Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 34 (1937)

Artikel: Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V.A. Kostitzin

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555027

Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin

Von *H. Hadwiger,* Bern

Bedeutet die nie zunehmende, nicht negative Funktion

$$p(t) \qquad (t \geqslant 0)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine einzelne Person mindestens t Zeiteinheiten einer Personengesamtheit angehört (Überlebenswahrscheinlichkeit), so nennt man die Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung

$$1 = p(t) + \int_0^t p\,(t-x)\; \varphi(x)\; dx \tag{1}$$

bekanntlich *Erneuerungsfunktion* für den *stationären* Fall (Personengesamtheit von konstantem Umfang). Hinsichtlich der umfangreichen Literatur vergleiche etwa *E. Zwinggi* [1]).

Für eine besondere stückweise analytische Überlebenswahrscheinlichkeit (Gesetz von *Achard*) gibt *H. Schulthess* [2]) die vollständige Lösung der Integralgleichung (1).

In der vorliegenden Arbeit soll die Erneuerungsfunktion berechnet werden, die zur Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p(t) = e^{-\lambda t}\,(1+\lambda t) \qquad (\lambda > 0) \tag{2}$$

gehört.

Für kleine t gilt

$$p(t) \sim e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}}, \tag{3}$$

[1]) *E. Zwinggi:* «Das Problem der Erneuerung», Festgabe Moser, Bern. 1931. Literaturverzeichnis S. 161—162.

[2]) *H. Schulthess:* «Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes.» M. V. M. Heft 33, 1937.

so dass die gewählte Funktion als Ersatz für die *Gausssche* Funktion betrachtet werden darf. Die beiden zu vergleichenden Funktionskurven haben im Punkte $t = 0$ eine gemeinsame horizontale Tangente, weisen dort die gleiche Krümmung auf und besitzen ausserdem im gleichen Punkt $t = \frac{1}{\lambda}$ je einen Wendepunkt.

$$(4) \qquad p(0) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = -\lambda^2 \quad p''\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

Diese speziell gewählte Überlebenswahrscheinlichkeit soll uns Gelegenheit bieten, die Anwendung einer Formel von *V. A. Kostitzin* [1]), nach der die Erneuerungsfunktion in geeigneten Fällen ermittelt werden kann, in allen Einzelheiten durchzuführen. Dass sich die gesuchte Erneuerungsfunktion eventuell auf andere Art müheloser berechnen lässt, ist mit Rücksicht auf das oben genannte Ziel hier ohne Interesse.

Kostitzin erhält neben allgemeineren Resultaten für die Integralgleichung (1) die folgende Auflösungsformel:

$$(5) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{x\xi}\left[\frac{1}{\xi\, P(\xi)} - 1\right] d\xi \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

wo

$$(6) \qquad P(\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\xi t}\, p(t)\, dt$$

ist, und der geradlinige Integrationsweg von $\omega - i\infty$ bis $\omega + i\infty$ so gewählt ist, dass die Singularitäten der Funktion

$$\frac{1}{\xi\, P(\xi)}$$

alle links von der Integrationsgeraden liegen, so dass der Integrand von (5) in der Halbebene $R[\xi] \geqslant \omega$ [2]) regulär ist. Auf unser Beispiel eintretend, haben wir zunächst die «Transformierte» $P(\xi)$ der Funktion $p(t) = e^{-\lambda t}\,(1+\lambda t)$ zu bestimmen. Es wird

[1]) *V. A. Kostitzin,* Mémorial des sciences mathématiques LXIX, 1935, S. 11.
[2]) $R[\xi]$ bedeutet hier wie in der Folge den Realteil der komplexen Grösse ξ.

$$P(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t}\, e^{-\lambda t}\,(1+\lambda t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\lambda+\xi)t}\, dt + \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\xi)t}\, t\, dt$$

und nach elementarer Rechnung

$$P(\xi) = \frac{1}{\lambda+\xi} + \frac{\lambda}{(\lambda+\xi)^2} = \frac{2\lambda+\xi}{(\lambda+\xi)^2} \tag{7}$$

Für unsere Zwecke benötigen wir den Ausdruck

$$\frac{1}{\xi\, P(\xi)} - 1 = \frac{(\lambda+\xi)^2}{\xi\,(2\lambda+\xi)} - 1 = \frac{\lambda^2}{\xi\,(2\lambda+\xi)} \tag{8}$$

Die Pole dieser gebrochenen rationalen Funktion liegen in den beiden Punkten $\xi = 0$ und $\xi = -2\lambda$. Um die Voraussetzung, die für den Integrationsweg in der Darstellung (5) angeschlossen wurde, zu erfüllen, genügt es, etwa $\omega = 1$ zu wählen.

