Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 33 (1937)

Artikel: Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes

Autor: Marchand, Émile

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966748

Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes

Par **Emile Marchand**, Zurich

Ce mémoire contient six chapitres:

I.

Probabilités expérimentales.

Soit un grand groupe d'assurés, tous actifs, tous de même âge x.

l_x^{aa} désigne le nombre d'assurés de ce groupe,

d_x^{aa} le nombre d'assurés de ce groupe qui mourront avant d'avoir atteint l'âge $x+1$, étant restés actifs jusqu'à leur décès,

I_x^a le nombre d'assurés de ce groupe qui deviendront invalides avant d'avoir atteint l'âge $x+1$,

l_{x+1}^{aa} le nombre d'actifs de ce groupe à l'âge $x+1$.

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x^a$$

(Pour raison de simplification, nous supposons que, pendant l'année d'observation, il n'y a aucune nouvelle adhésion, ni aucun départ dans ce groupe, autres que ceux dus au décès ou à l'invalidité.)

p_x^{aa} désigne la probabilité qu'un assuré actif d'âge x soit encore actif à l'âge $x + 1$,

$$p_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

q_x^{aa} désigne la probabilité expérimentale [1]) qu'un actif d'âge x meure avant d'avoir atteint l'âge $x + 1$, étant resté actif jusqu'à son décès, des cas d'invalidité pouvant se produire avant le décès

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}},$$

$i_x^{(e)}$ désigne la probabilité expérimentale qu'un actif d'âge x devienne invalide avant d'avoir atteint l'âge $x + 1$, des décès d'actifs pouvant se produire avant l'invalidité,

$$i_x^{(e)} = \frac{I_x^a}{l_x^{aa}}$$

$$p_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}} = \frac{l_x^{aa} - d_x^{aa} - I_x^a}{l_x^{aa}} = 1 - q_x^{aa} - i_x^{(e)} \qquad (1)$$

[1]) Nous avons emprunté les dénominations de probabilités expérimentales et de probabilités corrigées à la publication du Bureau fédéral des assurances: «Bases techniques pour l'assurance de groupes» — Berne, 1931, page 5, en donnant, à vrai dire, à l'appellation de probabilités corrigées un sens différent de celui que lui a donné le Bureau fédéral des assurances.

II.

Probabilités corrigées.

Nous définissons la probabilité corrigée annuelle comme suit:

La probabilité corrigée annuelle de l'arrivée d'un événement à la suite d'une cause bien déterminée (probabilité corrigée annuelle d'extinction) est égale au nombre des sinistres provoqués par la cause envisagée, pendant l'année d'observation, divisé par le nombre de têtes exposées au risque, les sinistres provoqués par une autre cause que celle envisagée étant considérés comme des sorties s'étant produites, pour la moitié des sinistres, au début, pour l'autre moitié, à la fin de l'année d'observation.

Dans le groupe que nous étudions, nous définissons donc le nombre de têtes exposées au risque annuel de décès par l'expression

$$l_x^{aa} - \frac{I_x^a}{2}$$

$q_x^{a(c)}$ désigne la probabilité corrigée qu'un actif d'âge x meure avant d'avoir atteint l'âge $x + 1$, le nombre de têtes exposées au risque de décès étant corrigé pour tenir compte des cas d'invalidité d'actifs se produisant avant le décès,

$$q_x^{a(c)} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - \frac{I_x^a}{2}}$$

$$q_x^{a(c)} = \frac{q_x^{aa}}{1 - \frac{1}{2}\, i_x^{(e)}} \qquad (2)$$

De même, dans le groupe observé, nous définissons le nombre de têtes exposées au risque annuel d'invalidité par l'expression

$$l_x^{aa} - \frac{d_x^{aa}}{2}$$

$i_x^{(c)}$ désigne la probabilité corrigée qu'un actif d'âge x devienne invalide avant d'avoir atteint l'âge $x + 1$, le nombre de têtes exposées au risque d'invalidité étant corrigé pour tenir compte des décès d'actifs se produisant avant l'invalidité

$$i_x^{(c)} = \frac{I_x^a}{l_x^{aa} - \frac{d_x^{aa}}{2}}$$

$$i_x^{(c)} = \frac{i_x^{(e)}}{1 - \frac{1}{2}\, q_x^{aa}} \qquad (3)$$

Les probabilités corrigées $q_x^{a(c)}$ et $i_x^{(c)}$ ne peuvent être envisagées que comme des *valeurs approximatives* pour les probabilités annuelles d'extinction dans des ordres simples,

