
Eine versicherungsmathematische Beziehung bei Gesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen

Autor(en): **Güttinger, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **36 (1938)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966766

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine versicherungsmathematische Beziehung bei Gesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen

Von Dr. *P. Güttinger*, Basel

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, wie bei Gesamtheiten mit verschiedenen Ausscheideursachen Barwerte für kompliziertere Versicherungsformeln auf Grund einer einfachen Beziehung bestimmt werden können. Macht man nämlich für die Auszahlung der Leistungen gewisse Voraussetzungen, so kann eine allgemeine Gleichung abgeleitet werden, welche bei vielen praktisch vorkommenden, verwickelteren Versicherungsarten eine verhältnismässig einfache Bestimmung der benötigten Kommutationswerte erlaubt. Diese Vereinfachung ist insbesondere von Bedeutung bei der Berechnung von Barwerten mit *steigenden* Leistungen (Renten oder einmalige Kapitalleistungen) und kann für den Gruppenversicherungsmathematiker von besonderem Nutzen sein.

Um die Ableitungen klarer zu gestalten, wollen wir zunächst einige allgemeine Voraussetzungen und Definitionen vorausschicken:

1. $L_{(n)}$ sei eine Gesamtheit, aus welcher alle diejenigen Mitglieder ausscheiden, die irgend ein Ereignis 1, 2 ... bis n trifft. Die Ausscheideordnung dieser Gesamtheit ist dann definiert durch die Gleichung:

$$\frac{1}{L_{(n)}} \cdot \frac{d\,L_{(n)}}{d\,T} = \frac{d\,(ln\,L_{(n)})}{d\,T} = -\sum_{j=1}^{n} \mu_{(n)}^{j} \tag{1}$$

wobei $\mu_{(n)}^1, \mu_{(n)}^2, \ldots. \mu_{(n)}^n$ die Ausscheideintensitäten für die Ursachen 1, 2 .... bis n bedeuten.

2. $L_{(n-1)}$ sei eine «Ober»-Gesamtheit, welche auch solche Mitglieder umfasst, die bereits durch die Ursache n aus der Gesamtheit $L_{(n)}$ ausgeschieden sind. Man kann auch hier analog zu (1) setzen:

$$(2) \qquad \frac{1}{L_{(n-1)}} \cdot \frac{d\,L_{(n-1)}}{d\,T} = \frac{d\,(ln\,L_{(n-1)})}{d\,T} = -\sum_{j=1}^{n-1} \mu^j_{(n-1)}$$

wobei $\mu^j_{(n-1)}$ = Ausscheideintensität durch das Ereignis j aus der Obergesamtheit $L_{(n-1)}$, unbekümmert darum, ob das Ereignis n schon eingetreten ist oder nicht.

3. Die Gesamtheit $L_{(n-1)}$ besteht also:

a) aus der geschlossenen Gesamtheit $L_{(n)}$

b) und der offenen Gesamtheit $\{L_{(n-1)} - L_{(n)}\} = {}^{(n)}\Lambda_{(n-1)}$

4. Wir wollen ferner eine geschlossene Gesamtheit einführen, und bezeichnen diese mit

$${}^{(n)}L_{(n-1)}$$

Es soll sich dabei um eine Gruppe von Mitgliedern handeln, welche das Ereignis n bereits hinter sich haben, jedoch keine Neuzugänge durch Eintritt des Ereignisses n mehr aufnehmen. Es ist also ein Bestand, der infolge der Ursachen 1, 2... bis n—1 ausstirbt.

Wenn wir daher unter ${}^{(n)}\mu^j_{(n-1)}$ die Abgangsintensität infolge Ursache j nach bereits erfolgtem Ereignis n verstehen, so gilt auch für diese Gesamtheit die Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{1}{{}^{(n)}L_{(n-1)}} \cdot \frac{d\,{}^{(n)}L_{(n-1)}}{d\,T} = \frac{d\,(ln\,{}^{(n)}L_{(n-1)})}{d\,T} = -\sum_{j=1}^{n-1} {}^{(n)}\mu^j_{(n-1)}$$

