Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 39 (1940)

Artikel: L'assurance d'annuités, cas particulier de l'assurance temporaire

Autor: Jéquier, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966920

L'assurance d'annuités, cas particulier de l'assurance temporaire

Par *Ch. Jéquier,* Lausanne

Introduction.

L'assurance d'annuités est une combinaison bizarre; dans les cas usuels, ses réserves mathématiques sont presque toujours *négatives.* Tout actuaire a pu s'en rendre compte une fois ou l'autre. Mais autre chose est de constater le fait, autre chose de l'expliquer.

Il nous a paru que ce curieux problème technique méritait d'être approfondi. C'est dans ce but que nous avons assimilé l'assurance d'annuités à l'assurance temporaire décroissante.

Nous avons ainsi été amenés à examiner quelques types d'assurance temporaire à capital variable, puis, partant de la notion de «décroissance limite», nous avons mis sur pied une théorie qui permet de prévoir le signe des réserves mathématiques de la combinaison dans des cas variés.

L'extension de ce procédé à l'assurance d'annuités est particulièrement aisée. On peut ainsi expliquer sans peine l'allure de ses réserves mathématiques dans tous les cas courants.

Chapitre premier.

Primes et réserves mathématiques des assurances d'annuités.

Rappelons ici quelques notions fondamentales:

Dans cette forme d'assurance, dite parfois «rente familiale», la compagnie d'assurances s'engage à payer chaque année, à partir du décès de l'assuré jusqu'à une époque déterminée, une rente annuelle de 1 franc par exemple; si l'assuré vit à l'échéance, la police est annulée. Il existe deux variétés; nous en donnons ci-après les primes uniques:

$$\text{Variété I: } U_1 = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} = vq_x + v^2\,{}_2q_x + \dots + v^{n-1}\,{}_{n-1}q_x$$

$$\text{Variété II: } U_2 = a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = vq_x + v^2\,{}_2q_x + \dots + v^n\,{}_nq_x$$

Dans les deux cas, le premier terme de la rente est payable dès la mort de l'assuré, à la fin de l'année du décès. Le dernier arrérage est payable, dans le premier cas, une année avant l'échéance, dans le deuxième cas, à l'échéance même. La variété II contient donc un terme de plus que la variété I. On a:

$$U_2 - U_1 = v^n \,{}_nq_x = v^n - {}_nE_x$$

Les primes dépendant des probabilités de décès — des ${}_kq_x$ —, les compagnies utiliseront une table à mortalité élevée (MWI, AF par exemple) et non pas une table de rentiers. Elles exigeront en général un examen médical du candidat. Les primes annuelles s'obtiennent en divisant par $a_{x:\overline{n|}}$ les primes uniques correspondantes.

Dans ce travail où nous ne nous occuperons que de la variété I nous avons adopté les notations suivantes:

Prime unique pure: $H_{x:\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$

Prime annuelle pure: $h_{x:\overline{n|}} = \dfrac{H_{x:\overline{n|}}}{a_{x:\overline{n|}}} = \dfrac{a_{\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}}{a_{x:\overline{n|}}}$ ou

$$h_{x:\overline{n|}} = \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{x:\overline{n|}}} - 1$$

Sauf pour $n = 1$ on a: $a_{\overline{n|}} > a_{x:\overline{n|}}$

On aboutit donc à la règle suivante: pour calculer la prime annuelle de l'assurance d'annuités, il suffit d'effectuer la division des deux rentes ($a_{\overline{n|}}$ par $a_{x:\overline{n|}}$) et de retrancher l'unité du quotient.

Le montant de la prime annuelle dépend donc des rapports $b = \dfrac{a_{\overline{n|}}}{a_{x:\overline{n|}}}$. Etudier ces rapports, c'est étudier les primes elles-mêmes puisque $h_{x:\overline{n|}} = b - 1$. En se référant aux deux séries qui donnent $a_{\overline{n|}}$ et $a_{x:\overline{n|}}$ on peut immédiatement énoncer les propositions suivantes: la valeur du rapport b est d'autant plus grande

1° que la durée est plus longue;

2° que l'âge est plus élevé (à partir de $x = 20$ ou $x = 25$);

3° que la mortalité est plus élevée.

Soulignons le fait suivant: à l'inverse de l'assurance mixte et du capital différé, la prime annuelle de l'assurance d'annuités *augmente avec la durée.* Ainsi pour $x = 30$ ans, $R = 1.000$, table MWI $3\frac{1}{2}$ % on a:

Durée	10 ans	15 ans	20 ans	25 ans	30 ans
Prime annuelle:	40,30	64,10	89,40	116,60	146,50

Réserve mathématique: Pour une rente de 1 franc on a:

$${}_kV\,(H_{x:\overline{n}|}) = H_{x':\overline{n'}|} - h_{x:\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} \quad \text{en faisant}$$

$x' = x + k \quad n' = n - k$, k représentant le nombre de primes payées.

