

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 36 (1938)

Artikel: Ausgleichung durch Bernstein-Polynome

Autor: Wegmüller, Walter

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966765>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ausgleichung durch Bernstein-Polynome

Von Dr. *Walter Wegmüller*, Walkringen

Einleitung.

Zur Approximation von Funktionen durch Polynome hat M. *Serge Bernstein* im Jahre 1912 die nach ihm benannten Polynome aufgestellt. Auf Grund bemerkenswerter Eigenschaften fanden diese in der Literatur weiterhin viel Beachtung.

Es schien mir von Interesse, einmal die Frage zu stellen, ob Bernstein-Polynome zur analytischen Ausgleichung verwertet werden können, gilt es doch auch hier, eine auf Grund statistischer Erhebungen bekannte Grundfunktion durch analytische Funktionen möglichst gut zu approximieren.

Die vorliegende Arbeit bezweckt daher, die Verwendbarkeit der Bernstein-Polynome in der Ausgleichsrechnung darzutun. Theoretische wie praktische Eigenschaften sprechen dafür. Eine mit Bernstein-Polynomen vorgenommene Ausgleichung zeichnet sich vor allem dadurch aus, gewisse Eigenschaften der Grundfunktion invariant zu lassen. Erhaltung der Schranke und der totalen Schwankung, Erhaltung der Monotonie, der Konvexität erster und höherer Ordnung verbürgen eine günstige Ausgleichswirkung. Die Untersuchung, ob und wie sich überhaupt Funktionen durch Bernstein-Polynome approximieren lassen, ergab ein für die Anwendungsmöglichkeiten durchaus hinreichendes Ergebnis, nämlich: gleichmässige Approximation stetiger und gewöhnliche Approximation stückweise stetiger Grundfunktionen.

Da einfach im Ansatz und in der numerischen Auswertung, führen die Bernstein-Polynome als Ausgleichspolynome relativ rasch zum Ziele.

Theoretische Gesichtspunkte im Ausgleichsproblem geniessen in den vorliegenden Ausführungen den Vorzug, während die mehr den Praktiker interessierende Frage nach der Ausgleichsgüte des Verfahrens eher etwas zurücktritt.

§ 1

Die S. Bernstein-Polynome.

Es sei $Y(x)$ eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte endliche Funktion. Nach *S. Bernstein* [1]¹⁾ werden dieser Funktion die Polynome

$$(1) \quad B_n [Y(x), x] = \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (1-x)^{n-\lambda}; \quad \begin{array}{l} n \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

zugeordnet. Diese so definierten Polynome (*S. Bernstein-Polynome*) führten in der Folge zu verschiedenen Untersuchungen [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Im Hinblick auf die Verwertung der Polynome in der Ausgleichsrechnung ist es vorteilhaft, eine Erweiterung des Grundintervalles $[0, 1]$ vorzunehmen. Wird das allgemeinere Intervall $[0, a]$ zugrunde gelegt, so dass eine für $0 \leq x \leq a$ definierte endliche Funktion zugelassen werden kann, so erfährt die Definition (1) die naheliegende Modifikation

$$(2) \quad B_n [Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}; \quad \begin{array}{l} n \geq 1 \\ 0 \leq x \leq a. \end{array}$$

$Y(x)$ nennen wir in der Folge *Grundfunktion*.

Diese durch (2) definierten Polynome werden zum Gegenstand unserer ausgleichungstheoretischen Untersuchung. Dabei haben wir diejenigen Eigenschaften der Bernstein-Polynome eingehend zu studieren, welche ihre Verwendung als Ausgleichspolynome der Grundfunktion zu rechtfertigen geeignet sind.

Zunächst einige fundamentale Beziehungen, die aus der Definitionsgleichung (2) gewonnen werden:

Es gilt

$$(3) \quad B_n [Y(x), 0] = Y(0), \quad B_n [Y(x), a] = Y(a).$$

¹⁾ Zahlen in eckiger Klammer [] bezeichnen die betreffende Nummer im Literaturnachweis.

Die Bernstein-Polynome stimmen im Anfangs- und Endpunkt des Grundintervalles mit der Grundfunktion überein.

Weiter folgt aus

$$(4) \quad \begin{aligned} Y(x) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad Y(x) \geq 0 \\ B_n[Y(x), x] \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad B_n[Y(x), x] \geq 0. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft der Grundfunktion, nichtpositiv oder nichtnegativ zu sein, bleibt bei der Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen invariant.

Von grosser Bedeutung ist die *Linearitätsrelation*:

$$(5) \quad \begin{aligned} B_n[Y_1(x) + Y_2(x), x] &= B_n[Y_1(x), x] + B_n[Y_2(x), x] \\ B_n[CY(x), x] &= C \cdot B_n[Y(x), x]. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus

$$\begin{aligned} C_1 Y_1(x) + \dots + C_k Y_k(x) &\equiv 0 \\ C_1 B_n[Y_1(x), x] + \dots + C_k B_n[Y_k(x), x] &\equiv 0. \end{aligned}$$

Die Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen lässt eine vorhandene lineare Abhängigkeit von Grundfunktionen invariant.

§ 2

Umformung der Polynome.

Für die numerische Auswertung wird es von Interesse sein, die Polynome $B_n[Y(x), x]$ in eine andere Gestalt zu bringen. Diese unterscheidet sich von der ursprünglich durch die Definitionsgleichung (2) gegebenen dadurch, dass sie nach Potenzen von x geordnet ist.

Wir gelangen zu dieser Umformung, wenn wir in

$$B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}$$

$(a-x)^{n-\lambda}$ nach Potenzen von x entwickeln:

$$B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} (-1)^\mu \binom{n-\lambda}{\mu} x^\mu a^{n-\lambda-\mu}$$

$$B_n [Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} (-1)^\mu Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} \binom{n-\lambda}{\mu} a^{n-\lambda-\mu} x^{\lambda+\mu}.$$

Die Substitution $\lambda + \mu = \nu$ ergibt

$$B_n [Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\nu=\lambda}^n (-1)^{\nu-\lambda} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} \binom{n-\lambda}{\nu-\lambda} a^{n-\nu} x^\nu.$$

Mit

$$\binom{n}{\lambda} \binom{n-\lambda}{\nu-\lambda} = \binom{n}{\nu} \binom{\nu}{\lambda}$$

und der Summenformel von Dirichlet folgt:

$$(6) \quad B_n [Y(x), x] = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(\frac{x}{a}\right)^r \sum_{\lambda=0}^r (-1)^{r-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right).$$

Unter Verwertung von Differenzenrelationen [10] lässt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen.

Bezeichnet

$$\Delta_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$$

die Differenz erster Ordnung, so folgt allgemein durch wiederholte Differenzenbildung für die Differenz ν -ter Ordnung bei gleichbleibender Spanne ω die Beziehung:

$$\Delta_\omega^\nu f(x) = \frac{1}{\omega^\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} f(x+\lambda\omega).$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$$

in (6) ist daher nichts anderes als

$$\left(\frac{a}{n}\right)^\nu \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0),$$

so dass jetzt gilt:

$$\begin{aligned} B_n [Y(x), x] &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left(\frac{1}{n}\right)^\nu \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0) x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^n 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right) \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0) \frac{x^\nu}{\nu!}. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$(7) \quad d_{\nu, n} = \frac{c_{\nu, n}}{\nu!} = \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right)}{\nu!}; \quad d_{0, n} = 1,$$

so resultiert:

$$(8) \quad B_n [Y(x), x] = \sum_{\nu=0}^n d_{\nu, n} \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0) x^\nu.$$

In dieser für die Auswertung praktischen Form können die Zahlkoeffizienten $d_{\nu, n}$ ein für allemal numerisch ermittelt werden (vergleiche Seite 52/53), und die Differenzen sind auf Grund des Differenzschemas leicht berechenbar.

Diese Darstellung erlaubt uns zudem, eine weitere Aussage über das Verhalten der Bernstein-Polynome zu machen.

Sind alle Differenzen

$$\Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0) = 0, \quad \nu = (m+1), (m+2), \dots, n; \quad [m < n]$$

(was zum Beispiel der Fall ist, wenn die Grundfunktion selbst ein Polynom vom Grade m ist), dann ist das Polynom $B_n [Y(x), x]$ nur vom Grade m .

Schliesslich entdecken wir eine gewisse Verwandtschaft mit der Newtonschen Interpolationsformel $N_n [Y(x), x]$. Es ist

$$N_n [Y(x), x] = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} x \left(x - \frac{a}{n}\right) \dots \left(x - \frac{(\nu-1)a}{n}\right) \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0)$$

und

$$B_n [Y(x), x] = \sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{\nu!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right) \Delta_{\frac{a}{n}}^\nu Y(0).$$

§ 3

Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der Bernstein-Polynome und den Differenzen der Grundfunktion.

Weitere die Polynome $B_n[Y(x), x]$ kennzeichnende Relationen ergeben sich durch Differentiation der Definitionsgleichung (2)

$$\frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} [\lambda x^{\lambda-1}(a-x)^{n-\lambda} - (n-\lambda) x^\lambda (a-x)^{n-1-\lambda}]$$

oder indem wir noch in die beiden Summen aufteilen und passend umformen mit Rücksicht auf

$$\lambda \binom{n}{\lambda} = n \binom{n-1}{\lambda-1}; \quad (n-\lambda) \binom{n}{\lambda} = n \binom{n-1}{\lambda}$$

$$\frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^{n-1}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-1-\lambda} \cdot \frac{n}{a} \left[Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right]$$

und endlich, wenn wir beachten, dass

$$\frac{1}{\binom{a}{n}} \left[Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right] = \Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$$

$$(9) \quad \frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^{n-1}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n-1}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-1-\lambda}.$$

Ersetzt man noch in der Differenz das Argument

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) = \Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n-1} - \frac{1}{n} \frac{a\lambda}{n-1}\right),$$

so ist die rechte Seite nichts anderes als der Ausdruck für das Bernstein-Polynom $(n-1)$ -ter Ordnung der Funktion

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(x - \frac{1}{n}x\right),$$

also

$$(9^*) \quad \frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] = B_{n-1} \left[\Delta_{\frac{1}{n}}^1 Y\left(x - \frac{1}{n}x\right), x \right].$$

Durch fortgesetzte Differentiation erhält man nun allgemein die Beziehungen:

$$(10) \quad \frac{d^k}{dx^k} B_n[Y(x), x] = c_{k,n} \cdot \frac{1}{a^{n-k}} \sum_{\lambda=0}^{n-k} \Delta_{\frac{a\lambda}{n}}^k Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n-k}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-k-\lambda}$$

$$(10^*) \quad \frac{d^k}{dx^k} B_n[Y(x), x] = c_{k,n} B_{n-k} \left[\Delta_{\frac{k}{n}}^k Y\left(x - \frac{k}{n}x\right), x \right].$$

Man erkennt also, dass die Ableitungen der Bernstein-Polynome selbst wieder Bernstein-Polynome von entsprechend erniedrigter Ordnung sind, oder, was für Rückschlüsse weit wichtiger sein wird, man erkennt die Existenz einer Beziehung zwischen den Differentialquotienten der $B_n[Y(x), x]$ und den Differenzen von $Y(x)$.