5. Nach vorstehenden Definitionen lassen sich nun leicht die folgenden formelmässigen Zusammenhänge zwischen den in 1. bis 4. beschriebenen Beständen aufstellen:

$$(4) \quad L_{(n-1)} - L_{(n)} = {}^{(n)}\Lambda_{(n-1)} = \int_{-\infty}^{T} L_{(n)}(T')\,\mu^n_{(n)}(T')\,\frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T)}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T')}\,d\,T'$$

$$(5) \qquad L_{(n)} \cdot \mu^j_{(n)} + {}^{(n)}\Lambda_{(n-1)} \cdot {}^{(n)}\mu^j_{(n-1)} = L_{(n-1)}\,\mu^j_{(n-1)}$$

$$(j = 1, 2 \ldots n-1)$$

Besondere Voraussetzungen bezüglich Versicherungsleistungen

Es sollen nur diejenigen Leistungen ins Auge gefasst werden, welche bei Eintritt des Ereignisses i fällig werden. Es soll ferner nur dann eine Leistung in Frage kommen, wenn ausser der Usache n noch keine andere Ausscheideursache eingetreten ist. Es ist also z. B. eine Rente oder ein Kapital nur dann fällig, wenn

a) entweder die Ursache i als *erste* eintritt,

b) oder n das *erste*, i das *zweite* Ereignis ist.

Der Barwert der Leistung im Zeitpunkte der Fälligkeit soll eine Funktion von folgender Form sein:

$$A^i(T_i) \cdot U^{i,n}(T_{i,n})$$

Dabei ist $T_{i,n}$ der Zeitpunkt, in dem entweder das Ereignis i oder n stattgefunden hat, also der Zeitpunkt, wo die Gesamtheit $L_{(n)}$ den ersten Abgang erfuhr. T_i ist der Zeitpunkt, in dem das Ereignis i eintritt. Mit andern Worten ausgedrückt: Die *Höhe* der Leistung $U^{i,n}$ wird in dem Moment fixiert, sobald Ursache i oder n eintritt. Der Barwert A^i hingegen für die Leistung «1» soll nur von dem Zeitpunkte des Ereignisses i abhängen.

Der Barwert der sofort fälligen und der anwartschaftlichen Leistungen (Renten oder Kapitalien), welche durch Auflösung der Gesamtheit im Zeitraum T' bis $T' + dT'$ bereitgestellt werden müssen (diskontiert auf den Zeitpunkt $T' = 0$), lässt sich in folgender Form darstellen:

$$(6) \qquad dT' \cdot v^{T'} \cdot L_{(n)}(T')\, U^{i,n}(T') \times$$

$$\times \left\{\mu^i_{(n)}(T')\, A^i(T') + \mu^n_{(n)}(T') \int_{T'} {}^{(n)}\mu^i_{(n-1)}(T'')\, A^i(T'')\, v^{T''-T'} \cdot \frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T')}\, dT''\right.$$

Mit der Abkürzung

$$(7) \qquad {}^iD_{(n)}(T') = v^{T'} L_{(n)}(T') \left\{\mu^i_{(n)}(T')\, A^i(T') + \right.$$

$$+ \mu^n_{(n)}(T') \int_{T'} {}^{(n)}\mu^i_{(n-1)}(T'')\, A^i(T'')\, v^{T''-T'} \frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T')}\, dT''$$

findet man als Barwert aller Leistungen, die von der Ursache i herrühren (berechnet auf den heutigen Zeitpunkt T):

$$B^i(T) = \frac{1}{D_{(n)}(T)} \int_T U^{i,n} \cdot {}^iD_{(n)}\, d\, T' \tag{8}$$

wenn

$$D_{(n)}(T) = L_{(n)}(T) \cdot v^T \tag{9}$$

Wenn man die übliche Bezeichnungsweise für die Kommutationszahlen benützt, haben wir:

$$\begin{aligned} {}^iS^{(0)}_{(n)} &= \int_T {}^iD_{(n)} \cdot d\, T' \; = \; {}^iN_{(n)} \\ {}^iS^{(1)}_{(n)} &= \int_T {}^iN_{(n)} \cdot d\, T' \\ &\vdots \qquad \qquad \vdots \\ {}^iS^{(k)}_{(n)} &= \int_T {}^iS^{(k-1)}_{(n)} \cdot d\, T' \end{aligned} \tag{10}$$

usw.

