# Eine Formel der mathematischen Bevölkerungstheorie

# Eine Formel der mathematischen Bevölkerungstheorie.

Von *H. Hadwiger*, Bern.

Es bezeichne $G(t)$ die Dichte der weiblichen Lebendgeborenen einer Bevölkerung im Zeitpunkte $t$. Wir lassen den Nullpunkt der $t$-Achse mit der Gegenwart zusammenfallen und setzen $G(t)$ für $t \leqq 0$ als gegeben voraus. Eine Aufgabe des Bevölkerungstheoretikers besteht darin, die Fortsetzung der Funktion $G(t)$ in den Bereich $t > 0$ zu ermitteln, d. h. die zukünftig zu erwartende Geburtendichte zu berechnen. Unter der Annahme, dass die Erlebenswahrscheinlichkeit $p(\xi)$ und die auf eine Frau vom Alter $\xi$ bezogene Dichte $f(\xi)$ der weiblichen Lebendgeborenen unverändert bleibt, reduziert sich die gestellte Aufgabe mathematisch gefasst auf die, die Lösung der für $t > 0$ gültigen Funktionalgleichung

$$G(t) = \int_0^\infty G(t-\xi) K(\xi) d\xi \tag{1}$$

zu finden, die für $t < 0$ mit der gegebenen Funktion $G(t)$ übereinstimmt.

In (1) bezeichnet $K(\xi)$ das Produkt $p(\xi) f(\xi)$.

Eine allgemeine Darstellung der Lösung dieser Fortsetzungsaufgabe, die auf Grund der Theorie der Laplace-Transformation gewonnen wurde, ist früher veröffentlicht worden [1]).

Die Darstellbarkeit der Lösung in geschlossener Form ist naturgemäss sehr von der analytischen Natur der Funktion $K(\xi)$ abhängig. Da $K(\xi)$ ein analytischer Repräsentant einer empirisch gegebenen Funktion ist, muss in der Regel die analytische Form (Parameterklasse) der Funktion willkürlich gewählt werden, und dann nach einer Anpassungsmethode die Parameterbestimmung so vorgenommen

[1]) *H. Hadwiger*, Über die Integralgleichung der Bevölkerungstheorie, Mitteilung der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker 38 (1939).

werden, dass eine möglichst gute Übereinstimmung mit dem empirischen Verlauf erzielt wird. Es ist nun sehr zweckmässig, die analytische Form der Funktion $K(\xi)$ vorausschauend so zu wählen, dass die explizite Darstellbarkeit der Lösung des sich anschliessenden Problems zum voraus gesichert ist. Dieser Gesichtspunkt wurde bisher in diesen und in ähnlichen Problemen (Erneuerungsprobleme usw.) wenig zur Geltung gebracht, und das Interesse mehr auf die Ausgestaltung von Methoden gelenkt, die eine näherungsweise Berechnung der gesuchten Lösung gestatten (Approximative Berechnung der Wurzeln der *charakteristischen Gleichung von Lotka* mit Hilfe der Semiinvarianten von *Thiele* u. a. m.).

In dieser Note soll eine Möglichkeit für die Wahl der Kernfunktion in (1), die eine explizite Darstellung der Lösung des oben formulierten Anfangsfunktionproblems gestattet, nachgewiesen werden.

Wir wählen

$$K(\xi) = A\,\xi^n e^{-a\xi} \quad (A > 0, a > 0, n > 0 \text{ ganz}). \tag{2}$$

Die Frage der Darstellbarkeit des statistisch gegebenen Verlaufes von $K(\xi)$ durch eine Funktion der analytischen Form (2), wurde bei einer anderen Gelegenheit bereits studiert [1]).

