

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 36 (1938)

Artikel: Bemerkungen zum Erneuerungsproblem

Autor: Zwinggi, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966767>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bemerkungen zum Erneuerungsproblem

Von P. D. Dr. E. Zwinggi, Basel

I.

In einer Personengesamtheit, deren Umfang unveränderlich angenommen sei, scheiden die einzelnen Personen nach Massgabe der Ausscheideintensität $\varrho(t)$ endgültig aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person nach t Jahren dem Bestande noch angehört,

sei $p(t)$, mit $p(t) = e^{-\int_0^t \varrho(\tau) d\tau}$. Innerhalb der beiden Grenzwerte $p(0) = 1$ und $p(\infty) = 0$ kann $p(t)$ mit wachsendem t nie zunehmen.

Zwischen der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$, der Wahrscheinlichkeit $p(t)$ und der Ausscheideintensität $\varrho(t)$ bestehen die beiden bekannten Beziehungen

$$(1) \quad 1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p(t-\tau) d\tau,$$

$$(2) \quad \varphi(t) = p(t) \varrho(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p(t-\tau) \varrho(t-\tau) d\tau.$$

II.

Im 34. Heft (1937) dieser «Mitteilungen» bestimmt *Hadwiger* ¹⁾ die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ unter der Voraussetzung, dass

$$(3) \quad p(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) \quad (\lambda > 0);$$

die Lösung für $\varphi(t)$ lautet dann

¹⁾ Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin.

$$(4) \quad \varphi(t) = \frac{\lambda}{2} (1 - e^{-2\lambda t}).$$

Wir wollen in diesen kurzen Bemerkungen zeigen, wie der von *Hadwiger* untersuchte besondere Fall auch aus einer von *Fock* ¹⁾ aufgestellten allgemeinen Formel hervorgeht.

In Beziehung (2) setzen wir voraus, $p(t) \varrho(t)$ lasse sich wie folgt darstellen:

$$(5) \quad p(t) \varrho(t) = \left[a(0,1) + a(1,1)t + \frac{a(2,1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{a(m_1,1)}{m_1!}t^{m_1} \right] e^{\gamma_1 t} \\ + \left[a(0,2) + a(1,2)t + \frac{a(2,2)}{2!}t^2 + \dots + \frac{a(m_2,2)}{m_2!}t^{m_2} \right] e^{\gamma_2 t} + \dots \\ + \left[a(0,r) + a(1,r)t + \frac{a(2,r)}{2!}t^2 + \dots + \frac{a(m_r,r)}{m_r!}t^{m_r} \right] e^{\gamma_r t}.$$

Zuerst ist der Ausdruck zu bilden:

$$(6) \quad k(z) = \frac{a(0,1)}{z - \gamma_1} + \frac{a(1,1)}{(z - \gamma_1)^2} + \dots + \frac{a(m_1,1)}{(z - \gamma_1)^{m_1+1}} \\ + \frac{a(0,2)}{z - \gamma_2} + \frac{a(1,2)}{(z - \gamma_2)^2} + \dots + \frac{a(m_2,2)}{(z - \gamma_2)^{m_2+1}} + \dots \\ + \frac{a(0,r)}{z - \gamma_r} + \frac{a(1,r)}{(z - \gamma_r)^2} + \dots + \frac{a(m_r,r)}{(z - \gamma_r)^{m_r+1}}.$$

Daran anschliessend folgt die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{k(z)}{1 - k(z)}$$

¹⁾ Über eine Klasse von Integralgleichungen — *Mathematische Zeitschrift*, Band 21, Berlin 1924. — Auf diese Arbeit wurde ich in freundlicher Weise von Herrn Prof. Dr. A. *Ostrowski* in Basel aufmerksam gemacht.

$$(7) \quad \frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{b(0,1)}{z-\beta_1} + \frac{b(1,1)}{(z-\beta_1)^2} + \dots + \frac{b(n_1,1)}{(z-\beta_1)^{n_1+1}} \\ + \frac{b(0,2)}{z-\beta_2} + \frac{b(1,2)}{(z-\beta_2)^2} + \dots + \frac{b(n_2,2)}{(z-\beta_2)^{n_2+1}} + \dots \\ + \frac{b(0,s)}{z-\beta_s} + \frac{b(1,s)}{(z-\beta_s)^2} + \dots + \frac{b(n_s,s)}{(z-\beta_s)^{n_s+1}}.$$

Die Lösung der Integralgleichung für die Erneuerung lautet dann:

$$(8) \quad \varphi(t) = \left[b(0,1) + b(1,1)t + \dots + \frac{b(n_1,1)}{n_1!} t^{n_1} \right] e^{\beta_1 t} \\ + \left[b(0,2) + b(1,2)t + \dots + \frac{b(n_2,2)}{n_2!} t^{n_2} \right] e^{\beta_2 t} + \dots \\ + \left[b(0,s) + b(1,s)t + \dots + \frac{b(n_s,s)}{n_s!} t^{n_s} \right] e^{\beta_s t}.$$

III.

Die Anwendung auf den vorliegenden besondern Fall geschieht wie folgt. Aus

$$p(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$$

folgt

$$-p'(t) = p(t) \varrho(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} t.$$

Die Koeffizienten in (5) werden

$$a(0,1) = 0,$$

$$a(1,1) = \lambda^2;$$

ferner ist $\gamma_1 = -\lambda$.

Diese Werte in (6) eingesetzt, ergeben

$$k(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^2}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung $\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{\lambda^2}{z^2 + 2\lambda z}$
 $= \frac{\lambda}{2} \frac{1}{z} - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{z + 2\lambda}$ folgt, dass

$$b(0,1) = \frac{\lambda}{2}, \quad \beta_1 = 0,$$

$$b(0,2) = \frac{-\lambda}{2}, \quad \beta_2 = -2\lambda.$$

Diese Lösung für $\varphi(t)$ nimmt dann nach (8) die Gestalt an

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{2} (1 - e^{-2\lambda t}).$$

IV.

Die Voraussetzung (5) kann noch anders geschrieben werden. Da $p(t) \varrho(t) = -p'(t)$ ist, folgt durch Integration

$$(9) \quad p(t) = P(m_1) e^{\gamma_1 t} + P(m_2) e^{\gamma_2 t} + \dots + P(m_r) e^{\gamma_r t},$$

wobei die $P(m_i)$ Polynome m_i^{ten} Grades sind. Für unsere Betrachtungen haben aber nur diejenigen Ausdrücke einen Sinn, für die stets $p(t) \geq p(t + \tau)$, $\tau > 0$ gilt. Diese Einschränkung muss man beachten, wenn aus (8) auf den Verlauf der Erneuerungsfunktion geschlossen werden soll. Jedenfalls zeigt aber Beziehung (8), dass nicht gefolgert werden darf, die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ verfolge *stets* eine gedämpfte Wellenbewegung.

Abschliessend sei noch eine Bemerkung über eine andere Lösungsmöglichkeit der Integralgleichung (2) angebracht. Gleichung (9) ist auch die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wobei die dazugehörige charakteristische Gleichung je $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, \dots , $m_r + 1$ zusammenfallende Wurzeln aufweist. Wir haben aber anderswo ¹⁾ gezeigt, dass unter der Voraussetzung,

¹⁾ Das Problem der Erneuerung — Festgabe Moser, Bern 1931.
 Man braucht in den Ableitungen nur $H_t = \text{konstant}$ zu setzen.

die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ erfülle eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die *Integralgleichung* für die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ in eine *Differentialgleichung* $(n-1)^{\text{ster}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgeformt und als solche gelöst werden kann.
