Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 40 (1940)

Artikel: L'assurance d'annuités et les combinaisons usuelles

Autor: Jéquier, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-554975

L'assurance d'annuités et les combinaisons usuelles.

Par *Ch. Jéquier,* Lausanne.

Introduction.

Nous nous proposons dans ce travail de mettre en évidence les relations étroites qui lient entre elles trois des combinaisons d'assurance les plus usuelles, l'épargne, la mixte, l'assurance à terme fixe ou «dotale».

Il nous a paru utile pour notre dessein d'introduire l'assurance d'annuités comme combinaison auxiliaire. Cette combinaison-clé permet, en effet, d'expliquer sans peine les variations des réserves mathématiques de la mixte et de l'assurance à terme fixe. Sans doute, pour comprendre ces variations, l'assurance d'annuités n'est-elle pas indispensable, comme ne serait pas indispensable, au début des mathématiques actuarielles, la notion de probabilité. Mais cette notion de probabilité simplifie les exposés et conduit à une grande économie de langage. Il en sera de même ici. Les particularités des assurances d'annuités ayant été rappelées [1]), nous saisirons mieux l'allure des réserves mathématiques de l'assurance mixte et de l'assurance à terme fixe. D'autre part, et ce n'est pas négligeable, nous disposerons d'un langage aussi simple que précis pour expliquer les variations de ces réserves.

Indiquons encore les quelques symboles spéciaux que nous utiliserons ici:

$H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$ valeur actuelle d'une assurance d'annuités de 1 franc, ou prime unique pure. L'annuité est payable dès le décès de x, mais au plus pendant n années.

$h_{x:\overline{n}|} = \dfrac{H_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} - 1$ Prime annuelle pure de l'assurance d'annuités de 1 franc.

[1]) Voir notre étude «L'assurance d'annuités, cas particulier de l'assurance temporaire», parue dans le Bulletin nº 39.

$x' = x + k$ — Age actuel; k représente le nombre de primes payées ou le nombre d'années écoulées.

$n' = n - k$ — Durée restant à courir jusqu'à l'échéance.

${}_kV\,(H_{x:\overline{n|}}) = H_{x':\overline{n'|}} - h_{x:\overline{n|}} \times \mathrm{a}_{x':\overline{n'|}}$ — Réserve mathématique, après k primes payées, d'une assurance d'annuités de 1 franc.

Notons enfin que les formules établies dans ce travail supposent toujours que les décès ont lieu *à la fin de l'année* d'assurance (comme c'est le cas par exemple avec les tables MWI, SM, MM, etc.).

1. L'assurance épargne.

Nous savons que l'assurance épargne n'est pas, à proprement parler, une assurance, puisqu'elle ne couvre aucun risque; c'est un simple placement d'argent à intérêts composés. Faute d'une expression meilleure, nous conserverons à cette combinaison le nom consacré par l'usage. Rappelons quelques formules fondamentales, le capital assuré étant 1 franc:

Prime unique pure: $A_{\overline{n|}} = v^n \qquad v^n = 1 - d\mathrm{a}_{\overline{n|}}$

Prime annuelle pure: $P_{\overline{n|}} = \dfrac{v^n}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}}$ ou $P_{\overline{n|}} = \dfrac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}} - d$

on tire de là: $P_{\overline{n|}} + d = \dfrac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}}$

Réserve mathématique: méthode prospective

$$ {}_kV_{\overline{n|}} = v^{n'} - P_{\overline{n|}} \cdot \mathrm{a}_{\overline{n'|}} = 1 - (P_{\overline{n|}} + d)\ \mathrm{a}_{\overline{n'|}} \quad \text{ou} $$

$$ {}_kV_{\overline{n|}} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n|}} - \mathrm{a}_{\overline{n'|}}}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}} \quad \text{(formule des rentes).} $$

Méthode rétrospective: ${}_kV_{\overline{n|}} = P_{\overline{n|}} \cdot s_{\overline{k|}}$

Cela étant rappelé, montrons que toute assurance à terme fixe et que toute assurance mixte peuvent se décomposer en une assurance épargne et une assurance d'annuités. Nous appellerons l'assurance épargne la *combinaison fondamentale,* l'assurance d'annuités la *combinaison complémentaire.*

2. L'assurance à terme fixe.

En cas de décès de l'assuré avant le terme fixé, la police est libérée du service des primes. A côté de l'assurance du capital il y a, comme on dit, «contre-assurance» des primes. Cette contre-assurance n'est autre chose qu'une assurance d'annuités d'un montant égal à $P_{\overline{n}|}$. En cas de sinistre prématuré, tout se passe en effet comme si, chaque année, la compagnie restituait au bénéficiaire la prime $P_{\overline{n}|}$ qu'il aurait payée pour son contrat d'épargne.

