

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 35 (1938)

Artikel: Untersuchungen über das asymptotische Verhalten rekurrenter
Zahlenreihen

Autor: Hadwiger, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966772>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Untersuchungen über das asymptotische Verhalten rekurrenter Zahlenreihen

Von *H. Hadwiger*, Bern

Vorbemerkungen.

Es ist eine jedem Versicherungsmathematiker gut bekannte Erscheinung, dass das nämliche Problem auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten mathematische Gestalt annehmen kann, je nachdem man die kontinuierliche oder die diskontinuierliche Auffassung zugrunde legt. Es bietet dann sicher Interesse, zu untersuchen, wie weit sich eine vorhandene Analogie in den Entwicklungen verfolgen lässt. Dass solche gelegentlich sehr auffallend in Erscheinung treten, wurde von verschiedenen Autoren oft zur Beachtung empfohlen. So scheint, ganz allgemein gesehen, die Integralgleichung, die in der kontinuierlichen Methode der Versicherungsmathematik eine grosse Bedeutung erreicht hat, in der diskontinuierlichen Methode durch die rekurrente Reihe ihr Analogon zu finden.

Die vorliegende Arbeit liefert einen kleinen Beitrag zu ihrer Theorie, indem das asymptotische Verhalten Gegenstand unserer Untersuchung bildet. Es zeigt sich, dass die Theorie imstande ist, gerade dort etwas zu liefern, wo die tatsächliche Berechnung der Glieder der Reihe in den meisten Fällen längst aufgehört hat, nämlich im Unendlichen.

1. Definitionen und allgemeine Bemerkungen.

Wenn eine feste Zahlenfolge (*Skala*)

$$(1) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$$

vorgegeben ist, so wird durch die Festsetzung

$$(2) \quad A_0 = 1$$

$$(3) \quad A_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_{n-i}; \quad (n \geq 1)$$

eine *rekurrente Reihe*

$$(4) \quad A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$$

erzeugt. Es wird allgemein bekannt sein, dass man häufig auf eine solche rekurrente Ermittlung einer Zahlenreihe geführt wird, wie das beispielsweise in Problemen der diskontinuierlich sich erneuernden Gesamtheiten der Fall ist. Eine klare Übersicht und Kenntnisse über weitere diesbezügliche Literatur vermittelt die Dissertation von *A. Maret* ¹⁾.

Sehr oft ist die Skala endlich. Diese Möglichkeit ist selbstverständlich durch die Spezialfälle berücksichtigt, in denen die Skala (1) nur endlich viele von 0 verschiedene Glieder enthält.

Die explizite Berechnung der Glieder der rekurrenten Reihe führt in den meisten Fällen sofort auf unübersichtliche Ausdrücke. Vergleiche etwa die Resultate von *W. Möschler* ²⁾. Diese Schwierigkeiten sind natürlich rein äusserlicher Natur und verhindern nicht, dass über die rekurrente Folge Aussagen gemacht werden können, die theoretisch sicher interessant, aber auch praktisch verwendbar sind. Ihre Ermittlung geht dann nicht über die explizite Ausrechnung, aber verwendet dafür weniger naheliegende, mathematische Hilfsmittel. An dieser Stelle möchte ich ganz besonders auf die Arbeit von *H. Kreis* ³⁾ hinweisen, auf die wir später noch zurückkommen werden.

In der vorliegenden Arbeit sollen unter gewissen Voraussetzungen solche Konvergenzerscheinungen nachgewiesen werden, die es gestatten, über das *asymptotische Verhalten* der Folge $\{A_n\}$ befriedigenden Aufschluss zu erteilen. Insbesondere können Aussagen über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des *stationären Verhaltens* (Konvergenz der Folge $\{A_n\}$) gefolgert werden.

¹⁾ *Maret, A.*: Untersuchungen über diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten. Diss. Bern, Paul Haupt 1936.

²⁾ *Möschler, W.*: Abbau und Erneuerung des Bestandes einer Sterbekasse. Festgabe Moser. Bern, Stämpfli 1931.

³⁾ *Kreis, H.*: Stabilität einer sich jährlich erneuernden Gesamtheit. M. V. S. V., Heft 32, 1936.

