. 1926, 1. 1. 1931.

Wir besitzen somit ein rohes Gerüst der Sterblichkeitsfläche. Die so konstruierte Sterblichkeitsfläche hat aber folgende Mängel:

1. Es ist nicht erwiesen, dass das mittlere Kalenderjahr einer mehrjährigen Beobachtungsperiode genau dem mittleren Werte von $q(x)$ dieser Periode entspricht.

2. Die Beobachtungsperioden 1920/21 und 1921/30 fallen in eine Zeit, in welcher sich die Sterblichkeit nicht regelmässig entwickelte. Die Jahre 1920/21 standen immer noch im Zeichen der (allerdings abflauenden) Grippeepidemie, vor allem für die Alter zwischen 20 und 40 Jahren, und liefern deshalb eine überhöhte Sterblichkeit. Andererseits konstatierte man in den darauffolgenden Jahren (1922 bis 1927) eine wesentliche Mindersterblichkeit bei denselben Altern, offensichtlich eine Folge der selektiven Wirkung der Grippewelle, die schwache Elemente vorzeitig und auf einmal hinwegraffte. Deshalb wären wir für unsere Untersuchungen in den Jahren 1910 bis 1930 zu stark auf willkürliche Annahmen angewiesen.

B. Berechnung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten für jedes Alters- und Kalenderjahr seit 1900.

Unsere nächste Aufgabe soll nun darin bestehen, möglichst viele Werte $q(x, t)$ zu berechnen. Das beim Eidgenössischen Statistischen

[1] Eidgenössisches Statistisches Amt: «Beiträge zur schweizerischen Statistik», Heft 4, 1935.

[2] Eine ausführliche Darstellung der Methode findet sich im 2. Band, Seite 43* ff. der «Ergebnisse der Eidgenössischen Volkszählung vom 1. 12. 1910», Schweizerische Statistik, 204. Lieferung, Bern 1917.

Amt vorhandene Material gestattet eine Berechnung dieser Werte für jedes Alters- und Kalenderjahr seit 1900. Unsere Berechnungsmethode soll nachstehend kurz beschrieben werden.

Das Eidgenössische Statistische Amt ermittelt:

1. Die Lebendengesamtheiten $V(x)$ anlässlich der Volkszählungen. $V(x)$ bedeutet im Zeitpunkt der Volkszählung die Anzahl der Lebenden, die im Laufe des vorhergehenden Jahres das Alter x erfüllten. Nimmt man an, dass die Geburten gleichmässig auf das ganze Jahr verteilt sind, so beträgt das durchschnittliche Alter der Gesamtheit $V(x)$: $x + \frac{1}{2}$. $V(x)$ ist veränderlich mit der Zeit: $V(x) = V(x, t)$.

Die Lebendengesamtheiten $V(x, t)$ sind nun bekannt für die Daten $t = 10.\,12.\,1860$, $1.\,12.\,1870$, $1.\,12.\,1880$, $1.\,12.\,1888$, $31.\,12.\,1900$, $31.\,12.\,1910$, $31.\,12.\,1920$, $31.\,12.\,1930$ [3].

Wir bezeichnen eine Gesamtheit von im gleichen Jahre Geborenen als eine *Generation*. Ist t_0 das Geburtsjahr einer Generation, so stellen die Zahlen $V(0, t_0)$, $V(1, t_0 + 1)$, $\ldots$, $V(i, t_0 + i)$, $\ldots$, $V(\omega, t_0 + \omega)$ den zahlenmässigen zeitlichen Verlauf dieser Generation dar. ω bedeutet das letzte vorkommende Alter, so dass $V(\omega + 1, t_0 + \omega + 1) = 0$. Wir setzen vorläufig noch voraus, dass eine Generation eine geschlossene Gesamtheit sei, d. h. eine Gesamtheit, bei welcher im Laufe der Zeit keine Neueintritte stattfinden und bei welcher der Tod die einzige Ausscheideursache ist (keine Wanderungen).

2. Die alljährlichen Gesamtheiten von Gestorbenen seit 1900.

Es sei

${}^{t-1/t}_{\tau-1/\tau}m'_{x/x+1}$ = Anzahl derjenigen, die zwischen $\tau - 1$ und τ geboren wurden und zwischen den Altern x und $x + 1$ und zwischen den Zeitpunkten $t - 1$ und t starben.

${}^{t/t+1}_{\tau-1/\tau}m''_{x/x+1}$ = Anzahl derjenigen, die zwischen $\tau - 1$ und τ geboren wurden und zwischen den Altern x und $x + 1$ und zwischen den Zeitpunkten t und $t + 1$ starben [2].

---

[3] Die Zahlen $V(x, t)$ der Volkszählungen 1870, 1880, entsprechen der ortsanwesenden Bevölkerung; alle andern der Wohnbevölkerung. Näheres darüber siehe «Schweizerische Statistik», 162. Lieferung, 1908.

Bezeichnet man mit $m(x,t)$ die Anzahl derjenigen, die zwischen $t - x - 1$ und $t - x$ geboren wurden und zwischen den Zeitpunkten t und $t + 1$ starben, so ist

$$(1) \qquad m(x\ t) = {}^{t/t+1}_{\tau-1/\tau}m''_{x/x+1} + {}^{t/t+1}_{\tau-1/\tau}m'_{x+1/x+2}\,.$$

$m(x, t)$ stellt die im gleichen Kalenderjahre Gestorbenen einer Generation dar. Das Alter dieser Gestorbenen liegt zwischen x und $x + 2$. Offensichtlich gilt nun die Beziehung

$$m(x, t) = V(x, t) - V(x + 1, t + 1),$$

woraus $$V(x + 1, t + 1) = V(x, t) - m(x, t)$$

und $$V(x + n, t + n) = V(x, t) - \sum_{i=0}^{n-1} m(x + i, t + i).$$

Geht man nun von einem Volkszählungsdatum t_0 aus, und setzt man $n = t_1 - t_0 =$ Anzahl der Jahre bis zum nächsten Volkszählungsdatum t_1, so müsste sein:

$$V(x + n, t_1) = V(x, t_0) - \sum_{i=0}^{n-1} m(x + i, t_0 + i)\,.$$

Diese Bedingung ist im allgemeinen nicht erfüllt. Der «Fehlbetrag» ist als Folge der *Wanderungen* zu betrachten. Man nennt die Differenz

$$\Delta w = V(x + n, t_1) - V(x, t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} m(x + i, t_0 + i)$$

den Wanderungsüberschuss. Wir lassen jetzt unsere Voraussetzung über die Geschlossenheit der Generationen fallen, indem wir die Wanderungen berücksichtigen. Da für unsere Zwecke zu wenig detaillierte Wanderungsstatistiken vorliegen, verteilen wir den Wanderungsüberschuss zwischen zwei Volkszählungen gleichmässig auf die betreffenden Jahre. Die letzten Volkszählungsdaten sind nun um je 10 Jahre auseinander. Somit wird

$$(2) \qquad V(x + k, t_0 + k) = V(x, t_0) - \sum_{i=0}^{k-1} m(x + i, t_0 + i) + \frac{k}{10} \cdot \Delta w.$$

Dabei bedeutet t_0 das Volkszählungsausgangsdatum, und $k = 1, 2, \ldots 10$. Die Berechnung der Zahlen $V(x, t)$ nach Formel (2) ist in der vorliegenden Arbeit durchgeführt worden für alle Alter $x \geqslant 25$ und für alle Kalenderjahre von 1900 bis und mit 1936. Der Wanderungsüberschuss seit 1930 ist dabei nicht mit einbezogen, da er heute noch nicht bekannt ist. Nun ergeben sich unsere gesuchten einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten aus folgender Formel:

$$q\left(x + \frac{1}{2}, t\right) = \frac{m(x, t)}{V(x, t)}, \tag{3}$$

wobei $m(x, t)$ nach Formel (1) und $V(x, t)$ nach Formel (2) zu bestimmen sind. Diese Werte $q\left(x + \frac{1}{2}, t\right)$ wurden von uns für alle Altersjahre $x \geqslant 25$ seit 1900 bis und mit 1936 berechnet.

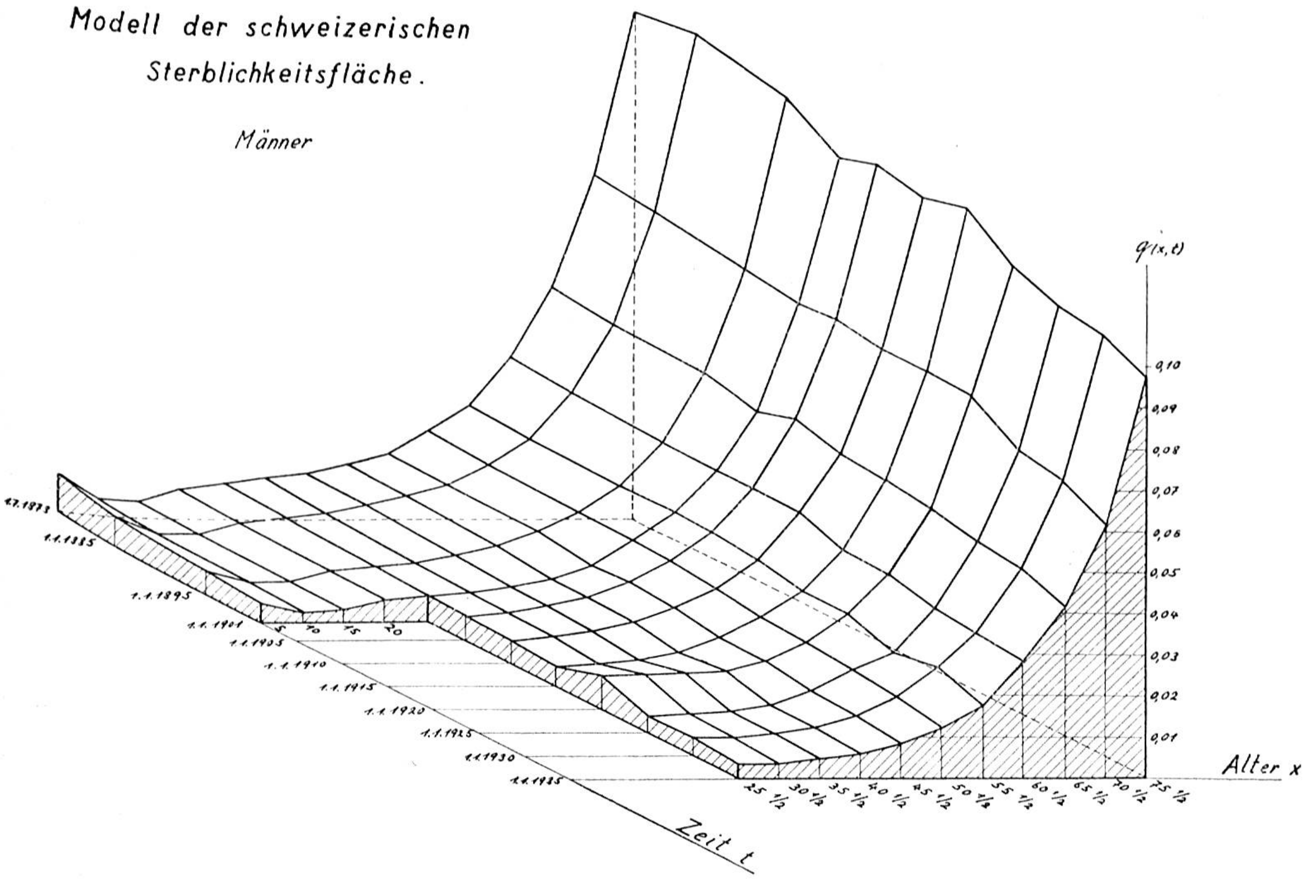
Es ist klar, dass die nach Formel (3) berechneten Werte bei dem relativ geringen Beobachtungsmaterial grosse Schwankungen aufweisen. Die Gesamtheit aller Werte gibt aber doch ein recht anschauliches Bild des Sterblichkeitsverlaufes.

Es ist zu beachten, dass Formel (3) nur für ganzzahlige Werte von x und t ausgeführt wurde. Damit ist noch keine Sterblichkeitsfläche bestimmt, sondern es sind nur einzelne Punkte einer solchen konstruiert. Die Fläche soll nun vorderhand dadurch entstehen, dass jeder Punkt $q(x, t)$ mit seinen 6 Nachbarpunkten $q(x \pm 1, t)$, $q(x, t \pm 1)$, $q(x - 1, t - 1)$, $q(x + 1, t + 1)$, nicht aber mit den 2 Nachbarpunkten $q(x - 1, t + 1)$, $q(x + 1, t - 1)$ geradlinig verbunden wird. Die Fläche ist somit ganz aus Dreiecksflächen zusammengesetzt. Ein ebener Schnitt durch diese Fläche erzeugt einen Polygonzug, welcher im folgenden der Einfachheit halber als Kurve bezeichnet werden soll.

§ 2.

Untersuchung der schweizerischen Sterblichkeitsfläche.

Vergangenheit und Gegenwart. Figur 1 stellt angenähert das Bild eines Modells der schweizerischen Sterblichkeitsfläche dar. Der erste Eindruck ist: ein allgemeines Sterblichkeitsgefälle in Richtung de



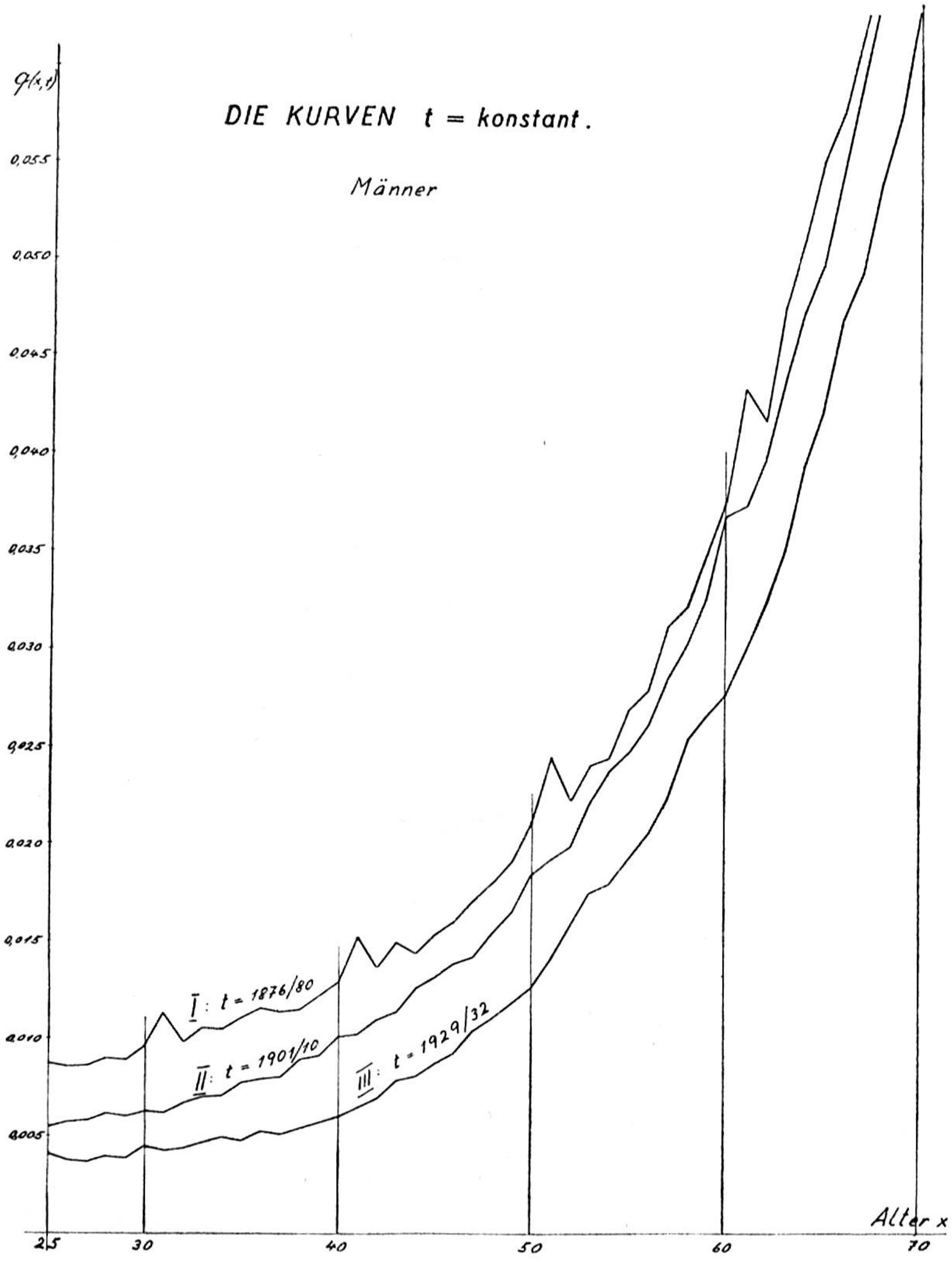
Figur 1.

positiven Zeitaxe, unterbrochen um 1919 herum für die jüngeren Alter. Für das exakte Studium der Fläche sollen drei Gruppen von Kurven untersucht werden:

1. Die Kurven $t \qquad\qquad = \text{konstant.}$
2. Die Kurven $t - x = \tau = \text{konstant.}$
3. Die Kurven $x \qquad\qquad = \text{konstant.}$

1. Die Kurven $t = $ konstant.

Diese Gruppe von Kurven ist die bekannteste. Jede Sterbetafel gestattet die Konstruktion einer solchen Kurve. In Figur 2 sind drei



Figur 2.

den Sterbetafeln 1876/80, 1901/10, 1929/32 entsprechende graphische Darstellungen der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten, nicht ausgeglichene Werte, gegeben. In der vorliegenden Arbeit werden nur die Alter $\geqslant 25$ Jahre untersucht, da die biometrischen Funktionen nur für diese Alter relativ brauchbare analytische Darstellungen gestatten. Bemerkenswert ist die enorme Sterblichkeitsverbesserung seit 1876/80, besonders bei den jüngeren Altern.

