Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 39 (1940)

Artikel: Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Autor: Meier, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966922

Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten.

Von *J. Meier*, Zürich.

§ 1.

Die Fundamentalgleichung und ihre Auflösungen.

A.

Als *Fundamentalgleichung* bezeichnen wir die Beziehung:

$$1 - w_s = (1 - v_1)(1 - v_2) \dots (1 - v_k) \qquad (1)$$

Hier ist:

$$w_s = w_1 + w_2 + \dots + w_k$$

Die Indizes $1, 2, \dots i \dots k$ bezeichnen die verschiedenen Abgangsarten. *Die Grössen w stellen die abhängigen und die Grössen v die unabhängigen Abgangswahrscheinlichkeiten dar.* Die Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf eine bestimmte Beobachtungsperiode, worunter wir der Einfachheit halber ein Beobachtungsjahr verstehen wollen.

Die Grössen w sind aus der Statistik unmittelbar gegeben, während die zugeordneten Grössen v zu berechnen sind. Wir können aus der Natur des statistischen Problems keine Nebenbedingungen und deshalb auch keine Nebengleichungen gewinnen, die zusammen mit der Fundamentalgleichung die Herleitung einer *eindeutigen Auflösung* von der Form:

$$v_i = \varphi(w_1, w_2, \dots w_k)$$

gestatten würden. *So gibt es denn unendlich viele Auflösungsformeln, die alle die Fundamentalgleichung befriedigen. Wir geben den einfachsten unter ihnen den Vorzug.*

Aus der Fundamentalgleichung ergibt sich, dass die Auflösungsformeln von *zyklischer Gestalt* sein müssen, d. h., dass, sobald eine solche für eine bestimmte Abgangsart i' vorliegt, auch eine entsprechende Formel für die Abgangsart i'' einfach durch zyklische Vertauschung der Indizes erhalten wird.

Da die Zahlenwerte der Grössen w und v im allgemeinen sehr klein, unter allen Umständen aber in den Grenzen von Null bis 1 liegen, so ergibt sich aus der Fundamentalgleichung, dass für diese Grössen die Ungleichung bestehen muss: $v > w$.

Aus praktischen Gründen verlangen wir ferner, dass, wenn die Grössen w, dem Zahlenwert nach geordnet, die Ungleichung erfüllen:

$$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_k \tag{a}$$

auch für die zugeordneten Grössen v eine analoge Ungleichung bestehen soll:

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_k \tag{b}$$

Wir nennen die hier erwähnten Forderungen *die Axiome der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten*, und da wir im Laufe unserer Untersuchung öfters darauf zurückkommen, so stellen wir sie hier nochmals zusammen:

1. Axiom: Die abhängigen Wahrscheinlichkeiten w und die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten v sind durch die Fundamentalgleichung miteinander verknüpft.

2. Axiom: Die Auflösungsformeln sind von zyklischer Gestalt.

3. Axiom: Es bestehen immer gleichzeitig die beiden Ungleichungen (a) und (b).

Zu den Axiomen tritt noch der Grundsatz hinzu, dass die einfachste Auflösungsformel unter der Vielzahl von konkurrierenden Formeln, aus praktischen Gründen, immer den Vorzug verdient.

B.

Wir gelangen am leichtesten zu konkreten Auflösungen der Fundamentalgleichung, wenn wir darin einfache hypothetische Beziehungen zwischen den Grössen w und v einführen. Zur Veranschaulichung betrachten wir folgende Beispiele:

$$1. \qquad v_i = w_i + \alpha$$

$$2. \qquad v_i = \beta \cdot w_i$$

$$3. \qquad v_i = \frac{w_i}{1 - \gamma\,(w_s - w_i)}$$

$$\mathrm{I.} \qquad \log\,(1 - v_i) = \log\,(1 - w_i) - a$$

$$\mathrm{II.} \qquad \log\,(1 - v_i) = b \cdot \log\,(1 - w_i)$$

$$\mathrm{III.} \qquad \log\,(1 - v_i) = c_i \cdot \log\,(1 - w_s)$$

Während die erste Dreiergruppe von Hypothesen auf Gleichungen k-ten Grades führt, die eine explizite Auflösung im allgemeinen nicht gestatten, ergibt die zweite Dreiergruppe mit Leichtigkeit allgemeine Auflösungen. Wir teilen im folgenden die Auflösungen 1 bis 3 nur für den einfachsten Fall von $k = 2$ (zwei Abgangsarten), die Auflösungen I bis III dagegen in allgemeiner Form mit. Die letzteren ergeben sich wie folgt: Wir denken uns die k Gleichungen der zu verwendenden Hypothese für die Indizes (i) von 1 bis k untereinander geschrieben und addieren alsdann sämtliche Gleichungen. Wenn wir dann auch noch die Fundamentalgleichung zu Hilfe nehmen, so gelangen wir direkt zu den allgemeinen Auflösungen.