§ 4

Fundamentale Eigenschaften.

Wie bereits früher bemerkt wurde, erweisen sich die Bernstein-Polynome in der Hinsicht beachtenswert, dass in ihnen gewisse bei der Grundfunktion vorausgesetzte Eigenschaften erhalten bleiben.

1. Beschränktheit.

Es sei $Y(x)$ in $[0, a]$ als beschränkt vorausgesetzt:

$$m \leq Y(x) \leq M.$$

Dann sind auch sämtliche zugehörigen Bernstein-Polynome in gleichem Masse beschränkt, denn es ist

$$\frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n m \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} \leq B_n[Y(x), x] \leq \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n M \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}$$

oder

$$(11) \quad m \leq B_n[Y(x), x] \leq M.$$

Die Bernstein-Polynome sind im ganzen Intervall $[0, a]$ zwischen der unteren und oberen Grenze der Grundfunktion enthalten.

2. Totale Schwankung.

Die Grundfunktion $Y(x)$ sei jetzt im Intervall $[0, a]$ von beschränkter Schwankung. Darunter hat man folgendes zu verstehen [11]:

Als totale Schwankung einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, a]$ definiert man die obere Grenze des Ausdrucks

$$\sum_{\mu=1}^m \left| f(x_\mu) - f(x_{\mu-1}) \right|,$$

der für alle möglichen Einteilungen des Intervalles $[0, a]$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = a$$

zu bilden ist.

Formelmässig wollen wir für die totale Schwankung das Symbol einführen

$$V_0 \{f(x)\} = \text{obere Grenze} \sum_{\mu=1}^m \left| f(x_\mu) - f(x_{\mu-1}) \right|.$$

Funktionen von endlicher totaler Schwankung V_0 heissen «von beschränkter Schwankung».

Die Behauptung ist nun die, dass die totale Schwankung der Bernstein-Polynome $B_n[Y(x), x]$ höchstens gleich der der Funktion $Y(x)$ ist.

Zu diesem Zweck ist der Ansatz für die Bernstein-Polynome passend zu wählen. Integriert man die Differentialgleichung (9), so folgt

$$B_n[Y(x), t] \Big|_x^a = \frac{1}{a^{n-1}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \Delta \frac{1}{n} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n-1}{\lambda} \int_x^a t^\lambda (a-t)^{n-1-\lambda} \cdot dt,$$

oder nach einigen elementaren Umformungen

$$(12) \quad B_n [Y(x), x] = \\ = \frac{1}{a^n} \left\{ a^n Y(a) + n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left[Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) - Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) \right] \binom{n-1}{\lambda} \int_x^a t^\lambda (a-t)^{n-1-\lambda} \cdot dt \right\}.$$

Man bildet nun für

$$x_{\mu-1} < x_\mu$$

$$B_n [Y(x), x_\mu] - B_n [Y(x), x_{\mu-1}] = \\ = \frac{1}{a^n} n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left[Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right] \binom{n-1}{\lambda} \int_{x_{\mu-1}}^{x_\mu} t^\lambda (a-t)^{n-1-\lambda} \cdot dt,$$

ferner

$$\left| B_n [Y(x), x_\mu] - B_n [Y(x), x_{\mu-1}] \right| \leq \\ \leq n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right| \binom{n-1}{\lambda} \int_{x_{\mu-1}}^{x_\mu} \left(\frac{t}{a}\right)^\lambda \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{n-1-\lambda} \cdot \frac{dt}{a}$$

und schliesslich durch Aufsummieren über alle $\mu = 1, 2, \dots, m$

$$(13) \quad \sum_{\mu=1}^m \left| B_n [Y(x), x_\mu] - B_n [Y(x), x_{\mu-1}] \right| \leq \\ \leq n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right| \binom{n-1}{\lambda} \int_{x_0=0}^{x_m=a} \left(\frac{t}{a}\right)^\lambda \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{n-1-\lambda} \cdot \frac{dt}{a}.$$

Das Integral rechts kann direkt ermittelt werden. Die Substitution $\tau = \frac{t}{a}$ führt dieses über in das bekannte Eulersche Integral für die Beta-Funktion

$$\int_0^1 \tau^\lambda (1-\tau)^{n-1-\lambda} \cdot d\tau = B(\lambda+1, n-\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)}.$$

Mit
$$\frac{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\lambda! (n-\lambda-1)!}{n!} = \frac{1}{n \binom{n-1}{\lambda}}$$

geht (13) über in:

$$(14) \quad \sum_{\mu=1}^m \left| B_n[Y(x), x_\mu] - B_n[Y(x), x_{\mu-1}] \right| \leq \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right|.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right|$$

kann für die äquidistante Unterteilung (Spanne: $\frac{a}{n}$) höchstens gleich sein der totalen Schwankung von $Y(x)$, also

$$(15) \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| Y\left(\frac{a(\lambda+1)}{n}\right) - Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \right| \leq V_0\{Y(x)\}.$$

Somit

$$(16) \quad \sum_{\mu=1}^m \left| B_n[Y(x), x_\mu] - B_n[Y(x), x_{\mu-1}] \right| \leq V_0\{Y(x)\}.$$

Indem noch links die obere Grenze des Ausdrucks gebildet wird für alle möglichen Intervallteilungen x_μ , so beeinflusst dies den rechtsseitigen Ausdruck nicht mehr, und es resultiert die Beziehung:

$$(17) \quad V_0\{B_n[Y(x), x]\} \leq V_0\{Y(x)\}.$$

Die totale Schwankung der Bernstein-Polynome ist nicht grösser als die der Grundfunktion.

Diese Tatsache verbürgt uns die erwünschte Ausgleichswirkung, dass die ausgeglichenen Werte einen regelmässigeren, glatteren Verlauf aufweisen werden. Das Gleichheitszeichen gilt vor allem bei monotonen Funktionen.

3. Monotonie.

Von der Funktion $Y(x)$ wollen wir jetzt ein monotonen Verhalten fordern.

Dabei wird die Monotonie wie folgt definiert: Eine Funktion $f(x)$ heisst in einem Intervall $[0, a]$ monoton zunehmend (abnehmend), wenn für jedes Wertepaar $x_1 < x_2$ in $[0, a]$ gilt

$$\left| \begin{array}{c} 1 f(x_1) \\ 1 f(x_2) \end{array} \right| > 0 (< 0).$$

Im folgenden wollen wir uns auf den Typus einer monoton zunehmenden Funktion beschränken, da wir ja monoton abnehmende Funktionen durch Multiplikation mit -1 stets in solche verwandeln können.

Unmittelbar aus der Definitionsbeziehung liessen sich für monotone Funktionen typische Kriterien herleiten, doch sei hier auf die Beweise verzichtet.

Ist die Funktion $f(x)$ überall differenzierbar, so ist die Bedingung

$$f'(x) > 0$$

notwendig und hinreichend dafür, dass die Funktion monoton zunimmt.

Bilden wir andererseits für eine bestimmte Spanne ω die erste Differenz, so gilt sicher

$$\Delta_{\omega}^1 f(x) > 0.$$

Nach diesen Ausführungen gehen wir zum Beweise der Behauptung über, dass sich die Monotonie auf die Polynome $B_n[Y(x), x]$ überträgt.

Nach (9) ist

$$\frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^{n-1}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \Delta_{\frac{a}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n-1}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-1-\lambda}; \quad n \geq 1.$$

Da nach Voraussetzung $Y(x)$ monoton zunehmend ist, fallen in der rechtsstehenden Summe sämtliche $\Delta_{\frac{a}{n}}^1 Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$ positiv aus und demnach wegen (4) auch

$$(18) \quad \frac{d}{dx} B_n[Y(x), x] > 0, \quad n \geq 1.$$

Damit ist, gestützt auf das hinreichende Differentialkriterium, die Behauptung bewiesen.

4. Konvexität 1-ter Ordnung.

Setzt man nun von der Grundfunktion voraus, dass sie eine konvexe Funktion 1-ter Ordnung sei, so bleibt auch die Konvexität bei der Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen erhalten. Unter Konvexität bzw. Konkavität 1-ter Ordnung ist eine Konvexität bzw. Konkavität im gewöhnlichen Sinn zu verstehen, die wie folgt definiert wird:

Eine Funktion $f(x)$ heisst konvex (konkav) in $[0, a]$, falls für alle Wertetripel $x_1 < x_2 < x_3$ in $[0, a]$ die Beziehung gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} > 0 (< 0).$$

Diese neue Definitionsform deckt sich vollständig mit der gewöhnlich üblichen Form von Jensen [12],

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \underset{(<)}{\geq} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

wie man durch passende Umformung leicht erkennt. Der Vorteil dieser Determinantenform liegt lediglich in der einfachen Übertragung auf Konvexitäten höherer Ordnung, wie wir noch sehen werden.

Im folgenden beschränken wir uns wieder auf einen Funktionstypus, nämlich auf konvexe Funktionen.

Für zweimal differenzierbare Funktionen gilt wieder, dass die Bedingung

$$f''(x) > 0$$

notwendig und hinreichend ist für die Konvexität.

Es fallen zudem die zweiten Differenzen bei fester Spanne ω notwendig positiv aus

$$\Delta_{\omega}^2 f(x) > 0.$$

Aus der Beziehung (10) ergibt sich dann für $k = 2$

$$\frac{d^2}{dx^2} B_n [Y(x), x] = c_{2,n} \cdot \frac{1}{a^{n-2}} \sum_{\lambda=0}^{n-2} \Delta_{\frac{a}{n}}^2 Y \left(\frac{a\lambda}{n} \right) \binom{n-2}{\lambda} x^{\lambda} (a-x)^{n-2-\lambda}, \quad n \geq 2$$

mit $\Delta_{\frac{a}{n}}^2 Y \left(\frac{a\lambda}{n} \right) > 0$, da $Y(x)$ eine konvexe Funktion, die Folgerung:

$$(19) \quad \frac{d^2}{dx^2} B_n [Y(x), x] > 0; \quad n \geq 2.$$

Es liegt nun nahe, dieses Resultat der Erhaltung der Konvexität zu verallgemeinern und auf konvexe Grundfunktionen $Y(x)$ höherer Ordnung zu übertragen.