2. *Die Kurven $t - x = \tau =$ konstant.*

Diese Kurven stellen den tatsächlichen Verlauf der im Jahre $t - x = \tau$ geborenen Generation dar. Die 8 offiziellen schweizerischen Sterbetafeln genügen nach dem früher Gesagten kaum, um ein befriedigendes Bild des Generationssterblichkeitsverlaufes zu vermitteln. In Figur 3 ist der Sterblichkeitsverlauf von 5 Generationen, deren Geburtsjahre um je 10 Jahre auseinander liegen, dargestellt. Die Werte vor 1900 wurden durch lineare Interpolation zwischen den entsprechenden Werten zweier aufeinanderfolgender Sterbetafeln ermittelt. Die Werte nach 1900 sind nach Formel (3) berechnet.

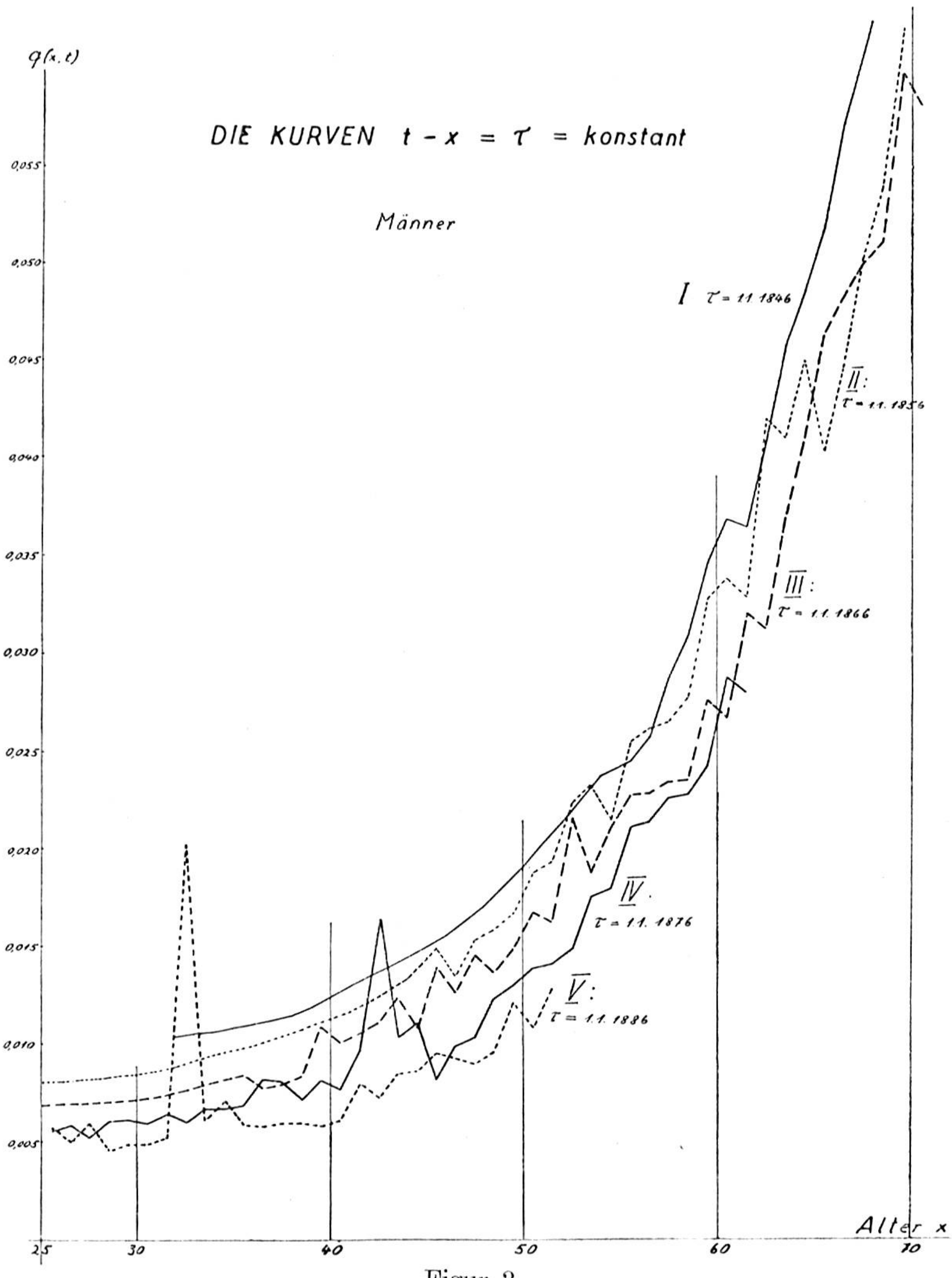
Die Kurven weisen ähnlichen Charakter auf wie die Kurven $t =$ konstant. Bei der Generation 1886 vermag man eine Mindersterblichkeit bis etwa 10 Jahre nach dem Weltkrieg 1914/18 zu erkennen. Beim Vergleich mit den Kurven $t =$ konstant stellt man fest: Die Kurven $t =$ konstant und $\tau =$ konstant verhalten sich sehr ähnlich, sowohl mit zunehmendem Alter als auch in der zeitlichen Entwicklung.

3. *Die Kurven $x =$ konstant.*

Figur 4 zeigt die zeitliche Änderung der Sterblichkeit konstanter Alter. Die Werte vor 1900 entsprechen den ausgeglichenen Werten der betreffenden Sterbetafeln. Alle Werte nach 1900 sind wieder nach Formel (3) berechnet.

Zuvor sei wieder bemerkt, dass die Mindersterblichkeit in den Jahren nach dem Weltkrieg 1914/18, d. h. etwa von 1922 bis 1927, das Gegengewicht zu der enormen Sterblichkeit von 1918/19 darstellt, besonders bei den jüngeren Altern. Der Weltkrieg 1914/18 bewirkt hier eine Störung, indem 10 wertvolle Jahre für die statistische Auswertung verloren gehen.

Allen Kurven $x =$ konstant ist, im grossen genommen, das monotone Fallen mit zunehmender Zeit gemeinsam. Die Kurven $x = 25^1/_2$ und $30^1/_2$ vermitteln den Eindruck eines abklingenden Vorganges. Bei $x = 35^1/_2$ und allen höheren Altern scheint die Sterblichkeit, von einem stationären Anfangszustand ($t = -\infty$) ausgehend, abzu-

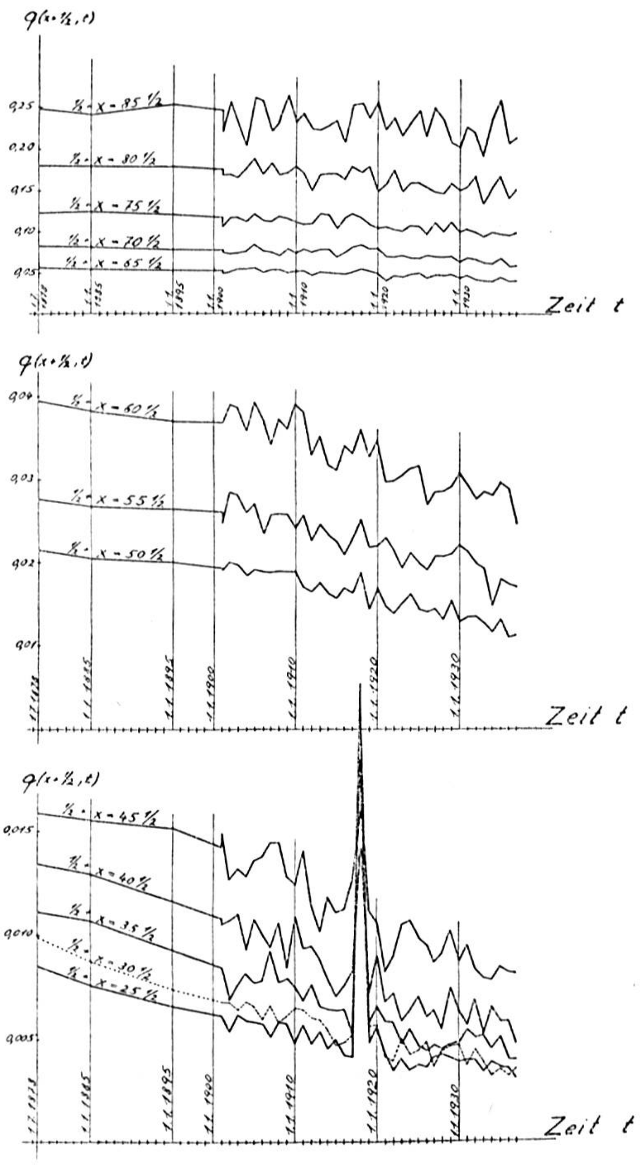


Figur 3.

nehmen und nach Überschreitung eines Wendepunktes in eine abklingende Form überzugehen. Man beobachtet dabei, dass die Wendepunkte, die sich mehr oder weniger genau in die Kurvenbilder hineingelegt denken lassen, mit zunehmendem Alter nach «rechts», d. h. in Richtung der positiven Zeitaxe wandern. Diese Verschiebung der Wendepunkte kann etwa gleich der Alterszunahme gesetzt werden.

DIE KURVEN x = konstant.

Männer



Figur 4.

Nimmt man nämlich den Wendepunkt $W(35^1/_2)$ der Kurve $x = 35^1/_2$ bei 1910 an, so müsste also $W(40^1/_2)$ bei 1915, $W(45^1/_2)$ bei 1920 usw. liegen, was sich mit den Kurvenbildern wohl vereinbaren lässt. Aber auch den Kurven $x = 30^1/_2$ und $x = 25^1/_2$ lassen sich Wendepunkte bei 1905 bzw. bei 1900 zudenken. Und nicht nur die Wendepunkte, sondern die Kurven als Ganzes, soweit sichtbar, machen diese Wanderung nach «rechts» mit.

Für die Richtigkeit dieses Sachverhaltes spricht die Erbmasse, d. h. ein gewisses Gesundheitspotential, welches jeder Generation eigen ist; dagegen sprechen die Fortschritte der Medizin, Chirurgie, Hygiene, Aufklärung etc., indem diese Fortschritte nicht auf einzelne Generationen, sondern gleichzeitig auf alle vorhandenen Generationen einwirken. Andererseits ist allerdings festzustellen, dass sich grosse Volksschichten, was Gesundheitspflege anbetrifft, den Fortschritten gegenüber konservativ verhielten. Hier macht sich eine gewisse Trägheit der Generationen geltend [1]).

Man könnte also annehmen, dass die Verschiebung der Wendepunkte etwas kleiner als die Alterszunahme zu setzen wäre. Es ist aber infolge der Roheit des statistischen Materials nicht möglich, den Ort des maximalen Sterblichkeitsgefälles genau festzustellen.

Über die Grösse der Sterblichkeitsabnahme bei verschiedenen Altern orientieren folgende Zahlen:

Sei $$r\,(x,\,\tau/\tau+n) = \frac{q\,(x,\,\tau) - q\,(x,\,\tau+n)}{q\,(x,\,\tau)}$$

die relative Sterblichkeitsabnahme zwischen den x-jährigen der Generationen τ und $\tau + n$. Für $\tau = 1855$, $n = 20$, $\tau + n = 1875$ ergibt sich dann:

x	$25^1/_2$	$35^1/_2$	$45^1/_2$	$55^1/_2$	$60^1/_2$
$r\,(x,\,1855/75)$ %	26,0	25,6	18,9	17,4	17,6

Die relative Sterblichkeitsabnahme ist also bei den höheren Altern geringer als bei den jüngern Altern. Für die höchsten Alter, d. h. Alter

[1]) Der Gedanke, den Sterblichkeitsverlauf generationsweise zu betrachten, ist nicht neu. Er findet sich z. B. in:

[4] A. R. Davidson and Reid: «On the Calculation of Rates of Mortality.» T. F. A. 11 (1927) p. 183—213. Ebenso in

[5] V. P. A. Derrick: «Observations on (1) Errors of Age in the Population Statistics of England and Wales, and (2) the Changes in Mortality indicated by the national records.» J. I. A. 58 (1927) p. 117—146. Vergleiche auch

[6] H. Cramer and H. Wold: «Mortality Variations in Sweden.» Skandinavisk Aktuarietidskrift 1935, p. 169.

über 85 Jahre, lässt sich infolge der geringen Beobachtungszahlen wenig schliessen. Immerhin zeigen folgende Zahlen $z(t)$, die in grober Annäherung die Sterblichkeit der 90-Jährigen darstellen, dass diese Sterblichkeit sich in der Vergangenheit nur wenig verbessert hat:

$$z(t) = \frac{1}{10} \sum_{x=85}^{94} q\left(x + \frac{1}{2}, t\right).$$

Jahr t	1876/ 1880	1889/ 1900	1905	1910	1915	1920	1925	1930	1935
$z(t) \cdot 100$	32,2	31,9	31,2	32,1	31,5	31,9	28,9	31,1	28,9

Die unter 3 gemachten Feststellungen finden sich zusammengefasst und analytisch formuliert nochmals im II. Teil, § 12 dieser Arbeit.

§ 3.

Problemstellung.

Kann ein zukünftiger wahrscheinlicher Sterblichkeitsverlauf zahlenmässig angegeben werden?

Von störenden Einflüssen wie Krieg, Epidemien etc. soll abgesehen werden.

Zunächst soll noch eine Betrachtung über die Kurven $x =$ konstant angestellt werden:

Nimmt man an, dass die jährliche absolute Sterblichkeitsabnahme bei den jüngeren Altern zukünftig gleich bleibt wie die durchschnittliche Abnahme in der Gegenwart (1937), so würde die Sterblichkeit für diese Alter zwischen 1980 und 2000 gleich Null. Die Entwicklung kann also nicht in diesem Masse weitergehen. Andererseits scheint eine Sterblichkeitszunahme sehr unwahrscheinlich. Dafür sprechen die Fortschritte der Medizin, Chirurgie, Hygiene, Volksaufklärung etc. Es können hier nicht alle Faktoren aufgezählt werden, die einen Einfluss auf die Sterblichkeit ausüben. Wir wollen lediglich feststellen, dass die sterblichkeitsverbessernden Umstände bei den jüngeren

Altern stärker und gewisser sind als die sterblichkeitsverschlechternden. Man wird somit zwangsläufig zu der Annahme geführt, dass die Sterblichkeit in diesen Altern weiterhin stets abnehmen werde, dass aber, da sie nicht verschwinden kann, ein gewisser Grenzwert erreicht werden muss.

Diese Betrachtung scheint auch für die höheren Alter zuzutreffen, zumal ja bei allen Kurven $x =$ konstant in der Vergangenheit derselbe charakteristische Verlauf festgestellt wurde. Hier muss aber noch ein Faktor berücksichtigt werden, der bei den höchsten Altern bereits wirksam scheint: Durch die andauernde Sterblichkeitsverbesserung während der letzten Jahrzehnte ist eine allgemeine Überalterung eingetreten. Man kann heute zwei Arten alter Leute unterscheiden:

1. Solche, die kraft ihrer starken Konstitution alt wurden, ohne ärztliche Hilfe.
2. Solche, die dank der modernen gesundheitlichen Errungenschaften ihre Lebensdauer strecken konnten.

Die erste Art von Leuten hat in jedem Alter die grössere Lebenserwartung als die zweite. So kommt es, dass die Überalterung für die höheren Alter sterblichkeitsverschlechternd wirkt.

