Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 29 (1934)

Artikel: Über einige versicherungsmathematische Zinsprobleme

Autor: Borch, Fredrik

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967431

Über einige versicherungsmathematische Zinsprobleme.

Von **Fredrik Borch**, Oslo.

In dem folgenden werden wir die Aufgabe behandeln, den einem gegebenen Versicherungswerte entsprechenden Zinsfuss zu bestimmen, wenn keine Kommutationszahlen (D_x, N_x etc.) vorliegen, sondern nur die Sterbetafel (l_x, d_x). Eine einfache, aber mühevolle Lösung dieser Aufgabe besteht in der Berechnung einer Reihe von Kommutationszahlen für irgend einen willkürlichen Zinsfuss, der nahe an dem gesuchten Zinsfuss gelegen ist. Für die Wahl dieses Zinsfusses kann man, wie wir sehen werden, sehr einfach gewisse Grenzwerte aufstellen. Mittels bekannter Näherungsformeln für die Berechnung von Leibrentenwerten für mehrere Zinsfüsse, wenn die Kommutationszahlen für einen bestimmten Zinsfuss vorliegen, lässt sich dann unsere Aufgabe lösen, denn das Problem ist fast immer auf den Fall zurückführbar, wo der gegebene Versicherungswert eine Leibrente ist. In dieser Arbeit werden wir aber, indem wir nur das Problem bei der Leibrente betrachten, eine direkte Lösung suchen, ohne Kommutationszahlen zu benutzen.

Wir wollen zuerst verschiedene Grenzwerte für den gesuchten Zinsfuss aufstellen. Wir behandeln nur die jährliche nachschüssige Leibrente und schreiben diese:

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{1}^{n} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t = \sum_{1}^{n} f(t)\, F(t),$$

wo $f(t) = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} = {}_tp_x$ eine immer positive Funktion ist; und $F(t) = v^t = (1+i)^{-t}$ eine immer konvexe Funktion darstellt $(0 < i < 1)$. Der wohlbekannten Ungleichheit Hölder-Jensens zufolge haben wir da:

$$\sum_{1}^{n} f(t)\, F(t) > \sum_{1}^{n} f(t) \cdot F\left(\frac{\sum\limits_{1}^{n} t\, f(t)}{\sum\limits_{1}^{n} f(t)}\right)$$

Oder:

$$a_{x:\overline{n|}} > e_{x:\overline{n|}} \cdot v^{\frac{\sum_{1}^{n} t\, l_{x+t}}{\sum_{1}^{n} l_{x+t}}},$$

wo: $$e_{x:\overline{n|}} = \frac{\sum\limits_{1}^{n} l_{x+t}}{l_x}$$ und

$$\sum_{1}^{n} t\, l_{x+t} = \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{t=\tau}^{n} l_{x+t} = \sum_{1}^{\omega} t l_{x+t} - \sum_{n+1}^{\omega} t l_{x+t} - n \sum_{n+1}^{\omega} l_{x+t}.$$

$$\sum_{1}^{\omega} t\, l_{x+t} = \sum_{\tau=1}^{\omega} \sum_{t=\tau}^{\omega} l_{x+t}$$

bildet die zweite Summenreihe der l_x-Werte.

Durch Gleichstellung der beiden Seiten der obigen Ungleichheit bekommt man eine Gleichung, die einen Zinsfuss i_1 gibt, der kleiner ist als der gesuchte (mit i bezeichnete).

Aus:

$$v_1^{\frac{\sum_1^n t l_{x+t}}{\sum_1^n l_{x+t}}} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{e_{x:\overline{n}|}} \tag{1}$$

findet man:

$$\underline{i_1 < i}$$

Durch die Ungleichheit Tchebychefs finden wir einen anderen unteren Grenzwert (i_2). $f(t)$ und $F(t)$ sind beide abnehmende Funktionen, und $\sum_1^n F(t) > 0$.

Tchebychefs Ungleichheit lautet dann:

$$\frac{\sum_1^n f(t)\,F(t)}{\sum_1^n F(t)} > \frac{\sum_1^n f(t)}{n}$$

oder:

$$\frac{a_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} > \frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}$$

Durch Gleichstellung der beiden Seiten dieser Ungleichheit bekommt man eine Gleichung, die auch einen unteren Grenzwert des gesuchten i liefert:

Aus:

$$a_{\overline{n}|}^{(i_2)} = n\,\frac{a_{x:\overline{n}|}}{e_{x:\overline{n}|}} \tag{2}$$

ergibt sich:

$$\underline{i_2 < i}$$

Einen oberen Grenzwert (i_3) findet man durch Gleichstellung der beiden Seiten der wohlbekannten Ungleichheit:

$$a_{x:\overline{n}|} < a_{\overline{e_{x:\overline{n}|}}|}$$

Nämlich aus:

$$a^{(i_3)}_{\overline{e_{x:\overline{n}|}}|} = a_{x:\overline{n}|} \tag{3}$$

findet man:

$$\underline{i_3 > i}$$

Mit Hilfe der gewöhnlichen Zinstafeln stellt man mittels der Gleichungen (1), (2) und (3) diese Grenzwerte leicht auf. Die Grenzwerte sind aber sehr roh und dürfen nicht als Näherungswerte betrachtet werden. Sie bieten eigentlich nur eine Richtschnur für die Wahl eines Ausgangswertes für eine schärfere Berechnung des gesuchten Zinsfusses dar. Für diese schärfere Berechnung (ohne Kommutationszahlen zu verwenden) scheint das Verfahren naheliegend, die Leibrentenwerte durch die l_x-Werte und die gewöhnlichen Grössen der Zinsrechnung darzustellen zu versuchen und hieraus den gesuchten Zinsfuss durch inverse Interpolation oder mittels Newtons Approximationsmethode zu berechnen. Die grösste Schwierigkeit besteht dann in der Darstellung der Leibrentenwerte, ohne Kommutationszahlen zu verwenden. Da die Reihenentwicklung einer Leibrente nach Potenzen von i bekanntlich konvergiert ($0 < i < 1$), scheint vielleicht auf den ersten Blick eine direkte Reihenberechnung des Leibrentenwertes der einfachste Weg zur Lösung unseres Problemes zu sein. Diese Reihe

