

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 34 (1937)

**Artikel:** Über den Beharrungszustand einer Bausparkasse

**Autor:** Vogt, O.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-555023>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über den Beharrungszustand einer Bausparkasse

Von Dr. O. Vogt, Bern

	Inhaltsübersicht	Seite
§ 1.	Einleitung . . . . .	23
§ 2.	Annahmen . . . . .	24
§ 3.	Zusammenstellung der Bezeichnungen . . . . .	24
§ 4.	Die Entwicklungsstufen . . . . .	25
§ 5.	Die Bilanzgleichung . . . . .	26
§ 6.	Konstanter Neuzugang, Bilanzgleichung im Beharrungszustand . . . . .	29
§ 7.	Die Kreditleistung . . . . .	30
§ 8.	Ergebnisse für spezielle Vertragsfunktionen . . . . .	31
§ 9.	Die Bilanzgleichung im Beharrungszustand bei Fremdgeldzuteilung . . . . .	32
§ 10.	Die Kreditleistung für spezielle Vertragsfunktionen . . . . .	34
§ 11.	Schlussbemerkungen . . . . .	35

## § 1.

### Einleitung.

Zur näheren Umschreibung des Prinzips der Bausparfinanzierung sei vorerst die in der eidgenössischen Verordnung vom 5. Februar 1935 über die Kreditkassen mit Wartezeit — das ist die offizielle Bezeichnung der Bausparkassen — in Art. 1 gegebene Definition derselben angeführt.

«Als Kreditkassen mit Wartezeit gelten alle Unternehmungen, die auf Grund von Verträgen Geldleistungen mehrerer Personen entgegennehmen und diesen Personen hieraus sowie allenfalls aus andern Mitteln planmäßig einen Anspruch auf Tilgungsdarlehen einräumen.»

Um sichere Anhaltspunkte zur Beurteilung der allgemeinen Vertragsbedingungen einer Bausparkasse mit den Kreditnehmern zu erhalten oder um eine Vergleichung der bausparmässigen mit andern Finanzierungsmethoden vornehmen zu können, ist die Bestimmung der sich aus den Vertragsbedingungen ergebenden Verhältnisse des Beharrungszustandes erforderlich.

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Darlegung mathematischer Relationen, die die Bestimmung der Verhältnisse des Beharrungszustandes gestatten und sich finanztechnisch leicht interpretieren lassen.

§ 2.

**Annahmen.**

Wir gehen betreffend der Bestandesabwicklung der Kreditverträge von folgenden Annahmen aus:

1. Es sei gegeben der Neuzugang an Vertragssummeneinheiten (kurz V. s. e.)  $N(t)$  in Funktion der Geschäftszeit seit Eröffnung der Kasse  $t$ ; wobei stets  $N(t) > 0$  sei.
2. Der Neuzugang bestehet stets aus gleichartigen Kreditverträgen, so dass die Guthaben auf den nichtzugeteilten Verträgen sich stets durch die gleiche Funktion  $g(x)$  der Wartezeit  $x$  und die Restschulden auf den zugeteilten Verträgen stets durch die gleiche Funktion  $s_w(y)$  der Wartedauer  $w$  (= Wartezeit bei Zuteilung) und der Abzahlungszeit  $y$  gegeben sind; wobei die Beziehung besteht  $s_w(0) = 1 - g(w)$ . Es sei  $g(x)$  monoton zunehmend und  $s_w(y)$  in bezug auf beide Variable monoton abnehmend. Die Funktionen  $g(x)$  und  $s_w(y)$  bezeichnen wir, weil sie sich aus den allgemeinen Vertragsbedingungen ergeben als Vertragsfunktionen.

Bei dieser Annahme ist es natürlich, dass jeweils die Verträge mit der längsten Wartezeit zur Zuteilung gelangen, so dass wir von einem besonderen Zuteilungsverfahren absehen können.

3. Die Verträge sollen alle vollständig abgewickelt werden (keine Rücktritte).

Die Annahmen seien so gewählt, dass eine kontinuierliche Behandlung der Abwicklung möglich ist.

Alle Geldbeträge seien durch ihren Anteil pro V. s. e. ausgedrückt.

§ 3.