Désignant par ${}_kY$ la réserve mathématique d'une rente de R francs et par P la prime annuelle, il vient: $P = R\,h_{x:\overline{n}|}$ et

$${}_kY = R \cdot {}_kV\,(H_{x:\overline{n}|}) = R\,H_{x':\overline{n'}|} - P\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} \quad \text{ou}$$

$${}_kY = R\,\mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (P + R)\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$$

Exemple numérique: $x = 30$; $n = 25$; $R = 100$; table MWI $3\frac{1}{2}$%.
L'application des formules précédentes conduit aux résultats ci-après:

$$P = 100\,h_{30:\overline{25}|} = 11{,}66$$

k	Rés. math.	k	Rés. math.	k	Rés. math.
1	— 2,6	9	— 24,2	17	— 39,0
2	— 5,3	10	— 26,7	18	— 38,6
3	— 8,0	11	— 29,1	19	— 37,5
4	— 10,7	12	— 31,5	20	— 35,4
5	— 13,3	13	— 33,8	21	— 31,9
6	— 15,9	14	— 35,7	22	— 27,1
7	— 18,7	15	— 37,4	23	— 20,5
8	— 21,4	16	— 38,5	24	— 11,7
				25	0

On remarquera l'allure singulière de cette réserve. Négative pour toutes les valeurs de k elle passe par un maximum négatif pour $k = 17$ et s'annule à l'échéance.

L'avant-dernière réserve est égale à la prime annuelle changée de signe. C'est d'ailleurs une règle générale comme on le voit ci-après. On a en effet pour $k = n - 1$:

$${}_kY = R\, H_{x':\overline{1|}} - P = -P \quad \text{car} \quad H_{x':\overline{1|}} = 0 \quad {}^{1})$$

Les compagnies doivent être prudentes en traitant cette combinaison. L'assuré qui vit à la fin du contrat n'a aucun intérêt à payer sa dernière prime. Il s'en abstiendra donc en général.

D'autre part «l'événement assuré» au sens de LCA n'étant pas certain, la combinaison n'est pas rachetable. Elle n'est pas non plus «réductible». Comment en effet choisir une règle de réduction acceptable pour une assurance dont les réserves mathématiques sont généralement négatives? Dans la pratique les compagnies ne traitent pas cette combinaison isolément. Habituellement, la rente familiale est liée à une assurance à terme fixe, la rente étant égale à 10 % du capital assuré, par exemple. La combinaison prend alors le nom d'assurance familiale [2]). On peut aussi combiner la rente familiale avec l'assurance mixte.

Analyse de la réserve mathématique. L'allure de la réserve mathématique dépend des rapports $b = \dfrac{\mathsf{a}_{\overline{n|}}}{\mathsf{a}_{x:\overline{n|}}}$ et $b' = \dfrac{\mathsf{a}_{\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}}$. On a en effet:

$${}_kV\,(H_{x:\overline{n|}}) = H_{x':\overline{n'|}} - h_{x:\overline{n|}}\,\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}} = \mathsf{a}_{\overline{n'|}} - (1 + h_{x:\overline{n|}})\,\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}$$

ou $${}_kV\,(H_{x:\overline{n|}}) = \mathsf{a}_{\overline{n'|}} - b \cdot \mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}$$

La réserve mathématique sera négative si $\mathsf{a}_{\overline{n'|}} - b \cdot \mathsf{a}_{x':\overline{n'|}} < 0$

ou si $\dfrac{\mathsf{a}_{\overline{n'|}}}{\mathsf{a}_{x':\overline{n'|}}} < \dfrac{\mathsf{a}_{\overline{n|}}}{\mathsf{a}_{x:\overline{n|}}}$ c'est-à-dire si $b' < b$.

---

[1]) Un exemple courant d'assurance d'annuités est donné par l'assurance de rente d'orphelin à prime annuelle. Les réserves mathématiques de la combinaison étant généralement négatives, le Bureau fédéral des assurances a autorisé les compagnies concessionnaires à porter les réserves mathématiques égales à zéro. «Vu la nature du risque assuré, le Bureau des assurances n'exige pas la constitution de réserves mathématiques pendant la période du paiement des primes.» (Dispositions concernant l'assurance de groupes du 10 novembre 1937, page 11.)

[2]) Dans des cas de cette nature la combinaison est considérée comme *indivisible*. Pour en calculer les valeurs de rachat on partira de la réserve mathématique globale, réserve négative comprise. Il sera loisible alors de déterminer un capital réduit combiné avec une rente réduite. Il suffira d'appliquer la valeur de rachat comme prime unique — pure ou d'inventaire — du capital et de la rente. (On prendra par exemple comme dénominateur l'expression $v^{n'} + 0{,}1\, H_{x':\overline{n'|}}$).