Es erweist sich noch als lohnend, den Begriff *stationär im Mittel* in die Betrachtungen einzuschliessen. Dabei heisst die Folge $\{A_n\}$ stationär im Mittel, falls die Folge der arithmetischen Mittel

$$\left\{ \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} \right\}$$

konvergiert.

2. Voraussetzungen.

In dem folgenden kleinen Abschnitt sollen die Voraussetzungen, auf die wir unsere weiteren Untersuchungen aufbauen wollen, sorgfältig auseinandergesetzt werden:

Zunächst wird festgesetzt, dass wir uns auf nicht-negative Skalen beschränken wollen, also:

$$(A) \quad \alpha_v \geq 0 ; \quad (1 \leq v < \infty)$$

Es ist nicht nötig, Beschränktheit für die Skala zu fordern, immerhin sei das Anwachsen gemässigt durch die weitere Voraussetzung:

$$(B) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sup. \sqrt[v]{\alpha_v} = \alpha < \infty$$

Mit diesem Grenzwert α verknüpfen wir eine weitere Voraussetzung, deren Motivierung erst später zugänglich wird:

$$(C) \quad \sum_1^{\infty} \alpha_v \left(\frac{1}{\alpha} \right)^v > 1$$

Wir wollen die Voraussetzung (C) als erfüllt betrachten, wenn $\alpha = 0$ ist oder wenn die angeschriebene Reihe divergiert.

Es ist besonders zu beachten, dass die Voraussetzungen (B) und (C) sicher erfüllt sind, wenn wir eine endliche Skala zugrunde legen.

3. Die allgemeinen Konvergenzsätze.

Wir führen nun eine wichtige Hilfsfunktion ein. Es sei

$$(5) \quad F(z) = \sum_1^{\infty} \alpha_v z^v$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist nach Festsetzung (B)

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} > 0$$

Da nach Voraussetzung (C)

$$\sum_1^{\infty} \alpha_n \sigma^n > 1$$

ist ¹⁾, gibt es eine reelle positive Wurzel der Gleichung

$$(6) \quad 1 - F(z) = 0$$

Bezeichnen wir sie mit R , so gilt offenbar

$$(7) \quad 0 < R < \sigma$$

das heisst, die betrachtete Nullstelle der mit (6) angeschriebenen Funktion ist ein innerer Punkt des Konvergenzkreises der Reihe (5). Es ist leicht zu zeigen, dass in der offenen Kreisscheibe

$$(8) \quad |z| < R$$

keine Wurzeln der Gleichung (6) liegen können, denn aus

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \alpha_n z^n = 1 & \quad \text{folgt} \\ \sum_1^{\infty} \alpha_n |z|^n \geq 1 & \quad \text{und der Vergleich mit} \\ \sum_1^{\infty} \alpha_n R^n = 1 & \quad \text{führt zur Ungleichung } |z| \geq R \end{aligned}$$

Aus diesem Grunde ist die gebrochene Funktion

$$\frac{1}{1 - F(z)}$$

¹⁾ $z = \sigma$ ist nach einem Satze von *G. Vivanti*, *Rivista di Matematica*, Bd. 3, S. 112, 1893, ein singulärer Punkt der Funktion (5), so dass die Voraussetzung (C) im allgemeinen dadurch erfüllt ist, dass die Reihe dort divergiert. (Das Gegenteil kann als Ausnahme gelten.)

im Kreise $|z| < R$ regulär, kann somit um den Punkt $z = 0$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, die R zum Konvergenzradius hat.

Nun ist die Folge der Entwicklungskoeffizienten identisch mit der rekurrenten Reihe (4), das heisst es gilt die für alles folgende grundlegende Identität:

$$(9) \quad \frac{1}{1 - F(z)} = \sum_0^{\infty} A_{\mu} z^{\mu}$$

Verifikation: Da die Konvergenzfrage erledigt ist, führt die rein formale Rechnung

$$\begin{aligned} 1 &= \left[1 - \sum_1^{\infty} \alpha_{\nu} z^{\nu} \right] \sum_0^{\infty} A_{\mu} z^{\mu} \\ 1 &= \sum_0^{\infty} A_{\mu} z^{\mu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} A_{\mu} z^{\mu+\nu} \\ 1 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n - \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda} A_{n-\lambda} \right] z^n \end{aligned}$$

zu den Relationen

$$A_0 = 1$$

$$A_n = \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda} A_{n-\lambda} ; \quad (n \geq 1)$$

deren Übereinstimmung mit den Definitionen (2) und (3) festgestellt werden kann.