wodurch $B^i(T)$ dargestellt werden kann als:

$$B^i(T) = \frac{\Sigma\, a_k \cdot {}^iS^{(k)}_{(n)}(T)}{D_{(n)}(T)} \tag{11}$$

Um diese Kommutationszahlen zu berechnen, geht man gewöhnlich so vor, dass man ${}^iD_{(n)}$ gemäss Formel (7) bestimmt, was meistens eine ziemlich zeitraubende Arbeit ist. Durch Umformung der Formel

$$ {}^iN_{(n)} = \int_T {}^iD_{(n)} \cdot d\, T' \tag{12}$$

lässt sich für ${}^iN_{(n)}$ im allgemeinen eine viel einfachere Berechnungsweise erzielen, welche in gewissen speziellen Fällen sicher schon mancher Fachkollege angewendet hat.

Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned} {}^iN_{(n)} = \int_T d\, T' \Big\{ & v^{T'} L_{(n)}(T')\, \mu^i_{(n)}(T')\, A^i(T') + \\ & + \mu^n_{(n)}(T') \frac{L_{(n)}(T')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T')} \int_{T'} {}^{(n)}\mu^i_{(n-1)}(T'')\, A^i(T'')\, v^{T''} \cdot {}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')\, d\, T'' \Big\} \end{aligned} \tag{13}$$

Durch Vertauschung der Integrationen von T' und T'' ergibt sich: (Es ist zu beachten, dass bei festem T'' die Integrationsvariable T' höchstens $= T''$ sein kann!)

$$(14) \qquad {}^{i}N_{(n)} = \int_{T} d\,T'' v^{T''} \cdot A^{i}(T'') \Big\{ L_{(n)}(T'') \cdot \mu^{i}_{(n)}(T'') + $$

$$+ {}^{(n)}\mu^{i}_{(n-1)}(T'') \cdot \int_{T}^{T''} L_{(n)}(T') \cdot \mu^{n}_{(n)}(T') \cdot \frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T')} \cdot d\,T' \Big\}$$

Wenn wir die Beziehung (4) unter 5. berücksichtigen, vereinfacht sich der Ausdruck (14) zu:

$$(15) \qquad {}^{i}N_{(n)} = \int_{T} d\,T'' \cdot v^{T''} A^{i}(T'') \times$$

$$\times \Big\{ L_{(n)}(T'')\, \mu^{i}_{(n)}(T'') + {}^{(n)}\mu^{i}_{(n-1)}(T'') \Big[{}^{(n)}A_{(n-1)}(T'') - \frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T)}\, {}^{(n)}A_{(n-1)}(T) \Big] \Big\}$$

Unter weiterer Benützung von Gleichung (5) ergibt sich dann:

$$(16) \qquad {}^{i}N_{(n)} = \int_{T} d\,T'' \cdot v^{T''} \cdot A^{i}(T'') \cdot L_{(n-1)}(T'') \cdot \mu^{i}_{(n-1)}(T'') -$$

$$- \{ L_{(n-1)} - L_{(n)} \} \int_{T} d\,T'' \cdot v^{T''} \cdot A^{i}(T'') \frac{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T'')}{{}^{(n)}L_{(n-1)}(T)}\, {}^{(n)}\mu^{i}_{(n-1)}(T'')$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(17) \qquad L_{(n)} \frac{{}^{i}N_{(n)}}{D_{(n)}} + \{ L_{(n-1)} - L_{(n)} \} \cdot \frac{{}^{(n)}M^{i}_{(n-1)}}{{}^{(n)}D_{(n-1)}} = L_{(n-1)} \cdot \frac{M^{i}_{(n-1)}}{D_{(n-1)}}$$

Wesentlich an dieser Formel ist nun, dass sie nicht mehr gilt, wenn

$${}^{i}N_{(n)} \qquad , {}^{(n)}M^{i}_{(n-1)} \qquad \text{und} \qquad M^{i}_{(n-1)}$$

durch ihre einfachen oder höhern Summen ersetzt werden. Man sieht dies ohne weiteres ein, wenn man in Gleichung (13) an Stelle dT' die Grösse $d\,T' \cdot T'^{\varrho}$ setzt, wobei $\varrho \geqq 1$.