Des séries de calculs nous ont convaincus que l'on a souvent $b' < b$, mais que cela n'a pas lieu toujours ainsi qu'on le constate dans l'exemple II ci-après:

Exemple I: Cas «normal». $x = 30$, $n = 25$, $R = 100$, MWI $3\frac{1}{2}\%$;

$$\text{on a } P = 11{,}66 \text{ et } b = \frac{a_{\overline{25}|}}{a_{30:\overline{25}|}} = 1{,}1166;$$

on a d'autre part les valeurs suivantes:

k	b'	Rés. math.
1	1,1150	— 2,6
5	1,1064	— 13,3
10	1,0923	— 26,7
15	1,0700	— 37,4
24	1,0000	— 11,7

on a partout ici $b' < b$; les réserves sont donc toutes négatives.

Exemple II: Cas exceptionnel. $x = 70$, $n = 20$, $R = 100$, MWI $3\frac{1}{2}\%$;

$$\text{on a } P = 108{,}6 \text{ et } b = \frac{a_{\overline{20}|}}{a_{70}} = 2{,}086;$$

on a d'autre part les valeurs suivantes:

k	b'	Rés. math.	k	b'	Rés. math.
1	2,100	+ 9,8	7	2,093	+ 3,7
2	2,111	+ 16,6	8	2,069	— 8,0
3	2,118	+ 20,3	9	2,037	— 22,0
4	2,121	+ 21,0	10	1,997	— 38,3
5	2,119	+ 18,7	15	1,541	— 165,3
6	2,109	+ 12,6	19	1,000	— 108,6

On a d'abord $b' > b$; puis, dès $k = 8$, $b' < b$. On déduit de ces variations les fluctuations de la réserve mathématique. Cette réserve, positive au début, commence par croître jusqu'à $k = 4$; elle se met ensuite à décroître, puis devient négative dès $k = 8$.

Ce cas curieux, purement théorique d'ailleurs, suffit à montrer qu'il ne faut pas généraliser; les réserves mathématiques des assurances d'annuités ne sont pas toujours négatives comme on serait tenté de le croire. Cet exemple fait voir aussi comment les rapports

b et b' expliquent, par leurs variations, l'allure des réserves mathématiques. Une étude approfondie de ces rapports fondamentaux où l'on ferait varier soit la mortalité, soit le taux d'intérêt, l'âge d'entrée ou la durée ne manquerait pas d'utilité; mais dans ce travail nous avons préféré aborder le problème par un autre bout.

Chapitre II.

Les assurances temporaires décroissantes.

On peut assimiler l'assurance d'annuités à une assurance temporaire au décès dont les capitaux décroissent comme les rentes successives $a_{\overline{n-1|}}\ a_{\overline{n-2|}} \ldots\ldots a_{\overline{1|}}\ 0$. C'est la raison pour laquelle nous avons été amenés à faire des recherches de ce côté. Dans les assurances temporaires décroissantes, les réserves mathématiques peuvent être ou toutes positives, ou toutes négatives, ou positives pour certaines valeurs de k, négatives pour d'autres valeurs.

Il existe même un type remarquable de décroissance des capitaux assurés où toutes les réserves mathématiques sont *nulles*. Nous appellerons ce genre de décroissance la *décroissance limite* ou le *cas limite*. Cela étant, nous allons passer en revue quelques types spéciaux de décroissance des capitaux assurés.

Premier type: décroissance limite. Pour rendre la chose concrète envisageons l'exemple suivant:

Assurance temporaire de 7 ans de durée: $x = 60$ ans, table MWI $3\frac{1}{2}\,\%$. Les capitaux assurés sont donnés ci-dessous:

1re année	K_1	$= 28.285$
2e »	K_2	$= 26.455$
3e »	K_3	$= 24.739$
4e »	K_4	$= 23.165$
5e »	K_5	$= 21.681$
6e »	K_6	$= 20.229$
7e »	K_7	$= 18.761$

La prime annuelle pure est $966{,}18 = 1000\,v$. *Les réserves mathématiques sont nulles pour toutes les valeurs de k.* Comment cela est-il possible?

L'explication réside dans le fait que les capitaux assurés n'ont pas été choisis au hasard, au contraire. Ils présentent la particularité d'être tous inversément proportionnels au risque, c'est-à-dire à q_x. On a en effet:

$$\text{I} \quad K_k = \frac{1000}{q_{60+k-1}} \qquad \text{II} \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{q_{61}}{q_{60}} \quad \frac{K_2}{K_3} = \frac{q_{62}}{q_{61}} \quad \cdots \quad \frac{K_6}{K_7} = \frac{q_{66}}{q_{65}}$$

En désignant par ϱ_k le rapport direct de deux capitaux consécutifs et par λ_k le rapport inverse de deux q_x consécutifs on a ici $\varrho_k = \lambda_k$; par exemple:

$$\frac{K_1}{K_2} = \varrho_1 \qquad \frac{q_{61}}{q_{60}} = \lambda_1 \qquad \varrho_1 = \lambda_1 = 1{,}069.$$

La prime de risque dite «prime naturelle» que nous désignerons par π est donnée par la relation: $\pi = K_k \cdot v \cdot q_{60+k-1} = 1000\ v$.