Wie oben erwähnt, ist der Konvergenzradius der Reihe (9) genau durch die positive Wurzel R gegeben. Die Anwendung einer geläufigen Formel der Funktionentheorie führt zu einer ersten Konvergenzrelation:

Unter den Voraussetzungen (A), (B), (C) gilt:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup. \sqrt[n]{A_n} = \frac{1}{R}$$

Anschliessend an (9) schreiben wir weiter

$$(10) \quad \frac{1}{1 - F(R\xi)} = \sum_0^{\infty} R^{\mu} A_{\mu} \xi^{\mu},$$

wo die rechts stehende Potenzreihe den Konvergenzradius 1 aufweist, falls wir nun ξ als Variable betrachten.

Dann gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{1 - \xi}{1 - F(R\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{1}{R \left\{ \frac{F(R) - F(R\xi)}{R - R\xi} \right\}} = \frac{1}{R F'(R)}$$

Dabei haben wir uns daran erinnert, dass mit Rücksicht auf (7) die Funktion $F(z)$ in $z = R$ regulär ist. Aus gleichen Gründen kann die Potenzreihe (5) gliedweise differenziert werden. Also

$$(11) \quad F'(R) = \sum_1^{\infty} \nu \alpha_{\nu} R^{\nu-1}$$

Da nicht alle α_{ν} Null sind und $R > 0$ ist, muss $F'(R) > 0$ sein, so dass der Grenzwert

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi) \sum_0^{\infty} R^{\mu} A_{\mu} \xi^{\mu} = \frac{1}{R F'(R)}$$

existiert. Nun lassen wir einen von *Hardy* und *Littlewood*¹⁾ entdeckten Satz zur Anwendung gelangen, der sich auf Potenzreihen (mit reellen, nicht negativen Koeffizienten), die im Einheitskreise konvergieren, bezieht, und insbesondere auf die Bildung des oben angegebenen Grenzwertes. So gelangen wir zu der folgenden Grenzformel:

Unter den Voraussetzungen (A), (B), (C) gilt:

$$(II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R A_1 + R^2 A_2 + R^3 A_3 + \dots + R^n A_n}{n} = \frac{1}{R F'(R)}$$

¹⁾ *Hardy* und *Littlewood*, The Messenger of Mathematics, Ser. 2, Bd. 43, S. 141. 1914.

Die Anwendung der asymptotischen Formeln (I) und (II) setzt die Bestimmung der positiven Wurzel R von (6) voraus. In besonderen Fällen ist dies eventuell ohne Schwierigkeiten durchführbar. So ist im Falle einer endlichen Skala eine algebraische Gleichung aufzulösen. Ist die direkte Ermittlung der Wurzel nicht möglich, so können doch zweckdienliche Abschätzungen für den Betrag der absolut kleinsten Nullstelle aus der mathematischen Literatur herangezogen werden, so etwa die Formeln von *Takahashi* ¹⁾, *Carmichael* ²⁾ oder *Rudnicki* ³⁾.

Aus der Konvergenz (II) darf natürlich nicht auf die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n A_n = \frac{1}{R F'(R)}$$

geschlossen werden (umgekehrt schon). Wir wollen nun zeigen, dass aber die oben erwähnte, stärkere Konvergenz unter einer weiteren zusätzlichen Voraussetzung in der Tat nachgewiesen werden kann.

Wir haben früher gezeigt, dass in der offenen Kreisscheibe (8) $|z| < R$ keine Wurzel der Gleichung (6) liegen kann. Auf dem Rande $|z| = R$ liegt natürlich mindestens eine, nämlich R . Es können aber noch andere, eventuell komplexe Wurzeln auf diesem Rande liegen. Dass dies nun verboten sei, ist der Inhalt der angedeuteten Voraussetzung, die wir wie folgt formulieren:

(D) R ist die einzige Wurzel der Gleichung $1 - F(z) = 0$ auf dem Kreise $|z| = R$.

Unter dieser Voraussetzung gehen wir nun an die Herleitung der versprochenen Grenzformel.

Nach (9) ist

$$\frac{1}{1 - F(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Die Anwendung der Cauchyschen Integralformel ergibt

¹⁾ *Takahashi, Shin-ichi*, Proc. phys. math. Soc. Jap. III, S. 13, 1931.