5. Konvexität höherer Ordnung.

Als eine konvexe (konkave) Funktion k -ter Ordnung definiert man eine solche Funktion $f(x)$, bei der für alle geordneten Wertesysteme in $[0, a]$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1} < x_{k+2}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^k & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{k+2} & x_{k+2}^2 & \dots & x_{k+2}^k & f(x_{k+2}) \end{vmatrix} > 0 (< 0)$$

positiv (negativ) ausfällt.

Für konvexe Funktionen k -ter Ordnung gelten entsprechend die Relationen:

$$f^{(k+1)}(x) > 0$$

als notwendiges und hinreichendes Differentialkriterium für die Konvexität k -ter Ordnung und

$$\Delta_{\omega}^{k+1} f(x) > 0$$

als notwendiges Differenzenkriterium.

Für den Nachweis der Erhaltung der Konvexität k -ter Ordnung bedient man sich wieder der üblichen Schlussweise. Nach (10) gilt

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_n[Y(x), x] = c_{k+1, n} \cdot \frac{1}{a^{n-(k+1)}} \sum_{\lambda=0}^{n-(k+1)} \Delta_{\frac{a}{n}}^{k+1} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n-k-1}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-k-1-\lambda}; n \geq k+1.$$

Da $Y(x)$ als konvexe Funktion k -ter Ordnung vorausgesetzt wird, fallen in der Summe sämtliche

$$\Delta_{\frac{a}{n}}^{k+1} Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$$

positiv aus, so dass wegen (4) auch die Beziehung gilt:

$$(20) \quad \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} B_n[Y(x), x] > 0; \quad n \geq k+1.$$

Damit ist der Beweis für die Erhaltung der Konvexität höherer Ordnung geleistet. Zusammenfassend halten wir fest:

Die Eigenschaft der Grundfunktion konvex bzw. konkav von bestimmter Ordnung zu sein, bleibt bei der Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen hinreichend hoher Ordnung invariant.

§ 5

Gleichmässige Approximation stetiger Grundfunktionen.

Bisher haben wir uns lediglich mit den zu einer Grundfunktion formal gebildeten Bernstein-Polynomen befasst und letztere auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Dabei wurde auf die Begründung, ob und wie genau Funktionen durch Bernstein-Polynome approximiert werden können, überhaupt nicht geachtet. In diesem und nächsten Paragraphen sollen daher die approximierenden Polynome auf ihre Konvergenzeigenschaften hin näher untersucht werden.

Wir prüfen diesbezüglich, wieviel $B_n[Y(x), x]$ von $Y(x)$ in $[0, a]$ abweichen kann. Unsere Polynomfolge wird dann und nur dann gegen die Grundfunktion $Y(x)$ konvergieren, wenn an jeder Stelle x

in $[0, a]$, zu jedem noch so klein vorgegebenen positiven ε , der Ausdruck

$$| B_n [Y(x), x] - Y(x) | < \varepsilon$$

ausfällt, sobald wir nur n hinreichend gross wählen. Der Höchstbetrag dieser absoluten Abweichung liefert ferner ein Mass für die Genauigkeit der Annäherung, wobei wir dieses Mass als Funktion der Ordnung n darzustellen trachten.

Zunächst befassen wir uns mit Konvergenzuntersuchungen, welche sich auf *stetige* Grundfunktionen beziehen, und zwar soll dies vorerst an einer speziellen, stetigen Funktion vorgenommen werden.

1. Konvergenzuntersuchung für $Y(x) = x^k$.

Die zugehörigen Bernstein-Polynome lauten:

$$(21) \quad B_n [x^k, x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} \right)^k \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}.$$

Entwickelt man andererseits

$$(22) \quad \psi(x, z) = \frac{1}{a^n} \left[a + \left(e^{\frac{az}{n}} - 1 \right) x \right]^n$$

nach Potenzen von z :

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} (a-x)^{n-\lambda} \cdot x^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{a\lambda}{n} \right)^\mu \frac{z^\mu}{\mu!} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} \right)^\mu \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} \\ (23) \quad \psi(x, z) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} B_n [x^\mu, x] \frac{z^\mu}{\mu!}, \end{aligned}$$

so erkennt man aus (23), dass $\psi(x, z)$ die erzeugende Funktion ist für die Bernstein-Polynome n -ter Ordnung der Funktionenklasse x^k ; ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Es besteht demnach allgemein die Beziehung:

$$(24) \quad B_n[x'', x] = \frac{\delta''}{\delta z''} \psi(x, z) \Big|_{z=0}.$$

Unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel resultiert aus (24) die Darstellung

$$B_n[x^k, x] = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{k!}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\left[a + \left(e^{\frac{az}{n}} - 1 \right) x \right]^n}{z^{k+1}} dz,$$

wobei sich die Integration über einen den Nullpunkt umschliessenden Kreis C erstreckt.

Eine weitere Umformung führt auf:

$$(25) \quad B_n[x^k, x] = k! \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \omega_{\lambda, k}, \quad \text{wo}$$

$$(26) \quad \omega_{\lambda, k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\left(e^{\frac{az}{n}} - 1 \right)^\lambda}{z^{k+1}} dz.$$

Es ist jetzt (25) eine für die Konvergenzuntersuchung günstigere Gestalt. Dabei sind die Werte von $\omega_{\lambda, k}$ wie folgt zu bestimmen:

Beachtet man, dass für ganze m

$$\int_{(C)} z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

ist, so ergeben sich zunächst, falls man in (26) den Integranden nach Potenzen von z entwickelt, die Werte:

$$\begin{aligned} \lambda > k & \quad \omega_{\lambda, k} = 0 \\ \lambda = k & \quad \omega_{k, k} = \left(\frac{a}{n} \right)^k. \end{aligned}$$

Für $\lambda < k$ wird das Integral abgeschätzt; wir führen in (26) zunächst die Substitution $\frac{az}{n} = w$ aus

$$\omega_{\lambda, k} = \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(e^w - 1)^\lambda}{w^{k+1}} dw.$$

Dann findet man, indem als Integrationsweg der Einheitskreis $|w| = 1$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} |\omega_{\lambda, k}| &\leq \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \text{Max. } |e^w - 1|^\lambda \\ &< \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot 2^\lambda, \end{aligned}$$

da $|e^w - 1|^\lambda < (e^{|w|} - 1)^\lambda < 2^\lambda$.

Der Wertevorrat von $\omega_{\lambda, k}$ ist demnach wie folgt zu charakterisieren:

$$(27) \quad \begin{aligned} \lambda > k & \quad \omega_{\lambda, k} = 0 \\ \lambda = k & \quad \omega_{k, k} = \left(\frac{a}{n}\right)^k \\ \lambda < k & \quad |\omega_{\lambda, k}| < \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot 2^\lambda. \end{aligned}$$

Nach diesen Ausführungen können wir jetzt dazu übergehen, für $Y(x) = x^k$ die gleichmässige Konvergenz der zugehörigen Bernstein-Polynome nachzuweisen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir n so gross ansetzen, dass gilt

$$(28) \quad n > 2k.$$

Wir bilden nun, unter Berücksichtigung von (25) und (27),

$$(29) \quad \begin{aligned} B_n[x^k, x] - x^k &= k! \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{n}{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right)^\lambda \omega_{\lambda, k} - x^k \left(1 - k! \binom{n}{k} \frac{1}{a^k} \omega_{k, k}\right) \\ |B_n[x^k, x] - x^k| &< k! \left(\frac{a}{n}\right)^k \sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{n}{\lambda} \left(\frac{x}{a}\right)^\lambda 2^\lambda + x^k \left(1 - k! \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right). \end{aligned}$$

Ersetzt man rechts überall x durch den Höchstwert a und beachtet, dass

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} \binom{n}{\lambda} 2^\lambda < k \binom{n}{k-1} 2^{k-1}$$

wegen (28), so geht (29) über in:

$$\begin{aligned} |B_n[x^k, x] - x^k| &< k! \left(\frac{a}{n}\right)^k k \binom{n}{k-1} 2^{k-1} + a^k \left(1 - k! \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right) \\ &< \frac{k^2 \cdot a^k \cdot 2^{k-1} \cdot n(n-1) \dots (n-(k-2))}{n \cdot n^{k-1}} + a^k \left(1 - \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{n^k}\right). \end{aligned}$$

Es besteht so offenbar die Beziehung:

$$(30) \quad |B_n[x^k, x] - x^k| < \frac{a^k \cdot k^2 \cdot (2^{k-1} + 1)}{n},$$

falls berücksichtigt wird

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) < 1$$

und

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) &< \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k\right) < \\ &< \left(1 - 1 + \frac{k^2}{n}\right) = \frac{k^2}{n}. \end{aligned}$$

Aus (30) ergibt sich weiter als Genauigkeitsmass

$$(30') \quad |B_n[x^k, x] - x^k| = O\left(\frac{1}{n}\right)^1)$$

und ferner

$$(30'') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[x^k, x] = x^k \text{ gleichmässig in } [0, a].$$

Damit ist einmal die gleichmässige Approximation von $Y(x) = x^k$ durch Bernstein-Polynome nachgewiesen.

¹⁾ $O(\varepsilon)$ stellt das bekannte Symbol von Landau dar. (Landau, Verteilung der Primzahlen, Bd. I, p. 59.)

2. Konvergenzuntersuchung für allgemeine, stetige Grundfunktionen.

Die Grundfunktion $Y(x)$ weise jetzt einen stetigen, sonst aber beliebigen Verlauf auf. Mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationstheorems und auf Grund der gewonnenen Ergebnisse lässt sich zunächst einmal die Konvergenz leicht abschätzen.

Es sei

$$(31) \quad Y(x) = Y(x) - P_N(x) + P_N(x),$$

wo

$$P_N(x) = \sum_{\lambda=0}^N c_\lambda \cdot x^\lambda$$

irgendein Polynom vom Grade N ist.