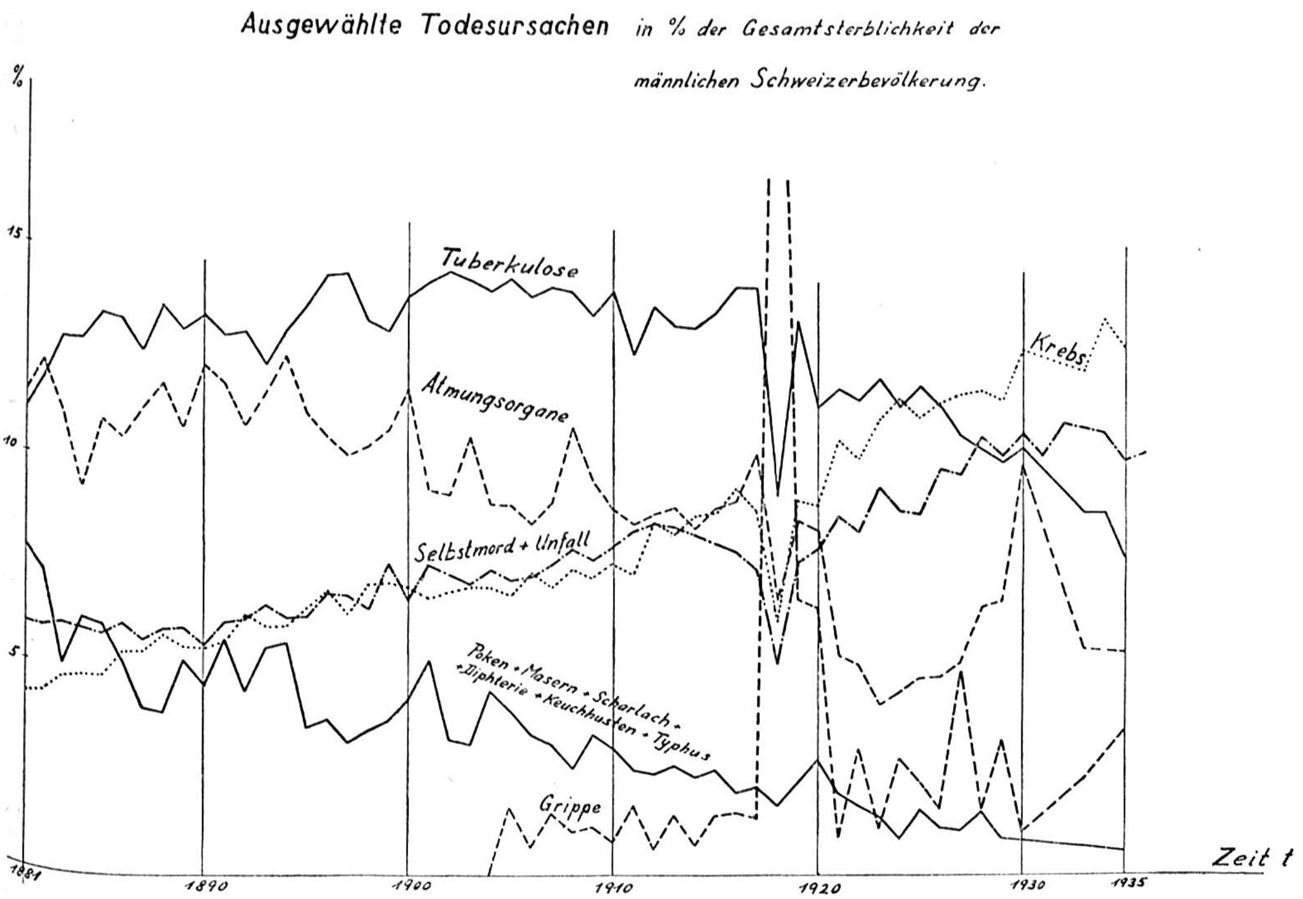
Zusammenfassend sei festgehalten, dass die Sterblichkeit für jedes Alter mit zunehmender Zeit einem gewissen Grenzwert zustreben wird.

Um einen konkreten Einblick in die Grössenverhältnisse zu gewinnen, soll eine eingehende Untersuchung über die Todesursachen angestellt werden.

§ 4.

Untersuchung der Todesursachen in der Vergangenheit.

Das Eidgenössische Statistische Amt hat seit vielen Jahren Statistiken über Todesursachen publiziert. Leider sind diese Statistiken nicht nach einheitlichem Muster durchgeführt, indem einzelne Krankheiten zu verschiedenen Zeiten verschieden gruppiert wurden. Eine lückenlose Verfolgung ist daher nicht möglich. Trotzdem dürfte das vorhandene Material einen genügend klaren Einblick gewähren.

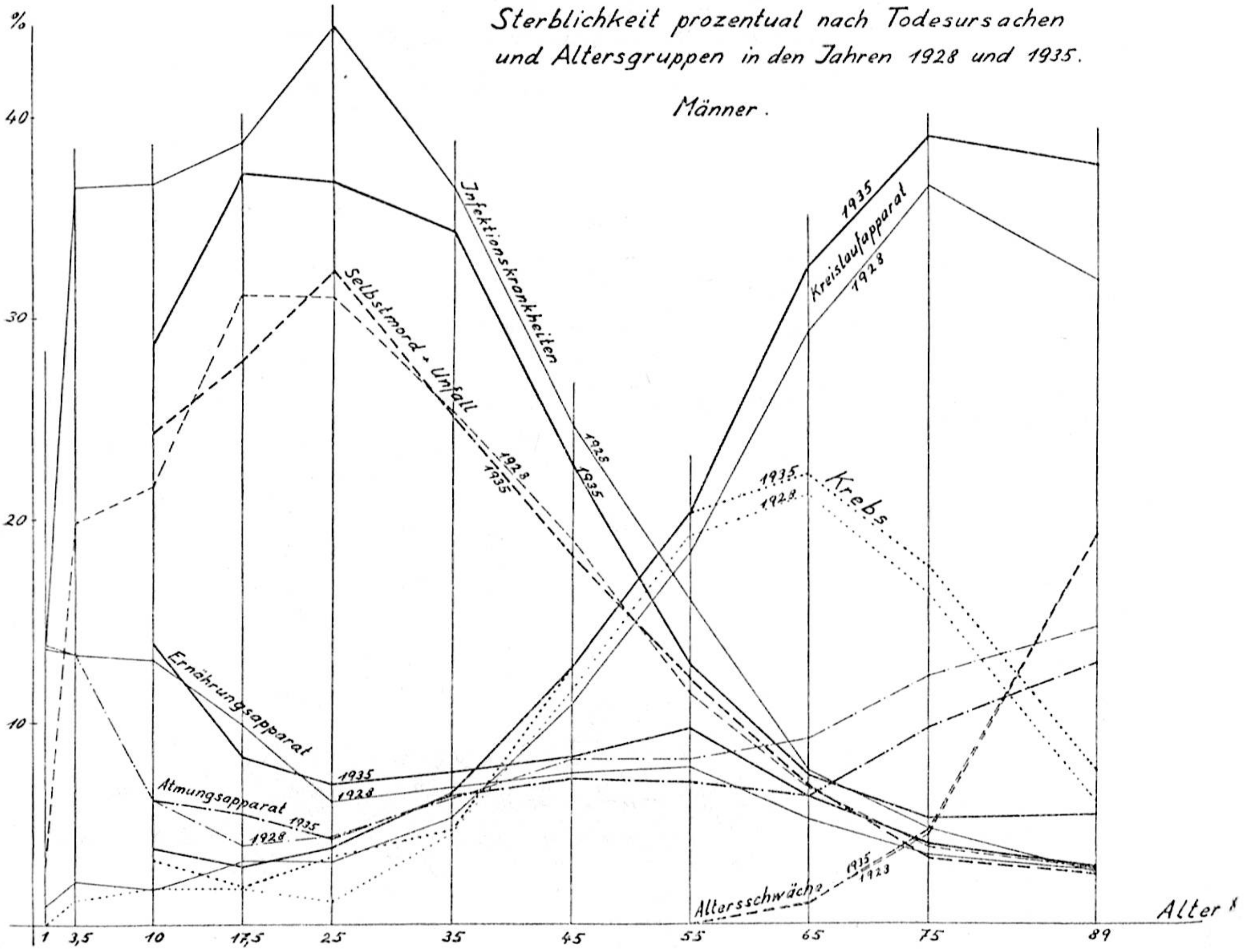


Figur 5.

Tabelle I enthält einzelne Todesursachen in % der Gesamtsterblichkeit der in jedem Jahre vorhandenen totalen Bevölkerung [7]. In Figur 5 ist die Tabelle graphisch dargestellt. Auffallend ist das prozentuale Ansteigen der Ursachen «Selbstmord + Unfall» und «Krebs». Die Nachteile der Tabelle I bestehen darin, dass die Todesursachen nicht nach Altern getrennt sind und dass die aufgeführten Todesursachen zusammen nur ca. 40 % aller Todesursachen ausmachen. Die nötigen ergänzenden Statistiken sind vor 1927 nicht erhältlich.

In Figur 6 sind die wichtigsten Gruppen von Todesursachen, prozentual und getrennt nach Altersgruppen, für die Jahre 1928 und 1935 graphisch dargestellt [7] (z. B. von den in den Altern 50 bis 59 Gestorbenen des Jahres 1935 sind 20,31 % an Krebs gestorben).

[7] Die Berechnung der Prozentzahlen erfolgte auf Grund von Publikationen der «Statistischen Quellenwerke der Schweiz», Hefte 2 (1928) und 73 (1935).



Figur 6.

Vorgängig einer Auswertung der Tabelle I und Figur 6 soll folgende Unterscheidung der Todesursachen getroffen werden:

A. Todesursachen, die bisher mit geringem Erfolg bekämpft wurden oder überhaupt nicht bekämpft werden können. Zu ihnen werden hier gezählt:

a) Selbstmord + Unfallstod.

b) Tod infolge Krankheit des Kreislaufapparates.

c) Tod infolge Altersschwäche.

d) Tod infolge Krebskrankheit.

B. Todesursachen, die mit Erfolg bekämpft werden können. Dazu sollen alle übrigen, d. h. nicht unter A aufgeführten Todesursachen gezählt werden.

a) Selbstmord und Unfallstod.

Figur 5 zeigt das ständige prozentuale Ansteigen dieser zwei Todesursachen zusammen. Über den Verlauf der absoluten Sterblichkeit infolge Selbstmord + Unfall erhält man ein brauchbares Bild, wenn man für jedes Jahr t die betreffenden Prozentzahlen der Tabelle I multipliziert mit den entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(25, t)$ des Alters 25, d. h. des Alters, in welchem die meisten Selbstmorde und Todesfälle durch Unfall vorkommen (siehe Fig. 6). Dabei ist allerdings angenommen, dass sich das Maximum der Unfalls- und Selbstmordsterblichkeit immer um das Alter 25 herum befand, wie dies seit 1928 der Fall ist, eine Annahme, die sich hier mangels genügender Statistik nicht nachprüfen lässt, die aber im allgemeinen, bezogen auf die meisten Todesursachen, zutrifft. Ferner ist dabei angenommen, dass sich der Altersaufbau im Laufe der Zeit nicht verändert hat. Diese Annahme ist unrichtig, da heute die jüngeren Alter prozentual schwächer, die höheren Alter aber prozentual stärker vertreten sind als früher.

Figur 7 zeigt die Werte

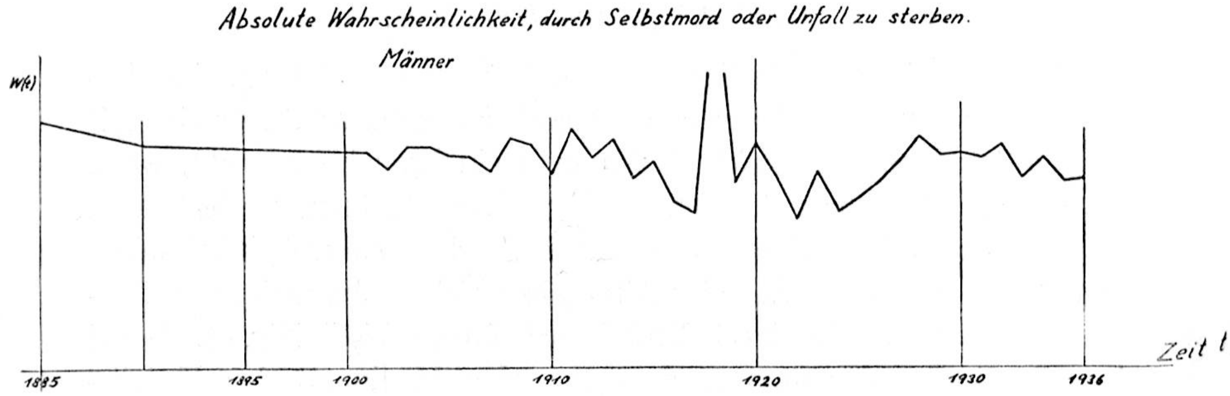
$$w(t) = q\left(25\frac{1}{2}, t\right) \cdot \left[\frac{q(t)_{\text{Selbstmord + Unfall}}}{q(t)_{\text{total}}} \begin{array}{l}\text{bezogen auf die}\\ \text{Gesamtbevölkerung}\end{array}\right]$$

graphisch dargestellt. Man sieht daraus, dass sich die absolute Sterblichkeit infolge Selbstmord + Unfall im Laufe der Zeit sehr leicht vermindert hat. Unter Berücksichtigung des veränderten Altersaufbaues würde diese Kurve leicht ansteigen.

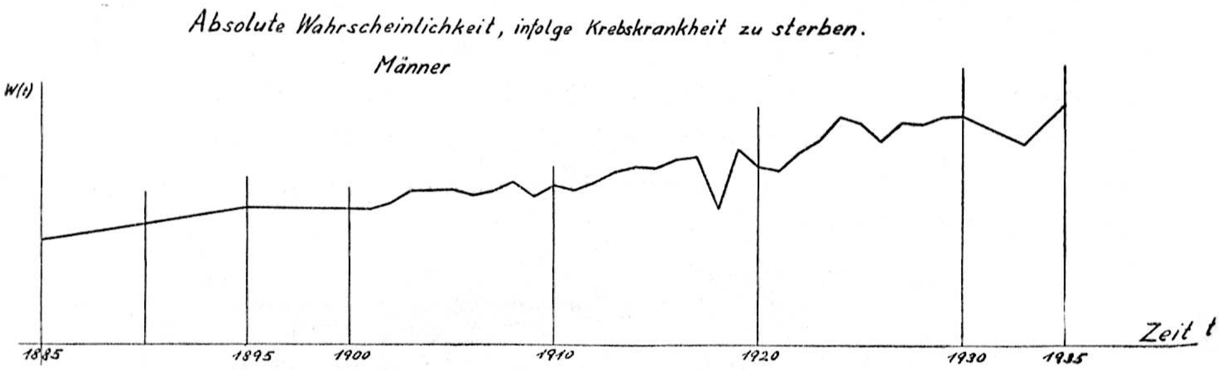
Wenn hier Selbstmord und Unfalltod zu den erfolglos bekämpften Todesursachen gezählt werden, so geschieht das erstens, weil die betreffende absolute Sterblichkeit in der Vergangenheit fast gleichgeblieben ist, und zweitens, weil auch für die Zukunft keine grosse Veränderung zu erwarten ist.

b) Tod infolge Krankheit des Kreislaufapparates.

Die Statistiken gestatten wiederum keinen Einblick in den betreffenden Sterblichkeitsverlauf in der Vergangenheit. Aus Figur 6 ist ersichtlich, dass diese Todesursache seit 1928 für alle Alter prozentual zugenommen hat.



Figur 7.



Figur 8.

c) Tod infolge Altersschwäche.

Der Titel erübrigt eine Erklärung. Es ist indessen denkbar, dass die Diagnose «Altersschwäche» bei exakterer Untersuchung gewisser Fälle nicht stichhaltig ist, resp. dass irgendeine bekannte, aber umständehalber nicht festgestellte Krankheit den Tod verursacht hat.

d) Tod infolge Krebskrankheit.

Die Krebskrankheit konnte bis heute praktisch nicht wirksam bekämpft werden, so sehr auch an diesem Problem gearbeitet wurde. Die «Krebskurve» in Figur 5 beweist es. Bildet man wie unter *a)* (Selbstmord + Unfall) die Zahlen

$$w(t) = q\left(65\frac{1}{2}, t\right) \cdot \left[\frac{q(t)_{\text{Krebs}}}{q(t)_{\text{total}}} \ \begin{matrix}\text{bezogen auf die}\\ \text{Gesamtbevölkerung}\end{matrix}\right]$$

in der Annahme, dass die Krebssterblichkeit prozentual immer um das Alter 65 herum das Maximum erreichte (siehe Fig. 6), so ergibt sich das in Figur 8 dargestellte Bild. Unter Berücksichtigung des veränderten Altersaufbaues würde die Kurve in Figur 8 weniger steil ansteigen. Die langsame, aber stetige Zunahme der Krebssterblichkeit ist charakteristisch. Sie lässt sich damit erklären, dass in dem Masse, wie andere Todesursachen verschwinden, neue Leben unter das Risiko, durch Krebskrankheit zu sterben, gestellt werden. Dasselbe gilt auch für den Tod infolge Krankheit des Kreislaufapparates. Für die nähere Zukunft ist also zu erwarten, dass die Krebssterblichkeit, auch dem absoluten Werte nach, weiter zunimmt. Immerhin wäre der Fall einer umwälzenden Entdeckung in dieser Richtung als nicht ausgeschlossen im Auge zu behalten [8] [9].