Dans ce cas bizarre la prime naturelle est *indépendante de la mortalité.* Elle est pareille chaque année. Elle est donc égale à la prime nivelée, d'où $P = \pi = 1000\ v = 966{,}18$.

On déduit de là que toutes les réserves mathématiques sont nulles. En effet, par la méthode rétrospective on constate que la prime de risque absorbant la totalité de la prime P, il ne reste aucune prime d'épargne pour constituer la réserve mathématique. La prime d'épargne moyenne étant nulle chaque année, la réserve mathématique est nulle partout.

Généralisant cet exemple particulier nous prendrons comme capitaux assurés au décès les montants ci-après, n étant la durée du contrat:

$$K_1 = \frac{1}{q_x} \quad K_2 = \frac{1}{q_{x+1}} \quad K_3 = \frac{1}{q_{x+2}} \quad \cdots \quad K_n = \frac{1}{q_{x+n-1}}$$

La prime unique ${}_nX_x$ est donnée par l'expression:

$$D_x \cdot {}_nX_x = \frac{C_x}{q_x} + \frac{C_{x+1}}{q_{x+1}} + \cdots + \frac{C_{x+n-1}}{q_{x+n-1}} = \frac{v^{x+1} d_x}{q_x} + \frac{v^{x+2} d_{x+1}}{q_{x+1}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{v^{x+n} d_{x+n-1}}{q_{x+n-1}}$$

$$D_x \cdot {}_nX_x = v\,(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}) \text{ car } \frac{d_x}{q_x} = l_x, \frac{d_{x+1}}{q_{x+1}} = l_{x+1},$$

etc. Il en résulte que ${}_nX_x = v\,\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}$ et ${}_nP_x = \dfrac{{}_nX_x}{\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}} = v$

La prime annuelle est égale à v. Il est facile de voir que l'on a ici:

$${}_{n'}P_{x'} = \frac{{}_{n'}X_{x'}}{\mathsf{a}_{x':n'|}} = {}_nP_x$$

on en déduit la réserve mathématique:

$${}_kV = {}_{n'}X_{x'} - {}_nP_x\,\mathsf{a}_{x':n'|} = 0$$

Deuxième et troisième types de décroissance.

Posons $K_1 = \varepsilon_0 \dfrac{1}{q_x}$ $K_2 = \varepsilon \dfrac{1}{q_{x+1}}$ $K_3 = \varepsilon \dfrac{1}{q_{x+2}} \ldots K_n = \varepsilon \dfrac{1}{q_{x+n-1}}$

Par hypothèse $\varepsilon_0 = 1$, ε est un nombre positif constant. On a ici: (${}_nX_x$ = prime unique)

$$D_x \cdot {}_nX_x = \frac{C_x}{q_x} + \varepsilon\left(\frac{C_{x+1}}{q_{x+1}} + \frac{C_{x+2}}{q_{x+2}} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{q_{x+n-1}}\right)$$

Au deuxième membre ajoutons et retranchons $\dfrac{\varepsilon\,C_x}{q_x}$, il vient, après une transformation facile:

$$D_x \cdot {}_nX_x = v\,(D_x - \varepsilon\,D_x) + v\,\varepsilon\,(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}) \text{ d'où}$$

$${}_nX_x = v\,(1-\varepsilon) + v\,\varepsilon\,\mathsf{a}_{x:\overline{n}|} \text{ et } {}_nP_x = v\,\varepsilon + \frac{v\,(1-\varepsilon)}{\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Quant à la réserve mathématique elle est donnée par la formule:

$${}_kY = {}_{n'}X_{x'} - {}_nP_x\,\mathsf{a}_{x':n'|}$$

Une transformation analogue à la précédente conduit à:

$${}_{n'}X_{x'} = \varepsilon\,v\,\mathsf{a}_{x':\overline{n'}|} \text{ d'où } {}_kY = (\varepsilon\,v - {}_nP_x)\,\mathsf{a}_{x':\overline{n'}|}$$

ou, en remplaçant ${}_nP_x$ par sa valeur: ${}_kY = -\dfrac{v\,(1-\varepsilon)}{\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}}\,\mathsf{a}_{x':n'|}$

On déduit de ces relations les conclusions suivantes:

Si $\varepsilon = 1$, ${}_kY = 0$ nous sommes ramenés au cas précédent; premier type.
Si $\varepsilon < 1$, ${}_kY < 0$, les réserves sont toutes négatives; deuxième type.
Si $\varepsilon > 1$, ${}_kY > 0$, les réserves sont toutes positives; troisième type.