Man bildet dann unter Beachtung von (5)

$$B_n[Y(x), x] - Y(x) = B_n[(Y(x) - P_N(x)), x] + (B_n[P_N(x), x] - P_N(x)) - (Y(x) - P_N(x))$$

und

$$(32) \quad |B_n[Y(x), x] - Y(x)| \leq |Y(x) - P_N(x)| + |B_n[(Y(x) - P_N(x)), x]| + |B_n[P_N(x), x] - P_N(x)|.$$

Da sich nun nach Weierstrass jede in einem endlichen Intervall $[0, a]$ definierte und dort überall stetige Funktion durch Polynome gleichmässig mit beliebiger Genauigkeit approximieren lässt, kann man stets ein N so bestimmen, dass gilt

$$(33) \quad |Y(x) - P_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach (11) ist dann aber auch

$$(34) \quad |B_n[(Y(x) - P_N(x)), x]| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Schliesslich lässt sich nach (30') stets ein n so finden, dass

$$|B_n[x^k, x] - x^k| \leq \frac{\varepsilon}{3 N |c_k|}; \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

es wird dann

$$\begin{aligned} |B_n[P_N(x), x] - P_N(x)| &\leq \sum_{\lambda=1}^N |B_n[c_\lambda \cdot x^\lambda, x] - c_\lambda \cdot x^\lambda| \\ &\leq \sum_{\lambda=1}^N |c_\lambda| \cdot |B_n[x^\lambda, x] - x^\lambda|, \end{aligned}$$

oder

$$(35) \quad |B_n[P_N(x), x] - P_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Diese Beziehungen in (32) eingesetzt, ergeben:

$$(36) \quad |B_n[Y(x), x] - Y(x)| \leq \varepsilon; \quad Y(x) \text{ stetig.}$$

Jede in einem endlichen Intervall $[0, a]$ definierte und dort überall stetige Funktion $Y(x)$ kann durch Bernstein-Polynome $B_n[Y(x), x]$ gleichmässig approximiert werden.

Quantitative Konvergenzuntersuchungen haben schliesslich zu folgenden interessanten Ergebnissen geführt. Unter der einzigen Voraussetzung der Stetigkeit hat Popoviciu [8] bisher für allgemeine Grundfunktionen das beste Genauigkeitsmass gefunden zu:

$$|B_n[Y(x), x] - Y(x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Unter engeren Voraussetzungen über die auszugleichende Grundfunktion lässt sich dieses Mass noch verbessern. Fordert man nämlich von $Y(x)$ stetige Differenzierbarkeit bis zur zweiten Ordnung, so gelingt es, das Genauigkeitsmass $O\left(\frac{1}{n}\right)$ zu erzielen, wie aus nachstehender Herleitung folgt:

$Y(x)$ besitze in $[0, a]$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Es sei ferner

$$|Y''(x)| \leq M_2.$$

Man bildet dann den Ausdruck

$$B_n[Y(x), x] - Y(x) = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left[Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) - Y(x) \right] \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda},$$

der mit

$$Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) - Y(x) = \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right) Y'(x) + \frac{\left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)^2}{2!} Y''\left(x + \theta\left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)\right)$$

$0 < \theta < 1$

übergeht in:

$$(37) \quad B_n[Y(x), x] - Y(x) = Y'(x) \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y''\left(x + \theta\left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)\right) \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)^2 \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}.$$

Da sich ferner durch zweimalige Differentiation der Identität

$$\frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} \equiv 1$$

die Beziehungen ergeben:

$$(38) \quad \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} = 0$$

$$(39) \quad \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)^2 \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} = \frac{x(a-x)}{n},$$

so resultiert aus (37)

$$(40) \quad |B_n[Y(x), x] - Y(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left| Y''\left(x + \theta\left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)\right) \right| \left| \left(\frac{a\lambda}{n} - x\right)^2 \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda} \right|$$

$$\leq \frac{M_2}{2} \cdot \frac{x(a-x)}{n} \leq \frac{a^2 M_2}{8} \cdot \frac{1}{n},$$

also

$$(41) \quad |B_n[Y(x), x] - Y(x)| \leq \frac{a^2 M_2}{8} \cdot \frac{1}{n}$$

oder

$$(41') \quad | B_n[Y(x), x] - Y(x) | = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nach einer Notiz von *S. Bernstein* [3] hat *Voronovskaya* in einer in den «Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., 1932» veröffentlichten Abhandlung über «Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de *S. Bernstein*» eine zu unserer Relation (41) gleichwertige Beziehung gefunden, nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{B_n[Y(x), x] - Y(x)\} = \frac{1}{2} x (a-x) Y''(x).$$

§ 6

Approximation unstetiger Grundfunktionen.

Wir dehnen nun die Konvergenzuntersuchungen auch auf *unstetige* Grundfunktionen aus. Dabei beschränken wir uns grundsätzlich auf *stückweise stetige* Grundfunktionen, d. h. auf solche Funktionen, für welche es eine Zerlegung des Definitionsintervalles in endlich viele Teilgebiete gibt, derart, dass die Funktion im Innern eines jeden von ihnen stetig ist und bei Annäherung an den Rand jedes Teilgebietes von innen her sich bestimmten, endlichen Randwerten nähert. In der Sprungstelle selbst soll als Funktionswert das arithmetische Mittel aus den Randwerten von links und rechts definiert werden, also

$$f(\xi) = \frac{1}{2} [f(\xi-0) + f(\xi+0)].$$

Der Nachweis der Approximationsmöglichkeit einer stückweise stetigen Grundfunktion durch Bernstein-Polynome ist das Ziel unserer weiteren Ausführungen.

Der prinzipielle Unterschied zum vorhergehenden Paragraphen besteht darin, dass die Konvergenz im ganzen Intervall $[0, a]$ nicht mehr gleichmässig sein kann. In der Umgebung derjenigen Stellen, wo die Grundfunktion unstetig wird, konvergiert die Bernstein-Polynomfolge ungleichmässig; denn andernfalls besäße die in $[0, a]$

gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen $B_n[Y(x), x]$ eine stetige Grundfunktion.

Die Konvergenzfrage wird wieder vorerst für eine spezielle, un-
stetige Grundfunktion entschieden.

1. Konvergenzuntersuchung für Stufenfunktionen $\Psi(x)$.

Die durch

$$(42) \quad \Psi(x) = \begin{cases} \delta & 0 \leq x < \xi \\ \frac{\delta}{2} & x = \xi \\ 0 & \xi < x \leq a \end{cases}$$

definierte Funktion mit einer Sprungstelle $x = \xi$ und dem Sprung $\delta(\xi)$ nennen wir in der Folge *Stufenfunktion*.

Es ist zu zeigen, dass die Konvergenzbeziehung

$$(43) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[\Psi(x), x] = \Psi(x)$$

für Stufenfunktionen mit Recht besteht.

Da einmal nach § 5 in jedem abgeschlossenen Teilintervall, das keine Sprungstelle enthält, die gleichmässige Konvergenz gesichert ist, genügt es, unsere Aufmerksamkeit auf das spezielle Verhalten der Bernstein-Polynome in der Sprungstelle selbst zu richten. Die Behauptung (43) ist offenbar dann bewiesen, wenn wir zeigen können, dass in der Sprungstelle die Wertefolge $B_n[\Psi(x), \xi]$ dem arithmetischen Mittel aus den Randwerten von links und rechts zustrebt; d. h.

$$(44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[\Psi(x), \xi] = \frac{\delta}{2}.$$

Über die Lage der Sprungstelle ξ nehmen wir zunächst einmal an, sie halbiere das Intervall $[0, a]$.

1. Fall:

$$(45) \quad \xi = \frac{a}{2}.$$

Für diese spezielle Stufenfunktion lässt sich (44) besonders einfach aus der Symmetrieeigenschaft der Binomialkoeffizienten nachweisen. Es gilt nämlich schon die Relation

$$(46) \quad B_n \left[\Psi(x), \frac{a}{2} \right] = \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \dots,$$

die wie folgt zu beweisen ist:

Es sei n gerade (für ungerades n ist die Beweisführung analog). Die zugehörigen Bernstein-Polynome lauten dann:

$$B_n \left[\Psi(x), \frac{a}{2} \right] = \delta \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n}{\lambda} + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

oder wegen

$$\binom{n}{\lambda} = \binom{n}{n-\lambda}$$

$$B_n \left[\Psi(x), \frac{a}{2} \right] = \delta \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=\frac{n}{2}+1}^n \binom{n}{\lambda} + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

Beide Gleichungen addiert, ergeben

$$2 B_n \left[\Psi(x), \frac{a}{2} \right] = \delta \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} = \delta.$$

Damit ist aber der Nachweis von (46) erbracht und gleichzeitig auch die behauptete Konvergenz (44) bewiesen.

Wir gehen nun über zur Untersuchung des allgemeinen Falles, wo ξ irgendeinen Wert des offenen Intervalles $0 < \xi < a$ annehmen möge.

2. Fall:

$$(47) \quad \alpha \leq \xi \leq a - \alpha; \quad 0 < \alpha < \frac{a}{2}.$$

Zum Beweise der Beziehung (44)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n[\Psi(x), \xi] = \frac{\delta}{2}$$

konstruieren wir wieder gemäss (2) die zugehörigen Bernstein-Polynome. Dabei ist darauf zu achten, ob die Sprungstelle ξ einen Beitrag liefert oder nicht. Ersteres ist immer dann der Fall, wenn $\frac{n\xi}{a}$ ganzzahlig ausfällt. Unter Benutzung des Gaußschen Klammersymbols — es bedeutet allgemein $[x]$ die grösste ganze Zahl, die x nicht übertrifft — kann der Ausdruck der zugehörigen Bernstein-Polynome in einfacher Weise durch folgenden Polynomialausdruck dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 B_n[\Psi(x), \xi] &= \delta \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n\xi}{a}\right]-1} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} + \\
 (48) \quad &+ \Psi \left(\frac{\left[\frac{n\xi}{a}\right]}{\frac{n}{a}} \right) \frac{1}{a^n} \binom{n}{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} \xi^{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} (a-\xi)^{n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit (49) } \Psi \left(\frac{\left[\frac{n\xi}{a}\right]}{\frac{n}{a}} \right) = \begin{cases} \delta & \text{für nicht ganzzahliges } \frac{n\xi}{a} \\ \frac{\delta}{2} & \text{für ganzzahliges } \frac{n\xi}{a}. \end{cases}$$

Es ist zu beachten, dass von nun an die eckige Klammer stets im oben definierten Sinne gebraucht wird. Es bestehen offenbar die Beziehungen:

$$(50) \quad [x] \leq x < x + 1$$

$$(50') \quad [x] > x - 1,$$

die nun häufig verwertet werden.