Die Auflösungen lauten:

$$1. \qquad \alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\,w_s\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\,w_s\right)^2 - w_1\,w_2}$$

$$2. \qquad \beta = \frac{w_s}{2\,w_1\,w_2} - \sqrt{\left(\frac{w_s}{2\,w_1\,w_2}\right)^2 - \frac{w_s}{w_1\,w_2}}$$

$$3. \qquad \gamma = \frac{1}{w_s} - \sqrt{\left(\frac{1}{w_s}\right)^2 - \frac{1}{w_s}}$$

$$\mathrm{I.} \qquad a = \frac{\log\,(1 - H) - \log\,(1 - w_s)}{k}$$

$$\mathrm{II.} \qquad b = \frac{\log\,(1 - w_s)}{\log\,(1 - H)}$$

$$\mathrm{III.} \qquad c_i = \frac{w_i}{w_s}$$

H bedeutet einen Hilfswert, der wie folgt definiert ist:

$$1 - H = (1 - w_1)\,(1 - w_2)\,\ldots\,(1 - w_k) \qquad (2)$$

Die Auflösung III führt zunächst auf die unbestimmte Gleichung:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1.$$

Die oben angegebene Auflösung:

$$c_i = \frac{w_i}{w_s}$$

ist die einfachste unter den unendlich vielen Auflösungen, die in diesem Falle möglich sind. Die allgemeine Auflösung ist von der Form

$$c_i = \frac{A_i}{A_s}$$

wo $A_s = \sum_{i=1}^{k} A_i$ und wo ferner A_i irgendein Ausdruck in w_i sein kann, wie z. B. w_i^q, $\sin w_i$, ... usw.; A_i kann aber auch ein Aggregat solcher Ausdrücke sein.

Die Hypothese III ist gerade um dieser allgemeinen Auflösung willen bemerkenswert, weil hier unser freies Ermessen in der Auswahl der *einfachsten Lösung* besonders schön zum Ausdruck kommt, nachdem auch schon die Wahl der Ausgangshypothese sich als eine Ermessensfrage dargestellt hat.

Die fertigen Auflösungen der Hypothesen I bis III lauten wie folgt:

$$1 - v_i = (1 - w_i)\left(\frac{1 - w_s}{1 - H}\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$1 - v_i = (1 - w_i)^{\frac{\log(1-w_s)}{\log(1-H)}} \qquad (\mathrm{II})$$

$$1 - v_i = (1 - w_s)^{\frac{w_i}{w_s}} \qquad (\mathrm{III})$$

C.

Wir teilen im folgenden einige konkrete Zahlenbeispiele mit, um daran die Feststellung knüpfen zu können, dass die Zahlenwerte der verschiedenen Auflösungsformeln verhältnismässig wenig voneinander abweichen. Obwohl die Hypothesen 1 bis 3 praktisch zum vornherein ausscheiden, weil sie eine explizite Auflösung im allgemeinen gar nicht zulassen, so benützen wir sie im Interesse einer möglichst grossen Vergleichsbasis doch für die nachfolgenden Zahlenbeispiele. Wir beschränken uns aus Gründen der rechnerischen Einfachheit aber auf den einfachsten Fall von $k = 2$ (zwei Abgangsarten).

Der Vollständigkeit halber ziehen wir auch noch die in der Praxis meist angewandte *approximative Formel* zum Vergleich heran:

$$v_i = \frac{w_i}{1 - \frac{1}{2}(w_s - w_i)} \qquad \text{(IV)}$$

Unsere Hypothese 3 ist übrigens dieser Formel nachgebildet mit dem Unterschied, dass wir an Stelle des Faktors $\frac{1}{2}$ den aus der Fundamentalgleichung zu bestimmenden Faktor gesetzt haben. Bekanntlich befriedigt die approximative Formel die Fundamentalgleichung nur angenähert.

1. Beispiel: Gegeben sind $w_1 = 0{,}01$, $w_2 = 0{,}09$, $w_s = 0{,}10$. Gesucht sind die Grössen v nach den Formeln 1 bis 3 und I bis IV.

Formel	v_1	v_2	$v_1 + v_2$
1	0,010 474	0,090 474	0,100 948
2	0,010 092	0,090 825	0,100 917
3	0,010 484	0,090 464	0,100 948
I	0,010 495	0,090 455	0,100 950
II	0,010 095	0,090 822	0,100 917
III	0,010 481	0,090 467	0,100 948
IV	0,010 471	0,090 452	0,100 923

2. Beispiel: Gegeben sind $w_1 = 0{,}01$, $w_2 = 0{,}19$, $w_s = 0{,}20$. Gesucht sind die Grössen v nach den Formeln 1 bis 3 und I bis IV.

Formel	v_1	v_2	$v_1 + v_2$
1	0,011 056	0,191 056	0,202 112
2	0,010 097	0,191 840	0,201 937
3	0,011 115	0,191 008	0,202 123
I	0,011 173	0,190 960	0,202 133
II	0,010 107	0,191 832	0,201 939
III	0,011 095	0,191 024	0,202 119
IV	0,011 050	0,190 955	0,202 005

Nachdem wir schon bei der Wahl der «besten» Auflösungen den praktischen Standpunkt der möglichst einfachen rechnerischen Handhabung betonten, ist es am Platze, auch hier die *normalen Verhältnisse der Praxis* im Auge zu behalten und von Extremfällen, wie zum Beispiel $w_s \geqslant 0{,}30$, abzusehen. Sobald der Gesamtabgang sehr gross ist, so verliert das Problem der Berechnung unabhängiger Abgangswahrscheinlichkeiten an praktischem Wert, weil die statistischen Beobachtungszahlen in diesem Falle sehr unausgeglichen und unsicher sind.

Wenn übrigens der Gesamtabgang anormal gross ist, so können wir ihn mit Leichtigkeit reduzieren, indem wir als Beobachtungsperiode nicht das Jahr, sondern das Halbjahr oder das Vierteljahr zugrunde legen.