Quatrième type de décroissance. Les capitaux assurés sont donnés cette fois par les relations suivantes:

$$K_1 = \varepsilon_0 \frac{1}{q_x} \qquad K_2 = \varepsilon_1 \frac{1}{q_{x+1}} \qquad K_3 = \varepsilon_2 \frac{1}{q_{x+2}} \ldots K_n = \varepsilon_{n-1} \frac{1}{q_{x+n-1}}$$

on a par hypothèse $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots > \varepsilon_{n-1}$.

Les ε successifs vont en décroissant; *la décroissance des capitaux est donc plus rapide que la décroissance limite.* En nous rapportant aux définitions de ϱ_k et de λ_k (page 37) on a ici $\varrho_k > \lambda_k$.

On peut poser: ${}_nP_x = v\,\varepsilon_M$; ε_M étant un ε moyen défini par la double inégalité $\varepsilon_0 > \varepsilon_M > \varepsilon_{n-1}$.

Après k primes payées la partie positive de la réserve mathématique pourra prendre la forme:

$$_{n'}X_{x'} = v\,\varepsilon_N \cdot \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$$

en désignant par ε_N un autre ε moyen, défini ci-après. Or, par suite de la règle adoptée pour la décroissance des capitaux assurés, on a $\varepsilon_N < \varepsilon_M$. Il est facile de démontrer cette inégalité. On a en effet:

Réserve mathématique: ${}_kY = {}_{n'}X_{x'} - {}_nP_x\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$ où

$$D_{x+k} \cdot {}_{n'}X_{x'} = \varepsilon_k\,D_{x+k} + \varepsilon_{k+1}\,D_{x+k+1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\,D_{x+n-1}$$

De l'expression ${}_kY = v\,\varepsilon_N\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} - v\,\varepsilon_M\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$ on tire:

$$\frac{{}_kY}{v\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}} = \frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} \text{ en posant } \frac{A'}{B'} =$$

$$= \frac{\varepsilon_k\,D_{x+k} + \varepsilon_{k+1}\,D_{x+k+1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\,D_{x+n-1}}{D_{x+k} + D_{x+k+1} + \ldots + D_{x+n-1}} = \varepsilon_N$$

$$\text{et } \frac{A}{B} = \frac{\varepsilon_0\,D_x + \varepsilon_1\,D_{x+1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\,D_{x+n-1}}{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}} = \varepsilon_M$$

Dans les deux cas nous avons affaire à une moyenne pondérée. Par suite de l'hypothèse faite sur les ε nous pouvons poser les inégalités

$$1 > \varepsilon_M > \varepsilon_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_k > \varepsilon_N > \varepsilon_{n-1}$$

Montrons que l'on a dès lors $\varepsilon_N < \varepsilon_M$, ou $\varepsilon_N < \frac{A}{B}$, ou encore $B\,\varepsilon_N < A$.

En remarquant que

$$A' = \varepsilon_N\, B' = \varepsilon_k\, D_{x+k} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\, D_{x+n-1}$$

il faut prouver que

$$\varepsilon_N\,(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+k-1}) + \varepsilon_N\, B' < \varepsilon_0\, D_x + \varepsilon_1\, D_{x+1} + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon_{k-1}\, D_{x+k-1} + A' \text{ ou que, puisque } \varepsilon_N\, B' = A'$$

$$\varepsilon_N\,(D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+k-1}) < \varepsilon_0\, D_x + \varepsilon_1\, D_{x+1} + \ldots + \varepsilon_{k-1}\, D_{x+k-1}$$

Or $\varepsilon_N < \varepsilon_k$, d'où *à fortiori* $\varepsilon_N < \varepsilon_{k-1}$; ε_N est donc plus petit que chacun des coefficients $\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1}$ du deuxième membre. La dernière inégalité est donc évidente. Il en résulte qu'on a, pour toutes les valeurs de k : $\varepsilon_N < \varepsilon_M$.

On conclut de cette dernière inégalité que la réserve mathématique soit ${}_kY = v\,(\varepsilon_N - \varepsilon_M)\, \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$ est *négative* pour toutes les valeurs de k.

Exemple numérique: $x = 60 \quad n = 7$ MWI $3\frac{1}{2}$ %.