²⁾ *Carmichael, R. D.*, American M. S. Bull. 24, 1918.

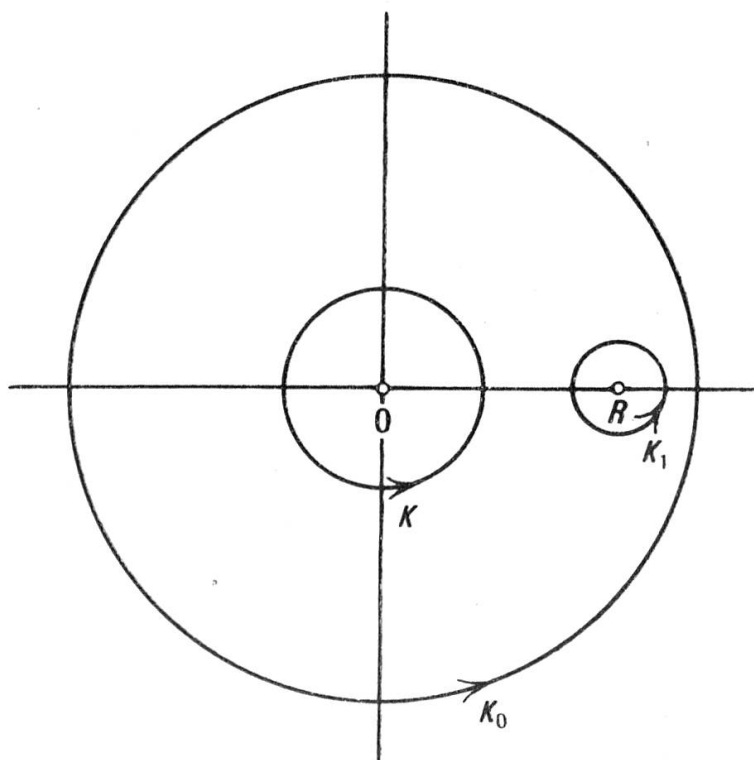
³⁾ *Rudnicki, J.*, Mathematica 8, 1934.

$$(12) \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \left(\frac{1}{1 - F(z)} \right) \cdot \frac{dz}{z^{1+n}}$$

wo K ein Kreis vom Radius $r < R$ ist, der den Nullpunkt umschliesst. Weiter sieht man leicht ein, dass es einen Kreis um Null K_0 vom Radius r_0 , $R < r_0 < \sigma$ gibt, der keine Nullstelle der Funktion $1 - F(z)$ enthält ausser $z = R$. Man überlegt sich zu diesem Zwecke etwa, dass in einem Kreisring $R \leq |z| \leq \sigma' < \sigma$ nur endlich viele Nullstellen liegen können, da sie nach dem Theorem von Bolzano-Weierstrass sich sonst im betrachteten Kreisring, insbesondere also im Regularitätsgebiet der Funktion $1 - F(z)$ häufen müssten, was nach einem bekannten Satz nur für die identisch verschwindende Funktion zutreffen kann. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung (D) folgert man so die Existenz eines von 0 verschiedenen Minimums der Abstände der von $z = R$ verschiedenen Nullstellen von der Kreisperipherie $|z| = R$.

Ist nun K_0 festgelegt, so kann um den Punkt $z = R$ ein weiterer Kreis K_1 vom Radius r_1 gezeichnet werden, der ganz innerhalb von K_0 , aber ganz ausserhalb von K verläuft.

$$R + r_1 < r_0; \quad R - r_1 > r \quad (\text{man vergleiche Figur}).$$



Setzen wir

$$(13) \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_0} \left(\frac{1}{1-F(z)} \right) \frac{dz}{z^{1+n}}$$

$$(14) \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \left(\frac{1}{1-F(z)} \right) \frac{dz}{z^{1+n}}$$

so gilt nach allgemeinen Sätzen (die Integranden der betrachteten drei Integrale sind in dem dreifach zusammenhängenden Gebiet, das durch das Innere von K_0 und das Äussere von K und K_1 gebildet wird, regulär):

$$(15) \quad B_n = A_n + C_n$$

Mit Rücksicht auf (7) lässt sich entwickeln:

$$1 - F(z) = F(R) - F(z) = F(R) - F(R + [z - R])$$

$$1 - F(z) = -F'(R)[z - R] - [z - R]^2 Q(z, z - R)$$

Verwenden wir diese Darstellung im Integral (14), so folgt

$$C_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \left(\frac{1}{F'(R) + [z - R]Q} \right) \frac{1}{z^{1+n}} \cdot \frac{dz}{z - R}$$