Für die vorstehenden Zahlenbeispiele dürfen wir wohl mit Recht feststellen, dass die verschiedenen Auflösungsformeln zu angenähert den gleichen Zahlenwerten führen. Die Feststellung ist um so berechtigter, als wir hier immer voraussetzen, dass die Berechnung auf den *unausgeglichenen* Beobachtungszahlen der Statistik basiert. Die Ausgleichung veranlasst im allgemeinen Korrekturen, die vielmal grösser sind als die Differenzen in den obigen Zahlenbeispielen.

§ 2.

Die derivierte Form der Fundamentalgleichung und die Karupsche Auflösung.

A.

Wenn in der Fundamentalgleichung der Funktionscharakter der Grössen w und v zum Ausdruck gebracht werden soll, so können wir die Gleichung wie folgt schreiben:

$$1 - w_s(t) = \{1 - v_1(t)\}\,\{1 - v_2(t)\} \ldots \{1 - v_k(t)\} \qquad (1)$$

Mit Verwendung der Abkürzung:

$$U_s(t) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Log} \{1 - v_i(t)\} \qquad (2)$$

schreibt sich Gleichung (1) wie folgt:

$$1 - w_s(t) = e^{U_s(t)} \qquad (3)$$

Durch Differentiationen folgt:

$$-w'_s(t) = U'_s(t)\, e^{U_s(t)} \qquad (4)$$

Wir führen hier die Intensitätsfunktion ein:

$$\mu_i(t) = -U'_i(t) = -\frac{d}{dt} \operatorname{Log} \{1 - v_i(t)\} \qquad (5)$$

und erhalten folgende derivierte Form der Fundamentalgleichung:

$$w'_s(t) = \mu_s(t)\,\{1 - w_s(t)\} \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$\mu_s(t) = \frac{w'_s(t)}{1 - w_s(t)} \qquad (7)$$

Nach *Karup* ist die Abgangsintensität für eine einzelne Abgangsursache wie folgt definiert:

$$\mu_i(t) = \frac{w'_i(t)}{1 - w_s(t)} \qquad (8)$$

Vergleicht man die Abgangsintensitäten (7) und (8) miteinander, so ergeben sich folgende Feststellungen:

1. Die Karupsche Definitionsformel befriedigt die derivierte Form der Fundamentalgleichung (1. Axiom). Denn die Summation der linken und der rechten Seite der Gleichung (8) über alle Indizes (i) von 1 bis k führt auf Gleichung (7) zurück.

2. Die Karupsche Definition ist eine zyklische Auflösung (2. Axiom).

3. Die zahlenmässige Anwendung der Karupschen Definition der Abgangsintensität und der daran anknüpfenden Integraldarstellungen verlangt die Einführung einer konkreten Hypothese über den Verlauf der Abgangsfunktion $w_i(t)$ innerhalb des Beobachtungsjahres. Die Auflösung von Karup weist also schon in diesem Punkte auf jenes Moment der Unbestimmtheit und Willkür hin, das auch in § 1 hervorgehoben ist.

Dazu kommt aber noch hinzu, dass die Karupsche Definition der Abgangsintensität nicht die einzig mögliche Auflösung der derivierten Form der Fundamentalgleichung ist. So können wir zu der Karupschen Auflösung beliebige Ergänzungsglieder folgender Art hinzufügen:

$$\alpha \left\{ f_s(t) - k\, f_i(t) \right\}$$

Hier bedeutet α einen willkürlichen Faktor, und f bedeutet irgendeine zweckmässig gewählte biometrische Funktion. Die Berechtigung dieses Zusatzgliedes wird sofort klar, wenn wir zur Summation über alle Indizes (i) von 1 bis k übergehen. Denn in diesem Falle gelangen wir zur derivierten Form der Fundamentalgleichung (7) zurück, weil das Zusatzglied bei der Summation wegfällt.

Die hier angedeutete erweiterte Auflösung erfährt durch das 3. Axiom eine naturgemässe Beschränkung und verliert ausserdem durch die Forderung nach einer möglichst einfachen mathematischen Formel auch noch weiter an praktischem Wert.

Wir könnten die Differentiation der Fundamentalgleichung bis zum zweiten und dritten Grade weiterführen und für jede Stufe eine relativ einfachste Lösung feststellen, doch behauptet diesen letzteren gegenüber die Karupsche Auflösung (erste Stufe) den Vorzug der absolut grössten Einfachheit.

Mit den vorstehenden Ausführungen sollte jedenfalls klar geworden sein, dass auch die Karupsche Auflösung der Fundamentalgleichung, indem sie die kontinuierliche Methode in Verbindung mit der Intensitätsfunktion verwendet, an der Grundtatsache nichts ändern kann, dass eben die Auflösung dieser Fundamentalgleichung ein Moment der Unbestimmtheit und der Willkür einschliesst, das mit Kunstgriffen nicht weggeschafft werden kann.

Diese Feststellung wird, wie schon früher dargelegt, dadurch gemildert, dass die drei Axiome, die wir in § 1 als Ausgangspunkt der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten hingestellt haben, immer auf Lösungen führen, die, praktisch gesehen, sehr angenähert gleiche Zahlenergebnisse liefern.

B.