Posons ici $K_1 = 28.285$ et $\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_2}{K_3} = \ldots = \frac{K_6}{K_7} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}111$

Les capitaux assurés varient en progression géométrique de raison 0,9. On a les montants suivants:

x	Cap. assurés	k	Réserve math.
60	$K_1 = 28.285$	1	— 98
61	$K_2 = 25.456$	2	— 165
62	$K_3 = 22.910$	3	— 201
63	$K_4 = 20.619$	4	— 202
64	$K_5 = 18.557$	5	— 167
65	$K_6 = 16.701$	6	— 100
66	$K_7 = 15.031$	7	0

Les rapports λ_k ont les valeurs:

$$\lambda_1 = \frac{q_{61}}{q_{60}} = 1{,}069 \qquad \lambda_2 = \frac{q_{62}}{q_{61}} = 1{,}069 \ldots \qquad \lambda_6 = \frac{q_{66}}{q_{65}} = 1{,}078$$

tandis que $\varrho_k = 1{,}111 =$ constante. On a partout ici $\varrho_k > \lambda_k$. On déduit de cette inégalité que, la décroissance des capitaux étant plus rapide que la décroissance limite, toutes les réserves mathématiques seront *négatives* (sauf la dernière évidemment qui est nulle). Il n'est pas nécessaire de calculer la valeur des divers ε.

La prime unique pure — ${}_nX_x$ — est donnée par la relation suivante:

$$ {}_nX_x = \frac{K_1\,C_{60} + K_2\,C_{61} + \ldots + K_7\,C_{66}}{D_{60}} = 4.945{,}50.$$

La prime annuelle constante est ici: ${}_7P_{60} = \dfrac{4.945{,}50}{\mathrm{a}_{60:\overline{7}|}} = 874{,}07.$

La partie positive de la réserve, soit ${}_{n'}X_{x'}$ est donnée par une expression analogue à ${}_nX_x$, la partie soustractive étant ${}_nP_x\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$. La réserve mathématique, toujours négative, passe par un maximum négatif pour $k = 4$; elle s'annule à l'échéance.

Cinquième type de décroissance. Les capitaux assurés sont définis comme dans le type précédent, mais ici les ε successifs vont en *croissant*. On a, par hypothèse:

$$\varepsilon_0 = 1 \ \text{ et } \ \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \ldots < \varepsilon_{n-1}$$

La variation des capitaux est donc plus lente que dans le cas limite. On aura donc $\varrho_k < \lambda_k$.

On peut mettre la prime annuelle sous la forme ${}_nP_x = v \cdot \varepsilon_{M'}$. $\varepsilon_{M'}$ étant un ε moyen compris entre ε_0 et ε_{n-1}.

La partie positive de la réserve mathématique peut être représentée par ${}_{n'}X_{x'} = v\,\varepsilon_{N'} \cdot \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$, $\varepsilon_{N'}$ étant un ε moyen compris entre ε_k et ε_{n-1}. Par une démonstration toute semblable à la précédente, on prouve que l'on a dans le cas particulier $\varepsilon_{N'} > \varepsilon_{M'}$.

La réserve mathématique étant mise sous la forme

$${}_kY = v\,(\varepsilon_{N'} - \varepsilon_{M'})\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$$

on en conclut que cette réserve est *positive* pour toutes les valeurs de k.

Exemple numérique: Prenons les mêmes caractéristiques que précédemment, mais les capitaux variant cette fois en progression géométrique de raison 0,97. On a alors les montants suivants:

x	Cap. assurés	k	Réserve math.
60	$K_1 = 28.285$	1	$+ 112$
61	$K_2 = 27.436$	2	192
62	$K_3 = 26.613$	3	240
63	$K_4 = 25.815$	4	252
64	$K_5 = 25.041$	5	223
65	$K_6 = 24.290$	6	143
66	$K_7 = 23.561$	7	0

$\varrho = \frac{K_1}{K_2} = \frac{K_2}{K_3} = \ldots = \frac{1}{0{,}97} = 1{,}031$. Il n'est pas nécessaire de compter la valeur des différents ε; il suffit de constater que, les λ_k ayant les mêmes montants que précédemment, on a ici: $\varrho_k < \lambda_k$. La décroissance des capitaux étant plus lente que la décroissance limite, les réserves mathématiques seront toutes positives.

On a: ${}_7P_{60} = 1069{,}78$. La réserve mathématique, positive, passe par un maximum pour $k = 4$ et s'annule à l'échéance.

Nous ne pousserons pas plus avant nos investigations et n'étudierons pas d'autres types de variations. Nous nous sommes bornés à ceux que l'on rencontre habituellement. Si l'on désire utiliser une règle pratique pour prévoir le signe de la réserve mathématique, on ne peut évidemment envisager des variations *arbitraires* des capitaux assurés. En général, dans l'assurance temporaire à capitaux décroissants, les capitaux assurés varient d'une façon «régulière». Ce sont ces cas-là que nous avons seuls envisagés.

D'après les considérations qui précèdent on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème: Dans l'assurance temporaire à capitaux décroissants, les réserves mathématiques peuvent être nulles, positives ou négatives. Elles sont nulles si les capitaux assurés sont tous inversément proportionnels aux q_x (cas limite où $\varrho = \lambda$), positives si la décroissance est plus lente ($\varrho < \lambda$), négatives si la décroissance est plus rapide que celle du cas limite ($\varrho > \lambda$).

