Bemerkung zum Problem des Ruins beim Spiele

Bemerkung zum Problem des Ruins beim Spiele[1].

Von *H. Hadwiger*, Bern.

Das Anfangsvermögen eines Spielers sei a. Bei jedem Spiele hat er mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Gewinn α oder einen Verlust β zu erwarten ($\alpha \lesseqgtr \beta$).

Ein altbekanntes Ruinproblem besteht darin, die Wahrscheinlichkeit $p_n(a)$ zu ermitteln, dass der Spieler n Spiele hintereinander, ohne ruiniert zu werden, spielen kann. Der Spieler ist ruiniert, wenn sein Vermögen 0 erreicht oder unterschreitet. Derartige Probleme hat bereits *Laplace* (Théorie analytique des probabilités, Paris 1820, S. 228—242) aufgestellt und gelöst.

In dieser Note soll gezeigt werden, wie eine asymptotische Funktion für $p_n(a)$ als Lösung einer Randwertaufgabe gewonnen werden kann. Das Verhalten von $p_n(a)$ für grosse n kann dann mühelos abgelesen werden.

Wir gehen aus von der rekursiven Beziehung

$$p_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$p_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 0 \\ \dfrac{p_n(x+\alpha) + p_n(x-\beta)}{2}, & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

deren Gültigkeit direkt aus der Definition von $p_n(x)$ folgt. Wenn wir die Geldeinheit mit ε, die Dauer eines Spieles mit τ bezeichnen, so kann mit Hilfe einer Funktion von zwei Veränderlichen geschrieben werden

$$p_n(x) \sim p(x\varepsilon, n\tau) = p(u, t) \quad (x\varepsilon = u, n\tau = t). \tag{3}$$

[1]) Die Anregung zu dieser Studie verdanke ich Herrn *A. Alder* in Bern.

Die Rekursion (2) lesen wir jetzt

$$p(x\varepsilon, n\tau+\tau) = \frac{1}{2}\left\{p([x+\alpha]\varepsilon, n\tau) + p([x-\beta]\varepsilon, n\tau)\right\}, \tag{4}$$

wo ε und τ als sehr klein angenommen werden. Wenn wir den Ausdruck rechts nach der Formel von Taylor entwickeln und die 3. und höheren Potenzen von ε vernachlässigen, so erreichen wir

$$p(u, t-\tau) = p(u, t) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\varepsilon\frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)\varepsilon^2\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, \tag{5}$$

oder

$$\frac{p(u,t+\tau)-p(u,t)}{\tau} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{\varepsilon}{\tau}\frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)\frac{\varepsilon^2}{\tau}\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}. \tag{6}$$

Wird

$$A = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{\varepsilon}{\tau}, \quad B = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)\frac{\varepsilon^2}{\tau} \tag{7}$$

und für die linke Seite in (6) der partielle Differentialquotient gesetzt, so gewinnen wir die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial p}{\partial u} + B\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}. \tag{8}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $p(u, t)$ müssen noch die Randbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} p(u, 0) &= 1, \ u > 0 \\ p(0, t) &= 0, \ t > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lösung dieser Randwertaufgabe lautet

$$p(u,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{At+u}{\sqrt{4Bt}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi - e^{-\frac{Au}{B}}\int_{-\frac{At-u}{\sqrt{4Bt}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi\right\}. \tag{10}$$

Führen wir noch die Gaußsche Transzendente

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\xi^2} d\xi \tag{11}$$

ein, so kann für die Lösung geschrieben werden

$$p(u, t) = \Phi\left\{-\frac{At+u}{\sqrt{4Bt}}\right\} - e^{-\frac{Au}{B}} \Phi\left\{-\frac{At-u}{\sqrt{4Bt}}\right\}. \tag{12}$$

Wenn wir für u, t, A, B wieder die ursprünglichen Werte einsetzen, ergibt sich

$$p_n(x) \sim \Phi\left\{-\frac{n(\alpha-\beta)+x}{\sqrt{2n(\alpha^2+\beta^2)}}\right\} - e^{-\frac{2x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}} \Phi\left\{-\frac{n(\alpha-\beta)-x}{\sqrt{2n(\alpha^2+\beta^2)}}\right\}. \tag{13}$$

Das asymptotische Verhalten von $p_n(x)$ für grosse n ist nach (13) in den drei Fällen

1. Fall $\alpha > \beta$;
2. Fall $\alpha = \beta$;
3. Fall $\alpha < \beta$;

völlig verschieden, und zwar gilt

1. Fall $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(x) = 1 - e^{-\frac{2x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}}$;

2. Fall $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}\, p_n(x) = \dfrac{x}{\alpha\sqrt{\pi}}$;

3. Fall $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^3}\, e^{\frac{(\alpha-\beta)}{2(\alpha^2+\beta^2)} n}\, p_n(x) = \dfrac{x}{(\alpha-\beta)^2} \sqrt{\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\pi}}\, e^{-\frac{x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}}$.

Zur Verifikation der Grenzwertrelation im 3. Fall kann die asymptotische Formel

$$\Phi(u) \sim \frac{e^{-u^2}}{2\sqrt{\pi u}}, \quad (u \gg 1)$$

angewendet werden [1]).

Eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, beliebig lange ohne Ruin zu spielen, gibt es nur, wenn der Erwartungswert pro Spiel positiv ist. In den anderen Fällen strebt die genannte Wahrscheinlichkeit mit der Zahl n der Spiele gegen 0, und zwar wie die reziproke Quadratwurzel, wenn der Erwartungswert 0 ist, und sogar exponentiell, wenn er negativ ist.

[1]) Vgl. etwa: *R. v. Mises,* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen. Fr. Deuticke, Leipzig und Wien, 1931, S. 45.