$q_x^{a(c)}$ dans un ordre simple d'extinction par décès, obtenu en considérant la mortalité comme la seule cause d'extinction;

$i_x^{(c)}$ dans un ordre simple d'extinction par invalidité, obtenu en considérant l'invalidité comme la seule cause d'extinction.

III.

Les probabilités expérimentales en fonction des probabilités corrigées.

Les relations (2) et (3) expriment les probabilités corrigées d'extinction en fonction des probabilités expérimentales; il est aisé d'établir les probabilités expérimentales d'extinction en fonction des probabilités corrigées.

De la relation (2), on déduit

$$i_x^{(e)} = \frac{2}{q_x^{a(c)}} \left(q_x^{a(c)} - q_x^{aa}\right)$$

et de la relation (3)

$$i_x^{(e)} = i_x^{(c)} \left(1 - \tfrac{1}{2}\, q_x^{aa}\right)$$

d'où

$$q_x^{aa} = q_x^{a(c)} \frac{1 - \dfrac{i_x^{(c)}}{2}}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{a(c)} \cdot i_x^{(c)}} \qquad (4)$$

De même, par analogie [1])

$$i_x^{(e)} = i_x^{(c)} \frac{1 - \dfrac{q_x^{a(c)}}{2}}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{a(c)} \cdot i_x^{(c)}} \qquad (5)$$

En remplaçant dans la formule (1) les probabilités expérimentales q_x^{aa} et $i_x^{(e)}$ par leurs valeurs telles qu'elles résultent des relations (4) et (5), on a

[1]) Les relations (4) et (5) correspondent aux formules (16) du mémoire:

«Die zahlenmässige Berechnung der «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «abhängigen» und der «abhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «unabhängigen» — Paul Spangenberg — 10me Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1915, p. 39.

$$p_x^{aa} = 1 - q_x^{a(c)} \frac{1 - \dfrac{i_x^{(c)}}{2}}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{a(c)} \cdot i_x^{(c)}} - i_x^{(c)} \frac{1 - \dfrac{q_x^{a(c)}}{2}}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{a(c)} \cdot i_x^{(c)}}$$

d'où

$$p_x^{aa} = 1 - \frac{1 - (1 - q_x^{a(c)})\,(1 - i_x^{(c)})}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{a(c)} \cdot i_x^{(c)}} \tag{6}$$

IV.

Théorème.

Lorsque deux causes d'extinction I et II agissent simultanément sur un groupe d'assurés, les probabilités annuelles que l'assuré ne soit pas atteint pendant l'année d'observation par l'une au moins des deux causes d'extinction sont fournies par l'expression

$$p_x^{I:II} = 1 - \frac{1 - (1 - q_x^{I})\,(1 - q_x^{II})}{1 - \frac{1}{4}\, q_x^{I} \cdot q_x^{II}},$$

4 518
11.(13)

q_x^I **et** q_x^{II} **étant les probabilités corrigées annuelles d'extinction.**

Nous sommes arrivés à la formule ci-dessus en partant des deux causes d'extinction: décès et invalidité. Il est évident qu'aucune des hypothèses faites n'empêche d'admettre comme point de départ une autre collectivité que celle des assurés actifs. Par exemple, on peut partir d'une collectivité d'assurés célibataires et envisager, comme causes d'extinction: le décès et le mariage, ou encore d'une collectivité de veuves, et envisager comme causes d'extinction: le décès et le remariage.