**Zusammenstellung der Bezeichnungen.**

Im folgenden seien die hauptsächlichsten, zu verwendenden Funktionen zusammengestellt und bezeichnet, die, soweit sie nicht elementar sind, gelegentlich ihrer Einführung näher erörtert werden.

- (1)  $T(w)$ : Abzahlungsdauer für das Darlehen  $s_w(0) = 1 - g(w)$ .
- (2)  $W(t)$ : Wartedauer der zur Zeit  $t$  zur Zuteilung gelangenden.
- (3)  $P(t) = \int_0^{W(t)} N(t-x) dx$ : Bestand an nichtzugeteilten V. s. e.
- (4)  $Z(t)$ : Zur Zeit  $t$  zur Zuteilung gelangende V. s. e.
- (5)  $A(t)$ : Zur Zeit  $t$  austretende V. s. e.
- (6)  $R(t)$ : Zeitpunkt der Zuteilung der  $A(t)$ .
- (7)  $Q(t) = \int_{R(t)}^t Z(x) dx$ : Bestand an zugeteilten V. s. e.
- (8)  $B(t) = P(t) + Q(t)$ : Totalbestand an V. s. e.
- (9)  $O(t) = \int_0^{R(t)} Z(x) dx$ : Ausgetretene V. s. e.
- (10)  $M(t) = O(t) + Q(t)$ : Zur Zuteilung gelangte V. s. e.
- (11)  $G(t)$ : Guthabentotal auf den nichtzugeteilten V. s. e.
- (12)  $S(t)$ : Restschuldentotal auf den zugeteilten V. s. e.
- (13)  $F_1(w) = S_1(w) - G_1(w)$ : Fremdkreditleistung.

#### § 4.

#### Die Entwicklungsstufen.

Bei der Bestandesabwicklung der Verträge einer Bausparkasse lassen sich drei Stadien unterscheiden, die wir als Entwicklungsstufen bezeichnen und von denen auch bei beliebigen Annahmen mindestens zwei auftreten. Es sind dies:

1. *Der Entwicklungszustand*: Er dauert von der Eröffnung der Kasse bis zum Zeitpunkt des ersten Austritts. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass in ihm keine Austritte stattfinden. Das Verhältnis zwischen Zugeteilten und Nichtzugeteilten — wir bezeichnen dies als Struktur des Bestandes — ist daselbst inkonstant. Er tritt als Anfangszustand unter allen Umständen auf.
2. *Der kritische Zustand*: Er schliesst sich an den Entwicklungszustand an und besteht bei nicht konstantem Neuzugang als Dauerzustand. Er ist dadurch charakterisiert, dass in ihm Austritte stattfinden und die Struktur des Bestandes inkonstant ist. Bei konstantem

Neuzugang kann bei speziellen Vertragsfunktionen der Fall auftreten, dass der kritische Zustand fehlt.

3. *Der Beharrungszustand:* Er ist dadurch charakterisiert, dass in ihm die Struktur des Bestandes und der Bestand selbst konstant bleiben; also

$$(14) \quad \frac{d P(t)}{dt} = \frac{d Q(t)}{dt} = \frac{d B(t)}{dt} = 0 \text{ ist.}$$

Der Beharrungszustand tritt auf bei konstantem Neuzugang. Er schliesst sich normalerweise an den kritischen Zustand an, wobei der Übergang aus diesem ein allmählicher ist.

Der naheliegendste Weg zur Bestimmung der Verhältnisse des Beharrungszustandes wäre der der Lösung der aus den getroffenen Annahmen sich ergebenden Differentialgleichungen. Dieser Weg erfordert die Lösung der Differentialgleichungen des Entwicklungszustandes und die des normalerweise anschliessenden kritischen Zustandes, welch letztere aber schon bei primitiven Annahmen auf Schwierigkeiten führen, die sich nur durch Anwendung vereinfachender Näherungen beheben lassen. Es ist also die Bestimmung der Verhältnisse des Beharrungszustandes im allgemeinen auf diesem Wege mathematisch genau nicht möglich und ausserdem sehr umständlich.

Wir gehen deshalb hier einen andern Weg, der speziell die Verhältnisse des Beharrungszustandes leicht zu bestimmen gestattet, ohne Kenntnis der vorangehenden Zustände.