Aus der Intensitätsfunktion (5) folgt durch Umkehrung:

$$1 - v_i(t) = e^{-\int_0^t \mu_i(x)\,dx} \qquad (9)$$

Der Ausdruck $1 - v_i(t)$ *stellt im Abschnitt* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *die unabhängige Ausscheideordnung für die Abgangsart (i) dar;* der Anfangsbestand zur Zeit $t = 0$ ist 1 und der Endbestand zur Zeit $t = 1$ ist $(1 - v_i)$.

Wir denken uns nun sämtliche k Gleichungen für die Indizes i von 1 bis k untereinander geschrieben und alsdann die linken Seiten unter sich miteinander multipliziert und ebenso die rechten Seiten dieser Gleichungen.

Dann folgt:

$$1 - w_s(t) = e^{-\int_0^t \mu_s(x)\,dx} \qquad (10)$$

Aus der Intensitätsfunktion (8) folgt durch Umkehrung und mit Verwendung von (10)

$$w_i(t) = \int_0^t \mu_i(\tau)\, e^{-\int_0^\tau \mu_s(x)\,dx}\, d\tau \qquad (11)$$

Dabei ist $w_i(t)$ für $t = 0$ naturgemäss gleich Null und für t = 1 gleich w_i.

C.

Die Karupsche Definition der Abgangsintensität präjudiziert natürlich alle Verhältnisse, die auf Grund dieser Definition sekundär abgeleitet werden. Nun wird in der Literatur vieles umständlich bewiesen, was in dieser Definitionsformel a priori enthalten ist.

So ist z. B. die additive Verknüpfung der einzelnen Abgangsintensitäten in der Definitionsformel (8) evident enthalten. Denn die Summation über alle Indizes (i) führt auf die Fundamentalgleichung (7) zurück, die ihrerseits das Gesetz der *multiplikativen* Verbindung der unabhängigen Ordnungen zur Evidenz erhebt.

So bedarf auch die Feststellung, dass die Intensitätsfunktion:

$$\mu_i(t) = -\frac{d}{dt} \operatorname{Log} \{1 - v_i(t)\} = \frac{v_i'(t)}{1 - v_i(t)} \tag{a}$$

und die Karupsche Definition:

$$\mu_i(t) = \frac{w_i'(t)}{1 - w_s(t)} \tag{b}$$

identisch sind, keines Beweises, weil ja die unabhängige Ausscheideordnung im Abschnitt $0 \leqslant t \leqslant 1$ gemäss Formel (9) auf der Karupschen Definitionsformel (b) basiert. Der Beweis wurde seinerzeit von Karup mit Hilfe von Approximationen aus dem Vergleich einer echten statistischen Personengruppe mit zwei fingierten Personengruppen, die während gewisser Zeitintervalle nur der einzigen Abgangsart (i) ausgesetzt sein sollten, geführt.

D.

Wir bemerken noch, dass die *Hypothese des gleichmässigen Abgangs:*

$$w_i(t) = t \cdot w_i \text{ (linear!)}$$

mit Verwendung der Integraldarstellung (9) zu der Auflösung führt:

$$1 - v_i(t) = (1 - t\, w_s)^{\frac{w_i}{w_s}} \tag{12}$$

Dagegen erhalten wir auf Grund der Hypothese der *konstanten Abgangsintensität* die Auflösung:

$$1 - v_i(t) = (1 - w_s)^{t \frac{w_i}{w_s}} \qquad (13)$$

Im Falle von $t = 1$ werden die beiden Auflösungen identisch, nämlich:

$$1 - v_i = (1 - w_s)^{\frac{w_i}{w_s}} \qquad (14)$$

Die Dienste, die uns die Karupschen Integraldarstellungen (9) und (11) bei der Herleitung von mathematischen Beziehungen zwischen den Grössen v und w zu leisten vermögen, sind im Grunde sehr beschränkt. Das kommt daher, dass uns für jede Abgangsart immer nur eine einzige statistische Masszahl zur Verfügung steht, so dass der hypothetische Ansatz für die Abgangsintensität auch nur eine einzige Konstante aufweisen darf, die auf Grund jener Masszahl zu bestimmen ist. Darum ist auch die Hypothese der konstanten Abgangsintensität, die den Formeln (13) und (14) zugrunde liegt, praktisch fast die einzig mögliche Hypothese, die zur Herleitung geschlossener Auflösungsformeln aus den Karupschen Integraldarstellungen verwendet werden kann.

Die Mitberücksichtigung der statistischen Masszahlen «oben» und «unten» angrenzender und benachbarter Beobachtungsjahre würde allerdings der *Verwendung von Parabelfunktionen oder der Differenzenrechnung* zur Definition der Abgangsintensität den Weg öffnen. Aber ein solches Verfahren bedeutete gleichzeitig eine *Ausgleichung* der zu untersuchenden biometrischen Masszahlen, und damit wäre die Frage nach dem «wahrscheinlichsten» Zahlenwert gestellt, die grundsätzlich nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist. Wir halten es auch aus praktischen Gründen für besser, wenn die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten zunächst auf Grund einer bestimmten Auflösungsformel berechnet und erst nachher eine Ausgleichung derselben vorgenommen wird.

E.

Wir kommen noch einmal auf die III. Hypothese in § 1 B zurück. Wenn wir die darin auftretenden Grössen als Funktionen von (t) betrachten, so schreibt sich die Hypothese wie folgt:

$$\log \{1 - v_i(t)\} = c_i \log \{1 - w_s(t)\} \qquad (15)$$

Die Grösse c_i muss, wie früher dargelegt, nur der Bedingung genügen, dass die Summation über alle Indizes (i) von 1 bis k den Zahlenwert 1 ergibt.