L'ordre des actifs se détermine de la manière suivante:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} \cdot p_x^{aa}$$

$$l_{x+2}^{aa} = l_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où la probabilité p_x^{aa} est fournie par la formule (6). Le point de départ sera un âge ω pour lequel $l_\omega^{aa} = l_\omega$, c'est-à-dire pour lequel on admet que tous les assurés à cet âge-là sont actifs. L'ordre des invalides se détermine simplement par soustraction.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_x^{ii} = l_x - l_x^{aa}$$

$$l_{x+1}^{ii} = l_{x+1} - l_{x+1}^{aa}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si nous envisageons l'ordre des veuves, le nombre des veuves se détermine de la manière suivante:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{y+1}^{ww} = l_y^{ww} \cdot p_y^{ww}$$

$$l_{y+2}^{ww} = l_{y+1}^{ww} \cdot p_{y+1}^{ww}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où p_y^{ww} est la probabilité annuelle qu'une veuve d'âge y soit encore veuve à l'âge $y + 1$,

$$p_y^{ww} = 1 - \frac{1 - (1 - q_y^{(c)})\,(1 - {}^w h_y^{(c)})}{1 - \frac{1}{4}\, q_y^{(c)} \cdot {}^w h_y^{(c)}},$$

$q_y^{(c)}$ étant la probabilité corrigée qu'une veuve d'âge y meure avant d'avoir atteint l'âge $y + 1$, le nombre de têtes exposées au risque de décès étant corrigé pour tenir compte des cas de remariage de veuves se produisant avant le décès, et

${}^{w}h_y^{(c)}$, la probabilité corrigée qu'une veuve d'âge y se remarie avant d'avoir atteint l'âge $y + 1$, le nombre de têtes exposées au risque de remariage étant corrigé pour tenir compte des décès de veuves se produisant avant le remariage.

L'ordre des veuves remariées se détermine simplement par soustraction.

. . . .

$$l_y^{hh} = l_y - l_y^{ww}$$

$$l_{y+1}^{hh} = l_{y+1} - l_{y+1}^{ww}$$

. . . .

V.

V. Probabilités indépendantes.

On sait que Karup, en 1875, introduisit — là où un événement peut être provoqué par plusieurs causes — les probabilités indépendantes, désignées aussi sous le nom de probabilités absolues, probabilités pures, probabilités idéelles.

La probabilité indépendante annuelle de l'arrivée d'un événement à la suite d'une cause bien déterminée (probabilité indépendante annuelle d'extinction) est égale au nombre des sinistres provoqués par la cause envisagée, pendant l'année d'observation, divisé par le nombre de têtes exposées au risque, les sinistres provoqués par une autre cause que celle envisagée n'ayant aucune influence pour la détermination du nombre de têtes exposées au risque. Ces assurés sinistrés sont censés être remplacés immédiatement par d'autres soumis au risque envisagé, dans la même mesure que les assurés du groupe.

La différence entre les notions de probabilités corrigées et de probabilités indépendantes d'extinction réside dans la constatation suivante: pour la détermination de la probabilité corrigée, les assurés «remplaçants» sont soumis au risque envisagé pour une durée approximative, à savoir la moitié de ces assurés pour une année, et l'autre moitié pas du tout, ou, ce qui revient au même, tous pour une demi-année. Pour le calcul de la probabilité corrigée, nous faisons la supposition d'une répartition uniforme des sinistres pendant l'année d'observation, tandis que pour la détermination de la probabilité indépendante, **il est nécessaire d'établir le nombre des sinistres d'une manière rigoureuse, sans faire de supposition particulière pour la répartition des sinistres provoqués par une autre cause que celle envisagée.**

On sait que l'introduction des probabilités indépendantes d'extinction a permis à Karup de donner une forme simple à la probabilité qu'un événement sur lequel plusieurs causes agissent ne se produise pas. La probabilité que, dans le courant d'une année, un événement qui peut être provoqué par plusieurs causes ne s'accomplisse pas est égale au produit des probabilités indépendantes annuelles correspondant à la non-arrivée de chacune de ces causes.