Aus (48) folgt durch Subtraktion der Identität

$$\frac{\delta}{2} \equiv \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
 B_n[\Psi(x), \xi] - \frac{\delta}{2} &= \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} - \\
 (51) \quad & - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=\left[\frac{n\xi}{a}\right]}^n \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} + \\
 & + \left\{ \Psi\left(\frac{\left[\frac{n\xi}{a}\right]}{n}\right) - \frac{\delta}{2} \right\} \cdot \frac{1}{a^n} \binom{n}{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} \xi^{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} (a-\xi)^{n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]}.
 \end{aligned}$$

Eine für die Konvergenzuntersuchung wichtige Umformung besteht nun darin, in (51) die Summen so in Partialsummen aufzuteilen, dass sich dann die Summationen jeweils nur auf diejenigen Indizes beziehen, für die

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & 0 \leq \left| \lambda - \left[\frac{n\xi}{a}\right] \right| \leq [n^\omega] \\
 & \text{bzw.} \quad 0 < \omega < 1 \\
 & \left| \lambda - \left[\frac{n\xi}{a}\right] \right| > [n^\omega]
 \end{aligned}$$

ausfällt. Dabei bleibt die genauere Bestimmung des Parameters ω noch vorbehalten. Diese wird sich dann am Schluss auf Grund von Bedingungsgleichungen leicht ergeben.

Durch diese Aufteilung erhalten wir demnach aus (51):

$$\begin{aligned}
 B_n[\Psi(x), \xi] - \frac{\delta}{2} &= \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{0 \leq \left(\left[\frac{n\xi}{a}\right] - \lambda\right) \leq [n^\omega]} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\left(\left[\frac{n\xi}{a}\right] - \lambda\right) > [n^\omega]} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} \\
 & - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{0 \leq \left(\lambda - \left[\frac{n\xi}{a}\right]\right) \leq [n^\omega]} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\left(\lambda - \left[\frac{n\xi}{a}\right]\right) > [n^\omega]} \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} \\
 & + \left\{ \Psi\left(\frac{\left[\frac{n\xi}{a}\right]}{n}\right) - \frac{\delta}{2} \right\} \frac{1}{a^n} \binom{n}{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} \xi^{\left[\frac{n\xi}{a}\right]} (a-\xi)^{n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]}
 \end{aligned}$$

und daher

$$(52) \quad \left| B_n[\Psi(x), \xi] - \frac{\delta}{2} \right| \leq P_n + |Q_n| + R_n$$

mit

$$(53) \quad P_n = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \\ |\lambda - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor| > \lfloor n^\omega \rfloor}} \xi^\lambda (a - \xi)^{n-\lambda}$$

$$(54) \quad Q_n = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \\ \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \lfloor n^\omega \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}} \xi^\lambda (a - \xi)^{n-\lambda} - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \\ \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \lfloor n^\omega \rfloor}} \xi^\lambda (a - \xi)^{n-\lambda}$$

$$(55) \quad R_n = \left\{ \Psi \left(\frac{\binom{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}{\frac{n}{a}}}{\frac{n}{a}} \right) - \frac{\delta}{2} \right\} \frac{1}{a^n} \binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor} \xi^{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor} (a - \xi)^{n - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}.$$

Für den Beweis der Konvergenz von $B_n[\Psi(x), \xi]$ gegen $\frac{\delta}{2}$ ist jetzt noch zu zeigen, dass in (52) der rechtsseitige Ausdruck mit wachsendem n beliebig klein wird. Dies werden wir durch Abschätzung der einzelnen Bestandteile P_n, Q_n, R_n erkennen.

Abschätzung von R_n :

Wegen (49) gilt einmal

$$(56) \quad \left\{ \Psi \left(\frac{\binom{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}{\frac{n}{a}}}{\frac{n}{a}} \right) - \frac{\delta}{2} \right\} = \begin{cases} \frac{\delta}{2} & \text{für nicht ganzzahliges } \frac{n\xi}{a} \\ 0 & \text{für ganzzahliges } \frac{n\xi}{a}. \end{cases}$$

Um noch den Restbestandteil abzuschätzen, bedienen wir uns in zweckmässiger Weise der Relation

$$(57) \quad \frac{1}{a^n} \binom{n}{\frac{n\eta}{a}} \xi^{\frac{n\eta}{a}} (a - \xi)^{n - \frac{n\eta}{a}} < \frac{a}{2\beta\sqrt{n}}; \beta \leq \eta \leq a - \beta,$$

die wie folgt zu beweisen ist

$$\frac{1}{a^n} \binom{n}{\frac{n\eta}{a}} \xi^{\frac{n\eta}{a}} (a-\xi)^{n-\frac{n\eta}{a}} \leq \frac{1}{a^n} \binom{n}{\frac{n\eta}{a}} \eta^{\frac{n\eta}{a}} (a-\eta)^{n-\frac{n\eta}{a}}. \quad (\text{Maximum!})$$

Hieraus folgert man unter Verwertung der Stirlingschen Formel

$$\lambda! = \sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda} \lambda^\lambda e^{-\lambda} e^{\frac{\theta}{12\lambda}}; \quad 0 < \theta < 1,$$

nach einigen elementaren Umformungen:

$$\frac{1}{a^n} \binom{n}{\frac{n\eta}{a}} \xi^{\frac{n\eta}{a}} (a-\xi)^{n-\frac{n\eta}{a}} < \frac{a \cdot e^{\frac{1}{12n}}}{\sqrt{2\pi\eta(a-\eta)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mit

$$\beta \leq \eta \leq a - \beta$$

$$e^{\frac{1}{12n}} < e^{\frac{1}{12}} < \frac{12}{11}; \quad n \geq 1$$

$$\sqrt{2\pi} > \frac{24}{11}$$

ergibt sich ferner die behauptete Relation:

$$\frac{1}{a^n} \binom{n}{\frac{n\eta}{a}} \xi^{\frac{n\eta}{a}} (a-\xi)^{n-\frac{n\eta}{a}} < \frac{a}{2\beta\sqrt{n}}.$$

Setzen wir nun $\eta = \frac{\left[\frac{n\xi}{a} \right]}{\frac{n}{a}}$ und wählen $n > \frac{2a}{\alpha}$, so genügt es,

wegen

$$\alpha \leq \xi \leq a - \alpha,$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \text{ zu setzen,}$$

und es resultiert demnach

$$(58) \quad \frac{1}{a^n} \binom{n}{\left[\frac{n\xi}{a} \right]} \xi^{\left[\frac{n\xi}{a} \right]} (a-\xi)^{n-\left[\frac{n\xi}{a} \right]} < \frac{a}{\alpha\sqrt{n}},$$

so dass sich für R_n mit Rücksicht auf (56) die Abschätzung ergibt:

$$(59) \quad R_n < \frac{\delta a}{2 \alpha \sqrt{n}},$$

mit der Zusatzbedingung $n > \frac{2a}{\alpha}$, die aber keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, da wir ja n sowieso gross ansetzen werden.

Abschätzung von P_n :

$$\text{Mit (39)} \quad \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n \left(\frac{a\lambda}{n} - \xi \right)^2 \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} = \frac{\xi (a-\xi)}{n}$$

hat man gerade die günstige Ausgangsgleichung zu dieser Abschätzung. Aus ihr folgert man nämlich für die Partialsumme die Ungleichung

$$\frac{1}{a^n} \sum_{\left| \lambda - \left[\frac{n\xi}{a} \right] \right| > [n^\omega]} \left(\lambda - \frac{n\xi}{a} \right)^2 \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} < \frac{n \xi (a-\xi)}{a^2}.$$

Beachten wir noch, dass

$$\xi(a-\xi) \leq \frac{a^2}{4}$$

und

$$(50') \quad \frac{n\xi}{a} < \left[\frac{n\xi}{a} \right] + 1,$$

so gelangen wir zur verstärkten Ungleichung

$$\frac{1}{a^n} \sum_{\left| \lambda - \left[\frac{n\xi}{a} \right] \right| > [n^\omega]} \left(\lambda - \left[\frac{n\xi}{a} \right] - 1 \right)^2 \binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} < \frac{n}{4},$$

oder unter Berücksichtigung von

$$\left| \lambda - \left[\frac{n\xi}{a} \right] \right| > [n^\omega] > n^\omega - 1$$

$$(n^\omega - 2)^2 \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} \\ |\lambda - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor > \lceil n^\omega \rceil}} < \frac{n}{4}.$$

Für P_n resultiert so die Abschätzung:

$$(60) \quad P_n < \frac{\delta}{8} \cdot \frac{n}{(n^\omega - 2)^2}.$$

Abschätzung von Q_n :

Den Ausdruck

$$(54) \quad Q_n = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} \\ \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \lceil n^\omega \rceil \leq \lambda \leq \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}} - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\substack{\binom{n}{\lambda} \xi^\lambda (a-\xi)^{n-\lambda} \\ \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \lceil n^\omega \rceil}}$$

formen wir passend um

$$Q_n = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \sum_{\mu=1}^{\lceil n^\omega \rceil} \left\{ \binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \mu} \xi^{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \mu} (a-\xi)^{n - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \mu} - \binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \mu} \xi^{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \mu} (a-\xi)^{n - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \mu} \right\}$$

$$Q_n = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{a^n} \binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor} \xi^{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor} (a-\xi)^{n - \lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor} \cdot$$

$$\sum_{\mu=1}^{\lceil n^\omega \rceil} \left\{ \frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor - \mu}}{\binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}} \left(\frac{\xi}{a-\xi} \right)^{-\mu} - \frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor + \mu}}{\binom{n}{\lfloor \frac{n\xi}{a} \rfloor}} \left(\frac{\xi}{a-\xi} \right)^{\mu} \right\}.$$

Berücksichtigt man die Relation (58) und modifiziert den Klammerausdruck unter der Summe, so gewinnt man

$$|Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha \sqrt{n}} \sum_{\mu=1}^{[n\omega]} \left| \frac{\left(\left[\frac{n\xi}{a}\right]\right) \left(\left[\frac{n\xi}{a}\right]-1\right) \dots \left(\left[\frac{n\xi}{a}\right]-\mu+1\right)}{\left(n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]+1\right) \dots \left(n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]+\mu\right)} \cdot \left(\frac{\xi}{a-\xi}\right)^{-\mu} \right. \\ \left. - \frac{\left(n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]\right) \dots \left(n-\left[\frac{n\xi}{a}\right]-\mu+1\right)}{\left(\left[\frac{n\xi}{a}\right]+1\right) \dots \left(\left[\frac{n\xi}{a}\right]+\mu\right)} \cdot \left(\frac{\xi}{a-\xi}\right)^{\mu} \right|.$$