Wir haben, um dieser Forderung zu genügen, nicht nötig

$$c_i = \frac{w_i(t)}{w_s(t)}$$

zu setzen, sondern können die Vereinfachung noch einen Schritt weiter treiben, indem wir, wie in § 1, auch hier wieder schreiben:

$$c_i = \frac{w_i}{w_s}$$

In diesem Falle ergibt die Formel (15) auch eine sehr einfache Definition der Abgangsintensität, nämlich:

$$\underline{\mu_i(t) = \frac{w_i}{w_s}\,\mu_s(t)} \tag{16}$$

Wenn wir diese Formel mit der Karupschen Definition der Abgangsintensität vergleichen, so können wir folgendes feststellen: *Nach Formel (16) besteht die Proportion:*

$$\mu_1(t) : \mu_2(t) : \ldots = w_1 : w_2 : \ldots ;$$

dagegen besteht nach Karup die Proportion:

$$\mu_1(t) : \mu_2(t) : \ldots = w_1'(t) : w_2'(t) : \ldots$$

Die Auflösungsformel für den Ansatz (16) lautet:

$$1 - v_i(t) = \{1 - w_s(t)\}^{\frac{w_i}{w_s}} \tag{17}$$

Wenn wir darin auch noch die Hypothese des gleichmässigen Abgangs stipulieren, so folgt:

$$1 - v_i(t) = \{1 - t \cdot w_s\}^{\frac{w_i}{w_s}} \tag{18}$$

Damit kommen wir auf die Formeln (12) und (14) von Abschnitt D zurück.

Selbstverständlich gestatten auch die Hypothesen (I) und (II) von § 1 B die Herleitung von Formeln für die Abgangsintensität und für die unabhängige Wahrscheinlichkeit, sofern wir darin v durch $v\,(t)$ und w durch $w\,(t)$ ersetzen. Für den Hilfswert H gilt in diesem Falle die Darstellung:

$$1 - H\,(t) = \{1 - w_1\,(t)\}\;\{1 - w_2\,(t)\}\;\ldots\;\{1 - w_k\,(t)\}$$

Infolge dieses Hilfswertes wird aber die Definition der Abgangsintensität zu kompliziert, um praktisch in Betracht kommen zu können. Die III. Hypothese von § 1 B dagegen ist dank der einfachen Definition der Abgangsintensität (16) allen bisher betrachteten Auflösungen, einschliesslich der Karupschen, an Einfachheit überlegen. Vor allem liefert sie gemäss (17) eine direkte Beziehung zwischen den abhängigen und den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, während die Karupsche Auflösung im allgemeinen nur indirekt unter Zuhilfenahme von Integralen dargestellt werden kann.

§ 3.

Soziologisch-anthropologische Realität und formal-mathematische Fiktion.

Die additive Verknüpfung der Abgangsintensitäten bzw. die multiplikative Verbindung der Ordnungen ist natürlich nur *formal-mathematisch* gegeben, und zwar als evidente Folge der axiomatisch stipulierten Definition der Karupschen Abgangsintensität bzw. der Fundamentalgleichung. Ob diesen mathematischen Axiomen auch auf dem soziologisch-anthropologischen Gebiet eine bestimmte Realität entspricht, ist fraglich oder sogar unwahrscheinlich.

Eine der schönsten Anwendungen des Begriffs der unabhängigen Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei der Berechnung der reduzierten Überlebensordnungen, die auf der Fiktion basieren, dass eine gewisse Todesursache, dank der ärztlichen Kunst und den Fortschritten der Hygiene und der Sozialpolitik, gänzlich ausgeschaltet werden könnte. Schon im Jahre 1765 hat der Mathematiker und Bevölkerungsstatistiker *J. H. Lambert* eine reduzierte Überlebensordnung mit Ausschluss der Pockensterblichkeit abgeleitet.

Es handelte sich für Lambert darum, die damals noch unheimlich grosse Pockensterblichkeit ins Licht der Öffentlichkeit zu rücken, um

Ärzte und Politiker zum Kampfe gegen diese Volksseuche aufzurufen. Wie hätte das eindringlicher geschehen können als mit der Auflegung einer Sterbetafel, die auf der Voraussetzung basiert, dass die Pockensterblichkeit bereits ausgeschaltet ist? Ähnliche Arbeiten sind von *H. Steiner* für die Lungentuberkulose und von *H. Wyss* für die Krebskrankheit in unseren «Mitteilungen» veröffentlicht worden.

Dass es sich bei diesen reduzierten Überlebensordnungen um eine Anwendung des Begriffs der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten handelt, wird sofort klar, wenn man den Blick auf die *ausgeschiedene* Todesursache lenkt, die eben mathematisch als unabhängige Todesursache vorausgesetzt wird. Die soziologisch-biologische Grundfrage, ob Todesursachen in dieser Weise isoliert werden können, d. h. ob nicht bei erfolgreicher Bekämpfung und Ausschaltung gewisser Krankheiten und Seuchen neue Krankheiten an die Stelle treten oder bisher harmlose Krankheiten an Bedeutung gewinnen, wird durch die mathematische Fiktion selbstverständlich nicht präjudiziert. Ist denn anzunehmen, dass die menschliche Sterblichkeit gerade in dem Masse günstiger würde, wie es der Mathematiker auf Grund seiner Fiktion berechnet? Sind nicht die Faktoren, die die soziologisch-anthropologischen Vorgänge bedingen, viel komplizierterer Natur, als dies die mathematische Hypothese voraussetzt?