B. Alle übrigen Todesursachen.

Tabelle I resp. Figur 5 gibt noch Einblick in den Verlauf einzelner ausgewählter Todesursachen in der Vergangenheit.

Die Sterblichkeit infolge *Tuberkulose* hat seit 1900 beträchtlich abgenommen, und es ist anzunehmen, dass sie in Zukunft nicht mehr zunimmt [10]. Andererseits ist aber kaum damit zu rechnen, dass sie ganz verschwindet. Es handelt sich bei der Tuberkulose um eine Krankheit, die zwar grundsätzlich bekämpft werden kann, deren Bekämpfung aber vom sozialen Vermögen des Volkes abhängt.

Die Sterblichkeit infolge Erkrankung der *Atmungsorgane*, sowie die Gruppe *Pocken* + *Masern* + *Scharlach* + *Diphtherie* + *Keuchhusten* + *Typhus* ist seit den letzten Jahrzehnten stets merklich im Abnehmen begriffen. Der Tod infolge Grippe hat bis anhin, ausser einem epidemieartigen Auftreten um 1918/19, eine unwesentliche Rolle gespielt. Immerhin beobachtet man ein ständiges Ansteigen der Grippesterblichkeit.

---

[8] Vgl. J. Aebly: «Untersuchungen über die Bewegung der Krebsmortalität in der Schweiz in den Jahren 1880—1915.» Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 14, 1919. Ebenso

[9] H. Wyss: «Die Krebssterblichkeit in der Schweiz.» Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 22, 1927.

[10] Vgl. H. Steiner-Stoss: «Der Einfluss der Lungentuberkulose auf die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung 1901—1910»; Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 20 (ebenso Heft 1).

Figur 6, welche praktisch alle Todesursachen enthält, zeigt, dass alle nicht unter *a)* bis *d)* aufgeführten Gruppen von Todesursachen seit 1928 im Abnehmen begriffen sind, und dies für fast alle Alter. Diese Abnahme muss in den letzten Jahrzehnten beträchtlich gewesen sein, da sie ja allein den Rückgang der Sterblichkeit bewirkt hat. Für die Zukunft ist durchaus damit zu rechnen, dass die meisten dieser Sterbeursachen weiter abnehmen, wenn sie auch nie ganz verschwinden werden.

Es wäre indessen völlig aussichtlos, über das Mass der zukünftigen Entwicklung der sub B genannten Todesursachen genaue Angaben machen zu wollen.

§ 5.

Lösung des Problems.

Auf Grund der vorstehend gemachten Untersuchungen über die Todesursachen werden nun folgende *Annahmen* getroffen:

1. Die absolute Sterblichkeit der sub *a)* bis *d)* genannten Todesursachen («Selbstmord + Unfall + Kreislaufapparat + Altersschwäche + Krebs») behält *für das Alter 25* ihren Wert der Epoche 1928/35 bei.
2. Die prozentuale Verteilung dieser Todesursachen auf die Altersgruppen bleibt dieselbe wie in den Jahren 1928/35.
3. Die absolute Sterblichkeit strebt für jedes Alter mit wachsender Zeit einem festen Grenzwert zu.
4. Die sub B aufgeführte *absolute* Sterblichkeit wird für das jüngste betrachtete Alter, d. h. für das Alter 25, beim Erreichen des Grenzwertes noch die Hälfte ihres Wertes der Epoche 1928/35 haben.
5. Die absolute Sterblichkeit der Hundertjährigen behält ihren Wert von 1928/35 bei.

Einer kritischen Betrachtung dieser Annahmen soll später Raum gegeben werden.

Nun soll versucht werden, für die Sterblichkeit jedes Alters einen vernünftigen festen Endwert vorzuschreiben. Bezeichnet man mit

$q_{\mathrm{I}}(x, t)$ die Sterbenswahrscheinlichkeit infolge der sub A aufgeführten Todesursachen,

$q_{\mathrm{II}}(x, t)$ die Sterbenswahrscheinlichkeit infolge der sub B aufgeführten Todesursachen,

so ist
$$q(x, t) = q_{\mathrm{I}}(x, t) + q_{\mathrm{II}}(x, t).$$

Nimmt man ferner die schweizerische Volkssterbetafel von 1929/32 als Ausgangstafel an, so ist nach Annahme 4

$$(4) \qquad q(25, t = \infty) = q(25, 1929/32) - \frac{1}{2} \cdot q_{\mathrm{II}}(25, 1929/32)$$

und nach Annahme 5

$$q(100, t = \infty) = q(100, 1929/32).$$

Für die Alter über 25 Jahre erscheint eine Lösung von der Form der Annahme 1 als zu günstig, da ja die absolute Sterblichkeit infolge Krebs und Kreislaufkrankheiten noch zunehmen wird. Es muss eine Lösung gefunden werden, welche die Endsterblichkeit mit zunehmendem Alter der Ausgangssterblichkeit von 1929/32 näherbringt, um schliesslich beim Alter 100 mit dieser identisch zu werden. Der einfachste Vorschlag dafür ist

$$(5) \qquad q(x, t = \infty) = q(x, 1929/32) - \frac{(100 - x)}{75} \cdot \frac{1}{2} q_{\mathrm{II}}(x, 1929/32).$$

Dieser Vorschlag soll gleichzeitig als weitere Annahme gelten. *Damit ist aber schon ein Endwert für alle Alter vorgeschrieben.*

Zahlenmässig ist hier $q_{\mathrm{II}}(x, 1929/32)$ wie folgt bestimmt worden: Bezeichnet man mit $100 \cdot f(x)$ die prozentuale Sterblichkeit infolge der sub A genannten Todesursachen, so ist

$$q_{\mathrm{I}}(x, 1929/32) = q(x, 1929/32) \cdot f(x)$$

und
$$q_{\mathrm{II}}(x, 1929/32) = q(x, 1929/32) \cdot (1 - f(x)).$$

Formel (5) stellt sich somit folgendermassen dar:

$$(5\,a) \quad q(x, t = \infty) = q(x, 1929/32) \cdot \left[1 - \frac{100 - x}{150} \cdot (1 - f(x))\right].$$

Für $f(x)$ wurde je das arithmetische Mittel der beiden Zahlen von 1928 und 1935 genommen. Die Mitte dieser Zeitperiode fällt in die Beobachtungsperiode 1929/32, so dass man die beiden Zahlenreihen $q(x, 1929/32)$ und $f(x)$ praktisch als gleichzeitig bestehend betrachten darf. Da die Werte $f(x)$ nur für ganze Altersgruppen mit Altersintervallen von mindestens 10 Jahren bekannt sind (siehe Figur 6), ordnet man vernünftigerweise die betreffenden Werte $f(x)$ je dem mittleren Alter der Gruppe zu und ermittelt die Zwischenwerte durch lineare Interpolation.

Bezeichnet man die Differenz $q(x, 1929/32) - q(x, \infty)$ mit $\Delta(q)$, so ist nach Formel (5 a)

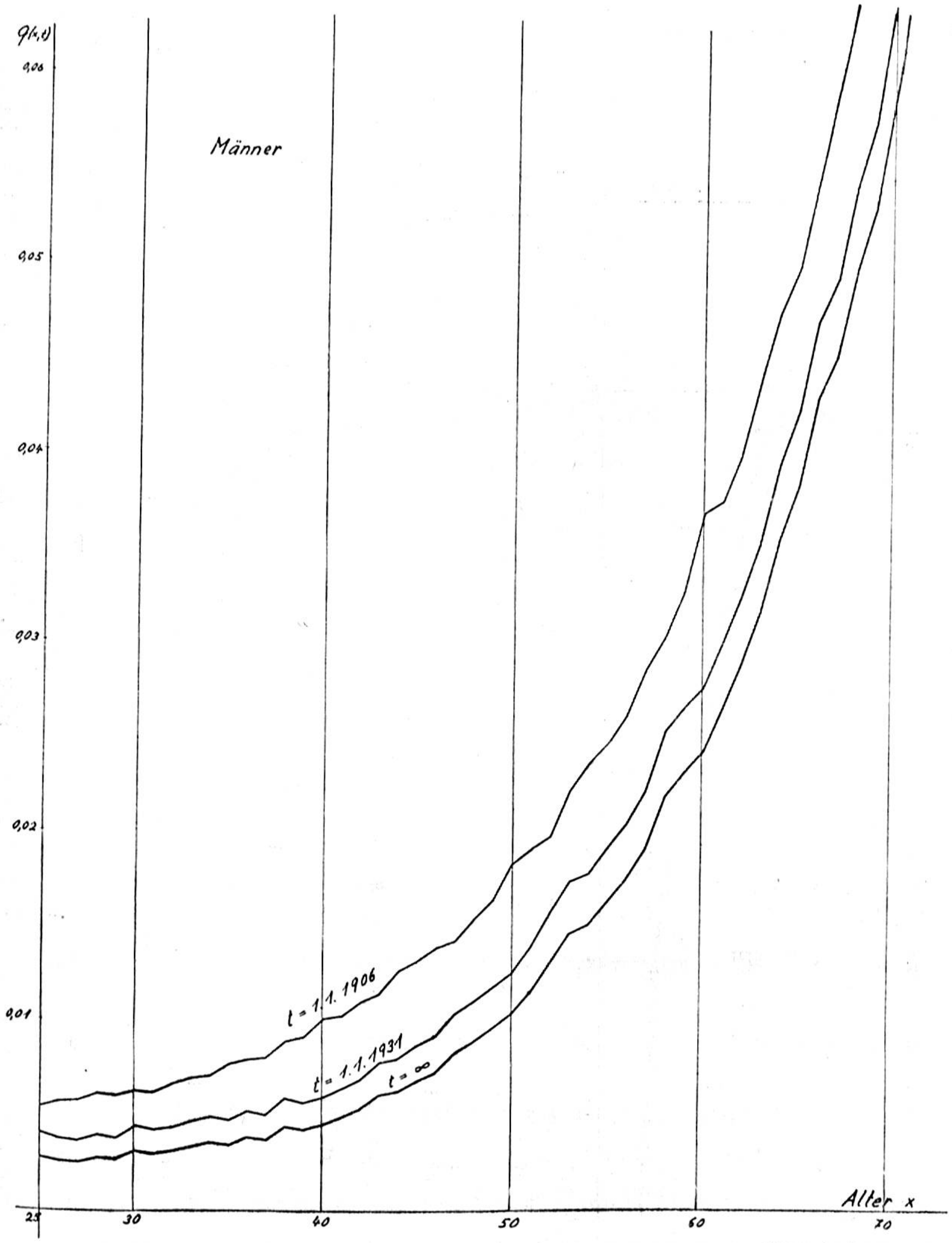
$$\Delta(q) = q(x, 1929/32)\left[1 - f(x)\right] \cdot \frac{100 - x}{150}. \tag{6}$$

In Tabelle II sind enthalten:

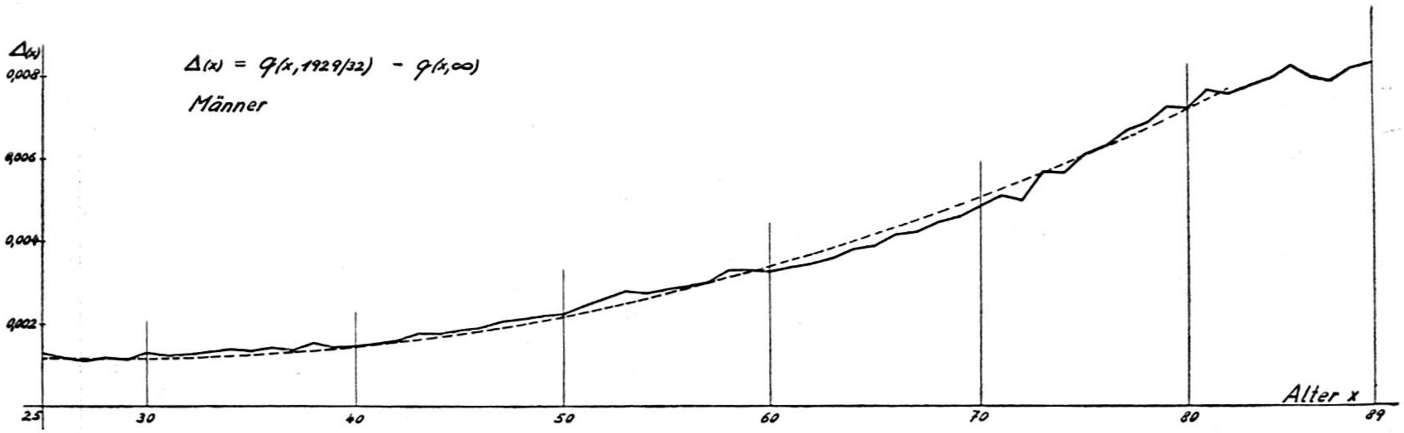
1. Die Werte von $f(x)$.
2. Die Zahlen $q(x, 1929/32)$, nicht ausgeglichene Werte.
3. Die Zahlen $q(x, \infty)$, nach Formel (5 a) berechnet.
4. Die Zahlen $\Delta(q(x))$, nach Formel (6) berechnet.

Figur 9 zeigt eine vergleichende Darstellung der nicht ausgeglichenen Sterbetafelwerte $q(x, 1901/10)$ und $q(x, 1929/32)$ mit den nach Formel (5 a) berechneten Endwerten $q(x, \infty)$. Es ist daraus ersichtlich, dass der Charakter der Kurven $t =$ konstant und $\tau =$ konstant in der Endwertreihe $q(x, \infty)$ erhalten bleibt. In Figur 10 sind die Werte $\Delta(q)$ dargestellt. Zum Vergleich sind in Figur 11 die Sterblichkeitsdifferenzen zwischen den Sterbetafeln 1901/10 und 1929/32 aufgezeichnet. Der Vergleich zeigt, dass der Verlauf der vorausberechneten Differenzen sehr ähnlich dem Verlauf der schon beobachteten Differenzen ist.

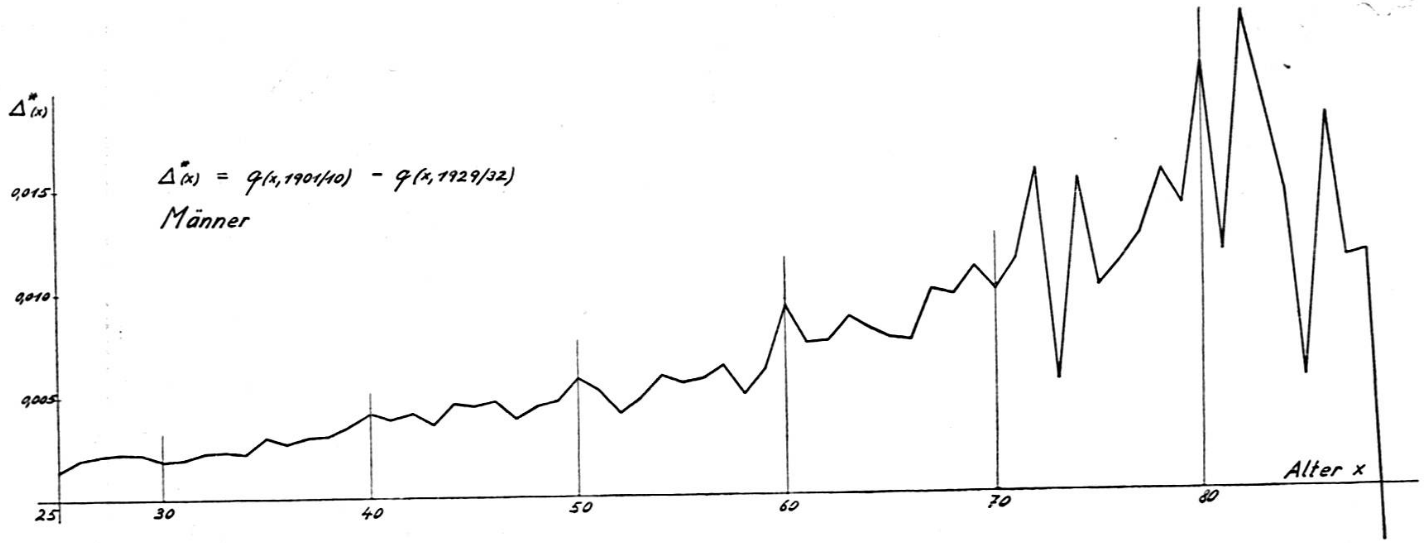
Jetzt ist es auch leicht, eine zukünftige Sterblichkeitsfläche, die den gemachten Annahmen entspricht, zu konstruieren. Die Sterblichkeit soll für alle Alter unter 100 Jahren abnehmen und in abklingender Form dem Endwert zustreben. Bestimmt man nun für das Alter 25 eine Funktion von der Form $q(25, t) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{C}^{-t}$, wobei die Konstanten A, B, C etwa aus den Bedingungen


q(x,t)
0,06
Männer
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
t = 1.1.1906
t = 1.1.1931
t = ∞
25
30
40
50
60
70
Alter x

Figur 9.