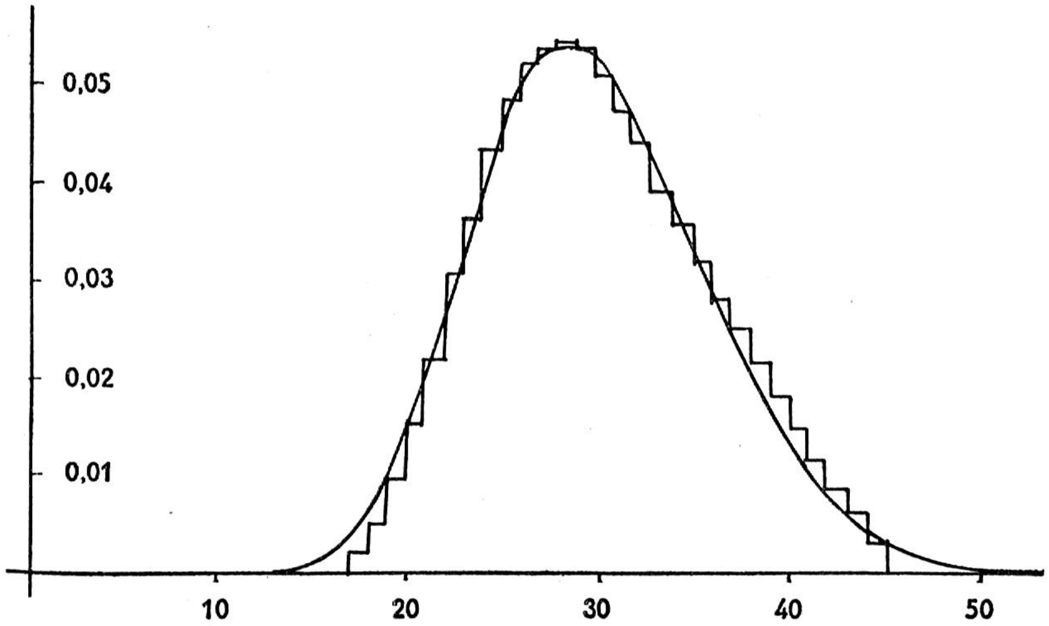
Das erreichte Resultat war zufriedenstellend. Als Grundlage diente die statistische Erhebung in der Schweiz in den Jahren 1932 bis 1935. Als Parameterwerte ergaben sich: $n = 23$; $a = 0{,}8028$; $\log A = -24{,}7863$. Eine Darstellung des statistischen (treppenförmigen) Verlaufes und des theoretischen (glatten) Verlaufes ist in der nebenstehenden Abbildung gegeben.

Wir entwickeln nun die Lösung unseres Problems, für den durch die Wahl (2) gekennzeichneten speziellen Fall. Dabei machen wir die etwas überraschende Feststellung, dass zur Darstellung der Lösung $G(t)$, $t > 0$ nur die $n+1$ «Momente»

$$M_\mu = \int_0^\infty G(-\theta)\, e^{-a\theta}\, \theta^\mu\, d\theta, \quad \mu = 0, 1, \ldots n, \tag{3}$$

der Anfangsfunktion $G(t)$, $t \leqq 0$, benötigt werden, ein Umstand, der vom praktischen Gesichtspunkt aus einiges Interesse verdient.

[1]) *H. Hadwiger* und *W. Ruchti*, Über eine spezielle Klasse analytischer Geburtenfunktionen. Metron XIII, 4 (1939).




Durch Teilung des Integrationsintervalls in (1) und durch eine einfache Transformation der Integrationsveränderlichen erhält man

$$G(t) = \int_0^t G(t-\xi)\, K(\xi)\, d\xi + \int_0^\infty G(-\theta)\, K(t+\theta)\, d\theta . \tag{4}$$

Wir setzen abkürzend

$$H(t) = \int_0^\infty G(-\theta)\, K(t+\theta)\, d\theta , \tag{5}$$

und verwenden die in der Theorie der Laplace-Transformation übliche Faltungssymbolik:

$$\int_0^t U(t-\xi)\, V(\xi)\, d\xi = U * V .$$

So erhält (4) die einfache Gestalt

$$G(t) = H(t) + G(t) * K(t) . \tag{6}$$

Die Lösung dieser Gleichung durch die bekannte *Neumannsche Reihe* lautet

$$G(t) = H(t) + H(t) * K(t) + H(t) * K(t) * K(t) + \dots \tag{7}$$

Die Verifikation kann durch formales Einsetzen des Ausdruckes (7) in (6) geschehen, wobei die Gleichheit der beiden Seiten unmittelbar sichtbar wird.

