

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	37 (1939)
Artikel:	Analytische Auswertung des Kingschen Glättungsprinzipes
Autor:	Ruchti, Werner
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-550944

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Analytische Auswertung des Kingschen Glättungsprinzipes

Von Werner Ruchti, Bern

Da sich einfache analytische Funktionen zur Wiedergabe langer Reihen von Experimentalwerten selten eignen, bedient man sich häufig zur Beseitigung der zufälligen Fehler mechanischer Glättungsverfahren. Als solches ist dasjenige von King bekannt und oft verwendet. Es besteht aus zwei Schritten, der Ausgleichung von isolierten Kardinalpunkten — üblicherweise in Abständen von je 5 Argumenteneinheiten — und der oskulatorischen Interpolation. Zwischen die isolierten Punkte werden nämlich durch Differenzenaufteilung Parabelstücke dritter Ordnung so eingeflochten, dass sie sich bei den Treffstellen tangieren. Obschon die Krümmungsbedingung unberücksichtigt bleibt, pflegt man diese Art von Interpolation oskulatorisch zu nennen. Da man nicht von den Gleichungen, sondern von den Differenzen aus zu den Parabeln gelangt, muss die Methode unter die mechanischen eingereiht werden, wenn auch dasselbe Ergebnis ebensogut ein analytisches Gewand tragen könnte.

Es mag hier erwähnt werden, dass bei der Ausgleichung der schweizerischen Sterbetafeln das Kingsche Verfahren das analytische Gesetz von Makeham verdrängt hat, da es eine bessere Anpassung an die beobachteten Werte ermöglichte.

Neben dem Nachteil seltener Anwendbarkeit bieten aber analytische Methoden unter anderem den Vorteil, dass sie das Ergebnis in der konzentrierten Form einer Funktionalgleichung repräsentieren. Das kommt dann vorteilhaft zur Geltung, wenn auf die gefundene Zahlenreihe gewisse Operationen wie Integrationen und Differentiationen auszuführen sind. Diese Prozesse lassen sich bequem an der Ersatzfunktion vollziehen, ehe man zu den Zahlenwerten übergeht. Bei mechanisch geglätteten Wertereihen muss man sich dagegen mit mühsamen numerischen Näherungsverfahren abfinden. In gewissen Fällen verdient also gegenüber einer mechanischen Glättung eine gleichwertige analytische Ausgleichung den Vorzug.

Das Kingsche Glättungsprinzip lässt sich ohne Vergrösserung der Rechenarbeit in die analytische Sprache übersetzen. Das Ergebnis ist nicht eine einzige Ersatzfunktion, sondern mehrere solche, von denen jede in einem bestimmten Ausschnitt Gültigkeit hat und deren Kurven stetig und tangierend aneinanderschliessen. Soll aber ein solches Gebilde praktischen Wert haben, so darf der Gültigkeitsbereich der einzelnen Funktion nicht allzu beschränkt sein. Es kann sich also nicht um eine Beibehaltung der Fünferintervalle handeln.

Der Gedanke dieser teilweisen analytischen Ausgleichung ist nicht neu. Dr. J. P. Gram hat im 10. Heft der Mitteilungen dieser Frage einen Beitrag gewidmet ¹⁾. Er schlug vor, die einzelnen Parabeln nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Auf diese Weise wird ein Ergänzungsverfahren nötig, um bei den Übergangsstellen die unvermeidlichen Unstetigkeiten zu mildern. Auf die kontinuierliche Veränderung der Tangentenrichtung kann jedoch nicht geachtet werden.

Es soll hier eine andere Lösungsmöglichkeit für dieselbe Frage vorgeschlagen werden. Gemäss dem Kingschen Prinzip stellt man an die Parabeln nicht die Minimumbedingung für die Fehlerquadrate, sondern man verlangt von ihnen — es soll sich um Kurven dritter Ordnung handeln —, dass sie mit gegebenen Richtungsgrössen durch zwei ebenfalls gegebene Punkte gehen sollen.

Der erste Teil der Aufgabe besteht also in der Ermittlung der Kardinalpunkte. Diese können nach der üblichen Methode hergeleitet werden. Aus der Reihe der 15 Werte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{14}$ wird das Zentralglied y_7 durch folgende Operation ausgeglichen:

$$(1) \quad f(7) = \frac{1}{5} \Delta Y_0 + \frac{1}{5} \Delta^2 Y_0 - \frac{1}{125} \Delta^3 Y_0 \quad ^2)$$

wobei $Y_x = \sum_0^{x-1} y_x$ bedeutet. Die Differenzen Δ sind auf die Fünferintervalle 0, 5, 10, 15 bezogen.