## § 5.

### **Die Bilanzgleichung.**

Nehmen wir an, der Kasse stehe kein Geld von Dritten (Fremdgeld) zur Verfügung, und lassen wir die eigenen Mittel der Kasse ausser Betracht, so hat die Kasse alle Auszahlungen aus den Geldleistungen der Kreditnehmer zu bestreiten. Die Leistungen der Kreditnehmer teilen sich vertragsgemäss in Mittel, die, wie die Gebühren, eventuelle Verwaltungskostenanteile und Zinsmarge, der Kasse zu eigener Verwendung zukommen und die sie auf ihr Einnahmekonto zu buchen hat, und die übrigen Mittel, die sogenannten Zuteilungsmittel, welche die Kasse umgehend zur Auszahlung der Vertragssummen (Zuteilung)

zu verwenden verpflichtet ist. Diese Mittel hat sie einsteils als Vermehrung der Guthaben der Nichtzugeteilten und andernteils als Abzahlungen auf die Restschulden der Zugeteilten, welch letzteres wir auch als Vermehrung von deren Guthaben betrachten können, zu erkennen.

Bezeichnen wir mit  $G(t)$  das zur Zeit  $t$  vorhandene Total an Guthaben der Nichtzugeteilten und mit  $J(t)$  das Total der Guthaben der zur Zuteilung gelangten, so gilt also die Beziehung

$$(15) \quad Z(t) dt = dG(t) + dJ(t)$$

Bei Eröffnung der Kasse ist andererseits

$$M(0) = G(0) = J(0) = 0$$

Damit erhalten wir durch Integration aus Beziehung (15)

$$(16) \quad \int_0^t Z(x) dx = M(t) = G(t) + J(t)$$

$J(t)$  ist als Summe der Produkte, jeweils zur Zuteilung gelangte V. s. e. multipliziert mit ihrem zur Zeit  $t$  vorhandenen Guthaben, bestimmt

$$(17) \quad J(t) = \int_0^t Z(x) (1 - s_{W(x)}(t-x)) dx$$

Um den allgemeinsten Fall zu erfassen, betrachten wir die Abwicklung als im kritischen Zustand befindlich. Es ist nach Definition (6), wobei  $R(t)$  auch mehrdeutig sein kann, für

$$0 \leqq x \leqq R(t) \quad s_{W(x)}(t-x) = 0;$$

denn die Restschuld der Austretenden ist gleich 0.

Damit geht der Ausdruck (17) über in

$$(18) \quad J(t) = M(t) - \int_{R(t)}^t Z(x) s_{W(x)}(t-x) dx$$

Das Integral der Relation (18) ist das Total der Restschulden auf den zugeteilten V. s. e. zur Zeit  $t$ , das wir mit  $S(t)$  bezeichnen wollen. Damit resultiert aus (16) in Berücksichtigung von (18)

$$(19) \quad G(t) - S(t) = 0$$

wobei  $G(t)$  das Guthabentotal der Nichtzugeteilten gegeben ist durch den Ausdruck

$$(20) \quad G(t) = \int_0^{W(t)} N(t-x) g(x) dx$$

und entsprechend Relation (18)  $S(t)$  das Restschuldentotal der Zugeteilten durch

$$(21) \quad S(t) = \int_{R(t)}^t Z(x) s_{W(x)}(t-x) dx$$

Die Relation (19) nennen wir *Bilanzgleichung* der Kasse ohne Fremdgeldzuteilung; denn es sind einerseits  $G(t)$  die Passiven und andererseits  $S(t)$  die Aktiven der Kasse. Soll die Bilanz der Kasse im Gleichgewicht sein, so muss Beziehung (19) bestehen.

In Ausdruck (21) lässt sich  $Z(x)$  ersetzen; zunächst in Relation (7)

$$(22) \quad Q(t) = \int_{R(t)}^t Z(x) dx = \int_{R(t)-W(R(t))}^{t-W(t)} N(x) dx = \int_{R(t)}^t N(x-W(x)) (1-W'(x)) dx,$$

wobei der letzte Ausdruck sich aus dem vorangehenden durch eine Transformation der Integrationsvariablen ergibt.