Als Cauchysche Integralformel rückwärts gelesen

$$(16) \quad C_n = -\frac{1}{R^{1+n} F'(R)}$$

Ist ferner M das Minimum des Betrages $|1 - F(z)|$ auf dem Kreise K_0 , so kann das Integral (13) leicht abgeschätzt werden:

$$(17) \quad |B_n| \leq \frac{1}{M r_0^n}$$

Nach (15) kann geschrieben werden

$$|R^n B_n| = |R^n A_n + R^n C_n|$$

Verwerten wir jetzt (16) und (17), so gewinnen wir

$$\left| R^n A_n - \frac{1}{R F'(R)} \right| \leq \frac{1}{M} \left(\frac{R}{r_0} \right)^n$$

und hieraus folgt wegen $r_0 > R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n A_n = \frac{1}{R F'(R)}$$

Damit haben wir bewiesen:

Unter den Voraussetzungen (A), (B), (C), (D) gilt

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R^n A_n = \frac{1}{R F'(R)}$$

4. Über das stationäre Verhalten.

Aus der Grenzformel (II) lässt sich zunächst eine Folgerung ziehen, die sich auf das stationäre Verhalten im Mittel bezieht. Es gilt offenbar:

Die rekurrente Reihe $\{A_n\}$ ist dann im Mittel stationär, falls $R \geq 1$ ist.

Die reelle positive Wurzel R der Gleichung (6) ist also für das asymptotische Verhalten der Reihe (4) entscheidend.

Da $R = 1$ bzw. $R > 1$ gleichbedeutend ist mit

$$\sum_1^{\infty} \alpha_v = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_1^{\infty} \alpha_v < 1,$$

lässt sich die besprochene Konsequenz in folgender Weise notieren:

$$(IV) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{\sum v \alpha_v} & ; \quad \sum \alpha_v = 1 \\ 0 & ; \quad \sum \alpha_v < 1 \end{cases}$$

Hierbei ist, wie in (II), (A), (B), (C) vorausgesetzt.

Analog gewinnen wir aus der Grenzformel (III)

$$(V) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{cases} \frac{1}{\sum \nu \alpha_\nu} & \sum \alpha_\nu = 1 \\ 0 & \sum \alpha_\nu < 1 \end{cases}$$

Hierbei ist, wie in (III), (A), (B), (C), (D) vorausgesetzt.

5. Beispiele.

Wir behandeln nun drei Beispiele B_1 , B_2 und B_3 mit unendlicher Skala, indem wir alle Grössen und Funktionen, die in der entwickelten Theorie von Bedeutung sind, in einer Tabelle zusammenstellen. Die Beispiele sind so gewählt, dass sich die rekurrente Reihe in expliziter Form anschreiben lässt. Dies scheint in ziemlich seltenen Fällen möglich zu sein. Der allgemeine Fall der zweigliedrigen Skala wird ausführlich behandelt bei *A. Maret*¹⁾. Diese Frage hängt übrigens mit der Möglichkeit zusammen, das Integral (12) in geschlossener Form zu ermitteln.

Das Beispiel B_1 erlangt prinzipielle Bedeutung, indem es die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung (D) beweist, die dem Konvergenzsatz (V) beigegeben ist. (Siehe nachstehende Tabelle.)

6. Erneuerungsfolgen.

Wir studieren in diesem Abschnitte noch eine besondere Klasse rekurrenter Reihen, nämlich die *Erneuerungsfolgen*. Der Begriff der Erneuerungszahl ist geläufig, aber diese Tatsache ersetzt keine exakte Definition, deren man unbedingt bedarf, wenn man mathematische Aussagen über sie machen will. Wir definieren:

Unter einer Erneuerungsfolge verstehen wir jede Zahlenfolge $\{A_n\}$, wo

$$(18) \quad A_0 = 1$$

$$A_n = 1 - \sum_{\lambda=1}^n p_\lambda A_{n-\lambda}$$

¹⁾ *Maret, A.*: Untersuchungen über diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten. Diss. Bern, Paul Haupt 1936.