Mit (50) $\left[\frac{n\xi}{a}\right] \leq \frac{n\xi}{a}$ wird die Ungleichung nur verstärkt:

$$|Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha \sqrt{n}} \sum_{\mu=1}^{[n\omega]} \left| \frac{1\left(1-\frac{a}{n\xi}\right) \dots \left(1-\frac{(\mu-1)a}{n\xi}\right)}{\left(1+\frac{a}{n(a-\xi)}\right) \dots \left(1+\frac{\mu a}{n(a-\xi)}\right)} - \right. \\ \left. \frac{1\left(1-\frac{a}{n(a-\xi)}\right) \dots \left(1-\frac{(\mu-1)a}{n(a-\xi)}\right)}{\left(1+\frac{a}{n\xi}\right) \dots \left(1+\frac{\mu a}{n\xi}\right)} \right|$$

und daher

$$|Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha \sqrt{n}} \sum_{\mu=1}^{[n\omega]} \left| \left\{1-\left(\frac{a}{n\xi}\right)^2\right\} \dots \left\{1-\left(\frac{(\mu-1)a}{n\xi}\right)^2\right\} \left\{1+\frac{\mu a}{n\xi}\right\} - \right. \\ \left. - \left\{1-\left(\frac{a}{n(a-\xi)}\right)^2\right\} \dots \left\{1-\left(\frac{(\mu-1)a}{n(a-\xi)}\right)^2\right\} \left\{1+\frac{\mu a}{n(a-\xi)}\right\} \right|,$$

unter Weglassung sämtlicher Faktoren im Nenner, die grösser als eins sind. Nunmehr treffen wir die Voraussetzung $\xi > \frac{a}{2}$ (der Fall $\xi < \frac{a}{2}$ liesse sich analog behandeln) und erhalten so

$$(61) \quad |Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha \sqrt{n}} \sum_{\mu=1}^{[n\omega]} \left(1+\frac{\mu a}{n(a-\xi)}\right) \left|1-\left\{1-\left(\frac{\mu a}{n(a-\xi)}\right)^2\right\}^{\mu}\right|,$$

wobei zur weiteren Verstärkung der Ungleichung berücksichtigt wurde:

$$\frac{1 + \frac{\mu a}{n\xi}}{1 + \frac{\mu a}{n(a-\xi)}} < 1 \quad \text{wegen } \xi > \frac{a}{2}$$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{\lambda a}{n\xi} \right)^2 \right\} < 1 \quad \text{für alle } \lambda = 1, 2, \dots, (\mu-1)$$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{a}{n(a-\xi)} \right)^2 \right\} \dots \left\{ 1 - \left(\frac{(\mu-1)a}{n(a-\xi)} \right)^2 \right\} > \left\{ 1 - \left(\frac{\mu a}{n(a-\xi)} \right)^2 \right\}^\mu.$$

Ersetzen wir noch in (61) die $[n^\omega]$ von null verschiedene Summanden umfassende Summe durch

$$[n^\omega] \cdot \{ \text{Maximalglied} \},$$

wo der grösste Wert für $\mu = [n^\omega]$ angenommen wird, so erhalten wir

$$|Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha\sqrt{n}} \cdot [n^\omega] \cdot \left\{ \left(1 + \frac{[n^\omega]a}{n(a-\xi)} \right) \left(1 - \left\{ 1 - \frac{[n^\omega]^2 a^2}{n^2(a-\xi)^2} \right\}^{[n^\omega]} \right) \right\};$$

schlussendlich also, nach Berücksichtigung der elementaren Ungleichung

$$\left\{ 1 - \frac{[n^\omega]^2 a^2}{n^2(a-\xi)^2} \right\}^{[n^\omega]} > 1 - [n^\omega] \frac{[n^\omega]^2 a^2}{n^2(a-\xi)^2}$$

und gestützt auf (47) und (50)

$$|Q_n| < \frac{\delta a}{2\alpha\sqrt{n}} n^\omega \left(1 + \frac{a}{\alpha} n^{\omega-1} \right) \frac{a^2}{\alpha^2} n^{3\omega-2}.$$

Die gesuchte Abschätzung nimmt so die Gestalt an:

$$(62) \quad |Q_n| < \frac{\delta a^3}{2\alpha^3} n^{4\omega - \frac{5}{2}} \left(1 + \frac{a}{\alpha} n^{\omega-1} \right).$$

Mit den gewonnenen Beziehungen (59), (60), (62) geht jetzt (52) über in:

$$(63) \quad \left| B_n[\Psi(x), \xi] - \frac{\delta}{2} \right| < \frac{\delta}{8} \cdot \frac{n}{(n^\omega - 2)^2} + \frac{\delta \alpha^3}{2\alpha^3} n^{4\omega - \frac{5}{2}} \left(1 + \frac{a}{\alpha} n^{\omega-1} \right) + \frac{\delta a}{2\alpha \sqrt{n}}.$$

Aus (63) ergibt sich nun leicht die behauptete Konvergenz. Damit jedes Glied des rechtsseitigen Ausdruckes gegen null konvergiert, sind noch, da bereits $0 < \omega < 1$ vorausgesetzt wurde, die beiden Zusatzbedingungen zu fordern

$$1 - 2\omega < 0 \quad \text{und} \quad 4\omega - \frac{5}{2} < 0$$

(64) bzw.

$$\omega > \frac{1}{2} \quad \omega < \frac{5}{8},$$

womit die anfangs in Aussicht gestellte nähere Festlegung des Parameters ω nachgeholt ist. Eine im Sinne unserer Konvergenzuntersuchung vorgenommene Zerlegung ist also prinzipiell immer möglich, da die beiden Ungleichungen für den Parameter ω ein offenes Intervall abgrenzen.

Wählen wir etwa $\omega = \frac{7}{12}$, so ergibt sich

$$(65) \quad \left| B_n[\Psi(x), \xi] - \frac{\delta}{2} \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right).$$

Damit ist für die allgemeine Stufenfunktion das Konvergenzverhalten in der Sprungstelle, d. h. die Beziehung

$$(44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[\Psi(x), \xi] = \frac{\delta}{2}$$

sichergestellt und somit auch die Konvergenzrelation (43), wie an der betreffenden Stelle ausgeführt wurde.

Wir halten also fest:

Die zur Stufenfunktion $\Psi(x)$ gehörige Bernstein-Polynomfolge konvergiert gleichmässig in jedem von Sprungstellen freien Teilintervall; in der Sprungstelle selbst konvergiert sie gegen das arithmetische Mittel aus den Randwerten von links und rechts.

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, dass die eben bewiesene Konvergenzbetrachtung auch für Stufenfunktionen mit negativen Funktionswerten und Stufenfunktionen von der Form

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \xi \\ \frac{\delta}{2} & x = \xi \\ \delta & \xi < x \leq a \end{cases}$$

gilt.

2. Konvergenzuntersuchung für stückweise stetige Grundfunktionen.

Gestützt auf die gewonnenen Ergebnisse und auf die Linearitätsrelation (5) ist es nun leicht, die Gültigkeit der Approximation durch Bernstein-Polynome auch auf *stückweise stetige* Grundfunktionen auszudehnen.

Es sei jetzt $Y(x)$ eine solche Funktion, welche an den endlich vielen Stellen $x = \xi_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$) des Intervalles $[0, a]$ die Sprünge

$$\delta(\xi_\lambda) = Y(\xi_\lambda + 0) - Y(\xi_\lambda - 0)$$

besitzt und sonst stetig ist.

Der Beweis der zu vermutenden Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n[Y(x), x] = Y(x)$$

beruht darauf, dass sich die stückweise stetige Grundfunktion $Y(x)$ stets in eine überall stetige Funktion $y(x)$ und in endlich viele (genau m) Stufenfunktionen mit den Sprungstellen $x = \xi_\lambda$ und den Sprüngen $\delta(\xi_\lambda)$ zerlegen lässt:

$$Y(x) = y(x) + \sum_{\lambda=1}^m \Psi_\lambda(x).$$

Wegen der Linearitätsrelation (5) gilt nun aber auch

$$B_n[Y(x), x] = B_n[y(x), x] + \sum_{\lambda=1}^m B_n[\Psi_\lambda(x), x]$$

und für den Grenzübergang, vermöge (36) und (43)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[Y(x), x] &= \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[y(x), x] + \sum_{\lambda=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[\Psi_\lambda(x), x] \\ &= y(x) + \sum_{\lambda=1}^m \Psi_\lambda(x) = Y(x). \end{aligned}$$

Damit haben wir das fundamentale Ergebnis erhalten:

$$(66) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n[Y(x), x] = Y(x); \quad Y(x) \text{ stückweise stetig.}$$

Jede im Grundintervall $[0, a]$ stückweise stetige Grundfunktion $Y(x)$ lässt sich durch Bernstein-Polynome $B_n[Y(x), x]$ approximieren. Dabei konvergiert die Polynomfolge gleichmässig in jedem von Sprungstellen freien, abgeschlossenen Teilintervall; in der Sprungstelle selbst konvergiert sie gegen das arithmetische Mittel aus den Randwerten von links und rechts.

Dieses Resultat reicht für die Anwendung der Bernstein-Polynome voll aus.

§ 7

Eine Anwendung.

Nachdem wir die theoretischen Eigenschaften der Bernstein-Polynome kennen, gehen wir dazu über, noch einige Bemerkungen praktischer Natur anzuschliessen und die Ausgleichungsergebnisse einer mit Bernstein-Polynomen vorgenommenen Ausgleichung darzutun.

Kennzeichnend für eine Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen ist der einfache und handliche Ansatz. Zu einer gegebenen Grundfunktion $Y(x)$ wird das Approximationspolynom n -ter Ordnung konstruiert, indem $(n+1)$ äquidistante Werte derselben: $Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$, $\lambda = 0, 1, \dots, n$ mit den zugehörigen Polynomen n -ten Grades verbunden werden.

$$(2) \quad B_n[Y(x), x] = \frac{1}{a^n} \sum_{\lambda=0}^n Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right) \binom{n}{\lambda} x^\lambda (a-x)^{n-\lambda}; \quad \begin{array}{l} n \geq 1 \\ 0 \leq x \leq a. \end{array}$$

Dieser Eigenschaft wegen könnte man das Verfahren als *konstruktives* Ausgleichsverfahren bezeichnen. Es unterscheidet sich von den gewöhnlich üblichen analytischen Verfahren dadurch, dass im Ansatz keine Parameter vorkommen, sondern dass direkt diskrete Werte der Grundfunktion verwertet werden. Von vornherein fällt also jede Parameterbestimmung und damit auch jede allfällige numerische Integration weg. Es ist dies eine für die praktische Auswertung günstige Eigenschaft.

Dagegen muss, um eine befriedigende Ausgleichung zu erzielen, die Ordnung der Approximationspolynome im allgemeinen höher angesetzt werden als bei andern analytischen Methoden. Es liegt dies im Umstand begründet, dass zwischen den Bernstein-Polynomen und der Grundfunktion ausser den im Polynomialansatz vorkommenden einzelnen Werten $Y\left(\frac{a\lambda}{n}\right)$, $\lambda = 0, 1 \dots n$ keine weitere Bindung existiert.