Soit une collectivité (I : II) d'un grand nombre d'assurés, tous d'âge ω. Deux causes, I et II, agissent simultanément pour réduire le nombre des assurés de cette collectivité à partir de cet âge ω.

Définissons par

$l_{\omega+t}^{I:II}$ le nombre des assurés de la collectivité (I: II) à l'âge $\omega + t$, qui n'ont pas été sinistrés, ni par la cause I, ni par la cause II;

$l^{I}_{\omega+t}$ le nombre des assurés à l'âge $\omega + t$, si la cause I avait agi seule;

$l^{II}_{\omega+t}$ le nombre des assurés à l'âge $\omega + t$, si la cause II avait agi seule;

$$q^{I}_{\omega+t} = \frac{l^{I}_{\omega+t} - l^{I}_{\omega+t+1}}{l^{I}_{\omega+t}}$$

la probabilité indépendante annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause I; autrement dit, la probabilité annuelle de sortie d'une collectivité (I), en désignant ainsi la collectivité des assurés si la cause I agit seule et dont, au début des observations, le nombre est

$$l^{I}_{\omega} = l^{I:II}_{\omega} ;$$

$$q^{II}_{\omega+t} = \frac{l^{II}_{\omega+t} - l^{II}_{\omega+t+1}}{l^{II}_{\omega+t}}$$

la probabilité indépendante annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause II; au début des observations, le nombre des assurés de la collectivité (II), est

$$l^{II}_{\omega} = l^{I:II}_{\omega} ;$$

$p^{I:II}_{\omega+t}$ la probabilité annuelle qu'un assuré d'âge $\omega + t$ ne sorte pas de la collectivité (I : II) avant d'avoir atteint l'âge $\omega + t + 1$

$$p^{I:II}_{\omega+t} = \frac{l^{I:II}_{\omega+t+1}}{l^{I:II}_{\omega+t}}$$

L'application du théorème de Karup fournit pour $p^{I:II}_{\omega+t}$ la valeur

$$p^{I:II}_{\omega+t} = (1-q^{I}_{\omega+t})\,(1-q^{II}_{\omega+t})$$

Définissons encore par

$d^{I(e)}_{\omega+t}$ le nombre des assurés qui sortiront de la collectivité (I : II) par suite d'un sinistre provoqué par la cause I, après avoir atteint l'âge $\omega + t$ et avant d'avoir atteint l'âge $\omega + t + 1$;

$d^{II(e)}_{\omega+t}$ le nombre des assurés qui sortiront de la collectivité (I : II) par suite d'un sinistre provoqué par la cause II, après avoir atteint l'âge $\omega + t$ et avant d'avoir atteint l'âge $\omega + t + 1$;

$q^{I(e)}_{\omega+t}$ la probabilité expérimentale annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause I;

$q^{II(e)}_{\omega+t}$ la probabilité expérimentale annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause II;

$$q^{I(e)}_{\omega+t} = \frac{d^{I(e)}_{\omega+t}}{l^{I:II}_{\omega+t}}\,; \qquad q^{II(e)}_{\omega+t} = \frac{d^{II(e)}_{\omega+t}}{l^{I:II}_{\omega+t}}\,;$$

$$p^{I:II}_{\omega+t} = 1 - q^{I(e)}_{\omega+t} - q^{II(e)}_{\omega+t}\,.$$

Définissons encore par

$q^{I(c)}_{\omega+t}$ la probabilité corrigée annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause I;

$q^{II(c)}_{\omega+t}$ la probabilité corrigée annuelle d'extinction correspondant à l'arrivée de la cause II;

$$q^{I(c)}_{\omega+t} = \frac{d^{I(e)}_{\omega+t}}{l^{I:II}_{\omega+t} - \frac{1}{2}\,d^{II(e)}_{\omega+t}}\,; \qquad q^{II(c)}_{\omega+t} = \frac{d^{II(e)}_{\omega+t}}{l^{I:II}_{\omega+t} - \frac{1}{2}\,d^{I(e)}_{\omega+t}}$$