Der Ausdruck

$\frac{{}^{i}N_{(n)}}{D_{(n)}}$ ist also der Barwert einer Leistung, welche fällig wird, wenn das versicherte Ereignis i als erstes oder als zweites nach dem Ereignis n eintritt. Die versicherte Gesamtheit ist hier eine solche, welche anfänglich nur aus solchen Mitgliedern besteht, die noch durch keines der Ereignisse 1, 2... bis n betroffen worden sind.

$\frac{{}^{(n)}M^{i}_{(n-1)}}{{}^{(n)}D_{(n-1)}}$ ist der Barwert einer Leistung (Rente oder Kapital), welche fällig ist bei Eintritt von Ereignis i, sofern keine der Ursachen 1, 2... bis n—1 vorher eingetreten ist. Versichert wird hier eine Gesamtheit, für welche das Ereignis n bereits passiert ist. Es handelt sich ferner dabei um eine *geschlossene* Gesamtheit, welche keine spätern Zugänge infolge Eintritts von Ursache n mehr erhält.

$\frac{M^{i}_{(n-1)}}{D_{(n-1)}}$ ist der Barwert einer Leistung, welche fällig ist bei Eintritt von Ereignis i, und zwar innerhalb der versicherten Obergesamtheit $L_{(n-1)}$, welche alle Individuen umfasst, die von einem der Ereignisse 1, 2... bis n—1 noch nicht betroffen worden sind.

Gleichung (17), die man nach einiger Überlegung direkt hätte hinschreiben können, entspricht in einem speziellen Fall der *Schärtlin*schen Formel:

(18) $$l^{aa}_{x}\,(\mathrm{a}^{ai}_{x} + \mathrm{a}^{aa}_{x}) + (l_x - l^{aa}_{x})\,\mathrm{a}^{i}_{x} = l_x \cdot \mathrm{a}_x$$

und ebenso:

(19) $$l^{aa}_{x}\,A^{a}_{x} \qquad + (l_x - l^{aa}_{x})\,A^{i}_{x} = l_x A_x$$

Diese letztere Formel lässt sich direkt aus (17) ableiten, wenn das Ereignis n als Invalidität und i als Tod angenommen wird.

Es ist dann ferner $\mu^{i}_{(n)} = \mu^{aa}_{x}$ die Sterbensintensität als Aktiver und ${}^{(n)}\mu^{i}_{(n-1)}$ die Sterbensintensität der Invaliden. Da

$$A^{a}_{x} = 1 - d\,(\mathrm{a}^{ai}_{x} + \mathrm{a}^{aa}_{x})$$
$$A^{i}_{x} = 1 - d \cdot \mathrm{a}^{i}_{x}$$
$$A_{x} = 1 - d \cdot \mathrm{a}_{x}$$

folgt aus (18) direkt (19).

Beispiele:

Es soll an den folgenden Beispielen gezeigt werden, wie Gleichung (17) zur Vereinfachung von Berechnungen verwendet werden kann.

Beispiel 1. Gesamtheit $L_{(n)} = l_x^{aa}\, l_y$ Ehepaare, bei denen der Mann noch aktiv ist. Es soll eine Witwenrente, deren Höhe mit dem Dienstalter steigt, ausgerichtet werden. Wir benötigen für unsere Rechnungen die Grössen

$$S_{x|y}^{aw} = S_{x|y}^{aaw} + S_{x|y}^{aiw}$$

Anstatt nun die Werte von $D_{x|y}^{aaw}$ und $D_{x|y}^{aiw}$ nach Gleichung (7) zu berechnen, wollen wir Gleichung (17) anwenden. Es ergibt sich da folgendes:

$$(20) \qquad l_x^{aa}\, l_y \frac{N_{x|y}^{aw}}{D_{xy}^{aa}} + (l_x l_y - l_x^{aa} l_y) \frac{N_{x|y}^{iw}}{D_{xy}^{i}} = l_x l_y \frac{N_{x|y}^{w}}{D_{xy}}$$

oder auch:

$$(21) \qquad l_x^{aa} \cdot \mathrm{a}_{x|y}^{aw} + (l_x - l_x^{aa})\, \mathrm{a}_{x|y}^{iw} = l_x\, \mathrm{a}_{x|y}^{w}$$