Wir erhalten somit für die gesuchte Erneuerungsfunktion nach (5) und (8) die Integralformel

$$\varphi(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{x\xi}}{\xi\,(2\lambda+\xi)}\, d\xi\,, \tag{9}$$

wo die Integration über die Gerade $R[\xi] = 1$ zu erstrecken ist.

Wir wählen nun eine positive Zahl a beliebig, aber so gross, dass

$$\sqrt{1+a^2} > 2\lambda \tag{10}$$

ausfällt. Ferner betrachten wir sechs Integrale

$$J_\nu = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{e^{x\xi}}{\xi\,(2\lambda+\xi)}\, d\xi \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

der in (9) auftretenden Funktion längs sechs verschiedenen Wegen C_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) der ξ-Ebene, deren Gestalt und Orientierung der Tabelle (11) und der nachfolgenden Figur zu entnehmen ist.

(11)

C_ν	Weg	von	bis
C_0	Gerade	$1-i\infty$	$1+i\infty$
C_1	Geradenstück	$1-i\infty$	$1-i\,a$
C_2	Geradenstück	$1-ia$	$1+i\,a$
C_3	Geradenstück	$1+ia$	$1+i\infty$
C_4	Kreisbogen $\lvert\xi\rvert=\sqrt{1+a^2}$ in der Halbebene $R[\xi])\leqslant 1$		
C_5	Kreis $\lvert\xi\rvert=\sqrt{1+a^2}$ positiver Orientierung		

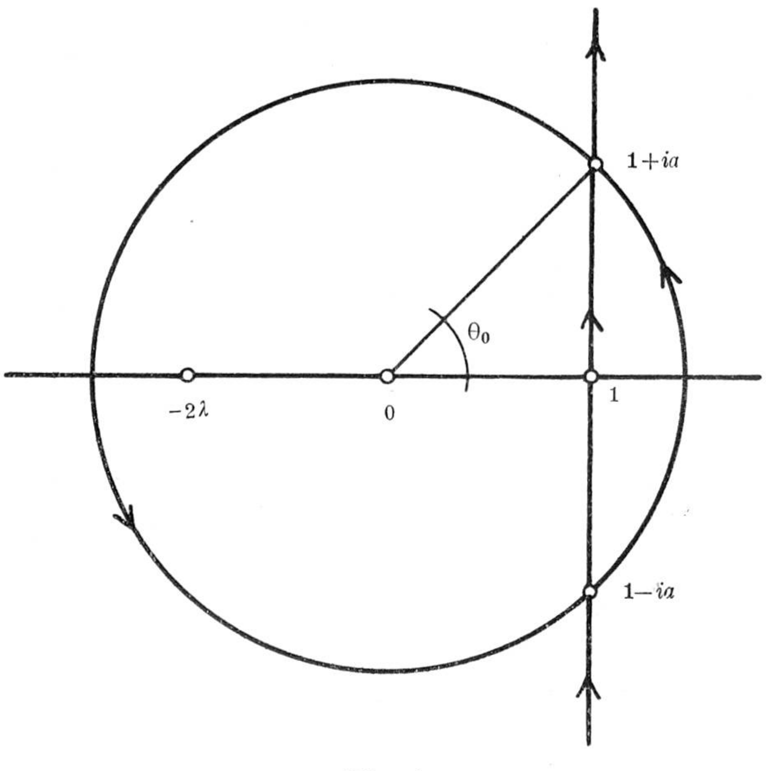

Fig. 1.

Zunächst zerlegen wir

$$J_0 = J_1 + J_2 + J_3 = J_2 + J_4 + J_1 + J_3 - J_4$$

Nach den Integralsätzen der Funktionentheorie gilt

$$J_2 + J_4 = J_5,$$

da wegen Voraussetzung (10) die Singularitäten des Integranden im Innern der geschlossenen Wege $C_2 + C_4$ und C_5 liegen.