Le théorème qui fait l'objet du chapitre IV ci-dessus et qui fait intervenir les probabilités corrigées d'extinction conduit pour $p^{I:II}_{\omega+t}$ à l'expression

$$p^{I:II}_{\omega+t} = 1 - \frac{1 - (1 - q^{I(c)}_{\omega+t})\,(1 - q^{II(c)}_{\omega+t})}{1 - \frac{1}{4}\,q^{I(c)}_{\omega+t} \cdot q^{II(c)}_{\omega+t}}$$

Introduisons les intensités et définissons

$$\mu^{I:II}_{\omega+t} = \frac{-\,dl^{I:II}_{\omega+t}}{l^{I:II}_{\omega+t} \cdot dt}$$

$$\mu^{I}_{\omega+t} = \frac{-\,dl^{I}_{\omega+t}}{l^{I}_{\omega+t} \cdot dt}$$

$$\mu^{II}_{\omega+t} = \frac{-\,dl^{II}_{\omega+t}}{l^{II}_{\omega+t} \cdot dt}$$

Le théorème de Karup a son point de départ dans la relation

$$\mu^{I:II}_{\omega+t} = \mu^{I}_{\omega+t} + \mu^{II}_{\omega+t},$$

qui, généralement, est admise sans démonstration [1]). On peut la démontrer facilement comme suit:

Si nous désignons par

$\mu^{(I)}_{\omega+t}$ la grandeur qui, multipliée par $l^{I:II}_{\omega+t}$ et dt, fournit le nombre des sinistres pendant le temps dt dus à la cause I;

$\mu^{(II)}_{\omega+t}$ la grandeur qui, multipliée par $l^{I:II}_{\omega+t}$ et dt, fournit le nombre des sinistres pendant le temps dt dus à la cause II,

on a

$$\mu^{I:II}_{\omega+t} = \mu^{(I)}_{\omega+t} + \mu^{(II)}_{\omega+t} \quad {}^{2)}$$

Nous posons comme condition que, dans la collectivité (I) les sinistrés, par suite de la cause II, continuent à être soumis au risque de la collectivité (I),

---

[1]) W. Friedli: «Intensitätsfunktion und Zivilstand.» — 21me Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1926, p. 44, form. 9.

[2]) G. Schaertlin: «Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung.» — 1er Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 1906, p. 52/54, form. 23.

dans la même mesure que s'ils n'avaient pas été sinistrés par suite de la cause II, autrement dit, que les sinistres provoqués par la cause II n'aient aucune influence sur la formation de la collectivité (I).

Nous posons une même condition pour la collectivité (II), à l'égard des sinistres provoqués par la cause I.

La connaissance des fonctions $l^{I:II}_{\omega+t}$ et $\mu^{(II)}_{\omega+t}$ suffit pour déterminer toutes les autres fonctions introduites. En effet, on a pour la collectivité (I),

$$l^{I}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + \lambda^{I(II)}_{\omega+t} \tag{7}$$

$\lambda^{I(II)}_{\omega+t}$ désigne le nombre des assurés qui sont sortis de la collectivité (I : II), par suite de l'action de la cause II, entre l'âge ω et l'âge $\omega + t$, et qui n'ont pas été sinistrés par la cause I avant d'atteindre l'âge $\omega + t$. Ces assurés font toujours partie de la collectivité (I).