Um die beiden Parameter $A$ und $n$ der Funktion (2) sichtbar zu machen, schreiben wir

$$K_n[A, \xi] = A\,\xi^n\,e^{-a\xi}. \tag{8}$$

Diese Funktion erfüllt die Faltungsfunktionalgleichung

$$K_n[A, \xi] * K_m[B, \xi] = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}\,K_{n+m+1}[AB, \xi]. \tag{9}$$

Diese Relation ist mit Verwendung der bekannten Formel *(Eulersches Integral 1. Art)*

$$\int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\,\xi^{\beta-1}\,d\xi = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,;\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

mühelos verifizierbar. Auf Grund der Funktionalrelation (9) kann für die Lösung nach (7) geschrieben werden

$$G(t) = H(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[n!]^\nu}{[\nu n + \nu - 1]!}\,H(t) * K_{\nu n+\nu-1}[A^\nu, t]. \tag{10}$$

Nun lässt sich $H(t)$ mit Hilfe der «Momente» (3) darstellen; nach (6) gewinnt man durch Entwickeln der in $K(t+\theta)$ auftretenden Potenz nach dem binomischen Satz

$$H(t) = A\,e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} M_\mu\,t^{n-\mu},$$

oder

$$H(t) = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} M_\mu\,K_{n-\mu}[A, t]. \tag{11}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (10) ein, so ergibt sich

$$(12)\qquad G(t) = \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} M_\mu K_{n-\mu}[A, t] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{[n!]^\nu}{[\nu n + \nu - 1]!} M_\mu K_{n-\mu}[A, t] * K_{\nu n + \nu - 1}[A^\nu, t],$$

oder nach nochmaliger Verwendung der Faltungsrelation (9)

$$(13)\qquad G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{[n!]^{\nu+1}}{[\nu(n+1) + n - \mu]!} \frac{M_\mu}{\mu!} K_{\nu(n+1)+n-\mu}[A^{\nu+1}, t].$$

Die Lösung ist in dieser Darstellung ebenfalls durch Funktionen der Klasse (8) ausgedrückt. Wir geben ihr noch eine übersichtlichere und geschlossenere Gestalt. Es gelingt nämlich eine Zurückführung auf Exponentialfunktionen mit Hilfe der Kreisteilungswurzeln.

Setzen wir

$$(14)\qquad E_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu(n+1)+n-\mu}}{[\nu(n+1) + n - \mu]!},$$

so können diese Reihen durch äquidistante Gliederauswahl aus der Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

als Teilreihen gewonnen werden. Offensichtlich gilt

$$(15)\qquad E_\mu(z) = E^{(\mu+1)}(z), \quad \text{wo}$$

$$(16)\qquad E(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu(n+1)}}{[\nu(n+1)]!} \quad \text{ist.}$$

Die Funktion $E(z)$ kann mit Hilfe der Wurzeln

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

der Kreisteilungsgleichung

$$\omega^{n+1} - 1 = 0$$

auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden. Es gilt

$$E(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\lambda=0}^{n} e^{\omega_\lambda z}. \tag{17}$$

Zunächst lässt sich die Summe (13) auf die Gestalt

$$G(t) = e^{-at} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\varrho^{\mu+1} M_\mu}{\mu!} E_\mu(\varrho t) \tag{18}$$

bringen, wobei abkürzend

$$\varrho = [n! A]^{\frac{1}{n+1}} \tag{19}$$

gesetzt wurde. Auf Grund von (15) und (17) gewinnt man die endgültige Darstellung

$$G(t) = \frac{e^{-at}}{n+1} \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{M_\mu}{\mu!} [\varrho \omega_\lambda]^{\mu+1} e^{\varrho \omega_\lambda t}. \tag{20}$$

Es ist leicht, Schlüsse in bezug auf das asymptotische Verhalten der Funktion $G(t)$ für grosse $t$ zu ziehen.

Wenn wir $\omega_0 = 1$ wählen, so ist $R[\omega_\lambda] < 1$ für $\lambda > 0$. Hieraus folgt aus (20) die asymptotische Relation

$$G(t) \sim \frac{1}{n+1} \left( \sum_{\mu=0}^{n} \frac{M_\mu \varrho^{\mu+1}}{\mu!} \right) e^{(\varrho - a)t}. \tag{21}$$

Mit Rücksicht auf (19) schliesst man:

($\alpha$) $G(t)$ nimmt exponentiell zu, wenn $\frac{n!A}{a^{n+1}} > 1$ ausfällt;

($\beta$) $G(t)$ nimmt exponentiell ab, wenn $\frac{n!A}{a^{n+1}} < 1$ ausfällt.

Dieses Kriterium ist leicht verständlich, wenn man ausrechnet, dass die fragliche Zahl rechts nichts anderes als den Wert des Reproduktionsintegrals

$$\int_0^\infty K(\xi)\, d\xi = \frac{n!\, A}{a^{n+1}} \tag{22}$$

darstellt.