Wir können den im vorhergehenden Abschnitt angedeuteten Gegensatz zwischen der formal-mathematischen Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten und der soziologisch-anthropologischen Realität auch am Beispiel einer einfachen Sterblichkeitsstatistik klar machen. Zu diesem Zwecke machen wir von der in dem Kreise der Lebensversicherungsmathematiker vielfach verbreiteten Ansicht Gebrauch, dass der freiwillige Abgang hauptsächlich die *gesundheitlich besten Risiken* betreffe. Aus dieser Hypothese folgt, dass der mittlere Risikotyp des verbleibenden Versicherungsbestandes im Laufe eines Beobachtungsjahres immer schlechter wird. Das heisst, dass die Sterbeintensität eine *abhängige Funktion* der Stornointensität ist.

Die Sterbeintensität wächst nicht nur nach Massgabe des zunehmenden Lebensalters, sondern auch noch zusätzlich als Funktion des freiwilligen Abganges. Es handelt sich um eine Abhängigkeit *in nur einer Richtung*. Denn es liegt keine Veranlassung vor, anzunehmen, dass auch umgekehrt die Stornointensität von der Sterbeintensität beeinflusst sei.

Es liegt auf der Hand, dass die Karupsche Definition der Abgangsintensität eine solche Abhängigkeit grundsätzlich ausschliesst. Der einseitige Charakter der geschilderten Abhängigkeit steht ferner auch im Widerspruch zum Axiom der zyklischen Form der Fundamentalgleichung und ihrer Auflösungen.

Die Schlussfolgerung aus diesen Betrachtungen ist die, dass es sich bei der Fundamentalgleichung und den Axiomen, die wir zu ihrer Auflösung notwendig brauchen, grundsätzlich immer um Approximationen handelt, deren Berechtigung von Fall zu Fall immer wieder neu zu überprüfen ist.

Verschiedene Autoren, die in Fachschriften für die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten eingetreten sind, haben einen besonderen Vorteil derselben darin erblickt, dass etwa die unabhängige Invalidierungswahrscheinlichkeit aus einer Statistik A mit der unabhängigen Aktivensterblichkeit aus einer Statistik B ... usw. nach Gutdünken des Mathematikers kombiniert werden kann. Diese Auffassung wäre dann richtig, wenn die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten nachweislich nicht nur in ihrer mathematisch-axiomatischen Konstruktion unabhängig wären, sondern auch im wirklichen Zusammenspiel der ihnen zugrunde liegenden soziologisch-anthropologischen Abgangsursachen. Das ist aber meist recht fraglich.

Die Unabhängigkeit der Abgangsursachen wird im allgemeinen um so zweifelhafter, je grösser die Zahl der beobachteten Abgangsarten ist. Aber auch die ganze Statistik verliert rasch an Zuverlässigkeit und vor allem an Ausgeglichenheit der Zahlenreihen, wenn eine grössere Zahl von Abgangsarten zu unterscheiden ist.

Auf Grund dieser Darlegungen empfiehlt sich auch in bezug auf die freie Kombination von unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, die aus verschiedenen Statistiken hergenommen sind, jene Vorsicht, die im Gebrauch jedes statistischen Materials zum vornherein immer geboten ist.

§ 4.

Abgangsmasse erster und zweiter Art.

Die Abgangsmasse erster und zweiter Art ergeben sich auf Grund der genauen Daten der individuellen Abgangsereignisse wie folgt:

Abgangsmass erster Art:

$$m_{il} = \sum_{j=1}^{l} \omega_{ij} \tag{1}$$

Abgangsmass zweiter Art:

$$n_{il} = 1 - \prod_{j=1}^{l} (1 - \nu_{ij}) \tag{2}$$

Hier weisen die Indizes 1, 2, ... i ... k auf die *Abgangsarten* und die Indizes 1, 2, ... j ... l auf die *Abgangsdaten (Zeitpunkt)* der Abgangsereignisse hin. Die Abgangsdaten sind praktisch meist auf *Tage* genau vorhanden; man kann aber auch nach *Monaten* rechnen, sofern eine approximative Berechnung der Abgangsmasse genügt. In dieser Bemerkung ist auch die Feststellung enthalten, dass im gleichen Zeitpunkt mehrere Abgangsereignisse verschiedener Abgangsart koinzidieren können. Auf den *Ausnahmefall der Nichtkoinzidenz* werden wir am Schlusse dieser Darlegungen noch zurückkommen. Das Beobachtungsjahr beginnt mit dem Zeitpunkt $t = 0$ und endet mit dem Zeitpunkt t_l.

ω_{ij} und ν_{ij} bedeuten den Abgang der Art (i) im Zeitpunkt t_j, *bezogen auf den Bestand 1 zur Zeit* $t_0 = 0$ *bzw. zur Zeit* t_{j-1}.

Zwischen den beiden Grössen besteht definitionsgemäss folgende Beziehung:

$$\nu_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{b_{j-1}} \tag{3}$$

Dabei bedeutet b_{j-1} den Bestand der statistischen Gruppe im Zeitpunkte t_{j-1}.

Die Abgangsmasse der Formeln (1) und (2) beziehen sich auf die Abgangsart (i) und auf den Zeitabschnitt 0 bis t_l (Beobachtungsjahr).