Zur Bestimmung der $N_{x|y}^{aw}$ kann folgende Formel verwendet werden:

$$(22) \qquad N_{x|y}^{aw} = N_{x|y}^{w} - (D_{xy} - D_{xy}^{aa})\, \mathrm{a}_{x|y}^{iw}$$

Ein spezieller Fall liegt vor, wenn

$$\mu_x^i = \mu_x \qquad \text{und} \qquad \mathrm{a}_{x|y}^{iw} = \mathrm{a}_{x|y}^{w}$$

(z. B. Schweizerische Minimalgrundlagen für Gruppenversicherungen.)

Dann gilt nämlich nach Gleichung (20):

$$(23) \qquad \frac{N_{x|y}^{aw}}{D_{xy}^{aa}} = \frac{N_{x|y}^{w}}{D_{xy}} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{a}_{x|y}^{aw} = \mathrm{a}_{x|y}^{w}$$

eine Beziehung, die selbstverständlich ist, wenn $\mu_x^i = \mu_x$.

Die Kommutationszahlen $N_{x|y}^{aw}$ lassen sich dann leicht rechnen durch eine einfache Multiplikation:

$$(24) \qquad N_{x|y}^{aw} = D_{xy}^{aa} \cdot \mathrm{a}_{x|y}^{w}$$

woraus die Grössen $S_{x|y}^{aw} = \Sigma\, N_{x|y}^{aw}$ gewonnen werden können.

Es muss an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, dass alle in diesem Beispiele abgeleiteten Formeln in der genau gleichen Form gelten, wenn man von der kontinuierlichen zur diskontinuierlichen Darstellung übergeht.

Beispiel 2. Witwenrentenversicherung mit jährlichen Prämien, Prämienbefreiung im Invaliditätsfalle. Ferner *Rückgewähr* der bezahlten Prämien, wenn Frau vor dem Manne stirbt.

Zur Berechnung der Rückgewähr benötigen wir die Grössen:

$$\overline{C}^{a\,1}_{xy} = D^{aa}_{xy}\left\{\mu_y + i_x \int_0 \mu_{y+\tau}\cdot \frac{D^i_{x+\tau,y+\tau}}{D^i_{xy}}\, d\tau\right\} \tag{25}$$

In diesem Falle ergibt Gleichung (17) folgendes:

$$l^{aa}_{xy}\cdot\frac{\overline{M}^{a\,1}_{xy}}{D^{aa}_{xy}} + (l_{xy} - l^{aa}_{xy})\cdot\frac{\overline{M}^{i\,1}_{xy}}{D^i_{xy}} = l_{xy}\cdot\frac{\overline{M}^{\;1}_{xy}}{D_{xy}} \tag{26}$$

und für den Spezialfall $\mu^i_x = \mu_x$ erhalten wir:

$$\overline{M}^{a\,1}_{xy} = \overline{M}^{\;1}_{xy}\frac{D^{aa}_{xy}}{D_{xy}} = \overline{M}^{\;1}_{xy}\cdot\frac{D^{aa}_x}{D_x} \tag{27}$$

woraus $\overline{R}^{a\,1}_{xy} = \Sigma\, \overline{M}^{a\,1}_{xy}$ usw.