Figur 10.



Figur 11.

1. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = q\,(25, t = 0)$ (Der Zeitnullpunkt soll in den
2. $\mathrm{A} \qquad = q\,(25, t = \infty)$ 1. 1. 1931 gelegt werden)

3. $-\mathrm{B}\, lg\, C = \frac{1}{2} \cdot [q\,(25, t = 1) - q\,(25, t = -1)]$

(d. h. die 1. Ableitung der Funktion $A + B\,C^{-t}$ soll zur Zeit $t = 0$ dem tatsächlichen Sterblichkeitsgefälle entsprechen)

zu bestimmen sind, so ist für die Sterblichkeitsfläche folgende Form die naheliegendste:

$$q\,(x, t) = q\,(x, 1929/32) -$$
$$- \left[q\,(x, 1929/32) - q\,(x, \infty)\right] \frac{q\,(25, 1929/32) - q\,(25, t)}{q\,(25{,}1929/32) - q\,(25, \infty)}$$

das heisst

$$(7) \qquad q\,(x, t) = q\,(x, \infty) + \left[q\,(x, 1929/32) - q\,(x, \infty)\right] \cdot C^{-t}$$

oder, indem man $q\,(x, 1929/32) - q\,(x, \infty)$ durch $\Delta\,(q)$ ersetzt

$$(8) \qquad q\,(x, t) = q\,(x, \infty) + \Delta\,(q) \cdot C^{-t}.$$

Die Berechnung der Konstanten ergibt:

$A = 0{,}00255$, $B = 0{,}00117$, $\log C = 0{,}02206$, $\underline{C = 1{,}0520}$.

Tabelle VIII enthält die nach Formel (8) berechneten Werte $q(x, t)$ für die Daten $t = 1.\,1.\,1941$, $1.\,1.\,1951$, $1.\,1.\,1961$, $1.\,1.\,1981$, verglichen mit den Werten $q\,(x, 1929/32)$ und $q\,(x, \infty)$. Die Berechnung erfolgte auf Grund der ausgeglichenen Werte $q\,(x, 1929/32)$.

§ 6.

Kritische Betrachtungen zu dieser Lösung.

Die Annahmen 1, 2, 3 sind früher schon motiviert worden. Ebenso Annahme 5 im Zusammenhang mit der Überalterung.

Annahme 4 wäre als Behauptung unsinnig. Es ist auch unmöglich, einen wahrscheinlichsten Wert für $q\,(25, \infty)$ anzugeben, da für eine Wahrscheinlichkeitsberechnung keine Grundlagen vorhanden sind. Hingegen ist es angesichts dieser Ungewissheit am vernünftigsten, wenn man für den Grenzwert das arithmetische Mittel zwischen den 2 Extremalwerten $q(25, 1929/32)$ und $q_I(25, 1929/32)$ wählt. Das Risiko, weit neben die Wahrheit zu treffen, ist dadurch am kleinsten gemacht.

Die Annahme über die Endwerte $q(x, \infty)$, welche der Formel (5) zugrunde gelegt ist, lässt sich wie folgt begründen: Die Sterblichkeitsabnahme wird für zunehmendes Alter prozentual immer ungünstiger. Man muss allerdings in Betracht ziehen, dass entsprechend unseren hypothetischen Feststellungen (§ 2, S. 119) das maximale Sterblichkeitsgefälle bei den Altern über 65 Jahre noch zu erwarten ist. Dieser Erwartung steht aber die Erwartung der Sterblichkeitsverschlechterung infolge Überalterung gegenüber, so dass hier eine teilweise Kompensation eintreten wird.

Wirft man noch einen Blick auf Figur 9, so fällt die verhältnismässig geringe noch zu erwartende Sterblichkeitsabnahme, verglichen mit der seit 1901/10 beobachteten Sterblichkeitsabnahme, auf.

Zurückkehrend zu Annahme 4 wollen wir noch untersuchen, wie gross die grösste denkbare Abweichung vom Endwert $q(25, \infty)$ ist. Diese Abweichung beträgt, wenn als maximal denkbarer Endwert $q(25, 1929/32)$ und als minimaler Endwert $q(25, 1929/32) \cdot f(25)$ angenommen wird:

$$q(25, \infty) \cdot \frac{1 - f(25)}{1 + f(25)} = 0{,}46 \cdot q(25, \infty).$$

Das heisst, dass der Endwert im schlimmsten Fall 46 % grösser oder kleiner als der durch Formel (5 *a*) vorgeschriebene Endwert $q(25, \infty)$ wäre. Das ist eine sehr grosse Abweichung; aber es ist zu bemerken, dass ein Endwert in der Nähe eines der angegebenen Extremalwerte sehr unwahrscheinlich ist.

§ 7.

Grundsätzliche Bemerkungen zu dieser Lösung.

Es sollen hier noch zwei naheliegende Lösungsvorschläge betrachtet werden.

1. Das Studium der Kurven $q(x = \text{konstant}, t)$ hat eine gewisse Gesetzmässigkeit dieser Kurven ergeben. Z. B. für das Alter 25 beobachtet man seit ca. 1900 eine abklingende Entwicklung. Man könnte

also hinter diesem Verlauf ein Gesetz von der Form $q(25,t) = A + BC^{-t}$ vermuten. Passt man aber den statistischen Werten $q(25, t)$ von 1900 an eine solche Funktion an (Methode der kleinsten Quadrate), so erhält man für $t = \infty$ einen negativen Grenzwert:

$$q(25, \infty) = A \sim -0{,}0012.$$

2. Berechnet man für dasselbe Altersintervall zu verschiedenen Zeiten die Makehamkonstanten, so erhält man für jede Konstante eine Zahlenreihe. Das Makehamsche Gesetz wäre also in der Form

$$q(x, t) = a(t) + b(t) \cdot c(t)^x \text{ zu betrachten.}$$

Berechnet man die Makehamkonstanten auf Grund der Sterbetafeln 1901/10, 1929/32 und $q(x, \infty)$ nach Formel (5 a), unausgeglichene Werte, für das Altersintervall 25 bis 60, so ergeben sich folgende Zahlen:

	a	b	$\log c$	c
1901/10	0,0035759	0,0021349	0,03580	1,0859
1929/32	0,0029663	0,00087903	0,04550	1,1105
$t = \infty$	0,0019612	0,00069974	0,04720	1,1148

Dabei entspricht $x = 0$ dem Alter 27.

Wohl erkennt man, dass die Funktionen $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sich gesetzmässig an die durch Formel (5 a) bestimmten Endwerte resp. $a(\infty)$, $b(\infty)$, $c(\infty)$ anschmiegen; aber es wäre zu sehr der Willkür unterworfen, wollte man nur aus einigen Zahlenwerten heraus auf einen bestimmten Endwert schliessen. Dazu besitzt man zu wenig solcher Zahlentripel $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, indem die Sterbetafeln von 1920/21 und 1921/30 infolge der Nachwirkungen des Weltkrieges 1914/18 unregelmässige Werte liefern. Der Versuch, die Sterblichkeit auf Grund des Verhaltens der Makehamkonstanten vorauszuberechnen, ist von F. Kobi unternommen worden [11]. Die Untersuchung hat jedoch zu keinem positiven Resultat, was die zukünftige Sterblichkeit betrifft, geführt.

---

[11] Kobi: «Untersuchung über die Sterblichkeitsänderung, wenn die Überlebensordnungen das Makehamsche Gesetz befolgen, mit besonderer Berücksichtigung schweizerischer Verhältnisse.» Festgabe Moser, 1931, S. 49 ff.

II. Teil.

§ 8.

Problemstellung. Definition der Sterbensintensität.

Problem: Gibt es eine einfache und brauchbare analytische Darstellung der durch Formel (8) vorgeschriebenen Sterblichkeitsfläche?

Eine solche analytische Darstellung wäre vor allem von theoretischem Interesse.

Es handelt sich also darum, eine biometrische Funktion $\mu(x, t)$ der Sterblichkeitsfläche anzupassen. $\mu(x, t)$ spielt die Rolle der *Sterbensintensität.* Eine Definition der Sterbensintensität war bis jetzt nur üblich für stationäre, d. h. von der Zeit unabhängige Verhältnisse. Die Definition lautet:

$$\mu_x = -\frac{d\,l_x}{l_x\,d\,x} \quad [12]$$

wobei l_x eine fiktive Gesamtheit von Lebenden bedeutet, bei welcher das Ausscheiden durch den Tod die einzige Abgangsursache ist. Der Verlauf einer solchen fiktiven Gesamtheit würde also dem Verlauf einer Generation entsprechen, und l_x ist daher generationsweise zu betrachten. Gegen diese Vorschrift wurde bis anhin in der Praxis bewusst verstossen, indem die Sterbensintensität nur immer auf Grund einer einzigen Sterbetafel abgeleitet wurde. Dasselbe gilt für die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Die Sterbensintensität ist also auch als von der Zeit t, oder besser von der Generation τ abhängig zu betrachten: $\mu_x = \mu(x, \tau)$. Sinngemäss lautet dann die Definition:

$$\mu(x, \tau) = -\frac{\partial\,(l\,(x, \tau))}{l\,(x, \tau) \cdot \partial\,x}\,.$$

[12] Beziehungen der Sterbensintensität zu anderen biometrischen Funktionen sind ausführlich beschrieben in: A. Berger, «Mathematik der Lebensversicherung», Wien 1939.

§ 9.

Makehamflächen.

Das Sterbegesetz von Makeham steht im Vordergrund aller analytischen Darstellungen für die Sterbensintensität. Es wurde bis jetzt nur angewendet für die Kurven t = konstant, und lautet dann:

$$\mu\,(x, t = \text{konstant}) = a + b\,c^x.$$

Das Gesetz eignet sich gut zur Darstellung von μ_x für Intervalle vom Alter 25 bis gegen 60. Erstreckt sich das einbezogene Intervall vom Alter 25 bis über das Alter 60 hinaus, so machen sich merkliche Ungenauigkeiten geltend. Man kann sich in solchen Fällen mit Korrekturen des Makehamschen Gesetzes helfen [13].

Nun gibt es in unserer Sterblichkeitsfläche 2 Gruppen von Kurven, die durch das Makehamsche Gesetz mehr oder weniger genau dargestellt werden können. Es sind die Kurven t = konstant und τ = konstant. Ihre Darstellungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \mu\,(x, \tau) &= a + b\,c^x \\ &= \alpha + \beta \cdot \gamma^x, \end{aligned}$$

wobei a, b, c nur von t, α, β, γ nur von $t - x = \tau$ abhängen. Eine Fläche, die durch eine so beschaffene Funktion $\mu(x, \tau)$ dargestellt wird, nennt man *Makehamfläche* [6] [14]. In einer Untersuchung von H. Cramer und H. Wold [6] wird gezeigt, dass eine solche Funktion $\mu(x, \tau)$ eine der beiden folgenden Formen annehmen muss:

$$(9) \qquad \mu\,(t, \tau) = m_1 + m_2\, e^{k_1 t} + m_3\, e^{k_2 \tau} + m_4\, e^{k_1 t + k_2 \tau}\,, \quad \text{wenn} \left.\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right/_{\tau=0} \neq 0$$

oder

$$(10) \qquad \mu\,(t, \tau) = m_1 + m_2\, e^{k_1 t + k_2 \tau + k_3 t \tau}\,, \quad \text{wenn} \left.\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right/_{\tau=0} = 0.$$

$m_1, m_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ sind absolute Konstanten.

---

[13] Vergleiche: Ch. Willigens: «Die Ausgleichung der schweizerischen Volkssterbetafel für die Jahre 1920/21.» Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft 1926, S. 339 ff.

[14] Hermann Wold: «Sur les surfaces de mortalité.» Extrait des Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 30 mars 1936, t. 202, p. 1132.

Um keine neuen Bezeichnungen einführen zu müssen, sei hier gestattet, je nach Bedarf $\mu(x, t)$, $\mu(x, \tau)$, $\mu(t, \tau)$ zu setzen.

§ 10.

Die durch Formel (8) vorgeschriebene Sterblichkeitsfläche der männlichen schweizerischen Bevölkerung lässt sich nicht durch eine Makehamfläche darstellen.

Beweis der Untauglichkeit von Formel (9).

Hier müssen Fallunterscheidungen getroffen werden.

1. Fall: m_1, m_2, m_3, m_4 sind von Null verschieden. Die Konstanten k müssen durchgehend von Null verschieden angenommen werden, da sonst die Kurven $t =$ konstant und $\tau =$ konstant nicht gleichzeitig Makehamkurven wären.

Für $t =$ *konstant* wird $\mu(x, t) = M_1(t) + M_2(t) \cdot e^{-k_2 x}$.

Da die Kurve mit wachsendem x steigen soll, muss $k_2 < 0$ sein.

Für $\tau =$ *konstant* wird $\mu(x, \tau) = N_1(\tau) + N_2(\tau) \cdot e^{k_1 x}$.

Da die Kurve mit wachsendem x steigen soll, muss $k_1 > 0$ sein.
Für $x =$ *konstant* ergibt sich

$$\mu(x, t) = R_1 + R_2\, e^{k_1 t} + R_3(x) \cdot e^{k_2 t} + R_4(x) \cdot e^{(k_1 + k_2) \cdot t}.$$

Dabei ist $k_1 > 0$ und $R_2 = m_2 \neq 0$ nach Voraussetzung. Der Term $R_2 \cdot e^{k_1 t}$ verunmöglicht daher die Annäherung der Funktion $\mu(x, t)$ an einen festen Grenzwert bei grossem t.

2. Fall: $m_2 = 0$, m_1, m_3, m_4 alle nicht gleich Null.

Für $t =$ *konstant* wird $\mu(x, t) = M_1 + M_2(t) \cdot e^{-k_2 x}$,

wobei wieder $k_2 < 0$ sein muss, und $M_2(t) > 0$ als Koeffizient der Exponentialfunktion in der Makehamfunktion.

Für $\tau =$ *konstant* wird $\mu(x, \tau) = N_1(\tau) + N_2(\tau) \cdot e^{k_1 x}$,

wobei $k_1 > 0$, und $N_2(\tau) > 0$ als Koeffizient der Exponentialfunktion in der Makehamfunktion.
Für $x =$ *konstant* ergibt sich

$$\mu(x, t) = S_1 + S_2(x) \cdot e^{k_2 t} + S_3(x) \cdot e^{(k_1+k_2)\cdot t}.$$

Dabei ist $S_3(x) \not\equiv 0$.

Es soll nun gezeigt werden, dass $k_1 + k_2 > 0$.

Man bilde, wenn $t = t_0 =$ konstant

$$\frac{\partial \mu(x, t_0)}{\partial x} = - M_2(t_0) \cdot e^{-k_2 x} \cdot k_2$$

und wenn $\tau = \tau_0 =$ konstant

$$\frac{\partial \mu(x, \tau_0)}{\partial x} = N_2(\tau_0) \cdot e^{k_1 x} \cdot k_1.$$

Wenn bewiesen wird, dass das Verhältnis der 1. Ableitung der Kurve $t = t_0 =$ konstant zur 1. Ableitung der Kurve $\tau = \tau_0 =$ konstant, ausgehend vom festen Punkte $x_0, t_0, t_0 - x_0 = \tau_0$, abnimmt, d. h. dass für jeden positiven Wert von ξ gilt

$$(11) \qquad \frac{\dfrac{\partial \mu(x_0+\xi, t_0)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial \mu(x_0+\xi, \tau_0)}{\partial \xi}} < \frac{\left.\dfrac{\partial \mu(x_0+\xi, t_0)}{\partial \xi}\right/_{\xi=0}}{\left.\dfrac{\partial \mu(x_0+\xi, \tau_0)}{\partial \xi}\right/_{\xi=0}}$$

oder eingesetzt

$$\frac{M_2(t_0) \cdot (-k_2) \cdot e^{-k_2(x_0+\xi)}}{N_2(\tau_0) \cdot k_1 \cdot e^{k_1(x_0+\xi)}} < \frac{M_2(t_0) \cdot (-k_2) \cdot e^{-k_2 x_0}}{N_2(\tau_0) \cdot k_1 \cdot e^{k_1 x_0}},$$

woraus, da die Quotienten positiv sind, $1 < e^{(k_1+k_2)\cdot\xi}$, so ist auch $k_1 + k_2 > 0$.