Für den Bestand der statistischen Gruppe gelten folgende Formeln:

In den Masszahlen erster Art:

$$b_l = 1 - \sum_{j=1}^{l} \omega_{sj} \tag{4}$$

In den Masszahlen zweiter Art:

$$b_l = \prod_{j=1}^{l} (1 - \nu_{sj}) \tag{5}$$

Hier gelten die Abkürzungen:

$$\omega_{sj} = \sum_{i=1}^{k} \omega_{ij}; \; \nu_{sj} = \sum_{i=1}^{k} \nu_{ij}$$

$$m_{sl} = \sum_{i=1}^{k} m_{il} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \omega_{ij}$$

Aus (4) und (5) folgt die Formel:

$$m_{sl} = 1 - \prod_{j=1}^{l} (1 - \nu_{sj}) \tag{6}$$

In dem bereits erwähnten *Ausnahmefall der Nichtkoinzidenz* besteht zwischen den Grössen m und n eine der Fundamentalgleichung von § 1 entsprechende Beziehung:

$$1 - m_s = (1 - n_1)\ (1 - n_2) \ldots (1 - n_k) \tag{a}$$

Die Indizes l haben wir der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Die Begründung der Formel (a) ergibt sich wie folgt: Die Definition des Ausnahmefalles bringt auch mit sich, dass die formale Darstellung gilt:

$$1 - \nu_{sj} = (1 - \nu_{1j})\ (1 - \nu_{2j}) \ldots (1 - \nu_{kj}) \tag{b}$$

Denn von den Faktoren der rechten Seite ist stets *nur ein einziger* mit einer Grösse $\nu_{ij} \neq 0$ ausgestattet, so dass alle anderen Faktoren zu 1 werden. In diesem Falle kann das l-fache Produkt in (5) mit Verwendung von (b) durch ein $k \cdot l$-faches Produkt in den Faktoren $(1 - \nu_{ij})$ ersetzt werden, und dieses führt im Hinblick auf die Definitionsformel (2) auf die Darstellung (a).

Wenn wir davon ausgehen, dass die Nichtkoinzidenz praktisch einen Ausnahmefall darstellt, so heisst das, dass *im allgemeinen* zwischen den Abgangsmassen erster und zweiter Art keine einfache

Verknüpfung besteht. Dabei sind die beiden Grössen aber durch die Definitionsformeln (1) und (2) *eindeutig* bestimmt. Das Moment der Unbestimmtheit und der Willkür, das wir in bezug auf die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten wiederholt betont haben, entfällt hier, und deshalb haben auch die dort entwickelten Axiome hier keinen Platz.

Das Abgangsmass zweiter Art hat im Vergleich zu der unabhängigen Wahrscheinlichkeit den Vorzug der unmittelbaren Anschaulichkeit. Wir sehen, wie diese Masszahl aus den schrittweise gebildeten Abgangsquoten in einfachster Weise berechnet wird, indem die entsprechenden Komplementärzahlen $(1 - \nu_{ij})$ sukzessive miteinander multipliziert werden. Wir sehen aber auch, dass jeder Schritt im Grunde einen anderen mittleren Risikotyp betrifft, denn der Bestand der statistischen Gruppe ist bei jedem folgenden Schritt um eine bestimmte Quote kleiner als vorher, und zwar rührt dieser Abgang wenigstens teilweise von «den anderen» Abgangsarten her. Diese Erwägung führt uns auf die Darlegungen von § 3 zurück.

Zur Veranschaulichung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten bzw. der unabhängigen Ordnungen hat man öfters zu der Vorstellung gegriffen, die «aus anderen Ursachen» ausgeschiedenen Personen würden im Augenblick ihres Ausscheidens sogleich durch neue Personen vom ursprünglichen mittleren Risikotyp ersetzt. Uns will aber scheinen, dass diese Veranschaulichung dem kritischen Verstande keinen Stützpunkt gewährt. Denn wir stehen ja im Augenblick, wo uns diese Veranschaulichung geboten werden soll, gerade vor der Aufgabe, die unabhängige Wahrscheinlichkeit zu berechnen, die das eigentliche Zahlenmass für den mittleren Risikotyp darstellt. Solange wir aber diese Wahrscheinlichkeit noch nicht kennen, ist es uns unmöglich, darüber zu urteilen, ob die gedachten Ersatzpersonen dem ursprünglichen mittleren Risikotyp entsprechen oder nicht.

§ 5.

Schlusswort.

A.

In unseren «Mitteilungen» sind schon mehrere Arbeiten über den in der vorliegenden Untersuchung behandelten Gegenstand erschienen. Ich erwähne hier die folgenden:

S. Du Pasquier: «Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung» (7. und 8. Heft).

P. Spangenberg: «Die zahlenmässige Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ...» (10. Heft).

W. Friedli: «Intensitätsfunktion und Zivilstand» (21. Heft).

E. Marchand: «Probabilités expérimentales ...» (33. Heft).

Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit besitzen vor allem der geschichtliche Rückblick von Du Pasquier (8. Heft, Seite 92 f.), sowie die polemischen Auslassungen von Spangenberg (Seite 40) Interesse.