Aus der Differentiation nach  $t$  des ersten und des dritten Integrals ist ersichtlich, wenn wir bedenken, dass die damit erhaltene Relation auch im Entwicklungszustand, wo  $Z(R(t)) = 0$ , gelten muss, dass

$$(23) \quad Z(t) = N(t-W(t)) (1-W'(t))$$

Damit gestaltet sich die Bilanzgleichung in ausgeschriebener Form wie folgt

$$(24) \quad \int_0^{W(t)} N(t-x) g(x) dx - \int_{R(t)}^t N(x-W(x)) s_{W(x)}(t-x) (1-W'(x)) dx = 0$$

Zwischen  $R(t)$  und der durch die Vertragsfunktionen bestimmten Abzahlungsdauer (1) besteht die Beziehung

$$(25) \quad t - R(t) = T\{W(R(t))\}$$

Es ist somit Relation (24), da sonst aus lauter gegebenen Funktionen bestehend, eine Integrofunktionalgleichung zur Bestimmung der unbekannten Wartedauer in Abhängigkeit von der Geschäftszeit  $t$ ; und zwar in der vorliegenden Fassung für den allgemeinst möglichen Fall, den kritischen Zustand.

### § 6.

#### **Konstanter Neuzugang, Bilanzgleichung im Beharrungszustand.**

Unter den in den Bereich des Möglichen fallenden Annahmen von Gesetzmässigkeiten über den Neuzugang ist die, dass der Neuzugang konstant sei, die einfachste und naheliegendste.

Es sei für die weiteren Ausführungen diese Gesetzmässigkeit über den Neuzugang angenommen; wir setzen also  $N(t) = N$ . In diesem Falle vereinfacht sich die Bilanzgleichung auf nachstehende

$$(26) \quad \int_0^{W(t)} g(x) dx - \int_{R(t)}^t s_{W(x)}(t-x) (1-W'(x)) dx = 0$$

Soll nun der kritische Zustand in den Beharrungszustand übergehen, so muss, wie nachstehend ausgeführt wird, die Wartedauer gegen einen konstanten Wert streben. Auf die Darlegung, dass dies bei den getroffenen Annahmen über den Neuzugang und die Vertragsfunktionen stets eintreten muss, sei hier, da sie eingehendere Betrachtungen über den kritischen Zustand erfordern würde, nicht eingetreten.

$$(27) \quad \begin{aligned} \text{Mit } \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = w &\quad \text{resultiert aus (3)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = N \int_0^w dx &= N w \quad \text{aus (25)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (t - R(t)) &= T(w) \quad \text{und damit aus (22)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = N \int_0^{T(w)} dx &= N T(w) \quad \text{und aus (8)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) &= N(w + T(w)) \end{aligned}$$

Diese Relationen (27) erfüllen die Differentialgleichungen (14), welche die konstanten Bestandesverhältnisse des Beharrungszustandes charakterisieren.

Im zweiten Integral von (26) wird  $W'(x) = 0$ ; wir setzen darin  $x = t - y$  und erhalten damit aus (26) die Vereinfachung

$$(28) \quad \int_0^w g(x) dx - \int_0^{T(w)} s_w(y) dy = 0$$

Diese Gleichung nennen wir *Bilanzgleichung des Beharrungszustandes ohne Fremdgeldzuteilung*.

Bezeichnen wir allgemein für den Neuzugang 1 die Größen mit dem Index 1, so lässt sich die Gleichung (28) in Anbetracht dessen, dass beide Integrale unabhängig von  $t$  sind, abgekürzt durch die Beziehung

$$(28 a) \quad G_1 - S_1 = 0 \quad \text{ausdrücken.}$$

Ausser der in § 5 gegebenen Interpretation ergibt sich für sie durch die Einführung eines neuen Begriffs eine weitere naheliegende Auslegung.

### § 7.

#### Die Kreditleistung.

Es gewähre die Person C der Person D einen Kredit vom Betrage B während der Kreditgewährungsduer  $z$ .

Es liegt nun nahe, die Leistung von C gegenüber D durch eine Grösse zu messen, die einerseits proportional dem Kreditbetrag B und andererseits proportional der Kreditgewährungsduer  $z$  ist.