Admettant les notations suivantes: $P_x^n =$ prime annuelle de l'assurance à terme fixe, ${}_kV_x^n =$ réserve mathématique après k primes payées, on peut écrire:

$$P_x^n = P_{\overline{n}|} + h_{x:\overline{n}|}\, P_{\overline{n}|}$$

cette relation est presque évidente; on a en effet:

$$P_x^n = (1 + h_{x:\overline{n}|})\, P_{\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|} \cdot P_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \text{d'où}$$

$$P_x^n = \frac{v^n}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \text{formule connue.}$$

La réserve mathématique de l'assurance à terme fixe peut se décomposer de la même manière. On aura:

$${}_kV_x^n = {}_kV_{\overline{n}|} + P_{\overline{n}|}\, {}_kV\,(H_{x:\overline{n}|})$$

Le deuxième membre se transforme de la façon suivante:

$$1 - (P_{\overline{n}|} + d)\, \mathrm{a}_{\overline{n'}|} + P_{\overline{n}|}\, \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (P_{\overline{n}|} + h_{x:\overline{n}|}\, P_{\overline{n}|})\, \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} =$$

$$= 1 - d\mathrm{a}_{\overline{n'}|} - P_{\overline{n}|}\,(1 + h_{x:\overline{n}|})\, \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} = v^{n'} - P_x^n\, \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} \quad \text{car}$$

$P_{\overline{n}|}\,(1 + h_{x:\overline{n}|}) = P_x^n$. On retrouve la formule ordinaire.

On peut alors énoncer le théorème suivant:

Théorème I: L'assurance à terme fixe, soit pour le calcul de la prime annuelle, soit pour celui des réserves mathématiques, peut se décomposer en une assurance épargne et une assurance d'annuités (mêmes caractéristiques) d'un montant égal à $P_{\overline{n}|}$.

Exemple numérique: Assurance à terme fixe de fr. 10.000.

$x = 30 \quad n = 20 \quad$ table MWI $3\frac{1}{2}$ %.

On a: $P_{\overline{20}|} = 341{,}67 \qquad h_{30:\overline{20}|} = 8{,}943$ %.

Prime de contre-assurance: $P_{\overline{20}|} \cdot h_{30:\overline{20}|} = 30{,}56$ d'où

$$P_{30}^{20} = 341{,}67 + 30{,}56 = 372{,}23.$$

C'est bien la prime qu'on trouve par le calcul direct.

Avant de donner les réserves mathématiques de l'assurance à terme fixe, indiquons le tableau des réserves d'une assurance d'annuités de 1.000 francs.

Réserves mathématiques d'une assurance d'annuités de fr. 1.000.
$x = 30 \quad n = 20 \quad$ table MWI $3\frac{1}{2}$ %. Prime annuelle: 89,43.

k	Réserve	k	Réserve	k	Réserve	k	Réserve
1	— 33	6	— 183	11	— 282	16	— 248
2	— 65	7	— 208	12	— 290	17	— 211
3	— 97	8	— 232	13	— 293	18	— 158
4	— 127	9	— 252	14	— 287	19	— 89
5	— 155	10	— 269	15	— 273	20	0

Soit à calculer maintenant la réserve mathématique de l'assurance à terme fixe pour $k = 5$. On a: réserve de l'assurance épargne: $P_{\overline{20}|} \cdot s_{\overline{5}|} = 341{,}67 \times 5{,}550 = 1.896$.

Réserve de l'assurance d'annuités de fr. 341,67 = — 53.

Réserve de l'assurance à terme fixe: 1.896 — 53 = 1.843.

Nous donnons ci-après le tableau complet des réserves.