Wir weisen hier auch noch mit besonderem Nachdruck darauf hin, dass die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten bei den eigentlichen versicherungstechnischen Berechnungen, die die Barwerte, die Prämien, die Prämienreserven usw. betreffen, im allgemeinen keine Anwendung finden. Auf den besonderen Fall der «Elimination des freiwilligen Abganges» kommen wir noch zurück. Für die versicherungstechnischen Berechnungen kommen also im allgemeinen nur die abhängigen Wahrscheinlichkeiten in Frage. Die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten bzw. die unabhängigen Ordnungen der individuellen Abgangsarten können in ihrer Gesamtheit als ein Hilfsmittel dienen, um die *Gesamtordnung der Nichtausgeschiedenen* multiplikativ aus den individuellen Ordnungen zu berechnen (vgl. *Friedli*). Diese Gesamtordnung ist aber auch auf Grund der abhängigen Wahrscheinlichkeiten gegeben.

Was nun die erwähnte Elimination des freiwilligen Abganges betrifft, so denken wir, um an eine konkrete Vorstellung anknüpfen zu können, an die Trennung von Storno und Sterblichkeit. Hier besitzt nur die verbleibende Sterblichkeit praktisches Interesse. Die Elimination kommt mathematisch der Auflösung nach unabhängigen Wahrscheinlichkeiten gleich. Hier könnte, wenn die grosse Rechenarbeit nicht davon abhielte, auch eine Berechnung des *Abgangsmasses zweiter Art* im Sinne von § 4 Platz finden, wobei allenfalls auf den *Ereignismonat* statt auf den Tag abzustellen wäre. Dieses Vorgehen wäre dann geboten, wenn die Untersuchung von der Idee geleitet sein sollte, dass die Sterblichkeit durch den Stornoabgang im einen oder anderen Sinne einseitig beeinflusst ist. Eine solche Sterbetafel wäre als Grundlage für versicherungstechnische Berechnungen einwandfrei; sie dürfte aber, genau genommen, nur dort angewendet werden, wo erwartet werden kann, dass auch der Stornoeinfluss im gleichen Sinne und in gleichem Masse wirksam sein wird, wie es bei dem untersuchten Personenverband der Fall war.

B.

Wir können auch noch den Fall betrachten, wo die Untersuchung davon auszugehen hat, dass die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten als gegebene Zahlenwerte vorliegen und dass daraus die abhängigen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind. Praktisch dürfte es sich in diesem Falle immer um Wahrscheinlichkeiten handeln, die aus verschiedenen Statistiken zusammengetragen worden sind. Denn wenn die gegebenen unabhängigen Wahrscheinlichkeiten wirklich aus einer einzigen Statistik herrühren, so sollten normalerweise auch die abhängigen Wahrscheinlichkeiten mitgegeben sein, so dass die gestellte Aufgabe entfällt.

Wir gehen also davon aus, dass es sich um ein zusammengetragenes statistisches Material handelt, und erinnern an die in § 3 vorgetragenen Bedenken, die einem solchen Material gegenüber stets Geltung haben. Jedenfalls wird man unter diesen Umständen die Unbestimmtheit, die den Auflösungsformeln nach den früheren Darlegungen unvermeidlich anhaftet, entsprechend leichter in Kauf nehmen können. Wenn sämtliche Wahrscheinlichkeiten in der gleichen Art *ausgeglichen* sind, so sind auch die Abgangsintensitäten entweder als analytische Funktionen oder sonstwie (Differenzenrechnung) gegeben oder doch leicht zu bestimmen, und die Karupschen Integraldarstellungen mögen ihre Dienste tun. Allenfalls kann auch eine der Auflösungsformeln I bis IV (§ 1 B) in der inversen Form:

$$w_i = \psi(v_1, v_2 \dots v_k)$$

angewendet werden. Bei unausgeglichenen Zahlenwerten der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten stellt das letztere Verfahren den einzig möglichen Weg dar.

Es ist interessant, im historischen Rückblick von Du Pasquier nachzulesen, wie Karup ursprünglich ebenfalls vom *heuristischen* Axiom der Fundamentalgleichung ausgegangen ist. Erst später hat er dann, um den vielen Angriffen, die seine unabhängigen Wahrscheinlichkeiten gefunden hatten, zu begegnen, die Abgangsintensität in die mathematischen Ableitungen eingeführt. Wir kehren mit der von uns vertretenen Auffassung also gewissermassen zum Ausgangspunkt von Karup zurück. Es besteht aber doch ein bedeutender Unterschied zwischen den beiden Auffassungen, die gemeinsam von der Fundamentalgleichung ausgehen. Denn wir betonen gleichzeitig auch das Moment der Unbestimmtheit und der Willkür, das unseren Auflösungen unvermeidlich anhaftet, und stellen uns gleichzeitig auf den Standpunkt, dass den praktischen Bedürfnissen dennoch gedient ist, weil die verschiedenen Auflösungsformeln in den normalen Fällen immer auf angenähert gleiche Zahlenergebnisse führen. Wir sind uns ferner auch immer bewusst, dass den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten prinzipiell nur ein approximativer Wert zukommt, weil die formal-mathematische Fiktion der Unabhängigkeit der Abgangsursachen ebenfalls nur angenähert besteht, ja in gewissen Fällen sogar fraglich ist. Diese Erwägungen geben uns abschliessend Veranlassung zu einer gewissen Skepsis gegenüber den Anpreisungen der «neuen» Wahrscheinlichkeiten und mahnen uns, die praktisch allzeit unentbehrlichen und theoretisch eindeutigen abhängigen Wahrscheinlichkeiten darob nicht der Geringschätzung verfallen zu lassen.

Inhaltsverzeichnis.