Zum Beweise der Ungleichung (11) betrachte man die durch Formel (8) gegebene Sterblichkeitsfläche:

$$q(x, t) = q(x, \infty) + \Delta(q(x)) \cdot C^{-t}.$$

Es wird nun angenommen, dass die beiden Wertereihen $q(x, \infty)$ und $\Delta(q)$ je durch eine differenzierbare Funktion von x dargestellt werden können (vgl. Fig. 10 und 12). Diese zwei Funktionen sollen der Einfachheit halber mit $q(x, \infty)$ und $\Delta(x)$ bezeichnet werden. Jetzt bilde man durch Differentiation der Formel (8) die Ableitungen für $t = t_0 =$ konstant:

$$\frac{\partial\, q\,(x, t_0)}{\partial\, x} = q'\,(x, \infty) + \Delta'\,(x) \cdot C^{-t_0},$$

für $\tau = \tau_0 =$ konstant:

$$\frac{\partial\, q\,(x, \tau_0)}{\partial\, x} = q'\,(x, \infty) + \Delta'\,(x) \cdot C^{-t_0} - \Delta\,(x) \cdot (lg\, C) \cdot C^{-t_0}.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung $q(x, t) \sim \mu\left(x + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}\right)$ ist es gleichgültig, ob man die Ungleichung (11) für $\mu(x, t)$ oder für $q(x, t)$ beweist. Nun betrachte man den Quotienten

$$Q\,(\xi) = \frac{\dfrac{\partial\, q\,(x_0 + \xi, t_0)}{\partial\, \xi}}{\dfrac{\partial\, q\,(x_0 + \xi, \tau_0)}{\partial\, \xi}} =$$

$$= \frac{q'\,(x_0 + \xi, \infty) + \Delta'\,(x_0 + \xi) \cdot C^{-t_0}}{q'\,(x_0 + \xi, \infty) + \Delta'\,(x_0 + \xi) \cdot C^{-(t_0 + \xi)} - \Delta\,(x_0 + \xi) \cdot C^{-(t_0 + \xi)} \cdot \lg C} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\Delta'\,(x_0 + \xi)}{q'\,(x_0 + \xi, \infty)} \cdot C^{-t_0}}{1 + \dfrac{\Delta'\,(x_0 + \xi)}{q'\,(x_0 + \xi, \infty)} \cdot C^{-(t_0 + \xi)} - \dfrac{\Delta\,(x_0 + \xi)}{q'\,(x_0 + \xi, \infty)} \cdot C^{-(t_0 + \xi)} \cdot \lg C}.$$

Wird $q'\,(x_0 + \xi, \infty) \neq 0$ angenommen für alle betrachteten Werte von ξ, und setzt man

$$\frac{\Delta'\,(x_0 + \xi)}{q'\,(x_0 + \xi, \infty)} = \varphi\,(x_0 + \xi)$$

und
$$\frac{\Delta\,(x_0 + \xi)}{q'\,(x_0 + \xi, \infty)} \cdot \lg C - \varphi\,(x_0 + \xi) = \psi\,(x_0 + \xi),$$

so ist
$$Q\,(\xi) = \frac{1 + \varphi\,(x_0 + \xi) \cdot C^{-t_0}}{1 - \psi\,(x_0 + \xi) \cdot C^{-(t_0 + \xi)}}$$

Wenn nun gezeigt werden kann, dass sowohl $\varphi(x_0 + \xi)$ als auch $\psi(x_0 + \xi)$ positiv sind für alle Werte $\xi > 0$ und mit zunehmendem ξ monoton kleiner werden, so ist Ungleichung (11) bewiesen. Dieser Beweis ist zahlenmässig zu erbringen, da ja unsere Sterblichkeitsfläche zahlenmässig vorgegeben ist (nach Formel (8)). In Tabelle III sind die Zahlenreihen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, sowie ein Beispiel für den Verlauf von $Q(\xi)$, wenn $x_0 = 29{,}5$ Jahre und $t_0 = 0$ (1. 1. 1931) angenommen wird, gegeben.

Die Werte $q'(x, \infty)$ und $\varDelta'(x)$ wurden wie folgt berechnet:

$$q'(x, \infty) \sim \frac{\bar{q}\left(x + 2\frac{1}{2}, \infty\right) - \bar{q}\left(x - 2\frac{1}{2}, \infty\right)}{5} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\sum\limits_{k=\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{2}} q(x + k, \infty) - \frac{1}{5}\sum\limits_{k=\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{2}} q(x - k, \infty)}{5}.$$

Der Fehler, der durch die Bildung des arithmetischen Mittels

$$\frac{1}{5}\sum_{k=\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{2}} q(x \pm k, \infty)$$

entsteht, wird durch die Differenzbildung praktisch aufgehoben. Ebenso:

$$\varDelta'(x) \sim \frac{\frac{1}{5}\sum\limits_{k=\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{2}} \varDelta(q(x + k)) - \frac{1}{5}\sum\limits_{k=\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{2}} \varDelta(q(x - k))}{5}.$$

Aus Tabelle III ist ersichtlich, dass die Funktionen resp. die Zahlenreihen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ positiv sind und mit zunehmendem ξ rasch abnehmen. Die gelegentlichen Unregelmässigkeiten, besonders bei $\psi(x)$, sind als Zufälligkeiten zu betrachten und bei der Roheit unseres Materials nicht verwunderlich.

Damit ist also bewiesen, dass $k_1 + k_2 > 0$ für die durch Formel (8) gegebene Sterblichkeitsfläche ab 1. 1. 1931. Derselbe Beweis liesse sich unschwer erbringen für die schweizerische Sterblichkeitsfläche zwischen 1900 und 1931. Wir wollen das aber nicht wie oben allgemein beweisen, sondern nur durch ein Beispiel illustrieren:

Für die Kurve τ = konstant = 1. 1. 1878 wird $k_1 = 0{,}10247$.

Für die Kurve t = konstant = 1. 1. 1906 wird $k_2 = -\,0{,}082433$,

d. h. $k_1 + k_2 = 0{,}020037 > 0$.

Dabei geht das der Berechnung zugrunde gelegte Altersintervall bei beiden Kurven vom Alter 25 bis zum Alter 60.

Zurückkehrend zu Fall 2 folgt nun, da $k_1 + k_2 > 0$, dass die Kurve $\mu(x, t)/_{x=\text{konstant}}$ mit wachsender Zeit keinem festen Grenzwert zustreben kann.

Alle weiteren möglichen Fälle, wo eine oder mehrere der Konstanten m verschwinden, lassen sich, wie man leicht einsieht, entweder auf Fall 1 oder Fall 2 zurückführen, oder sie sind trivial.

Beweis der Untauglichkeit der Formel (10).

Diese Formel kommt nur in Frage, wenn

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\Big/_{\tau=0} = 0\,.$$

$\alpha(\tau)$ stellt die Ordinaten der (horizontalen) Asymptoten der Kurven τ = konstant dar. Nimmt man an, dass $\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}$ für einen gewissen Wert von τ verschwindet, und wählt man jenen Wert von τ als den τ-Nullpunkt, so müsste man Formel (10) als denkbar zulassen. Dann ergibt sich aber folgender Widerspruch:

Für t = konstant wird $\mu(x, t) = m_1 + M(t) \cdot e^{-(k_1 + k_3 t)\, x}$,

wobei $k_2 + k_3 t < 0$ sein muss. Da diese Beziehung auch für grosse t erfüllt sein muss, folgt $k_3 < 0$.

Für τ = konstant wird $\mu(t, \tau) = m_1 + N(\tau) \cdot e^{(k_1 + k_3 \tau) \cdot t}$,

wobei $k_1 + k_3 \tau > 0$ sein muss, und zwar für beliebig grosse τ. Da aber $k_3 < 0$, ist diese Bedingung nicht erfüllt.

Also müssen wir auch Formel (10) ablehnen.

Man könnte indessen denken, dass Formel (9) oder (10) wenigstens für einige zusammenhängende Jahrzehnte brauchbar wäre. Allein ein Versuch zeigt, dass die Anpassung einer Makehamfläche an die schweizerische Sterblichkeitsfläche schon für die Dauer von 20 Jahren unmöglich ist. Der Hauptnachteil der Makehamfläche liegt also darin, dass sie auf weite Sicht unbrauchbar ist, d. h. dass sie für die fernere Zukunft unmögliche Werte liefert.

§ 11.

Eine praktische analytische Darstellung der durch Fomel (8) vorgeschriebenen Sterblichkeitsfläche.

Das naheliegendste ist, die in Formel (8)

$$q(x, t) = q(x, \infty) + \Delta(q) \cdot C^{-t}$$

enthaltenen festen Zahlenreihen $q(x, \infty)$ und $\Delta(q)$ durch Funktionen darzustellen. Es ist dabei klar, dass eine analytische Darstellung über das Alter 85 hinaus nicht in Betracht fällt infolge der Ungesetzmässigkeit der betreffenden Zahlenwerte.

Die Zahlenreihe $\Delta(q)$ ist durch eine Parabel 2. Grades mit befriedigender Genauigkeit angeglichen worden (siehe Fig. 10). Die Anpassung erfolgte mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

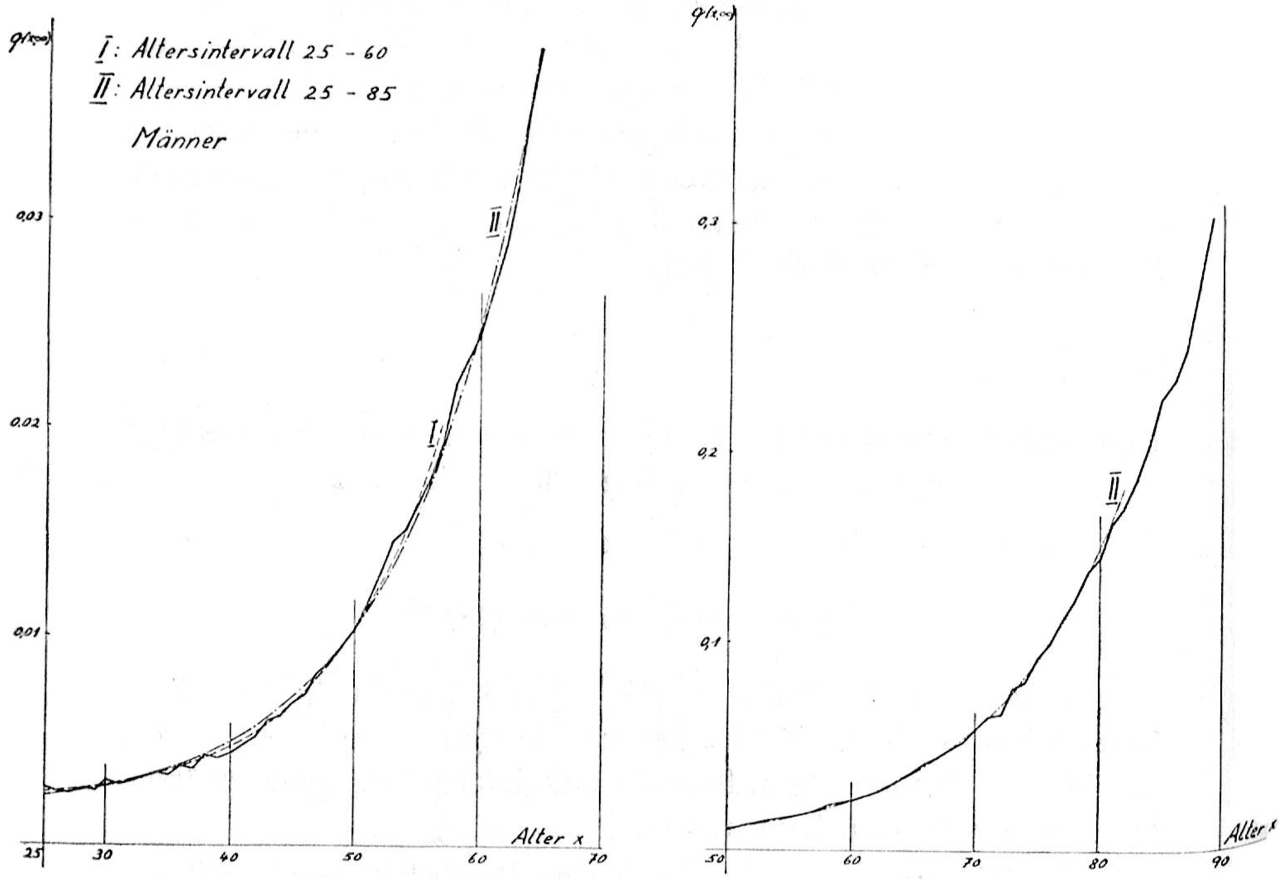
Für die Darstellung der Zahlenreihe $q(x, \infty)$ kommt in erster Linie das Makehamsche Gesetz in Frage:

$$\mu(x, \infty) = a + b\, c^{x}.$$

Tabelle IV vergleicht die Zahlen $q(x, \infty)$ mit den entsprechenden Werten von zwei diesen Zahlen angepassten Makehamfunktionen. Im ersten Fall ist zur Bestimmung der Makehamfunktion das Altersintervall 25 bis 60 einbezogen worden, im zweiten Fall das Altersintervall 25 bis 85. Die Berechnung der Makehamkonstanten erfolgte im Prinzip nach der Methode der kleinsten Quadrate [1]). Figur 12 zeigt die Bilder der beiden Makehamkurven I und II im Vergleich mit den Werten $q(x, \infty)$.

---

[1]) Beschreibungen dieser Methode, angewendet auf die Makehamfunkion, finden sich in [6], sowie in [13].



Figur 12.

Bei der Makehamfunktion II ergeben sich naturgemäss grössere prozentuale Abweichungen von den Werten $q(x, \infty)$.

Ersetzt man nun $\Delta(q(x))$ durch $(\varrho x^2 + \sigma x + \pi)$ und $q(x, \infty)$ durch $a + b^* c^x$, so nimmt Formel (8) folgende Gestalt an:

$$q^* (x, t) = a + b^* c^x + (\varrho x^2 + \sigma x + \pi) \cdot C^{-t},$$

woraus für die Sterbensintensität folgt:

$$\mu (x, t) = a + b c^x + (r x^2 + s x + p) \cdot C^{-t}. \tag{12}$$

Wählt man den Nullpunkt von x *beim Alter 25 ($x = 0$; Alter 25)* und den Nullpunkt der Zeit t *beim 1. 1. 1931 ($t = 0$: 1. 1. 1931)*, so nehmen die Konstanten der Formel (12) folgende Werte an:

I. Altersintervall 25 bis 60	II. Altersintervall 25 bis 85
$a = 0{,}0019612$ $b = 0{,}00053326$ $c = 1{,}1148$	$a = 0{,}0014439$ $b = 0{,}00086630$ $c = 1{,}0965$
$r = 2{,}3411 \cdot 10^{-6}$ $s = -2{,}1681 \cdot 10^{-5}$	$p = 1{,}2196 \cdot 10^{-3}$ $C = 1{,}0520$

Wir können abschliessend Formel (12) als einfache und durchsichtige analytische Darstellung unserer Sterblichkeitsfläche ansehen. Formel (8) und Formel (12) gelten für $t \geqslant 1.\,1.\,1931$.

§ 12.

Betrachtung über die Form unserer Lösung.

Die in § 2 bei der Diskussion der Kurven $x =$ konstant gemachten hypothetischen Wahrnehmungen lassen sich wie folgt analytisch zusammenfassen:

Es sei $g(x, \tau)$ eine stetige und differenzierbare funktionelle Darstellung der durch Formel (3) gegebenen Sterblichkeitsfläche.

1. $g(x, \tau)$ nimmt für jedes Alter x, ausgehend von einem festen Anfangswert $g(x, \tau = -\infty)$, monoton ab, und strebt, nachdem die Abnahme pro Zeiteinheit ein Maximum erreicht hat, einem festen Endwert $g(x, \tau = \infty)$ zu.

2. Setzt man $g(x, \tau = -\infty) - g(x, \tau_0) = \varDelta(x)$, wobei $\varDelta(x)$ nur von x abhängt, und $\tau_0 = 1.\,1.\,1876$, so ist

$$\frac{\dfrac{\partial\, g(x, \tau)}{\partial \tau}}{\varDelta(x)} = K(\tau),$$

d. h. nur von τ abhängig.

3. $\text{Max} / K(\tau) / = K(\tau_0)$ [15], [16] [1]).