Ferner sei noch erwähnt, dass sich nach erfolgter Ausgleichung der analytische Ansatz der Bernstein-Polynome zur kontinuierlichen Berechnung von allfälligen weiteren Masszahlen im allgemeinen nicht eignen wird, da letztere nicht durch einfache Ausdrücke darstellbar sind.

Für die numerische Auswertung einer Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen ist

$$(8) \quad B_n[Y(x), x] = \sum_{r=0}^n d_{r,n} \Delta_{\frac{a}{n}}^r Y(0) x^r = \sum_{r=0}^n a_{r,n} x^r$$

die günstigste Gestalt. Die Zahlen $d_{r,n}$ wurden für die durchgeführte Ausgleichung ein für allemal numerisch ermittelt und zusammengestellt (Seite 38/39), die zehn ersten Potenzen der Zahlen 1 bis 100 sind tabelliert in Pearsons Tabellenwerk [13], so dass es bei einer Ausgleichung lediglich noch darauf ankommt, die Differenzen $\Delta_{\frac{a}{n}}^r Y(0)$ der Grundfunktion zu ermitteln, gestützt auf die allgemeine Differenzenrelation

$$\Delta_{\omega} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}.$$

Bevor zur systematischen Auswertung des durch (8) gelieferten Approximationspolynomes geschritten wird, ist es noch empfehlenswert, die Richtigkeit der Entwicklungskoeffizienten $a_{v,n}$ zu überprüfen. Die Eigenschaft der Bernstein-Polynome, im Anfangs- und Endpunkt des Grundintervalles $[0, a]$ mit der Grundfunktion übereinzustimmen, liefert eine einfache Kontrollmöglichkeit.

Um uns Rechenschaft über die Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen an einem konkreten Beispiel zu geben, wurden die Zahlen der Kranken- und Unfalltage, wie sie sich aus den Erfahrungen der Jahre 1926—1930 der Krankenkasse für den Kanton Bern ergeben haben, mit diesen Polynomen ausgeglichen. Die rohe Beobachtungsreihe der durchschnittlichen Zahl der Kranken- und Unfalltage eines x -jährigen Mannes: k_x^{k+u} diene als Grundfunktion.

Für die praktische Auswertung ist nun darauf zu achten, dass bei getroffener Wahl des Grundintervalles Anfangs- und Endwert der auszugleichenden Grundfunktion einer kritischen Betrachtung zu unterwerfen sind. Da diese den Verlauf der Bernstein-Polynome nach (3) wesentlich mitbestimmen, sind sie eventuell passend abzuändern. Es ist eben zu bedenken, dass die Beobachtungswerte gerade an den Enden einer statistischen Reihe oft unzuverlässig ausfallen. Für die praktische Anwendung kann es daher vorteilhaft sein, zur Bestimmung dieser Endwerte die Nachbarwerte mitzubersichtigen, obschon dies zu einer kleinen Modifikation des theoretischen Ansatzes führt.

Um einmal das Verhalten der Approximationspolynome $B_n[k_x^{k+u}, x]$ mit zunehmender Ordnung n zu charakterisieren, wurde für das Intervall $25 \leq x \leq 85$ eine Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen 4-ter, 6-ter und 10-ter Ordnung vorgenommen. Mit der Setzung

$$k_{25}^{k+u} = 7,50 \quad \text{und} \quad k_{85}^{k+u} = 43,30$$

resultierten folgende Ansätze:

$$B_4 [100 k_x^{k+u}, x] = 750 + 8,2 \cdot (x-25) + 0,436\ 667 \cdot (x-25)^2 \\ + 0,113\ 519 \cdot 10^{-1} \cdot (x-25)^3 - 0,722\ 219 \cdot 10^{-4} \cdot (x-25)^4.$$

$$B_6 [100 k_x^{k+u}, x] = 750 + 5,9 \cdot (x-25) + 0,191\ 667 \cdot (x-25)^2 \\ + 0,178\ 704 \cdot 10^{-1} \cdot (x-25)^3 - 0,425\ 927 \cdot 10^{-3} \cdot (x-25)^4 \\ + 0,906\ 636 \cdot 10^{-5} \cdot (x-25)^5 - 0,611\ 712 \cdot 10^{-7} \cdot (x-25)^6.$$

Wertetabelle

$$d_{\nu, n} =$$

$\nu \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	0,250 000 000			
3	1	0,333 333 333	0,370 370 370.10 ⁻¹		
4	1	0,375 000 000	0,625 000 000.10 ⁻¹	0,390 625 000.10 ⁻²	
5	1	0,400 000 000	0,800 000 000.10 ⁻¹	0,800 000 000.10 ⁻²	0,320 000 000.10 ⁻³
6	1	0,416 666 667	0,925 925 925.10 ⁻¹	0,115 740 741.10 ⁻¹	0,771 604 937.10 ⁻³
7	1	0,428 571 428	0,102 040 816	0,145 772 595.10 ⁻¹	0,124 947 938.10 ⁻²
8	1	0,437 500 000	0,109 375 000	0,170 898 438.10 ⁻¹	0,170 898 438.10 ⁻²
9	1	0,444 444 444	0,115 226 337	0,192 043 895.10 ⁻¹	0,213 382 106.10 ⁻²
10	1	0,450 000 000	0,120 000 000	0,210 000 000.10 ⁻¹	0,252 000 000.10 ⁻²

$$\begin{aligned}
 B_{10} [100 k_x^{k+u}, x] = & 750 - 6,166\ 666\ 667 \cdot (x-25) + 2,375 \cdot (x-25)^2 \\
 & - 0,244\ 444\ 444 \cdot (x-25)^3 + 0,151\ 342\ 592 \cdot 10^{-1} \cdot (x-25)^4 \\
 & - 0,478\ 074\ 073 \cdot 10^{-3} \cdot (x-25)^5 + 0,709\ 182\ 098 \cdot 10^{-5} \cdot (x-25)^6 \\
 & + 0,247\ 256\ 514 \cdot 10^{-7} \cdot (x-25)^7 - 0,273\ 330\ 331 \cdot 10^{-8} \cdot (x-25)^8 \\
 & + 0,389\ 612\ 862 \cdot 10^{-10} \cdot (x-25)^9 - 0,181\ 578\ 873 \cdot 10^{-12} \cdot (x-25)^{10}.
 \end{aligned}$$

In Figur 1 sind, neben den rohen Beobachtungszahlen, die durch B_4, B_6, B_{10} gelieferten Approximationskurven aufgezeichnet. Diese Darstellung zeigt einmal, wie die Bernstein-Polynome im grossen den Grundverlauf wiedergeben und wie sie sich mit zunehmender Approximation der Grundfunktion nähern.

Mit einer zweiten Auswertung schliesslich soll noch gezeigt werden, dass bei geeigneter Intervallabgrenzung der Genauigkeitsgrad der Annäherung wesentlich verbessert werden kann. Konstruiert man

der Zahlen $d_{\nu, n}$

$$\frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right)}{\nu!}; \quad d_{0, n} = 1$$

6	7	8	9	10
0,214 334 704.10 ⁻⁴				
0,594 990 181.10 ⁻⁴	0,121 426 567.10 ⁻⁵			
0,106 808 746.10 ⁻³	0,381 469 722.10 ⁻⁵	0,596 046 448.10 ⁻⁷		
0,158 060 819.10 ⁻³	0,752 670 556.10 ⁻⁵	0,209 075 149.10 ⁻⁶	0,258 117 479.10 ⁻⁸	
0,210 000 000.10 ⁻³	0,120 000 000.10 ⁻⁴	0,450 000 000.10 ⁻⁶	0,100 000 000.10 ⁻⁷	0,100 000 000.10 ⁻⁹

für das praktisch wichtige Intervall $20 \leq x \leq 60$ das Polynom 10-ter Ordnung

$$\begin{aligned}
 B_{10} [100 k_x^{k+u}, x] = & 859 - 6,75 \cdot (x-20) - 2,615\ 625 \cdot (x-20)^2 \\
 & + 0,414\ 375 \cdot (x-20)^3 - 0,223\ 945\ 313 \cdot 10^{-1} \cdot (x-20)^4 \\
 & + 0,575\ 859\ 375 \cdot 10^{-3} \cdot (x-20)^5 - 0,681\ 884\ 765 \cdot 10^{-5} \cdot (x-20)^6 \\
 & + 0,805\ 664\ 063 \cdot 10^{-7} \cdot (x-20)^7 - 0,375\ 595\ 093 \cdot 10^{-8} \cdot (x-20)^8 \\
 & + 0,910\ 949\ 707 \cdot 10^{-10} \cdot (x-20)^9 - 0,745\ 670\ 136 \cdot 10^{-12} \cdot (x-20)^{10},
 \end{aligned}$$

wobei für k_{20}^{k+u} und k_{60}^{k+u} das arithmetische Mittel aus fünf benachbarten Werten gesetzt wurde