Davon ausgehend definieren wir den Begriff *Kreditleistung* ( $K(B, z)$ ) als Produkt aus Kreditbetrag B mal Gewährungsduer  $z$ ,

$$(29) \quad \text{also } K(B, z) = B \cdot z$$

Ist der Kreditbetrag variabel und dabei als integrierbare Funktion  $b(x)$  der Laufzeit  $x$  des Kredits angebbar, so bezeichnen wir die Kreditleistung mit  $K(z)$  und bestimmen sie entsprechend (29) durch das nachstehende bestimmte Integral

$$(29 a) \quad K(z) = \int_0^z b(x) dx$$

Die Integrale der Bilanzgleichung (28) sind Grössen von der Art der Kreditleistung (29 a); es ergibt sich in Anbetracht dessen eine weitere, einfache Interpretation von (28).

*Bei einer Bausparkasse ohne Fremdgeldzuteilung ist im Beharrungszustand im Momente der Zuteilung die vollbrachte Kreditleistung des Kreditnehmers gegenüber der Kasse gleich der zukünftigen Kreditleistung der Kasse gegenüber dem Kreditnehmer.*

Diese Auslegung der Bilanzgleichung des Beharrungszustandes scheint mir das Wesen der Bausparfinanzierung sehr gut zu charakterisieren.

### § 8.

#### Ergebnisse für die speziellen Vertragsfunktionen

$$g(x) = a + bx; \quad s_w(y) = 1 - (a + bw) - cy$$

Wir treten auf diesen Spezialfall ein, da er explizite Lösungen der Grössen des Beharrungszustandes ergibt. Als Kreditleistung des Kreditnehmers bei Zuteilung mit der Wartedauer  $w$  erhalten wir gemäss (28)

$$(30) \quad G_1 = \int_0^w (a + bx) dx = aw + \frac{bw^2}{2} = \frac{g(w)^2 - a^2}{2b}$$

Als Kreditleistung der Kasse erhalten wir mit

$$T(w) = \frac{1 - g(w)}{c},$$

entsprechend (28)

$$(31) \quad S_1 = \int_0^T (1 - g(w) - cy) dy = \frac{(1 - g(w))^2}{2c}$$

Mit (30) und (31) ergibt (28 a) eine Bestimmungsgleichung für das Guthaben bei Zuteilung  $g(w)$

$$(32) \quad \frac{g(w)^2 - a^2}{2b} - \frac{(1 - g(w))^2}{2c} = 0$$

Es ist

$$g(w) = \frac{1}{c-b} (\sqrt{a^2 c (c-b) + bc} - b)$$

Von den zwei Quadratwurzelvorzeichen ist nur das positive zu verwenden, da nur dieses eine Lösung, die der Bedingung  $0 \leq g(w) \leq 1$  genügt, ergibt.

Wir setzen darin  $c-b=d$  und

$$\sqrt{c(a^2 d + b)} = q$$

Damit ergeben sich

$$(33) \quad \begin{aligned} w &= \frac{1}{bd} (q - ad - b) & T &= \frac{1}{cd} (c - q) \\ w + T &= \frac{1}{bc} (q - ac) \end{aligned}$$

Aus den Relationen in (27) sind die Bestände selbst aus (33) erhältlich durch Multiplikation mit dem Neuzugang.

## § 9.

### **Die Bilanzgleichung im Beharrungszustand bei Fremdgeldzuteilung.**

Im allgemeinen führt die Bilanzgleichung (28) nicht wie in dem vorangehend behandelten Spezialfall zu expliziten Lösungen, sondern ergibt eine transzendentale Gleichung zur Bestimmung der Wartedauer des Beharrungszustandes.

Die Lösung derselben führt uns zugleich auf eine Erweiterung der Bilanzgleichung des Beharrungszustandes in der Formulierung (28 a). Wir führen nämlich die Wartedauer  $w$  als Variable ein und definieren eine neue Funktion  $F_1(w)$  durch die Gleichung

$$(34) \quad F_1(w) = S_1(w) - G_1(w)$$

Die Funktion  $F_1(w)$  bemisst das beim Neuzugang 1 im Beharrungszustand mit der Wartedauer  $w$  auf den Restschulden der Zugeteilten

vorhandene Total an Fremdgeldanteilen. Es ist ebenfalls eine Funktion von der Art einer Kreditleistung, und wir bezeichnen deshalb  $F_1(w)$  als *Fremdkreditleistung*.