Beispiel 3. Erlebensfallversicherung auf das Leben z, Prämienzahler x. Prämienzahlung hört auf, wenn x stirbt. Das Kapital (oder auch eine aufgeschobene Rente auf das Leben z) wird nur fällig, wenn z das Terminalter $z + n$ erlebt. Stirbt z vorher, so werden die von x bezahlten Prämien zurückerstattet. Die Nettoprämie für diese Versicherung ist demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$P\cdot \mathsf{a}_{xz:\overline{n}|} = \frac{D_{z+n}}{D_z} + {}_{(}P_{)}\cdot B_{xz:\overline{n}|} \tag{28}$$

Für den Barwert $B_{xz:\overline{n}|}$ findet man:

(29)
$$B_{xz:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x l_z} \int_0^n \{\mu_{z+t}\, l_{z+t}\, l_{x+t} \cdot v^t + \mu_{x+t}\, l_{x+t} \cdot l_{z+t} \cdot v^t \cdot A_{z+t:\overline{n-t}|}^{\;1}\} \cdot t \cdot dt$$

Bezeichnet man mit $\delta_{xz:\overline{n}|}$ die Grösse

(30)
$$\delta_{xz:\overline{n}|} = \mu_z\, l_z\, D_x + \mu_x \cdot D_x \cdot l_z \cdot A_{z:\overline{n}|}^{\;1}$$

so ist:

(31)
$$B_{xz:\overline{n}|} = \frac{\int_0^n \delta_{x+t,\, z+t:\overline{n-t}|} \cdot t \cdot dt}{D_{xz}} = \frac{\int_0^n dt \int_t^n \delta_{x+t',\, z+t':\overline{n-t'}|}\, dt'}{D_{xz}}$$

Bei diskontinuierlicher Schreibweise hat man:

(32)
$$B_{xz:\overline{n}|} = \frac{\sum_0^{n-1} (t+1)\, \delta_{x+t,\, z+t:\overline{n-t}|}}{D_{xz}}$$

wobei:

(33)
$$\delta_{xz:\overline{n}|} = q_z\, l_z\, D_{x+\frac{1}{2}} + q_x\, D_x \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot l_{z+\frac{1}{2}} \cdot A_{z+\frac{1}{2}:\overline{n-\frac{1}{2}}|}^{\;1}$$

Führt man nun noch folgende Kommutationszahlen ein:

(34)
$$\nu_{xz:\overline{n}|} = \sum_0^{n-1} \delta_{x+t,\, z+t:\overline{n-t}|}$$

und

(35)
$$\sigma_{xz:\overline{n}|} = \sum_0^{n-1} \nu_{x+t,\, z+t:\overline{n-t}|} = \sum_0^{n-1} (t+1)\, \delta_{x+t,\, z+t:\overline{n-t}|}$$

so erhalten wir:

(36)
$$B_{xz:\overline{n}|} = \frac{\sigma_{xz:\overline{n}|}}{D_{xz}}$$

Statt nun die Werte $\delta_{xz:\overline{n}|}$ nach Formel (33) zu berechnen, kann man Gleichung (17) verwenden, wobei die Gleichung:

(37) $\dfrac{\nu_{xz:\overline{n}|}}{D_{xz}} = \dfrac{M_z - M_{z+n}}{D_z}$ zu einer sehr einfachen Berechnungsweise von $\nu_{xz:\overline{n}|}$ und somit auch von $\sigma_{xz:\overline{n}|} = \sum_0^{n-1} \nu_{x+t:z+t:\overline{n-t}|}$ führt.

Beispiel 4. Die Versicherungsart soll hier im wesentlichen dieselbe sein wie in Beispiel 3. Nur soll noch für den Prämienzahler x die Prämienbefreiung im Invaliditätsfalle mit eingeschlossen werden. In diesem Falle ist nun die Bedeutung von Gleichung (17) etwas zu erweitern in dem Sinne, dass die Ursache n als «Ausscheiden aus der Aktivengesamtheit» l_x^{aa} zu betrachten ist, so dass:

$$\mu_{(n)}^{n} \equiv \mu_x^{aa} + i_x$$

Wie leicht zu beweisen ist, haben wir in diesem Falle analog zu (37):

$$\frac{\nu_{xz:\overline{n|}}^{aa}}{D_{xz}^{aa}} = \frac{M_z - M_{z+n}}{D_z}$$

woraus sich $\sigma_{xz:\overline{n|}}^{aa}$ aus $\nu_{xz:\overline{n|}}^{aa} = D_{xz}^{aa} \cdot A_{z:\overline{n|}}^{\frac{1}{}}$ berechnen lässt.