Réserves mathématiques de l'assurance à terme fixe:

k	Réserve mathématique de l'ass. épargne	d'annuités	terme fixe	k	Réserve mathématique de l'ass. épargne	d'annuités	terme fixe
1	354	— 11	343	11	4.647	— 96	4.551
2	720	— 22	698	12	5.163	— 99	5.064
3	1.098	— 33	1.065	13	5.698	— 100	5.598
4	1.490	— 43	1.447	14	6.251	— 98	6.153
5	1.896	— 53	1.843	15	6.823	— 93	6.730
6	2.316	— 62	2.254	16	7.416	— 85	7.331
7	2.751	— 71	2.680	17	8.029	— 72	7.957
8	3.201	— 79	3.122	18	8.663	— 54	8.609
9	3.666	— 86	3.580	19	9.320	— 30	9.290
10	4.148	— 92	4.056	20	10.000	0	10.000

Les réserves mathématiques de l'assurance épargne s'accroissent comme $s_{\overline{k|}}$. Pour obtenir les réserves de l'assurance à terme fixe, il faut ajouter aux réserves de l'assurance épargne les termes correctifs dus à l'assurance d'annuités. Dans les cas usuels ces réserves, nous l'avons vu, sont *négatives.* Elles viennent donc diminuer quelque peu les montants trop élevés produits par la capitalisation de la prime de l'assurance épargne. Dans notre exemple, ces réserves négatives ne sont pas très importantes. Leur maximum s'élève à 1% seulement du capital assuré.

Indiquons encore la relation qui donne la différence des deux réserves pour une même valeur de k:

$$\text{Rés. «Terme Fixe»} - \text{Rés. «Epargne»} = P_{\overline{n|}}\, \mathsf{a}_{\overline{n'|}} - P_x^n\, \mathsf{a}_{x':\overline{n'|}} =$$

$$= v^n \left(\frac{\mathsf{a}_{\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{\overline{n|}}} - \frac{\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{x:\overline{n|}}} \right) = v^n\,(g_k - f_k)\,, \quad \text{en posant:}$$

$$g_k = \frac{\mathsf{a}_{\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{\overline{n|}}} \qquad f_k = \frac{\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{x:\overline{n|}}}$$

Cette différence, généralement négative, représente la réserve mathématique d'une assurance d'annuités égale à $P_{\overline{n|}}$.

3. L'assurance mixte.

a) Assurance à prime unique. La seule différence qui existe entre l'assurance épargne et l'assurance mixte provient de la date du paiement du capital assuré. Si le décès de l'assuré survient avant l'échéance, la compagnie, dans l'assurance mixte, paie le capital «immédiatement», c'est-à-dire à la fin de l'année d'assurance où le décès s'est produit. Techniquement cela revient au même si la compagnie, dès le décès, se contente de payer l'intérêt d au début de chaque année jusqu'à l'échéance, moment où le capital lui-même sera versé. On peut donc considérer l'assurance mixte à prime unique comme une assurance épargne combinée à une assurance d'annuités de d francs. On a alors:

$$A_{x:\overline{n}|} = v^n + d\, H_{x:\overline{n}|}$$

Il est facile de vérifier cette formule. En effet:

$$A_{x:\overline{n}|} = v^n + d\,(\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}) = v^n + d\,\mathrm{a}_{\overline{n}|} - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|} \quad \text{or}$$

$v^n + d\,\mathrm{a}_{\overline{n}|} = 1$; il en résulte que $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$, formule connue.

La réserve mathématique aura la même forme, soit:

$$_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x':\overline{n'}|} = v^{n'} + d\, H_{x':\overline{n'}|} \quad \text{on tire de là:}$$

$$A_{x':\overline{n'}|} - v^{n'} = d\, H_{x':\overline{n'}|}$$

Cette différence est toujours *positive* sauf pour $n' = 1$ (soit pour $k = n - 1$) où elle s'annule. On a dans ce cas $A_{x':\overline{1}|} = v$.