Enfin, il peut exister des *cas complexes* où les réserves mathématiques seront positives dans certaines régions, négatives dans d'autres régions. Pour déterminer le signe de la réserve on calculera les divers rapports ϱ_k et λ_k. On appliquera alors avec quelque précaution notre théorème qui, s'il ne peut faire connaître avec certitude le signe de chaque réserve, pourra du moins, comme nous le verrons plus loin, déceler l'allure de la réserve, ce qui suffit dans la plupart des cas.

Un exemple paradoxal: Indiquons pour terminer ce sujet un cas particulier très curieux. Il s'agit d'une assurance temporaire *à capital constant,* soit: $C = 10.000$, $x = 20$, $n = 7$, table MWI $3\frac{1}{2}\,\%$.

La prime annuelle est 85,69. Les réserves mathématiques ont les valeurs suivantes: —3, —6, —8, —8, —7, —4, 0. Elles sont toutes *négatives.* Comment ces résultats sont-ils possibles? Cet exemple ne met-il pas notre théorème en défaut?

Pour expliquer ce paradoxe apparent, il faut envisager l'allure des q_x. Dans la partie de la table considérée ils vont *en diminuant* à mesure que l'âge augmente. On a en effet:

$$100\ q_{20} = 0{,}919\ ^{1)}$$
$$100\ q_{21} = 0{,}916$$
$$\cdots\cdots$$
$$100\ q_{26} = 0{,}848\ ^{2)}$$

Il résulte de cette particularité qu'ici le cas limite admet des *capitaux croissants.*

Posant $K_k = \dfrac{10.000\ q_{20}}{q_{20+k-1}}$, on obtient les montants suivants:

---

[1]) Si l'on exclut la période de l'enfance (et de la jeunesse), les rapports λ_k augmentent généralement avec k (dans la table MWI cela a lieu dès $x = 28$).

[2]) L'accroissement des rapports λ_k successifs est généralement «régulier» avec les tables agrégées. Avec les tables de sélection, ces rapports peuvent présenter en revanche des irrégularités pendant la période de sélection (table anglaise 1920—1929 par exemple). Ces sauts brusques des q_x ne sont pas sans manifester leur influence dans l'allure des réserves mathématiques. Parfois même les réserves sont positives pendant la période de sélection, alors qu'elles seraient négatives si on les comptait avec la table finale.

Cas limite:

x	Capitaux assurés
20	$K_1 = 10.000$
21	$K_2 = 10.028$
22	$K_3 = 10.171$
23	$K_4 = 10.384$
24	$K_5 = 10.613$
25	$K_6 = 10.765$
26	$K_7 = 10.833$

Dans ce dernier cas, la réserve mathématique, comme il est aisé de s'en assurer, *est nulle pour toutes les valeurs de k.* Or, si en lieu et place de ces capitaux croissants on suppose des capitaux *constants,* tous égaux à fr. 10.000, les capitaux assurés étant alors *inférieurs* à ceux du cas limite, notre théorème permet d'affirmer que la réserve mathématique sera *négative* partout; c'est ce qui a lieu en effet. Loin donc que ce cas singulier présente une anomalie il ne fait que confirmer notre théorie générale.

Chapitre III.

Application aux assurances d'annuités.

Les assurances d'annuités, avons-nous dit, peuvent être assimilées à des assurances de capitaux dont les capitaux successifs auraient les valeurs $a_{\overline{n-1|}}$, $a_{\overline{n-2|}}$ ... $a_{\overline{1|}}$, 0. Examinons d'un peu plus près cette affirmation:

Au décès de l'assuré l'assurance d'annuités se transforme en *rente certaine.* Si le décès survient la première année, l'assureur devra verser 1 franc pendant n—1 années; la valeur actuelle de ces n—1 paiements est $a_{\overline{n-1|}}$. Au point de vue technique il est indifférent que l'assureur verse une seule fois $a_{\overline{n-1|}}$ francs ou échelonne cette somme sur n—1 années à raison de 1 franc par année. On peut donc bien considérer ces montants $a_{\overline{n-1|}}$, $a_{\overline{n-2|}}$ ... $a_{\overline{1|}}$, 0 comme autant de capitaux assurés. Il est intéressant pourtant de donner de cette proposition une preuve technique. Comptons à cet effet la valeur actuelle de l'assurance d'annuités comme s'il s'agissait de la prime unique d'une assurance temporaire décroissante de n années. On aura ici:

$$K_1 = \mathrm{a}_{\overline{n-1}|} \qquad K_2 = \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} \ldots \qquad K_{n-1} = 1 \qquad K_n = 0$$

On peut poser dès lors:

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = K_1 C_x + K_2 C_{x+1} + \ldots + K_{n-1} C_{x+n-2} \quad \text{ou}$$

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n-1}|} C_x + \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} C_{x+1} + \mathrm{a}_{\overline{1}|} C_{x+n-2} \quad \text{ou}$$

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n-1}|} (v D_x - D_{x+1}) + \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} (v D_{x+1} - D_{x+2}) + \ldots$$
$$\ldots + (v D_{x+n-2} - D_{x+n-1}) \quad \text{ou encore}$$

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = v \mathrm{a}_{\overline{n-1}|} D_x + v \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} D_{x+1} + \ldots + v D_{x+n-2} -$$
$$- (\mathrm{a}_{\overline{n-1}|} D_{x+1} + \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1})$$

Utilisant ici la formule auxiliaire $\mathrm{a}_{\overline{n}|} = 1 + v \mathrm{a}_{\overline{n-1}|}$, mise sous la forme $\mathrm{a}_{\overline{n}|} - 1 = v \mathrm{a}_{\overline{n-1}|}$, il vient:

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = (\mathrm{a}_{\overline{n}|} - 1) D_x + (\mathrm{a}_{\overline{n-1}|} - 1) D_{x+1} + \ldots + (\mathrm{a}_{\overline{2}|} - 1) D_{x+n-2} +$$
$$+ (\mathrm{a}_{\overline{1}|} - 1) D_{x+n-1} - (\mathrm{a}_{\overline{n-1}|} D_{x+1} + \mathrm{a}_{\overline{n-2}|} D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1})$$

ou simplement:

$$D_x H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} D_x - (D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}) \quad \text{d'où}$$

$$H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$$

On retrouve la formule ordinaire. L'assimilation de l'assurance d'annuités à l'assurance temporaire décroissante de durée n est donc parfaite. Nous sommes dès lors en possession d'une méthode d'investigation aussi simple que féconde. Dans l'assurance d'annuités le signe de la réserve mathématique se déduira de la comparaison des rapports ϱ_k et λ_k. On aura ici:

$$\varrho_k = \frac{K_k}{K_{k+1}} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n-k}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n-k-1}|}} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{q_{x+k}}{q_{x+k-1}}.$$

Dans les cas «simples» si $\varrho_k > \lambda_k$ les réserves mathématiques seront négatives; elles seront positives si $\varrho_k < \lambda_k$. Ces deux sortes de rapports, remarquons-le, sont totalement différents; ils n'ont entre eux rien de commun. Force est donc de faire le calcul dans chaque cas particulier; mais pour une table donnée, MWI par exemple, il sera facile de calculer à l'avance tous les rapports λ_k; pour un taux technique donné il sera aisé de préparer la tabelle des divers rapports

ϱ_k utilisables. Un simple coup d'œil jeté sur ces tabelles renseignera sur l'allure de la réserve de l'assurance d'annuités. Pour nous en convaincre reprenons les exemples numériques traités précédemment.

Exemple 1. Assurance d'annuités de 1.000 francs.

$$x = 30, \quad n = 25, \qquad \text{table MWI } 3\tfrac{1}{2}\,\%$$

On a les rapports suivants (il n'est pas nécessaire de faire le calcul pour toutes les valeurs de k):

$$\varrho_1 = \frac{a_{\overline{24}|}}{a_{\overline{23}|}} = 1{,}028 \qquad \lambda_1 = \frac{q_{31}}{q_{30}} = 1{,}022$$

$$\varrho_{10} = \frac{a_{\overline{15}|}}{a_{\overline{14}|}} = 1{,}055 \qquad \lambda_{10} = \frac{q_{40}}{q_{39}} = 1{,}038$$

$$\varrho_{23} = \frac{a_{\overline{2}|}}{a_{\overline{1}|}} = 1{,}966 \qquad \lambda_{23} = \frac{q_{53}}{q_{52}} = 1{,}068$$

Comme on a partout $\varrho_k > \lambda_k$, les réserves mathématiques seront *toutes négatives* (voir page 35).

Exemple 2: $x = 70$, $n = 20$, $R = 1000$, table MWI $3\tfrac{1}{2}\,\%$. On a ici:

k	Valeurs de ϱ_k	Valeurs de λ_k	
1	1,040	1,080	$\varrho_k < \lambda_k$
4	1,050	1,079	Réserves positives
8	1,074	1,075	
9	1,082	1,075	
10	1,093	1,091	$\varrho_k > \lambda_k$
15	1,229	1,052	Réserves négatives
18	1,966	1,019	

Il s'agit d'un cas complexe. Notre théorème ne peut s'appliquer qu'avec prudence. S'il n'indique pas le signe de chaque réserve — par exemple pour $k = 8$ —, il renseigne pourtant exactement sur l'allure générale de la réserve mathématique.