	B_1	B_2	B_3
α_ν	0, [ν ungerade] $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\nu$, [ν gerade]	$\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$	$\frac{\nu-1}{\nu!}$
A_n	1, [$n=0$] 0, [n ungerade] $\frac{1}{2}$, [n gerade]	1, [$n=0$] $\frac{1}{2}$, [$n>0$]	$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$
σ	$\sqrt{2}$	2	∞
$F(z) = \sum_1^\infty \alpha_\nu z^\nu$	$\frac{z^2}{2-z^2}$	$\frac{z}{2-z}$	$1 - (1-z)e^z$
$F'(z)$	$\frac{4z}{[2-z^2]^2}$	$\frac{2}{[2-z]^2}$	ze^z
$1 - F(z) = 0$	$z_1=1, z_2=-1$	$z=1$	$z=1$
R	1	1	1
$\frac{1}{1-F(z)}$	$\frac{2-z^2}{2[1-z^2]}$	$\frac{2-z}{2[1-z]}$	$\frac{e^{-z}}{1-z}$
$\frac{1}{R F'(R)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{e}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{e}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$	Existiert nicht. Voraussetzung (D) nicht erfüllt.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{e}$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n}$	1	1	1

ist, wobei die nicht negative Folge $\{p_i\}$ folgende Voraussetzungen erfüllt:

$$(E) \quad p_0 = 1$$

$$(F) \quad p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$$

$$(G) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = 0$$

Die Rekursionsgleichung (18) ist die Erneuerungsgleichung für diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten. Die A_n sind die *Erneuerungszahlen*, und die p_r stellen das *Abbaugesetz* einer sich diskontinuierlich auf 0 reduzierenden geschlossenen Einheitsgesamtheit dar, das den Untersuchungen als gegeben zugrunde gelegt wird. Um die Allgemeinheit nicht zu beeinträchtigen, pflegt man keine weiteren Einschränkungen über die Abbauordnung $\{p_r\}$ vorzunehmen, als durch die Voraussetzungen (E), (F), (G) angeschrieben wurde ¹⁾. Um nun den Zusammenhang mit den in der allgemeinen Theorie behandelten rekurrenten Reihen herzustellen, müssen wir die Rekursionsgleichung (18) einer Umformung unterwerfen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$(19) \quad p_{r-1} - p_r = \alpha_r ; \quad (r \geq 1)$$

Nach (18) ist

$$A_{n-1} = 1 - \sum_1^{n-1} p_i A_{n-1-i}$$

$$A_n = 1 - \sum_1^n p_i A_{n-i}$$

und hieraus folgt durch Subtraktion

$$A_n = A_{n-1} + \sum_1^{n-1} p_i A_{n-1-i} - \sum_1^n p_i A_{n-i}$$

¹⁾ In diesem Zusammenhang darf erwähnt werden, dass das Erneuerungsproblem auch sinnvoll ist für Gesamtheiten von irgendwelchen Lebewesen oder toten Gegenständen.

$$A_n = \sum_0^{n-1} p_\lambda A_{n-1-\lambda} - \sum_1^n p_\lambda A_{n-\lambda}$$

$$A_n = \sum_1^n (p_{\lambda-1} - p_\lambda) A_{n-\lambda}$$

so dass wir die rekurrente Formel

$$(20) \quad A_n = \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda A_{n-\lambda}$$

gewinnen. Damit ist die Übereinstimmung mit der Ausgangsgleichung (3) hergestellt. Die Erneuerungsfolgen treten so als rekurrente Reihen in Erscheinung, deren Skala durch (19), durch die sogenannte *Ausscheideordnung*, gegeben ist.

Um die allgemeinen Resultate über das asymptotische Verhalten rekurrenter Reihen für Erneuerungsfolgen nutzbar zu machen, müssen noch zweckdienliche Voraussetzungen über die Abbauordnung $\{p_\lambda\}$ getroffen werden. Es zeigt sich, dass zwei Voraussetzungen genügen.

$$(H) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{p_r} < 1$$

$$(J) \quad \text{Die Funktion } \sum_0^\infty p_r z^r \text{ besitzt auf dem Kreise } |z| = 1 \text{ keine Nullstellen.}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass (H) bzw. (H) und (J), zusammen mit den zur Definition gehörenden Voraussetzungen (E), (F) und (G), die Voraussetzungsgruppen (A), (B), (C) bzw. (A), (B), (C), (D), die sich auf die Skala (19) beziehen, ersetzen.