On peut énoncer le théorème suivant:

Théorème II: L'assurance mixte à prime unique peut se décomposer en une assurance épargne à prime unique et une assurance d'annuités à prime unique de d francs.

b) Assurance à primes annuelles. Dans l'assurance mixte à primes annuelles, au décès de l'assuré il y a «libération de la prime $P_{\overline{n}|}$» et en outre paiement annuel de l'intérêt d par la compagnie. On peut donc considérer cette combinaison, la plus fréquente de toutes, comme la synthèse d'une assurance épargne et d'une assurance d'annuités égale à $(P_{\overline{n}|} + d)$ — ou pour un capital C, égale à $(P_{\overline{n}|} + C\,d)$, $P_{\overline{n}|}$ représentant alors la prime annuelle du capital C. Nous pouvons donc poser:

$$P_{x:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + h_{x:\overline{n}|}\,(P_{\overline{n}|} + d)\,.$$

Il est aisé de vérifier cette relation, par exemple comme il suit:

$$P_{x:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|}\,(1 + h_{x:\overline{n}|}) + d\,h_{x:\overline{n}|} = \frac{v^n}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} + d\,\frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \text{ou}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{v^n + d\,\mathrm{a}_{\overline{n}|} - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1 - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}$$

on obtient finalement la formule connue: $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}$.

Pour les réserves mathématiques on aura une formule analogue. Démontrons la relation suivante:

$$_kV_{x:\overline{n}|} = {}_kV_{\overline{n}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,{}_kV\,(H_{x:\overline{n}|})$$

$$_kV_{x:\overline{n}|} = v^{n'} - P_{\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{\overline{n'}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,\mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (P_{\overline{n}|} + d)\,(1 + h_{x:\overline{n}|})\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$$

$$_kV_{x:\overline{n}|} = v^{n'} + d\,\mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}$$

on aboutit finalement à la formule des rentes.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème III: L'assurance mixte, soit pour le calcul de la prime annuelle, soit pour celui des réserves mathématiques, peut se décomposer en une assurance épargne et une assurance d'annuités (mêmes caractéristiques) d'un montant égal à $P_{\overline{n}|} + d = \dfrac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}$.

Exemple numérique: Soit à calculer la prime annuelle et toutes les réserves mathématiques de l'assurance mixte suivante:

$C = 10.000 \qquad x = 30 \qquad n = 20 \qquad$ table MWI $3\frac{1}{2}\,\%$. On a:

$$P_{\overline{20}|} = 341{,}67 \quad h_{30:\overline{20}|} = 8{,}943\ \%$$

$$Cd + P_{\overline{20}|} = 338{,}16 + 341{,}67 = 679{,}83.$$

Prime de «contre-assurance» = 8,943 % de 679,83 = 60,80

$$P_{30:\overline{20}|} = 341{,}67 + 60{,}80 = 402{,}47.$$

Pour $k = 5$ la réserve mathématique se compte de la façon suivante:

Réserve de l'assurance épargne: $341{,}67 \cdot s_{\overline{5}|} = 341{,}67 \times 5{,}550 =$ 1.896.—. Réserve d'une assurance d'annuités: de 1.000 francs = — 155.— (voir page 20); de fr. 679,83 = — 105,40.

Réserve de l'assurance mixte = 1.896 — 105 = 1.791.

Nous donnons ci-dessous le tableau complet des réserves.

Réserves mathématiques de l'assurance mixte.

k	Réserve mathématique de l'ass. épargne	d'annuités	mixte	k	Réserve mathématique de l'ass. épargne	d'annuités	mixte
1	354	— 22	331	11	4.647	— 192	4.455
2	720	— 44	676	12	5.163	— 197	4.966
3	1.098	— 66	1.032	13	5.698	— 199	5.499
4	1.490	— 86	1.404	14	6.251	— 195	6.056
5	1.896	— 105	1.791	15	6.823	— 186	6.637
6	2.316	— 124	2.192	16	7.416	— 169	7.247
7	2.751	— 141	2.610	17	8.029	— 143	7.886
8	3.201	— 158	3.043	18	8.663	— 107	8.556
9	3.666	— 171	3.495	19	9.320	— 60	9.260
10	4.148	— 183	3.965	20	10.000	0	10.000

Ici, comme dans l'assurance à terme fixe, ce sont les fluctuations de la réserve mathématique de l'assurance d'annuités *seule* qui déterminent celles des fluctuations de la réserve de l'assurance mixte qui sont dues *à la mortalité*. Les variations de la réserve de la composante fondamentale — l'assurance épargne — sont dues uniquement à la capitalisation à intérêts composés.