$\lambda^{II(I)}_{\omega+t}$ désigne le nombre des assurés qui sont sortis de la collectivité (I : II), par suite de l'action de la cause I, entre l'âge ω et l'âge $\omega + t$, et qui n'ont pas été sinistrés par la cause II avant d'atteindre l'âge $\omega + t$. Ces assurés font toujours partie de la collectivité (II) [1]).

$$\lambda^{I(II)}_{\omega+t} = \int_0^t l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y} \cdot {}_{t-y}p^{I}_{\omega+y}\, dy$$

---

[1]) Les intensités qui découlent des deux fonctions

$$\lambda^{I(II)}_{\omega+t} \text{ et } \lambda^{II(I)}_{\omega+t},$$

à savoir

$$\frac{-\,d\lambda^{I(II)}_{\omega+t}}{\lambda^{I(II)}_{\omega+t} \cdot dt} \quad \text{et} \quad \frac{-\,d\lambda^{II(I)}_{\omega+t}}{\lambda^{II(I)}_{\omega+t} \cdot dt},$$

peuvent intervenir dans certains problèmes.

${}_{t-y}p^{I}_{\omega+y}$ étant la probabilité pour un assuré d'âge $\omega+y$ de faire encore partie de la collectivité (I) à l'âge $\omega+t$

$$ {}_{t-y}p^{I}_{\omega+y} = \frac{l^{I}_{\omega+t}}{l^{I}_{\omega+y}} $$

La relation (7) devient:

$$ l^{I}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + \int_0^t l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y} \cdot {}_{t-y}p^{I}_{\omega+y} \cdot dy $$

$$ l^{I}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + l^{I}_{\omega+t} \int_0^t \frac{l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y}}{l^{I}_{\omega+y}} \cdot dy $$

$$ 1 = \frac{l^{I:II}_{\omega+t}}{l^{I}_{\omega+t}} + \int_0^t \frac{l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y}}{l^{I}_{\omega+y}} \cdot dy $$

Dérivons par rapport à t

$$ 0 = \frac{l^{I}_{\omega+t}\left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' - l^{I:II}_{\omega+t}\left(l^{I}_{\omega+t}\right)'}{\left(l^{I}_{\omega+t}\right)^2} + \frac{l^{I:II}_{\omega+t} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+t}}{l^{I}_{\omega+t}} $$

$$ 0 = l^{I}_{\omega+t}\left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' - l^{I:II}_{\omega+t}\left(l^{I}_{\omega+t}\right)' + l^{I}_{\omega+t} \cdot l^{I:II}_{\omega+t} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+t} $$

$$ 0 = \frac{\left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)'}{l^{I:II}_{\omega+t}} - \frac{\left(l^{I}_{\omega+t}\right)'}{l^{I}_{\omega+t}} + \mu^{(II)}_{\omega+t} $$

d'où

$$ \mu^{(II)}_{\omega+t} = \mu^{I:II}_{\omega+t} - \mu^{I}_{\omega+t} \tag{8} $$

De même, en partant de la collectivité (II),

$$ l^{II}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + \lambda^{II(I)}_{\omega+t} $$

$$ l^{II}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + \int_0^t l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(I)}_{\omega+y} \cdot {}_{t-y}p^{II}_{\omega+y}\, dy $$

$$l^{II}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} + \int_0^t l^{I:II}_{\omega+y} \left(\mu^{I:II}_{\omega+y} - \mu^{(II)}_{\omega+y}\right) \frac{l^{II}_{\omega+t}}{l^{II}_{\omega+y}}\, dy$$

$$l^{II}_{\omega+t} = l^{I:II}_{\omega+t} - l^{II}_{\omega+t} \int_0^t \frac{dl^{I:II}_{\omega+y} + l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y}}{l^{II}_{\omega+y}}\, dy$$

$$1 = \frac{l^{I:II}_{\omega+t}}{l^{II}_{\omega+t}} - \int_0^t \frac{dl^{I:II}_{\omega+y} + l^{I:II}_{\omega+y} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+y}}{l^{II}_{\omega+y}}\, dy$$