Voraussetzung (A): $\alpha_r \geq 0$	ist erfüllt, wie unmittelbar aus (F) folgt.
Voraussetzung (B): $\limsup_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\alpha_r} = \alpha < \infty$	ist erfüllt, denn wegen (E) und (F) gilt $\alpha_r \leq 1.$

Voraussetzung (C):

$$\sum_1^{\infty} \alpha_r \left(\frac{1}{\alpha} \right)^r > 1$$

ist erfüllt, denn die Summe lässt sich umformen zu

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \sum_0^{\infty} p_r \left(\frac{1}{\alpha} \right)^r$$

Nun ist aber

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\alpha_r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{p_r}$$

und daher mit Rücksicht auf Voraussetzung (H) $\alpha < 1$, woraus (C) folgt.

Voraussetzung (D):

R ist die einzige Wurzel der Gleichung

$$1 - F(z) = 0$$

auf dem Kreise

$$|z| = R$$

ist ebenfalls erfüllt, falls Voraussetzung (J) gültig ist. Denn zunächst folgt mit Rücksicht auf (E) und (G)

$$\sum_1^{\infty} \alpha_r = 1,$$

woraus zu entnehmen ist, dass die charakteristische Wurzel R für Erneuerungsfolgen 1 ist. Die Funktion $1 - F(z)$ lässt sich mühelos umformen in

$$(1 - z) \sum_0^{\infty} p_r z^r$$

So erkennen wir leicht, dass mit Hinblick auf (J) die Voraussetzung (C) gilt.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich betreffend das asymptotische Verhalten von Erneuerungsfolgen die folgenden Konvergenzsätze aussprechen:

Die Erneuerungsfolge $\{A_n\}$ ist im Mittel stationär:

$$(IV^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = \frac{1}{\sum_0^{\infty} p_r}$$

wenn Voraussetzung (H) erfüllt ist.

Die Erneuerungsfolge $\{A_n\}$ ist stationär:

$$(V^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{\sum_0^{\infty} p_r}$$

wenn die Voraussetzungen (H) und (J) erfüllt sind.

Prinzipielles Interesse verdient die Frage, ob die in den Konvergenzsätzen (IV*) und (V*) geforderten Voraussetzungen (H) und (J) in vollem Umfange unentbehrlich sind. Die Beantwortung dieser ziemlich subtilen Frage würde ein noch tieferes Eindringen in die vorliegende mathematische Materie erfordern, das im engen Raum dieser kleinen Publikation noch nicht erreicht werden konnte. Zweifellos steht aber die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung (J) für den Konvergenzsatz (V*) fest. Man überprüft leicht, dass das Beispiel B_1 im vorigen Abschnitt eine nicht konvergente Erneuerungsfolge liefert. Sie oszilliert ohne Ende. Soweit dem Autor bekannt ist, hat *H. Kreis* ¹⁾ als erster mit aller Deutlichkeit auf diese Möglichkeit aufmerksam gemacht. Seine sorgfältig angelegte Untersuchung, die sich auf eine endliche Skala bezieht, fördert nämlich auf anderem Wege genau die Voraussetzungen zutage, die man aus den unsrigen erhält, wenn man auf eine endliche Skala spezialisiert. Im Falle einer endlichen Skala fallen offenbar die Voraussetzungen (G) und (H) weg, da sie von selbst erfüllt sind. Es bleibt nur noch (J) als wesentliche Voraussetzung

¹⁾ *Kreis, H.*: Stabilität einer sich jährlich erneuernden Gesamtheit. M. V. S. V., Heft 32, 1936.

für den Konvergenzsatz (V*). Diese erhält bei Kreis noch eine praktisch übersichtlichere Gestalt, indem sie in der Voraussetzung der Nichtperiodizität der Abbauordnung $\{p_r\}$ ihr Äquivalent findet. Auch Kreis erwähnt die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung. Daraus ergibt sich, dass der in der Erneuerungsliteratur häufig zitierte Satz, nach dessen Wortlaut die Erneuerungszahlen gegen eine Grenzzahl konvergieren, also eine stationäre Folge bilden, nur unter den oben erwähnten Voraussetzungen richtig ist, sonst aber nicht.