$$k_x^{k+u} = \frac{1}{5} \sum_{\lambda=-2}^{+2} k_{x+\lambda}^{k+u}$$

also

$$k_{20}^{k+u} = 8,59 \quad \text{und} \quad k_{60}^{k+u} = 12,78,$$

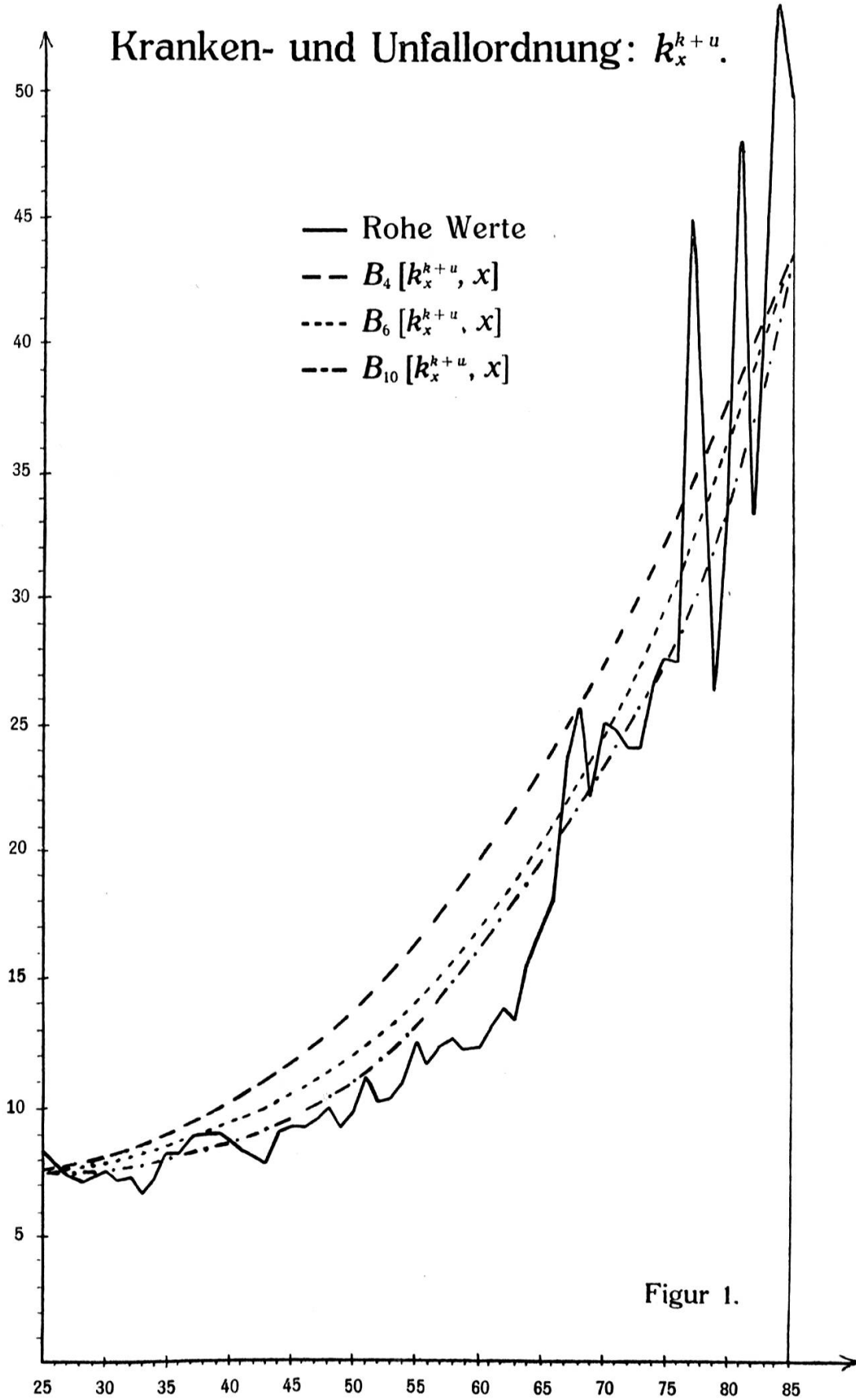
so erschliesst der graphische Verlauf (Figur 2) eine befriedigendere Approximation.

Zur Beurteilung der Ergebnisse sei noch auf den Unterschied hingewiesen, der entsteht, wenn man die beobachtete Anzahl von Kranken- und Unfalltagen der an Hand der ausgeglichenen Werte ermittelten erwartungsmässigen Zahl gegenüberstellt. In der ersten Auswertung ($25 \leq x \leq 85$) übersteigt für das Ausgleichspolynom 10-ter Ordnung das Total der erwartungsmässigen Kranken- und Unfalltage das der beobachteten um 98 256 Tage; die Abweichung selbst beträgt: + 6,18 %. Für die zweite Auswertung ($20 \leq x \leq 60$) sind die entsprechenden Daten für B_{10} 30 424 Tage oder + 2,18 %.

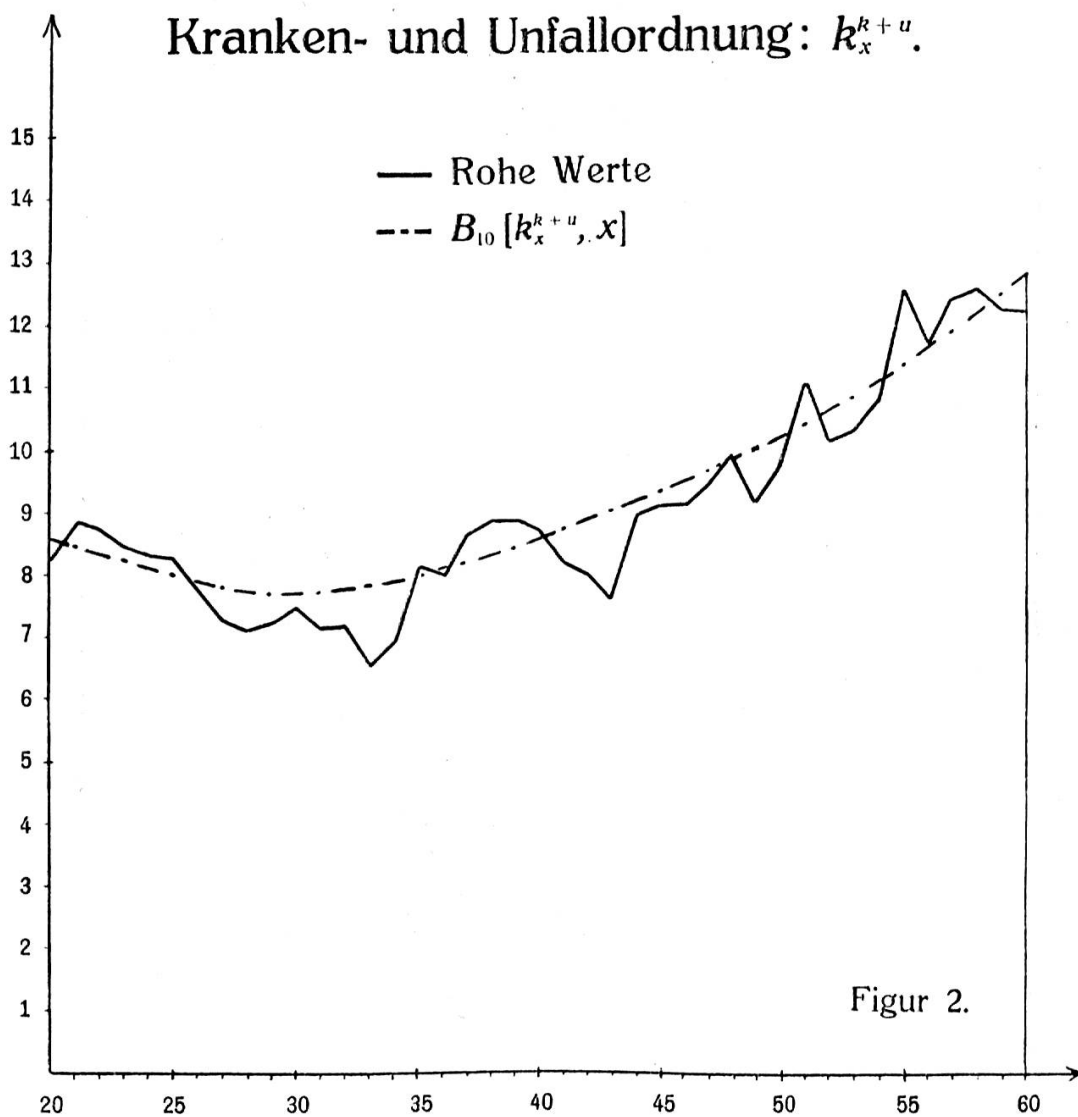
Aus diesem Vergleich ersieht man zunächst auch, dass bei gleicher Ordnung n der Polynome die Übereinstimmung durch Einschränkung des Grundintervalles verbessert werden kann.

Im weitern ist zu beachten, dass eine Ausgleichung nach dieser konstruktiven Ausgleichsmethode nicht dann schon als gelungen betrachtet werden kann, wenn wirkliche und erwartungsmässige Ereigniszahlen im Total verhältnismässig gut übereinstimmen. Es ist in jedem Fall zu untersuchen, wie die positiven und negativen Abweichungen zwischen den beobachteten und ausgeglichenen Werten aufeinander folgen und wie sie sich auf den gesamten Verlauf verteilen.

Im allgemeinen wird eine Ausgleichung mit Bernstein-Polynomen um so günstiger ausfallen, je besser die Grundfunktion konvexen oder konkaven Verlauf im gesamten Intervall aufweist.



Figur 1.



Literaturnachweis.

- [1] *S. Bernstein*: «Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités.» Communications de la Société mathématique de Charkow. T. XIII, n° 1, 1912.
 - [2] *S. Bernstein*: «Sur le domaine de convergence des polynomes $B_n[Y(x), x]$.» Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, France. T. 202, 1936.
 - [3] *S. Bernstein*: «Sur la convergence de certaines suites de polynomes.» Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. XV, fasc. IV, 1936.
 - [4] *M. Chlodowsky*: «Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynomes $B_n[Y(x), x]$.» Fundamenta 13.
 - [5] *J. Kantorowitsch*: «Sur la convergence de la suite des polynomes de S. Bernstein à l'extérieur de l'intervalle fondamental.» Bull. de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S. 1931.
 - [6] *S. Wigert*: «Réflexions sur le polynome d'approximation $B_n[Y(x), x]$.» Arkiv för Mat., Astr. och Fysik. T. 20, 1927.
 - [7] *A. Wundheiler*: «Une démonstration simple de la formule d'interpolation de S. Bernstein.» L'Enseignement math. 31.
 - [8] *Tib. Popoviciu*: «Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.» Mathematica X (1935).
 - [9] *Tib. Popoviciu*: «Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.» Mathematica VIII (1934), XII (1936).
 - [10] *N. E. Nörlund*: «Differenzenrechnung.» p. 3 und 4.
 - [11] *Polya-Szegö*: Aufgaben und Lehrsätze, I, p. 194.
 - [12] *Jensen*: «Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.» Acta mathematica, 30, 1906.
 - [13] *K. Pearson*: «Tables for statisticians and biometricians.» Part II, p. 258—261.
-

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	15
§ 1. Die S. Bernstein-Polynome.	16
§ 2. Umformung der Polynome.	17
§ 3. Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der Bernstein-Polynome und den Differenzen der Grundfunktion.	20
§ 4. Fundamentale Eigenschaften:	
1. Beschränktheit.	21
2. Totale Schwankung	22
3. Monotonie.	25
4. Konvexität 1-ter Ordnung	26
5. Konvexität höherer Ordnung	27
§ 5. Gleichmässige Approximation stetiger Grundfunktionen:	
1. Konvergenzuntersuchung für $Y(x) = x^k$	29
2. Konvergenzuntersuchung für allgemeine, stetige Grundfunktionen	30
§ 6. Approximation unstetiger Grundfunktionen:	
1. Konvergenzuntersuchung für Stufenfunktionen $\psi(x)$	37
2. Konvergenzuntersuchung für stückweise stetige Grundfunktionen	48
§ 7. Eine Anwendung	49
Literaturnachweis	57