Dérivons par rapport à t

$$0 = \frac{l^{II}_{\omega+t}\left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' - l^{I:II}_{\omega+t}\left(l^{II}_{\omega+t}\right)'}{\left(l^{II}_{\omega+t}\right)^2} - \frac{\left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' + l^{I:II}_{\omega+t} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+t}}{l^{II}_{\omega+t}}$$

$$0 = l^{II}_{\omega+t} \cdot \left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' - l^{I:II}_{\omega+t}\left(l^{II}_{\omega+t}\right)' - l^{II}_{\omega+t} \cdot \left(l^{I:II}_{\omega+t}\right)' - \\ - l^{II}_{\omega+t} \cdot l^{I:II}_{\omega+t} \cdot \mu^{(II)}_{\omega+t}$$

$$0 = \frac{-\left(l^{II}_{\omega+t}\right)'}{l^{II}_{\omega+t}} - \mu^{(II)}_{\omega+t}$$

$$\mu^{(II)}_{\omega+t} = \mu^{II}_{\omega+t} \tag{9}$$

Des relations (8) et (9), on déduit

$$\mu^{I:II}_{\omega+t} = \mu^{I}_{\omega+t} + \mu^{II}_{\omega+t} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Au sujet de cette démonstration, on peut faire quatre remarques:

1. Les grandeurs $\mu^{(I)}_{\omega+t}$ et $\mu^{(II)}_{\omega+t}$ introduites pour les besoins de notre démonstration se révèlent bien, comme on pouvait s'y attendre, égales aux intensités des fonctions $l^{I}_{\omega+t}$ et $l^{II}_{\omega+t}$

$$\mu_{\omega+t}^{(I)} = \mu_{\omega+t}^{I}$$

et $$\mu_{\omega+t}^{(II)} = \mu_{\omega+t}^{II}$$

2. Les conditions posées au début de la démonstration — à savoir que, dans la collectivité (I), les assurés sinistrés par suite de la cause II continuent à être soumis au risque de la collectivité (I), dans la même mesure que s'ils n'avaient pas été sinistrés par suite de la cause II, ainsi que la condition analogue pour la collectivité (II) — sont nécessaires pour notre démonstration.

Si ces conditions ne sont pas remplies

$$\mu_{\omega+t}^{(I)} \neq \mu_{\omega+t}^{I}$$

et $$\mu_{\omega+t}^{(II)} \neq \mu_{\omega+t}^{II}$$

Pour l'application du théorème de Karup, les conditions énoncées ci-dessus sont, du reste, toujours satisfaites, Karup faisant intervenir les intensités de deux collectivités distinctes: dans la collectivité (I), les sinistres provoqués par la cause II, de même dans la collectivité (II), les sinistres provoqués par la cause I n'ont aucune influence pour la détermination du nombre de têtes exposées au risque [1]).

3. Nous sommes partis d'un âge ω et d'une collectivité $l_{\omega}^{I:II}$. Si nous partions d'un autre âge $(\omega + \varepsilon)$ et d'un nombre d'assurés égal à $l_{\omega+\varepsilon+t}^{I:II}$, en laissant donc les sinistrés par suite de l'action de la cause I

[1]) Nous espérons pouvoir faire paraître prochainement le mémoire qui s'occupe des probabilités expérimentales, des probabilités corrigées et des probabilités indépendantes, lorsque plus de deux causes d'extinction agissent simultanément.

ou de la cause II avant l'âge $(\omega + \varepsilon)$ complètement en dehors de nos considérations, la fonction $l^{I:II}_{\omega+\varepsilon+t}$ resterait la même:

$$l^{I:II}_{\omega+\varepsilon+[t]} = l^{I:II}_{\omega+[\varepsilon+t]},$$

tandis que les fonctions

$$l^{I}_{\omega+\varepsilon+[t]} \neq l^{I}_{\omega+[\varepsilon+t]}$$

$$l^{II}_{\omega+\varepsilon+[t]} \neq l^{II}_{\omega+[\varepsilon+t]}$$

$$\lambda^{I(II)}_{\omega+\varepsilon+[t]} \neq \lambda^{I(II)}_{\omega+[\varepsilon+t]}$$

et $$\lambda^{I(II)}_{\omega+\varepsilon} = \lambda^{II(I)}_{\omega+\varepsilon} = 0$$