Aus 2 erhält man durch Integration über τ:

$$g(x, \tau) = \Delta(x) \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau)\, d\tau + g(x, \tau_0)$$

oder, wenn $$H(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau)\, d\tau$$ gesetzt wird,

$$g(x, \tau) = g(x, \tau_0) + \Delta(x) \cdot H(\tau) .$$

Diese Lösungsform unterscheidet sich grundsätzlich von Formel (8) resp. (12) nur dadurch, dass ihr eine generationsweise Betrachtung zugrunde liegt. Formel (8) und (12) hingegen sind entstanden, indem man von einem festen Kalenderjahr ausging.

III. Teil.

§ 13.

Die Berechnung der Anzahlfläche.

Die auf Seite 112 beschriebenen Lebendengesamtheiten $V(x, t)$ bzw. $V(x, \tau)$ sollen nun durch eine biometrische Funktion $L(x, t)$ ersetzt werden. $L(x, t)$ stellt über der x—t—Ebene eine Fläche dar, die mit *Anzahlfläche* bezeichnet werden soll. $L(x, t) \cdot dx$ bedeutet die Anzahl der zur Zeit t im Altersintervall $(x, x + dx)$ vorhandenen Personen. Offensichtlich besteht zwischen $L(x, t)$ und $V(x, t)$ folgender Zusammenhang: für ein festes t ist

$$V(x, t) = \int_{x}^{x+1} L(x, t) \cdot d\,x .$$

---

[1]) Eine analoge Hypothese ist einer Untersuchung der schwedischen Sterblichkeitsfläche zugrunde gelegt worden:

[15] Afzalipour: «Contribution à l'étude de la théorie mathématique de la démographie.» Thèse, Paris 1936. Das Wesentliche dieser Arbeit ist beschrieben in:

[16] Delaporte: «Evolution de la mortalité française depuis un siècle.» Journal de la Société de statistique de Paris, N° 7, juillet 1938.

Nimmt man an, dass Geburten und Sterbefälle gleichmässig auf ein Jahr verteilt sind, so darf $V(x, t) \sim L\left(x + \frac{1}{2}, t\right)$ gesetzt werden. Es sei daran erinnert, dass das durchschnittliche Alter der Lebendengesamtheiten $V(x, t)$ $x + \frac{1}{2}$ beträgt (siehe S. 112).

Sinngemäss ist dann die Sterbensintensität

$$\mu(x, \tau) = -\frac{\partial\left[L\left(x - \frac{1}{2}, \tau\right)\right]}{L\left(x - \frac{1}{2}, \tau\right) \partial x}.$$

Setzt man noch $L\left(x - \frac{1}{2}, \tau\right) = l(x, \tau)$, so dass also $l(x, \tau) \sim V(x - 1, \tau)$, so wird:

$$\mu(x, \tau) = -\frac{\partial\left[l(x, \tau)\right]}{l(x, \tau) \cdot \partial x}.$$

$l(x, \tau)$ ist jetzt nicht mehr eine fiktive Gesamtheit von Lebenden, sondern stellt die effektiven Bevölkerungszahlen als biometrische Funktion dar. Nun erhält man durch Integration:

$$l(x, \tau) = l(x_0, \tau)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \mu(x, \tau)\, dx}.$$

Wir betrachten jetzt eine feste Generation $\tau = \tau_0$. Ausgehend vom Alter x_0 und von der bekannten Zahl $l(x_0, \tau_0)$ wird, wenn $\mu(x, \tau_0)$ nach Formel (12) eingesetzt wird:

$$\text{(14)} \qquad V(x - 1, \tau_0) = l(x, \tau_0) = l(x_0, \tau_0) \cdot e^{-\left[Ex + F \cdot c^x + P_2(x) \cdot C^{-(\tau_0 + x)}\right]_{x_0}^{x}},$$

wobei E, F, c, C absolute Konstanten sind, und $P_2(x)$ ein Polynom 2. Grades in x ist.

Formel (14) gilt natürlich nur, wenn man von Wanderungen absieht. Die dadurch entstehenden Fehler lassen sich nicht berechnen.

Nimmt man den Nullpunkt des Alters x beim Alter 25 und den Nullpunkt der Zeit t beim 1. 1. 1931 an, so erhalten die Konstanten der Formel (14) folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} E &= 0{,}0014439 \\ F &= 0{,}0094057 \\ c &= 1{,}0965 \end{aligned}\right\} \text{ entsprechend der Makehamfunktion II (s. S. 145).}$$

$$P_2(x) = 0{,}46088 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1{,}3878 \cdot 10^{-3} \cdot x + 5{,}1330 \cdot 10^{-2}$$

$$C = 1{,}0520.$$

In Tabelle V sind die Bevölkerungszahlen der schweizerischen Bevölkerung von 5 zu 5 Jahren, im Altersintervall 25 bis 85, auf Ende 1960 nach Formel (14) berechnet: $V(x, 1.1.1961)$. Als Ausgangsbasis dienten die Zahlen $V(x, 1.1.1937)$, welche durch Fortschreibung ab 1. 1. 1931 (Volkszählung) ermittelt wurden.

Zum Vergleich sind die entsprechenden Zahlen der «Vorausberechnung der schweizerischen Bevölkerung bis Ende 1960», herausgegeben vom Eidgenössischen Statistischen Amt, herangezogen [17] [18].

Die Vorausberechnung durch das Eidgenössische Statistische Amt geschah ebenfalls ab 1. 1. 1937. Die Zugangsgesamtheiten $V(0, t)$ wurden in unserer Berechnung vom Eidgenössischen Statistischen Amt übernommen.

Ferner zeigt Tabelle V einen Vergleich der nach Formel (8) berechneten einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x, 1959)$ mit den entsprechenden Werten des Eidgenössischen Statistischen Amtes, welche als Grundlage der amtlichen Bevölkerungsvorausberechnung dienten. Die Werte nach Formel (8) sind, wie man bemerkt, durchschnittlich pessimistischer als die amtlichen, besonders in den höheren Altern.

Für die praktische Vorausberechnung von Sterbenswahrscheinlichkeiten und Lebendengesamtheiten empfiehlt es sich, Überlebensordnungen nach Formel (8) aufzustellen. Dadurch werden die den analytischen Formeln (12) und (14) anhaftenden Ungenauigkeiten ausgeschaltet.

§ 14.

Versicherungswerte.

Formel (7) kann zur Herleitung von Überlebensordnungen benützt werden. Man wird dabei mit Vorteil ausgeglichene Werte von

---

[17] Vgl. «Zeitschrift für Schweizer Statistik», 1938, S. 210.
[18] Ebenso: «Statistisches Jahrbuch der Schweiz», 1938.

$q(x, 1929/32)$ und $q(x, \infty)$ verwenden. Statt die Werte $q(x, \infty)$ nach irgendeiner Methode auszugleichen, kann man ebensogut die nach Formel (5 a) berechneten Werte gebrauchen, wobei aber wieder die ausgeglichenen Werte $q(x, 1929/32)$ eingesetzt werden sollen. Der Faktor $f(x)$ in Formel (5 a) soll vernünftigerweise nicht ausgeglichen werden.

Als Beispiel ist in Tabelle VI eine Absterbeordnung für $\tau = t = \infty$, d. h. für den angenommenen Endzustand; Männer; Zinsfuss $i = 3{,}5\,\%$, gegeben.

In Tabelle VII sind nun einige Versicherungswerte, berechnet aus den Absterbeordnungen $t = \infty$, $\tau = 1.\,1.\,1916$, 1901/10, Männer, Zinsfuss $i = 3{,}5\,\%$, miteinander verglichen. Wie zu erwarten ist, differieren die Versicherungswerte entsprechend den Absterbeordnungen $\tau = 1.\,1.\,1916$ und $\tau = t = \infty$ nur wenig voneinander, wogegen die Unterschiede von den Werten 1901/10 zum Teil beträchtlich sind; z. B. bei der temporären Todesfallversicherung und bei der aufgeschobenen Leibrente.

Literaturverzeichnis.

[1] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* «Schweizerische Volkssterbetafeln 1876 bis 1932.» Beiträge zur schweizerischen Statistik, Heft 4, 1935.

[2] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* «Ergebnisse der Eidgenössischen Volkszählung vom 1. 12. 1910.» Schweizerische Statistik, 204. Lieferung, 1917.

[3] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* «Schweizerische Statistik», 162. Lieferung, 1908.

[4] *A. R. Davidson and Reid:* «On the Calculation of Rates of Mortality.» T. F. A. 11 (1927).

[5] *V. P. A. Derrick:* «Observations of (1) Errors of Age in the Population Statistics of England and Wales, and (2) the Changes in Mortality indicated by the national records.» J. I. A. 58 (1927).

[6] *H. Cramer and H. Wold:* «Mortality Variations in Sweden.» Skandinavisk Aktuarietidskrift 1935.

[7] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* «Statistische Quellenwerke der Schweiz», Heft 2, Heft 73.

[8] *J. Aebly:* «Untersuchungen über die Bewegung der Krebsmortalität in der Schweiz in den Jahren 1880 bis 1915.» Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 14, 1919.

[9] *H. Wyss:* «Die Krebssterblichkeit in der Schweiz.» Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 22, 1927.

[10] *H. Steiner-Stoss:* «Der Einfluss der Lungentuberkulose auf die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung 1901—1910.» Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 20, 1925, und Heft 1.

[11] *Kobi:* «Untersuchung der Sterblichkeitsänderung, wenn die Überlebensordnungen das Makehamsche Gesetz befolgen, mit besonderer Berücksichtigung schweizerischer Verhältnisse.» Festgabe Moser, 1931.

[12] *A. Berger:* «Mathematik der Lebensversicherung.» Wien, 1939.

[13] *Ch. Willigens:* «Die Ausgleichung der schweizerischen Volkssterbetafel für die Jahre 1920/21.» Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, 1926.

[14] *H. Wold:* «Sur les surfaces de mortalité.» Extrait des Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences, séance du 30 mars 1936, t. 202.

[15] *Afzalipour:* «Contribution à l'étude de la théorie mathématique de la démographie.» Thèse, Paris 1936.

[16] *Delaporte:* «Evolution de la mortalité française depuis un siècle.» Journal de la Société de statistique de Paris, N° 7, juillet 1938.

[17] *Schweizerische Statistische Gesellschaft:* «Zeitschrift für Schweizer Statistik», 1938.

[18] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* «Statistisches Jahrbuch der Schweiz», 1938.

Tabellenteil.

Tabelle I.

Ausgewählte Todesursachen in % der Gesamtsterblichkeit der im betreffenden Jahre lebenden männlichen Bevölkerung.

Jahr	Selbstmord und Unfall	Pocken Masern Scharlach Diphtherie Keuchhusten Typhus	Tuberkulose	Grippe	Atmungsorgane	Krebs	Übrige Ursachen
	%	%	%	%	%	%	%
1881	5,89	7,74	11,05	.	11,42	4,23	59,67
82	5,87	7,23	11,84	.	12,22	4,33	58,51
83	6,00	5,06	12,86	.	11,01	4,75	60,32
84	5,94	6,17	12,88	.	9,27	4,81	60,93
85	5,81	6,04	13,51	.	10,96	4,80	58,88
86	6,07	5,17	13,39	.	10,56	5,40	59,41
87	5,70	4,04	12,64	.	11,27	5,41	60,94
88	5,95	3,92	13,73	.	11,85	5,77	58,78
89	5,97	5,20	13,12	.	10,78	5,51	59,42
90	5,57	4,62	13,49	0,83	12,32	5,47	57,70
1891	6,11	5,68	13,00	.	11,87	5,64	57,70
92	6,17	4,43	13,07	.	10,86	6,26	59,21
93	6,52	5,46	12,27	0,83	11,63	5,97	57,32
94	6,22	5,59	13,12	0,66	12,49	5,99	55,93
95	6,24	3,56	13,70	.	11,14	6,44	58,92
96	6,82	3,75	14,45	.	10,56	6,88	57,54
97	6,74	3,20	14,49	.	10,13	7,24	58,20
98	6,40	3,49	13,37	.	10,33	7,02	59,39
99	7,51	3,72	13,08	.	10,73	7,05	57,91
1900	6,61	4,23	13,95	.	11,69	6,92	56,60
01	7,48	5,16	14,28	.	9,25	6,63	57,20
02	7,25	3,25	14,53	.	9,11	6,82	59,04
03	7,01	3,11	14,34	.	10,53	6,91	58,10
04	7,36	4,42	14,06	.	8,90	6,91	58,35
05	7,09	3,95	14,35	1,62	8,88	6,71	57,40
06	7,20	3,36	13,92	0,64	8,43	7,26	59,19

Tabelle I.

Jahr	Selbstmord und Unfall	Pocken Masern Scharlach Diphtherie Keuchhusten Typhus	Tuberkulose	Grippe	Atmungsorgane	Krebs	Übrige Ursachen
	%	%	%	%	%	%	%
1907	7,48	3,13	14,16	1,49	8,93	6,90	57,91
08	7,85	2,56	14,02	1,06	10,78	7,36	56,37
09	7,58	3,39	13,46	1,15	9,46	7,12	57,84
1910	7,90	3,05	14,06	0,67	8,77	7,47	58,08
11	8,27	2,52	12,52	1,66	8,43	7,23	59,37
12	8,46	2,43	13,65	0,60	8,66	8,45	57,75
13	8,37	2,46	13,19	1,43	8,81	8,19	57,55
14	8,20	2,35	13,14	0,69	8,33	8,63	58,66
15	7,99	2,52	13,53	1,41	8,80	8,71	57,04
16	7,78	1,98	14,14	1,50	8,98	9,29	56,33
17	7,37	2,10	14,12	1,36	10,13	8,75	56,17
18	5,08	1,65	9,11	32,17	6,60	6,04	39,35
19	7,55	2,20	13,33	6,63	8,53	9,00	52,76
20	7,90	2,77	11,29	6,38	8,29	8,89	54,48
1921	8,67	1,98	11,73	0,89	5,25	10,52	60,96
22	8,28	1,68	11,46	3,04	5,04	10,05	60,45
23	9,35	1,42	11,97	1,10	4,09	11,00	61,07
24	8,79	0,87	11,31	2,79	4,39	11,49	60,36
25	8,71	1,57	11,80	2,25	4,75	11,05	59,87
26	9,82	1,13	11,28	1,60	4,76	11,40	60,01
27	9,67	1,07	10,63	5,06	5,10	11,61	56,86
28	10,64	1,52	10,30	1,56	6,47	11,68	57,83
29	10,16	0,88	9,96	3,24	6,63	11,47	57,66
1930	10,68	.	10,33	1,03	9,92	12,69	55,35
31	10,16						
32	10,93						
33	10,85	0,68	8,76	2,27	5,45	12,17	59,82
34	10,71	.	8,75	.	.	13,42.	
35	10,06	0,55	7,69	3,46	5,37	12,73	60,14
36	10,25						
37							

Tabelle II.

1. Der Faktor $f(x)$.
2. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x, 1929/32)$, nicht ausgeglichen.
3. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x, \infty)$, nach Formel ($5a$) berechnet.
6. Die Zahlen $\Delta(q_{(x)})$, nach Formel (6) berechnet.

Alter x	$f(x)$	$q(x, 1929/32) \cdot 10^5$	$q(x, \infty) \cdot 10^5$	$\Delta(q(x)) \cdot 10^5$	Alter x	$f(x)$	$q(x, 1929/32) \cdot 10^5$	$q(x, \infty) \cdot 10^5$	$\Delta(q(x)) \cdot 10^5$
25	0,3734	408	280	128	52	0,4838	1578	1317	261
26	0,3717	376	259	117	53	0,4921	1747	1469	278
27	0,3700	366	254	112	54	0,5004	1790	1516	274
28	0,3683	393	274	119	55	0,5087	1920	1637	283
29	0,3666	380	266	114	56	0,5183	2047	1758	289
30	0,3649	444	312	132	57	0,5279	2225	1924	301
31	0,3632	423	299	124	58	0,5375	2535	2207	328
32	0,3615	438	311	127	59	0,5472	2657	2328	329
33	0,3598	468	334	134	60	0,5569	2766	2439	327
34	0,3581	495	355	140	61	0,5666	2998	2660	338
35	0,3565	476	343	132	62	0,5763	3229	2883	346
36	0,3634	526	383	143	63	0,5860	3515	3156	359
37	0,3703	505	371	134	64	0,5957	3925	3544	381
38	0,3772	593	440	153	65	0,6054	4220	3831	389
39	0,3841	569	426	143	66	0,6077	4696	4279	417
40	0,3910	598	452	146	67	0,6100	4929	4506	423
41	0,3979	644	492	152	68	0,6123	5401	4954	447
42	0,4048	693	533	160	69	0,6146	5744	5286	458
43	0,4118	787	611	176	70	0,6169	6340	5854	486
44	0,4188	805	630	175	71	0,6192	6953	6441	512
45	0,4258	875	691	184	72	0,6215	7069	6569	500
46	0,4340	922	734	188	73	0,6237	8403	7834	569
47	0,4423	1042	837	205	74	0,6259	8751	8184	567
48	0,4506	1108	897	211	75	0,6281	9861	9250	611
49	0,4589	1184	966	218	76	0,6286	10607	9977	630
50	0,4672	1261	1037	224	77	0,6291	11769	11099	670
51	0,4755	1404	1163	241	78	0,6296	12692	12003	689

Tabelle II.