On se rend bien compte de cette particularité dans l'exemple suivant. Il s'agit de calculer la réserve mathématique de l'assurance mixte précédente avec *quatre tables de mortalité différentes* mais avec le même taux technique, soit $3\frac{1}{2}$ %; on aura:

table I: table MWI à mortalité doublée (q_x doublés),
table II: table MWI ordinaire,
table III: table SM 1921—1930,
table IV: table anglaise 1924—1929, table finale.

Nous donnons ci-après la réserve mathématique pour quelques valeurs de k seulement.

$$x = 30 \qquad n = 20 \qquad C = 10.000 \qquad P_{\overline{20|}} + Cd = 679{,}83.$$

k	Réserve ass. épargne	Réserve de l'assurance d'annuités de 679,83 table I	table II	table III	table IV
1	354	— 42	— 22	— 8	— 4
3	1.098	— 125	— 66	— 23	— 12
5	1.896	— 202	— 105	— 37	— 21
10	4.148	— 356	— 183	— 69	— 41
15	6.823	— 371	— 186	— 81	— 49
19	9.320	— 124	— 60	— 31	— 18

Remarques: 1) Les chiffres négatifs représentant les réserves mathématiques des assurances d'annuités de francs 679,83, il suffit de les ajouter aux réserves mathématiques de l'assurance épargne pour obtenir les réserves correspondantes de l'assurance mixte. 2) Le changement de table de mortalité n'affecte que la réserve mathématique de l'assurance d'annuités. Dans cet exemple, comme dans la plupart des cas usuels, cette «marge négative» est *d'autant plus faible que la mortalité elle-même est plus faible.* Avec la table anglaise 1924—1929, la réserve mathématique maximum s'élève à 4,9 ‰ seulement du capital assuré.

3) Avec la table anglaise de sélection nous avons obtenu les réserves ci-après pour l'assurance d'annuités de fr. 679,83:

$$+ 2, \; — 1, \; — 11, \; — 34, \; — 45, \; — 17$$

Pour terminer ces considérations relatives à l'assurance mixte, donnons encore la formule suivante qui indique la différence des deux réserves pour une même valeur de k:

Réserve «mixte» — Réserve «épargne» $= 1 - \frac{a_{x':\overline{n'}|}}{a_{x:\overline{n}|}} - \left(1 - \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{\overline{n}|}}\right) =$

$$= \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{\overline{n}|}} - \frac{a_{x':\overline{n'}|}}{a_{x:\overline{n}|}} = g_k - f_k = Q_k \quad \text{(voir page 21).}$$

Q_k représente donc la réserve mathématique de l'assurance d'annuités d'un montant égal à $P_{\overline{n}|} + d = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$. Cette réserve, nous l'avons vu, est généralement négative.

4. L'assurance au décès vie entière.

Tout ce que nous avons dit de l'assurance mixte peut se répéter au sujet de l'assurance au décès. Il suffit de prendre comme âge-terme l'âge $\omega + 1$; on envisagera alors une durée $n = \omega + 1 - x$. S'il s'agit de la table MWI, l'âge-terme à considérer sera 90 ans. On aura ainsi les relations suivantes:

Prime unique: $A_x = v^n + d\, H_{x:\overline{n}|}$ avec la table de Riem $n = 90 - x$.

Prime annuelle: $P_x = P_{\overline{n}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\, h_{x:\overline{n}|}$ ou $P_x = P_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\, h_{x:\overline{n}|}$

Réserve mathématique: Pour l'assurance à prime unique, la réserve a la même forme que la prime. On remplacera simplement n par $n' = \omega + 1 - x'$.

Pour l'assurance à primes annuelles on a:

$$_kV_x = {_kV_{\overline{n}|}} + (P_{\overline{n}|} + d)\, {_kV}\,(H_{x:\overline{n}|})$$

Ces formules montrent que les théorèmes II et III sont applicables ici: l'assurance au décès peut être considérée techniquement comme la synthèse d'une assurance épargne et d'une assurance d'annuités, tant pour le calcul de la prime pure que pour celui des réserves mathématiques; mais ici, en raison surtout des longues durées à considérer, les réserves mathématiques des assurances d'annuités seront souvent *positives*.