Toutefois, il est aisé de constater que

$$\mu^{I}_{\omega+\varepsilon+[t]} = \mu^{I}_{\omega+[\varepsilon+t]}$$

et $$\mu^{II}_{\omega+\varepsilon+[t]} = \mu^{II}_{\omega+[\varepsilon+t]}$$

4. Nous avons utilisé, comme notations,

$$l^{I}_{\omega+t},\ l^{II}_{\omega+t},\ l^{I:II}_{\omega+t},\ \lambda^{I(II)}_{\omega+t},\ \lambda^{II(I)}_{\omega+t}$$

et d'autres encore.

Il existe une notation généralement reconnue pour plusieurs de ces fonctions, si la cause d'extinction I est le décès, et la cause d'extinction II l'invalidité:

$$l^{I:II}_{\omega+t} = l^{aa}_{\omega+t}$$

$$l^{I}_{\omega+t} = l_{\omega+t}$$

$$\lambda^{I(II)}_{\omega+t} = l^{ii}_{\omega+t}$$

$$\mu^{I:II}_{\omega+t} = \mu^{a}_{\omega+t}$$

$$\mu^{I}_{\omega+t} = \mu_{\omega+t}$$

$$\mu^{(I)}_{\omega+t} = \mu^{aa}_{\omega+t}$$

$$\mu^{(II)}_{\omega+t} = \nu_{\omega+t} \quad \text{(Schaertlin)}$$

Par contre, pour les fonctions $l^{II}_{\omega+t}$, $\lambda^{II(I)}_{\omega+t}$ une notation généralement reconnue fait défaut. (Dans sa publication: «Bases techniques pour l'assurance de groupes», le Bureau fédéral des assurances désigne notre fonction $l^{II}_{\omega+t}$ par $l^{(i)}_{\omega+t}$) [1]).

VI.

Conclusions.

1. L'actuaire ayant à déterminer, pour une collectivité où deux causes d'extinction I et II agissent simultanément, la probabilité annuelle qu'un assuré ne soit pas atteint, pendant l'année d'observation, par l'une au moins des deux causes d'extinction, a à choisir entre les deux possibilités suivantes:

a) détermination directe des probabilités expérimentales d'extinction dans la collectivité (I : II) et calcul de la probabilité annuelle désirée, par la formule

$$p^{I:II}_{\omega+t} = 1 - q^{I(e)}_{\omega+t} - q^{II(e)}_{\omega+t},$$

b) détermination, soit directe, soit à priori, des probabilités indépendantes d'extinction, dans deux collectivités distinctes (I) et (II), et calcul de la probabilité annuelle désirée, d'après le théorème de Karup

$$p^{I:II}_{\omega+t} = \left(1 - q^{I}_{\omega+t}\right)\left(1 - q^{II}_{\omega+t}\right)$$

[1]) Dans cette publication du Bureau fédéral des assurances, les formules 35 et 36 (p. 27*), 104 et 105 (p. 35*) fournissent pour les probabilités expérimentales d'extinction des valeurs approximatives.

2. Si l'actuaire veut faire intervenir les probabilités corrigées d'extinction, la probabilité annuelle désirée doit être calculée d'après la formule

$$p_{\omega+t}^{I:II} = 1 - \frac{1 - \left(1 - q_{\omega+t}^{I(c)}\right)\left(1 - q_{\omega+t}^{II(c)}\right)}{1 - \frac{1}{4}\, q_{\omega+t}^{I(c)} \cdot q_{\omega+t}^{II(c)}}.$$

L'emploi des probabilités corrigées et l'utilisation de la formule ci-dessus n'apportent, du reste, aucune simplification, ni au point de vue pratique, ni au point de vue théorique, pour la détermination de $p_{\omega+t}^{I:II}$. Les probabilités corrigées fournissent pour les probabilités indépendantes, de bonnes valeurs approximatives et faciles à obtenir.