Alter x	$f(x)$	$q(x, 1929/32) \cdot 10^5$	$q(x, \infty) \cdot 10^5$	$\Delta(q(x)) \cdot 10^5$	Alter x	$f(x)$	$q(x, 1929/32) \cdot 10^5$	$q(x, \infty) \cdot 10^5$	$\Delta(q(x)) \cdot 10^5$
79	0,6301	14078	13349	729	90	0,6354	29780	29056	724
80	0,6306	14726	14001	725	91	0,6359	35443	34669	774
81	0,6311	16459	15690	769	92	0,6364	33476	32827	649
82	0,6316	17174	16415	759	93	0,6369	40761	40070	691
83	0,6321	18615	17839	776	94	0,6374	37864	37315	549
84	0,6326	20244	19450	794	95	0,6379	54795	54134	661
85	0,6331	22466	21641	825	96	0,6384	37500	37139	361
86	0,6336	23356	22557	799	97	0,6389	45946	45614	332
87	0,6340	24808	24022	786	98	0,6394	52174	51923	251
88	0,6345	28044	27225	819	99	0,6399	81818	81622	196
89	0,6349	31116	30282	834	100	0,6404	—	—	0

Tabelle III.

Die Zahlen $q'(x, \infty)$ $\Delta'(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Ein Beispiel für die Abnahme des Quotienten $Q(\xi)$, wenn $t_0 = 0$, $x_0 = 29\frac{1}{2}$ Jahre.

					$t_0 = 0$ (1.1.1931) $x_0 = 29\frac{1}{2}$ Jahre	
x Jahre	$q'(x, \infty) \cdot 10^5$	$\Delta'(x) \cdot 10^5$	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\psi(x) \cdot C^{-\xi}$	$Q_{(\xi = x - x_0)}$
$29\frac{1}{2}$	11	2,6	0,236	0,323	0,323	1,826
$34\frac{1}{2}$	14,2	2,0	0,141	0,346	0,268	1,559
$39\frac{1}{2}$	30,2	4,2	0,1391	0,105	0,064	1,217
$44\frac{1}{2}$	56,2	7,8	0,1388	0,024	0,011	1,151
$49\frac{1}{2}$	95,0	11	0,116	0,002	0,001	1,117
$54\frac{1}{2}$	134	10	0,075	0,030	0,008	1,084
$59\frac{1}{2}$	193	8,8	0,046	0,040	0,009	1,055
$64\frac{1}{2}$	327	15,4	0,047	0,013	0,002	1,049
$69\frac{1}{2}$	481	20	0,042	0,008	0,001	1,043
$74\frac{1}{2}$	832	27,8	0,033	0,003	0,0003	1,033
$79\frac{1}{2}$	1109	19,8	0,018	0,015	0,0012	1,019
$84\frac{1}{2}$	1693	9,6	0,006	0,018	0,0011	1,007

Tabelle IV.

Darstellung der Sterbenswahrscheinlichkeiten $q(x, \infty)$ durch Makehamkurven.

Formel (5 *a*)	Makehamfunktion: I. Intervall 27 bis 57	Makehamfunktion: II. Intervall 27 bis 82
$\bar{q}_{(x,\infty)} = \frac{1}{5} \sum_{i=-2}^{+2} q_{(x+i,\infty)}$	$a = 0{,}0019612$ $b_1 = 0{,}00069974$ $c = 1{,}1148$ $\log c = 0{,}04720$	$a = 0{,}0014439$ $b_1 = 0{,}0010906$ $c = 1{,}0965$ $\log c = 0{,}04000$

Alter	x	$\bar{q}(x, \infty)$	$a + b_1 c^x$	$\bar{q} - (a + b_1 c^x)$	$\frac{\bar{q} - (a + b_1 c^x)}{\bar{q}}$ %	$a + b_1 c^x$	$\bar{q} - (a + b_1 c^x)$	$\frac{\bar{q} - (a + b_1 c^x)}{\bar{q}}$ %
27	0	0,00267	0,00266	+ 0,00001	+ 0,4	0,00253	+ 0,00014	+ 5,2
32	5	322	317	+ 5	+ 1,6	317	+ 5	+ 1,6
37	10	393	404	— 11	— 2,8	418	— 25	— 6,4
42	15	544	553	— 9	— 1,7	579	— 35	— 6,4
47	20	825	811	+ 14	+ 1,7	833	— 8	— 1,0
52	25	0,01300	0,01255	+ 45	+ 3,5	0,01235	+ 65	+ 5,0
57	30	1971	2020	— 49	— 2,5	1873	+ 98	+ 5,0
62	35	2936				2884	+ 52	+ 1,8
67	40	4571				4486	+ 85	+ 1,9
72	45	6976				7026	— 50	— 0,7
77	50	0,11136				0,11050	+ 86	+ 0,8
82	55	16679				17429	— 750	— 4,5

Tabelle V.

Vergleich der von uns vorausberechneten Zahlen $V(x,\ 1.\ 1.\ 1961)$ und $q(x,\ 1.\ 1.\ 1959)$ mit den entsprechenden vom Eidgenössischen Statistischen Amt vorausberechneten Zahlen.

Alter	x	$V(x, 1.1.1961)$ Formel (14)	$V(x, 1.1.1961)$ Eidg. Stat. Amt	Alter	x	$q(x, 1.1.1959)$ Formel (8)	$q(x, 1.1.1959)$ Eidg. Stat. Amt [1]	Differenz absolut	Differenz %
25	0	30522	30522	27	2	0,00295	0,00318	— 23	—7,8
30	5	31164	31136	32	7	354	358	— 4	—1,1
35	15	31723	31689	37	12	427	426	+ 1	+ 0,2
40	20	33549	33573	42	17	583	574	+ 9	+ 1,5
45	25	28724	28822	47	22	873	878	— 5	—0,6
50	30	31581	32195	52	27	0,01362	0,01383	— 21	—1,5
55	35	27571	28250	57	32	2045	2095	— 50	—2,4
60	40	22801	23552	62	37	3020	2925	+ 95	+ 3,1
65	45	16924	17922	67	42	4674	4400	+274	+ 5,9
70	50	11202	12415	72	47	7103	6500	+603	+ 8,5
75	55	7354	8836	77	52	0,11297	0,10500	+797	+ 7,1
80	60	3632	4864	82	57	16863	15950	+913	+ 5,4
85	65	1246	1971	87	62	25341	24650	+691	+ 2,7

[1]) Die hier angegebenen Zahlen sind die arithmetischen Mittel zwischen je zwei entsprechenden Zahlen des Eidgenössischen Statistischen Amtes, da bei den letzteren Zahlen die Basis um ein halbes Jahr verschoben ist. Die Veröffentlichung der bisher noch nicht publizierten Zahlen des Eidgenössischen Statistischen Amtes geschieht mit spezieller Bewilligung dieses Amtes.

Tabelle VI.

Absterbeordnung für $t = \infty$; Männer; Zinsfuss $i = 3{,}5\,\%$ Grundlage: Formel (5 a) mit ausgeglichenen Werten $q(x, 1929/32)$.

x	$q(x, \infty)$	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x
25	0,00268	100000	42315	934319	109,57	10718,74
26	264	99732	40774	892004	103,89	10609,17
27	264	99469	39291	851230	100,37	10505,28
28	272	99206	37862	811939	99,563	10404,91
29	282	98936	36483	774077	99,402	10305,35
30	296	98657	35150	737594	100,52	10205,95
31	309	98365	33860	702444	101,11	10105,43
32	322	98061	32614	668584	101,54	10004,32
33	333	97745	31409	635970	100,91	9902,78
34	344	97420	30247	604561	100,49	9801,87
35	355	97085	29124	574314	99,991	9701,38
36	371	96740	28038	545190	100,53	9601,39
37	390	96381	26990	517152	101,73	9500,86
38	413	96005	25975	490162	103,78	9399,13
39	438	95608	24993	464187	105,83	9295,35
40	467	95189	24042	439194	108,59	9189,52
41	500	94744	23120	415152	111,76	9080,93
42	538	94270	22227	392032	115,50	8969,17
43	582	93763	21360	369805	120,17	8853,67
44	631	93217	20517	348445	125,04	8733,50
45	685	92629	19698	327928	130,47	8608,46
46	747	91994	18902	308230	136,38	8477,99
47	817	91307	18126	289328	143,09	8341,61
48	896	90561	17371	271202	150,29	8198,52
49	984	89750	16632	253831	158,10	8048,23
50	0,01080	88867	15912	237199	166,07	7890,13
51	1182	87907	15207	221287	173,66	7724,06
52	1292	86868	14519	206080	181,19	7550,40
53	1409	85746	13847	191561	188,48	7369,21
54	1531	84538	13190	177714	195,07	7180,73
55	1663	83244	12549	164524	201,59	6985,66
56	1804	81860	11924	151975	207,86	6784,07
57	1958	80383	11312	140051	214,02	6576,21
58	2120	78809	10716	128739	219,52	6362,19
59	2285	77138	10134	118023	223,78	6142,67
60	2466	75375	9567	107889	227,99	5918,89

Tabelle VI.

x	$q(x, \infty)$	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x
61	0,02671	73516	9016	98322	232,71	5690,90
62	2908	71552	8478	89306	238,23	5458,19
63	3180	69471	7953	80828	244,34	5219,96
64	3480	67262	7440	72875	250,18	4975,62
65	3808	64921	6938	65435	255,26	4725,44
66	4152	62449	6448	58497	258,70	4470,18
67	4533	59856	5972	52049	261,51	4211,48
68	4936	57143	5508	46077	262,73	3949,97
69	5346	54322	5059	40569	261,32	3687,24
70	5795	51418	4627	35510	259,08	3425,92
71	6307	48438	4211	30883	256,62	3166,84
72	6906	45383	3812	26672	254,36	2910,22
73	7604	42249	3429	22860	251,95	2655,86
74	8383	39036	3061	19431	247,90	2403,91
75	9231	35764	2710	16370	241,64	2156,01
76	0,10134	32463	2376	13660	232,69	1914,37
77	11080	29173	2063	11284	220,86	1681,68
78	12043	25941	1773	9221	206,26	1460,82
79	13033	22817	1506	7448	189,72	1254,56
80	14090	19843	1266	5942	172,33	1064,84
81	15253	17047	1051	4676	154,83	892,51
82	16563	14447	860	3625	137,68	737,68
83	18059	12054	694	2765	121,02	600,00
84	19716	9877	549	2071	104,58	478,98
85	21478	7930	426	1522	88,38	374,40
86	23290	6227	323	1096	72,70	286,02
87	25096	4777	240	773	58,08	213,32
88	26753	3578	173	533	44,79	155,24
89	28294	2621	123	360	33,56	110,45
90	29938	1879	85	237	24,60	76,89
91	31903	1316	58	152	17,73	52,29
92	34405	896	38	94	12,56	34,56
93	37304	588	24	56	8,63	22,00
94	40437	369	15	32	5,67	13,37
95	44016	220	9	17	3,57	7,70
96	48267	123	5	8	2,10	4,13
97	53679	64	2	3	1,17	2,03
98	59953	30	1	1	0,60	0,86
99	67575	12	—	—	0,26	0,26
100	76785	4	—	—	—	—

Tabelle VII.

Versicherungswerte.

Barwerte Formel	x	n	Absterbeordnung, Männer $i=3{,}5\%$ 1901/10	$\tau=1.1.1916$	$\tau=t=\infty$
Lebenslängliche Todesfallversicherung: $A_x=\frac{M_x}{D_x}$	25		0,31053	0,25947	0,25331
Temporäre Todesfallversicherung: $_{\mid n}A_x=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}$	25	30	0,15826	0,096341	0,088221
Erlebensfallversicherung: $_nE_x=\frac{D_{x+n}}{D_x}$	25	30	0,25404	0,29233	0,29656
Gemischte Versicherung: $_{\mid n}A_x+{}_nE_x=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}$	25	30	0,41230	0,38867	0,38478
Vorschüssige Leibrente: $a_x=\frac{N_x}{D_x}$	25		20,389	21,898	22,080
Temporäre Leibrente: $a_{\overline{x:n\mid}}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$	25	35	18,507	19,395	19,530
Aufgeschobene Leibrente: $_{n\mid}a_x=\frac{N_{x+n}}{D_x}$	25	35	1,8819	2,5024	2,5497
Jahresprämie, zahlbar während n Jahren, zum Kaufe einer n Jahre aufgeschobenen Leibrente (Pension): $P_{\overline{x:n\mid}}=\frac{_{n\mid}a_x}{a_{\overline{x:n\mid}}}$	25	35	0,10169	0,12902	0,13055

Tabelle VIII.

Vorausberechnete Sterbenswahrscheinlichkeiten nach Formel (8): $q(x, t)$ Männer unter Verwendung der ausgeglichenen Werte $q(x, 1929/32)$.

Alter x	t=1929/32	t=1.1.1941	t=1.1.1951	t=1.1.1961	t=1.1.1981	$t = \infty$
25	0,00390	0,00341	0,00312	0,00295	0,00278	0,00268
26	382	335	307	290	273	264
27	381	334	306	289	273	264
28	390	343	315	298	281	272
29	403	355	326	308	292	282
30	420	371	341	323	306	296
31	437	386	355	337	319	309
32	453	401	369	351	332	322
33	467	414	382	362	344	333
34	479	425	393	373	355	344
35	492	437	405	385	366	355
36	509	454	421	401	382	371
37	530	474	441	421	401	390
38	556	499	465	444	424	413
39	584	526	491	470	450	438
40	617	557	521	500	479	467
41	655	593	556	534	512	500
42	699	635	596	573	551	538
43	750	683	643	619	595	582
44	806	736	694	669	645	631
45	868	795	751	725	699	685
46	938	862	816	789	762	747
47	0,01018	938	890	861	833	817
48	1107	0,01023	972	942	913	896
49	1206	1118	0,01064	0,01032	0,01002	984
50	1313	1220	1164	1131	1098	0,01080
51	1427	1329	1271	1235	1201	1182
52	1548	1446	1385	1348	1312	1292
53	1675	1569	1505	1467	1430	1409
54	1808	1698	1631	1591	1553	1531
55	1950	1836	1767	1726	1686	1663
56	2101	1983	1912	1869	1827	1804
57	2265	2143	2069	2025	1982	1958
58	2435	2310	2234	2189	2145	2120
59	2608	2479	2402	2355	2310	2285
60	2797	2665	2586	2538	2492	2466

Tabelle VIII.

Alter x	t=1929/32	t=1.1.1941	t=1.1.1951	t=1.1.1961	t=1.1.1981	$t=\infty$
61	0,03010	0,02875	0,02794	0,02745	0,02698	0,02671
62	3258	3119	3035	2984	2936	2908
63	3542	3398	3311	3259	3209	3180
64	3854	3705	3615	3561	3510	3480
65	4194	4040	3948	3892	3838	3808
66	4557	4396	4299	4240	4184	4152
67	4958	4789	4687	4626	4567	4533
68	5381	5204	5097	5033	4971	4936
69	5809	5625	5514	5447	5383	5346
70	6276	6084	5969	5900	5833	5795
71	6808	6608	6488	6416	6347	6307
72	7431	7222	7096	7020	6947	6906
73	8156	7936	7804	7724	7648	7604
74	8964	8733	8593	8510	8429	8383
75	9841	9598	9452	9364	9279	9231
76	0,10774	0,10519	0,10366	0,10273	0,10184	0,10134
77	11748	11482	11322	11226	11133	11080
78	12735	12459	12294	12194	12098	12043
79	13745	13461	13291	13188	13089	13033
80	14819	14529	14354	14249	14148	14090
81	16000	15702	15523	15416	15312	15253
82	17329	17024	16840	16730	16623	16563
83	18845	18532	18344	18230	18121	18059
84	20520	20200	20007	19891	19779	19716
85	22296	21970	21774	21656	21543	21478
86	24115	23786	23589	23470	23355	23290
87	25918	25591	25394	25274	25161	25096
88	27558	27237	27044	26928	26817	26753
89	29073	28763	28576	28464	28355	28294
90	30684	30387	30208	30101	29997	29938
91	32614	32331	32160	32058	31959	31903
92	35086	34815	34652	34553	34459	34405
93	37949	37692	37538	37445	37355	37304
94	41032	40795	40652	40567	40484	40437
95	44555	44340	44211	44133	44059	44016
96	48740	48552	48438	48370	48304	48267
97	54068	53913	53820	53764	53710	53679
98	60242	60127	60058	60016	59976	59953
99	67744	67677	67636	67612	67588	67575
100	76785	76785	76785	76785	76785	76785