5. Comparaison entre l'assurance mixte et l'assurance à terme fixe.

L'étude que nous avons entreprise répond à la question que se pose tout actuaire au début de son activité pratique:

Pourquoi, se demande-t-il avec quelque étonnement, des trois combinaisons courantes Epargne, «Dotale», et Mixte, *c'est la combinaison qui admet la prime la plus faible qui présente généralement la réserve mathématique la plus forte et inversement*? En effet, les trois combinaisons sont énoncées ci-dessus par ordre de primes croissant et, pour les cas usuels, par ordre décroissant des réserves mathématiques. L'analyse précédente a expliqué cette soit-disant «anomalie». Tout dépend des singularités des assurances d'annuités qui, si elles admettent des primes positives et bien réelles, conduisent le plus souvent à des réserves mathématiques négatives.

Entrons dans quelques détails encore: la différence des primes entre la mixte et la «dotale» est égale, les caractéristiques étant supposées identiques, à la prime d'une assurance d'annuités de d francs. On a en effet:

$$P_{x:\overline{n}|} - P_x^n = (P_{\overline{n}|} + d)\, h_{x:\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}\, h_{x:\overline{n}|} = d\, h_{x:\overline{n}|}.$$

Pour un capital C la différence des primes est donc $Cd\, h_{x:\overline{n}|}$; si $C = 10.000$ et $i = 0{,}035$ on a:

Prime mixte — prime «terme fixe» $= 338{,}16\ h_{x:\overline{n}|}$.

Qu'en est-il maintenant de la différence entre les réserves mathématiques? Pour répondre à cette question comparons entre elles les deux formules que nous avons établies précédemment, soit:

Réserve «terme fixe» — Réserve épargne $= v^n Q_k$ (page 21).

Réserve mixte — Réserve épargne $= Q_k$ (page 26).

Il suffit, on le voit, de multiplier par v^n la différence Q_k, supposée connue, pour obtenir la différence correspondante entre la réserve de la «dotale» et de l'assurance épargne. Or, pour une même durée, v^n est un nombre constant, indépendant de k.

On peut prouver la chose autrement. Les réserves des assurances d'annuités qui caractérisent l'assurance à terme fixe et l'assurance mixte sont entre elles comme le montant des annuités elles-mêmes, soit comme les nombres $P_{\overline{n}|}$ et $P_{\overline{n}|} + d$.

Or $P_{\overline{n}|} = \dfrac{v^n}{a_{\overline{n}|}}$ et $P_{\overline{n}|} + d = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$

Il en résulte que $\dfrac{P_{\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}+d} = v^n$ $\quad CQFD$

Un exemple numérique illustrera cette proposition. Reprenons les mêmes données que précédemment: $x = 30$ $n = 20$ $C = 10.000$; soit à calculer les réserves mathématiques de *l'assurance à terme fixe* avec les tables MWI à mortalité doublée et SM 1921/30; taux $3\frac{1}{2}$ %. On connaît par hypothèse les réserves mathématiques de l'assurance mixte, et donc les montants CQ_k.

Indiquons les résultats pour quelques valeurs de k. Nous désignerons par M — M = CQ_k — les réserves de l'assurance d'annuités correspondant à l'assurance mixte (voir page 25). On a: $v^n = v^{20} =$ 0,5026.

	Table MWI à mortalité doublée				*Table SM 1921—1930*		
k	M	$v^{20}M$	$P_{\overline{n}\|}\, s_{\overline{k}\|}$	Rés. Terme fixe	M	$v^{20}M$	Rés. Terme fixe
1	— 42	— 21	354	333	— 8	— 4	350
3	— 125	— 63	1098	1035	— 23	— 12	1086
5	— 202	— 102	1896	1794	— 37	— 19	1877
10	— 356	— 179	4148	3969	— 69	— 35	4113
15	— 371	— 186	6823	6637	— 81	— 41	6782
19	— 124	— 62	9320	9258	— 31	— 16	9304

En ajoutant $v^{20}\, M$ à $P_{\overline{n}|}\, s_{\overline{k}|}$, réserve mathématique de l'assurance épargne, on obtient dans les deux cas la réserve mathématique de l'assurance à terme fixe.

Des relations de la page 27 on déduit encore, par soustraction, membre à membre:

$$\text{Réserve mixte} - \text{Réserve «terme fixe»} = (1 - v^n)\, Q_k$$

Ainsi pour $n = 20$, $i = 0{,}035$, on aura pour toutes les valeurs de k: Réserve mixte — Réserve terme fixe = 0,4974 Q_k.