Die Wartedauer des Beharrungszustandes ohne Fremdgeldzuteilung ist nun in Übereinstimmung mit (28 a) die Lösung der Gleichung

$$(35) \quad F_1(w) = 0$$

Bei Fremdgeldzuteilung geschieht die Kreditleistung der Kasse einerseits bausparmässig und andererseits bankmäßig. Die bankmässige Kreditleistung  $K_1(w)$  lässt sich in Abhängigkeit von der Wartedauer aus den allgemeinen Vertragsbedingungen bestimmen. Wir gelangen in diesem Falle zu der Gleichung

$$(36) \quad G_1(w) + K_1(w) - S_1(w) = 0 \quad \text{oder auch} \\ F_1(w) - K_1(w) = 0$$

die wir *Bilanzgleichung des Beharrungszustandes bei Fremdgeldzuteilung* nennen.

Bei den getroffenen Annahmen über die Vertragsfunktionen ist  $G_1(w)$  mit zunehmendem  $w$  eine monoton zunehmende und  $S_1(w)$  eine monoton abnehmende Funktion. Die durch (34) definierte Fremdkreditleistung  $F_1(w)$  ist daher eine noch stärker als  $S_1(w)$  abnehmende, monotone Funktion. Näherungslösungen von (35) können durch Interpolation zwischen im Vorzeichen verschiedenen Funktionswerten  $F_1(w)$  bestimmt werden.

Die bankmässige Kreditleistung  $K_1(w)$  ist als Bruchteil von  $S_1(w)$  wie dieses monoton abnehmend, und die Differenz  $F_1(w) - K_1(w)$  nimmt mit wachsendem  $w$  von positiven zu negativen Werten ab, so dass auch Gleichung (36) durch Interpolation näherungsweise gelöst werden kann.

Diese Bestimmungsmethode der Wartedauer des Beharrungszustandes ist nicht an die kontinuierliche Betrachtung gebunden. Bei Annahme diskontinuierlicher Vertragsfunktionen und Zuteilung ist lediglich bei Bestimmung der Kreditleistungen die Integration durch die Summation zu ersetzen.

§ 10.

**Die Kreditleistung für die speziellen Vertragsfunktionen**

$$g(x) = a e^{\delta_1 x} + \frac{b}{\delta_1} (e^{\delta_1 x} - 1), s_w(y) = (1 - g(w)) e^{\delta_2 y} - \frac{c}{\delta_2} (e^{\delta_2 y} - 1)$$

Anhand dieser Vertragsfunktionen, die, abgesehen von der Annahme kontinuierlicher Verzinsung und Zahlung der Jahresleistungen, den praktisch etwa auftretenden entsprechen, seien einige Beziehungen zwischen Kreditleistung und andern Grössen dargelegt.

Aus der Guthabenfunktion  $g(x)$  erhalten wir als Kreditleistung des Kreditnehmers nach (29 a)

$$(37) \quad G_1(w) = \left( a + \frac{b}{\delta_1} \right) \frac{e^{\delta_1 w} - 1}{\delta_1} - \frac{b}{\delta_1} w = \frac{1}{\delta_1} (g(w) - a - bw)$$

Die Abzahlungsdauer für das Darlehen  $1 - g(w)$  ergibt sich aus der Restschuldfunktion  $s_w(y)$ ; es ist

$$(38) \quad T(w) = \frac{1}{\delta_2} \ln \frac{c}{c - (1 - g(w)) \delta_2}$$

wobei wir  $\ln$  als Abkürzung für den natürlichen Logarithmus verwenden.

Die Kreditleistung der Kasse bei Zuteilung mit dem Guthaben  $g(w)$  während der Abzahlungsdauer  $T(w)$  und dem jeweiligen Kreditbetrag  $s_w(y)$  ist ebenfalls gemäss (29 a) zu bestimmen; wir erhalten

$$(39) \quad S_1(w) = \frac{1}{\delta_2} (c T(w) + g(w) - 1)$$

Aus (37) ergibt sich beim Grenzübergang zu  $\delta_1 = 0$  der Ausdruck (30) und aus (39) beim Grenzübergang zu  $\delta_2 = 0$  die Formel (31).