¹⁾ J. P. Gram: Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versich.-Math., Heft 10.

²⁾ Dr. Johanna Simonett: Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versich.-Math., Heft 28.

Die Kardinalpunkte können aber auch nach irgendeiner anderen Methode bestimmt werden. Ihre Abstände sind beliebig, im Gegensatz zum mechanischen Verfahren nicht notwendigerweise unter sich gleich. Liegt jedoch kein besonderer Grund zum Gegenteil vor, so wird man die Äquidistanz am besten beibehalten. Bei einem Versuch wurde mit Zehnerintervallen ein voller Erfolg erzielt.

Nach irgendeinem Verfahren — es gibt deren mehrere — bestimmt man sodann bei jedem Kardinalpunkt die erste Ableitung der gesuchten Funktion. Hier ist zu bemerken, dass bei der Kingschen Methode diese Richtungsgrössen aus der sehr einfachen Annahme gewonnen werden, dass immer drei aufeinanderfolgende Kardinalpunkte auf einer quadratischen Parabel liegen mögen. Diese Parabel bestimmt die Kurvenrichtung beim mittleren Kardinalpunkt. Da jedoch in der Umgebung von Wendepunkten diese Annahme ungenügend ist, versagt dort das Kingsche Verfahren in der Regel. Es ist aber leicht möglich — und infolge der grösseren Intervalllänge auch wünschenswert —, diese Differentialquotienten etwas genauer festzulegen.

Das Ergebnis dieses ersten Schrittes ist ein System von Funktionswerten $f(x)$ und von Richtungskoeffizienten $f'(x)$. Sei $f(0)$ ein beliebiger davon und $f(d)$ der nächstfolgende. Es soll die kubische Parabel gefunden werden, die der Bedingung $(f(0), f'(0); f(d), f'(d))$ genügt. Sie heisst

$$(2) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \{ 3(f(d) - f(0)) - df'(d) - 2df'(0) \} \frac{x^2}{d^2} - \\ - \{ 2(f(d) - f(0)) - df'(d) - df'(0) \} \frac{x^3}{d^3}$$

Die Parabelgleichung (2) führt zu einer oskulatorischen Interpolation der einzelnen Intervalle, wenn man den Koordinatenursprung von Kardinalpunkt zu Kardinalpunkt verlegt. Die Rückführung auf einen einheitlichen Ursprung ist ohne weiteres möglich, jedoch nicht erforderlich.

Ist es möglich, an den Enden der Zahlenreihe genaue Funktionswerte und Ableitungen zu bestimmen, so kann die ganze Verteilung nach demselben Verfahren ausgeglichen werden. Die Ermittlung der Richtungskoeffizienten wird hier jedoch auf Schwierigkeiten stossen. Sie ist zudem auch nicht erforderlich. Man kann sich so behelfen,

dass man die beiden Enden durch Parabeln ergänzt, die nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzufinden sind. Zwei Bedingungsgleichungen für die Parameter müssen zur Erhaltung von Funktionswert und Richtung im Ansatzpunkt reserviert werden.

Die nach (2) vollzogene Ausgleichung besitzt jeden Vorteil des Kingschen Glättungsverfahrens; sie ist überhaupt nichts anderes. Überdies liefert sie aber, ohne jegliche Mehrarbeit, eine Folge von analytischen Ausdrücken, die das Resultat verkörpern. Bedeutet das Vorhandensein dieser Gleichungen eine Erleichterung für die Ausbeutung der Zahlenreihe, so hat dadurch die vorgeschlagene Methode ihre Rechtfertigung erfahren. Für Operationen, die keine Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung enthalten, ist die Stetigkeit durchwegs gesichert. Die Aufgabe der Fünferintervalle zugunsten grösserer Abstände beeinträchtigt überdies die Güte des Resultates nicht. Tatsächlich weist die ausgeglichene Zahlenreihe, bei Zuhilfenahme dieser kleinen Intervalle, noch ein bedenkliches Mass von Schwankungen und Wendepunkten auf.