Q_k étant la réserve mathématique d'une assurance d'annuités de $P_{\overline{n}|} + d$ francs est généralement *négative*. Dans les cas usuels on a donc, les caractéristiques étant supposées identiques:

Réserve mixte — réserve terme fixe < 0 ou
Réserve mixte $<$ réserve terme fixe.

Tel est le cas «normal»; mais on peut découvrir des exemples, extrêmes il est vrai, où l'inégalité précédente est en défaut et où l'on a, pour quelques valeurs de k:

$$\text{Réserve mixte} > \text{réserve terme fixe.}$$

Ce sont les cas précisément où la réserve mathématique de l'assurance d'annuités est *positive*. Envisageons dans cet ordre d'idées l'exemple suivant:

assurance à terme fixe de fr. 10.000 $x = 70$ $n = 20$ table MWI $3\frac{1}{2}\,\%$.

Aucune compagnie probablement n'assurerait un candidat de 70 ans dans ces conditions! On considérera donc cet exemple comme purement théorique. On a:

Prime pure: $P_{70:\overline{20|}} = 1.079{,}60$ $\quad P_{70}^{20} = 712{,}60$ d'où $P_{70:\overline{20|}} - P_{70}^{20} = 367$.
Cette différence est égale à $Cd\,h_{70:\overline{20|}} = 338{,}16 \times 108{,}55\,\% = 367$.

Réserve mathématique: Donnons les réserves mathématiques pour quelques valeurs caractéristiques de k.

k	Réserve mathématique de l'ass. mixte	«terme fixe»	différence	k	Réserve mathématique de l'ass. mixte	«terme fixe»	différence
1	420	387	+ 33	9	3516	3590	— 74
3	1236	1167	69	10	3888	4017	— 129
5	2023	1960	63	15	5700	6259	— 559
7	2776	2763	13	19	8582	8949	— 367
8	3146	3173	— 27	20	10000	10000	0

Ces différences, d'allure assez bizarre, s'expliquent par les particularités de l'assurance d'annuités $x = 70$ $n = 20$. (Voir travail cité, p. 35.)

Résumé.

Quelques actuaires ont signalé en passant les relations qui existent entre l'assurance épargne, l'assurance à terme fixe et l'assurance mixte. Mais à notre connaissance on n'avait pas encore fait une analyse approfondie de ce sujet. Notre travail a tenté de combler cette lacune.

Somme toute, on peut considérer la combinaison suivante comme *la combinaison type* de l'assurance sur la vie. π étant la prime annuelle pure on posera:

$$\pi = P_{\overline{n|}} + X\, h_{x:\overline{n|}}$$

$P_{\overline{n|}}$ est ici la prime annuelle de l'assurance épargne du capital C (durée n). X représente un montant variable d'une assurance d'annuités. En particularisant X, en donnant à X certaines valeurs caractéristiques, on obtiendra la prime annuelle pure de diverses combinaisons d'assurance, parmi lesquelles les plus importantes. Donnons pour terminer les exemples suivants qui résumeront notre étude.

Diverses valeurs particulières attribuées à X:

1) $X = 0$ — Assurance épargne.

2) $X = \frac{1}{2} P_{\overline{n|}}$ — Assurance épargne spéciale: si le décès de l'assuré survient avant l'échéance, la police sera libérée de la moitié de la prime annuelle. On pourrait remplacer $\frac{1}{2}$ par une fraction quelconque $\frac{m}{n}$ par exemple où $m < n$; la police serait alors libérée au décès d'une partie de la prime égale à $\frac{m}{n} P_{\overline{n|}}$.

3) $X = P_{\overline{n|}}$ — Assurance à terme fixe.

4) $X = P_{\overline{n|}} + 10\,\%\, C$ — Assurance familiale.

5) $X = P_{\overline{n|}} + Cd$ — Assurance mixte.

6) $X = P_{\overline{n|}} + Cd + 10\,\%\, C$ — Assurance mixte combinée avec une rente familiale.

7) $X = P_{\overline{n|}} + Cd$ où $n = \omega + 1 - x$ — Assurance au décès à primes viagères.

Dans ces différentes combinaisons la réserve mathématique sera toujours la synthèse des réserves correspondantes de l'assurance épargne et de l'assurance d'annuités de X francs.