Es wird nun

$$J_0 = J_5 + J_1 + J_3 - J_4,$$

woraus man die Abschätzung

$$|J_0 - J_5| \leqq |J_1| + |J_3| + |J_4| \tag{12}$$

gewinnt. Nun gilt es, die drei rechts stehenden Beträge weiter abzuschätzen. In den Integralen

$$J_1 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1-ia} \frac{e^{x\xi}}{\xi(2\lambda+\xi)}\, d\xi \quad \text{(integriert über } C_1\text{)}$$

und

$$J_3 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int\limits_{1+ia}^{1+i\infty} \frac{e^{x\xi}}{\xi(2\lambda+\xi)}\, d\xi \quad \text{(integriert über } C_3\text{)}$$

substituieren wir $\xi = 1 + i\beta$ und erhalten

$$J_1 = \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{e^{ix\beta}}{(1+i\beta)(2\lambda+1+i\beta)}\, d\beta$$

Ebenso

$$J_3 = \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi} \int\limits_{a}^{\infty} \frac{e^{ix\beta}}{(1+i\beta)(2\lambda+1+i\beta)}\, d\beta$$

Aus diesen Darstellungen gehen mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$|e^{ix\beta}| \leqq 1, \quad |1 + i\beta| > |\beta|, \quad |2\lambda + 1 + i\beta| > |\beta|,$$
$$|d\beta| = d\beta, \quad |\beta|^2 = \beta^2$$

die Abschätzungen

$$|J_1| < \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi} \int_{-\infty}^{-a} \frac{d\beta}{\beta^2} \qquad |J_3| < \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi} \int_{a}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^2}$$

hervor, oder also

$$(13) \qquad |J_1| < \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi a}$$

$$(14) \qquad |J_3| < \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi a}$$

Wir benötigen weiter noch eine Abschätzung für $|J_4|$. Zur Behandlung des Integrals

$$J_4 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int \frac{e^{x\xi}}{\xi(2\lambda + \xi)} d\xi \quad \text{(integriert über } C_4\text{)}$$

eignet sich die Substitution $\xi = \sqrt{1+a^2} \cdot e^{i\theta}$, durch die das Integral übergeführt wird in

$$J_4 = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} e^{x\sqrt{1+a^2}\,e^{i\theta}} \cdot \frac{d\theta}{2\lambda + \sqrt{1+a^2}\,e^{i\theta}} \qquad (\theta_0 = \text{arc } tg a)$$

(Vergleiche Figur 1.)

Nun gilt

$$|2\lambda + \sqrt{1+a^2}\,e^{i\theta}| \geqslant \sqrt{1+a^2} - 2\lambda$$

$$\sqrt{1+a^2} \cos\theta \leqslant 1 \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0),$$

woraus die Abschätzung resultiert

$$|J_4| < \frac{\lambda^2 e^x}{2\pi} \int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1+a^2} - 2\lambda}$$

oder

$$(15) \qquad |J_4| < \frac{\lambda^2 e^x}{\sqrt{1+a^2} - 2\lambda}$$

Verwerten wird die Beziehungen (13), (14) und (15) für die Abschätzung (12), so gewinnen wir

$$|J_0 - J_5| < \lambda^2 e^x \left[\frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2\lambda}} \right]$$

Da nun aber a beliebig gross wählbar ist, kann die rechte Seite dieser Ungleichung beliebig klein gemacht werden. Daraus schliessen wir, dass

$$J_0 = J_5 \tag{16}$$

sein muss.

Da nun J_0 das Integral (9) darstellt, kann nach (16) geschrieben werden:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int_{C_5} \frac{e^{ix\xi}}{\xi(2\lambda + \xi)} \cdot d\xi$$

Nach einfacher Umformung gewinnen wir die Darstellung

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_5} e^{ix\xi} \frac{d\xi}{\xi} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_5} e^{ix\xi} \cdot \frac{d\xi}{2\lambda + \xi} \right\}$$

Nun benutzen wir noch die Cauchysche Integralformel und erhalten endgültig:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \left[1 - e^{-2\lambda x} \right] \tag{17}$$

Die Erneuerungsfunktion ist in unserem Falle eine monoton gegen den asymptotischen Wert $\frac{\lambda}{2}$ ansteigende Funktion.

In der über das Erneuerungsproblem bestehenden Literatur wird oft nachdrücklich auf einen wellenförmigen Verlauf der (nichtkonstanten) Erneuerungsfunktion hingewiesen. Das hier durchgerechnete Beispiel zeigt, dass diese Aussage nicht uneingeschränkt gilt, sondern in bezug auf den Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeit an gewisse Voraussetzungen gebunden ist, die jedenfalls die von uns gewählte Funktion ausschliessen müssen.