Die Ausdrücke (37) und (39) besagen folgendes:

*Bei den vorliegenden Vertragsfunktionen ist die mit der Zinsintensität multiplizierte Kreditleistung gleich der Zinssumme.*

Die Differenz (39) — (37) ergibt die Fremdkreditleistung

$$(40) \quad F_1(w) = \frac{1}{\delta_2} (c T(w) + g(w) - 1) - \frac{1}{\delta_1} (g(w) - a - bw)$$

Die Gesamtleistung des Kreditnehmers bezeichnen wir mit  $L(w)$ ; es ist also

$$(41) \quad L(w) = a + b w + c T(w)$$

Ist in (40)  $\delta_2 = \delta_1 = \delta$ , so resultiert eine einfache Beziehung zwischen der Fremdkreditleistung und der Gesamtleistung.

$$(42) \quad F_1(w) = \frac{1}{\delta} (L(w) - 1)$$

Ist  $w_m$  die Wartedauer im Beharrungszustand, so gilt nach (35)  $F_1(w_m) = 0$ . Aus (42) folgt damit

$$(43) \quad L(w_m) = 1$$

In Worten besagt (43) folgendes:

*Ist bei den vorliegenden Vertragsfunktionen die Guthaben- gleich der Darlehens-Zinsintensität, so ist die Gesamtleistung des Kreditnehmers im Beharrungszustand unabhängig von der Höhe dieser Zinsintensität und gleich der von der Kasse zur Auszahlung gelangenden Vertrags- summe.*

Ohne weitere Ableitung sei hier noch beigefügt, dass in diesem Fall die Wartedauer des Beharrungszustandes bei sonst gleichbleibenden Ansätzen mit zunehmender Zinsintensität abnimmt.

## § 11.

### Schlussbemerkungen.

Die besondere Bedeutung der Verhältnisse des Beharrungszustandes ist aus den dargelegten mathematischen Relationen nicht ohne weiteres ersichtlich. Sie seien deshalb durch zwei Bemerkungen, ohne Begründung der darin aufgestellten Behauptungen, ergänzt.

Während in § 6 für den Fall konstanten Neuzugangs angenommen wird, der Beharrungszustand gehe aus dem kritischen Zustand erst nach unendlich langer Geschäftsdauer hervor, sind im Prinzip bei dieser Annahme über den Neuzugang die Bestandesverhältnisse schon kurz nach Beginn der Austritte denen des stationären Zustandes sehr nahe.

Bei der praktisch möglichen Entwicklung des Neuzugangs strebt in einem weiteren Sinne das Mittel der auftretenden Bestandesver-

hältnisse mit wachsender Geschäftszeit denen des Beharrungszustandes zu.

Ausserdem sei noch auf Folgerungen von praktischer Bedeutung hingewiesen, die aus den aufgestellten Prinzipien hervorgehen.

Je grösser der in bezug auf einen konstanten Neuzugang gleichbleibende Anteil an Rücktritten ist, desto grösser ist die durch letzteren bedingte Verkürzung der Wartedauer des Beharrungszustandes.

Die gemeinsame Abwicklung von Verträgen mit relativ zur Vertragssumme verschiedener Leistungsintensität der Kreditnehmer macht ein besonderes Zuteilungsverfahren zur Bestimmung der Reihenfolge der Zuteilung notwendig. Dazu wird von den meisten Kassen aus den Leistungen der Kreditnehmer eine Ordnungsgrösse (Zuteilungsfaktor) bestimmt, die im Prinzip der von uns in § 7 eingeführten Kreditleistung des Kreditnehmers entspricht. Aus dem dort aufgestellten Satz lässt sich aber folgern, dass vom mathematischen Standpunkt aus als Grösse zur Bestimmung der Reihenfolge der Zuteilung allein das Verhältnis zwischen Kreditleistung des Kreditnehmers zu zukünftiger Kreditleistung der Kasse als dem Bausparprinzip vollkommen entsprechend zu bezeichnen ist.