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{\sum\limits_{1}^{n} l_{x+t}}{l_x} - \frac{\sum\limits_{1}^{n} t\, l_{x+t}}{l_x}\, i + \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{n} t\,(t+1)\, l_{x+t}}{l_x}\, i^2 + \cdots$$

konvergiert aber langsam, so dass mehrere Glieder nötig sind, um eine befriedigende Genauigkeit zu erreichen. Dabei müssen höhere Summen der l_x-Werte mit in die Rechnung gezogen werden. Diese sind aber sehr grosse, rechnerisch unangenehme Zahlen, deren Handhabung die direkte Reihenberechnung ausserordentlich beschwerlich und praktisch unbrauchbar macht. Wir werden deshalb in dem folgenden höhere Summen der l_x-Werte als die zweite — die der S_x-Reihe der Kommutationszahlen entspricht — vermeiden.

Zuerst wollen wir die folgende Formel betrachten:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - v^{m\,(i,\,x,\,n)}}{i} = a_{\overline{m\,(x,\,n,\,i)}|}\,, \tag{4}$$

wo:

$$m\,(i,\,x,\,n) = e_{x:\overline{n}|}\left(1 - i\left(\frac{\sum\limits_{1}^{n} t\, l_{x+t}}{\sum\limits_{1}^{n} l_{x+t}} - \frac{e_{x:\overline{n}|} + 1}{2}\right)\right)$$

Diese Formel, die von J. F. Steffensen [1]) für lebenslängliche Renten hergeleitet ist, ist zu unserem Zwecke recht gut verwendbar. Indem wir in dieser Arbeit nur die Newtonsche Approximationsmethode benützen wer-

---

[1]) J. F. Steffensen: On certain inequalities between mean values, and their application to actuarial problems. Skand. Aktuarietidsskrift 1918, p. 82.

den, müssen wir die Abgeleitete mit Bezug auf i von Formel (4) suchen und bekommen:

$$\frac{d}{di}\, a_{\overline{m\,(x,n,i)}|} =$$

$$= \frac{1}{i}\left[e_{x:\overline{n}|}\, v^{m\,(x,n,i)} \left(v - (d+\delta)\left(\frac{\sum\limits_{1}^{n} t\, l_{x+t}}{\sum\limits_{1}^{n} l_{x+t}} - \frac{e_{x:\overline{n}|}+1}{2} \right)\right) - a_{\overline{m\,(x,n,i)}|} \right],$$

wo δ = die Verzinsungsintensität $= ln\,(1+i)$ bedeutet.

Die Tafel unten beleuchtet die Verwendbarkeit der Formel (4) für die Lösung unserer Aufgabe. Eine Reihe von Zahlenwerten für lebenslängliche Leibrenten ist gegeben und die Frage ist, die diesen Werten entsprechenden Zinsfüsse zu bestimmen, wenn die Sterbetafel im Text-Book (Part II) zugrunde gelegt wird.

Mittels (1) und (3) sind untere und obere Grenzwerte der gesuchten Zinsfüsse aufgestellt. Zwischen diesen Grenzwerten sind willkürliche Ausgangswerte $\bar{\imath}$ gewählt und die gesuchten Zinsfüsse mittels Formel (4) und ihrer Abgeleiteten durch einmalige Verwendung von Newtons Approximationsformel

$$i = \bar{\imath} + \frac{a_x - a_x^{(\bar{\imath})}}{\frac{d}{d\bar{\imath}}\, a_x^{(\bar{\imath})}} \qquad (5)$$

berechnet.

x	Gegebene Leibrentenwerte a_x	Grenzwerte des gesuchten Zinsfusses Formeln (1) und (3)	Gewählter Ausgangswert $100\,\bar{\imath}$	Formeln (4) und (5) geben $100\,i$
15	19.403	$3.25 < 100\,i < 4.50$	3.75	4.031
25	17.949	$3.25 < 100\,i < 4.50$	3.75	4.023
35	16.221	$3.375 < 100\,i < 4.625$	3.75	4.006
45	13.900	$3.50 < 100\,i < 4.75$	4.125	3.991
55	11.024	$3.675 < 100\,i < 4.875$	4.25	3.959
65	7.850	$3.675 < 100\,i < 5.25$	4.25	3.929
75	4.846	$3.75 < 100\,i < 5.375$	4.375	3.907

Der genaue Wert ist für sämtliche Renten: $100\,i = 4.00$.

Von den drei höchsten Altern abgesehen, sind die erreichten Resultate recht gut.

Doch werden wir versuchen, ein noch schärferes Verfahren für die Berechnung von Leibrentenwerten ohne Kommutationszahlen zu verwenden und dabei auch eine schärfere Lösung unserer Aufgabe herzuleiten. Wir wollen dann in erster Linie auf die in der praktischen Lebensversicherung am häufigsten auftretenden abgekürzten Leibrenten zielen.

In einer vorherigen Arbeit habe ich die folgende Formel gegeben [1]):

$$a_{x:\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} \frac{e_{x:\overline{n|}}}{n} \varphi(x, n, i) \tag{6}$$

---

[1]) Betrachtungen über die Darstellung von abgekürzten Leibrenten mittels Zeitrenten. Skand. Aktuarietidsskrift. Heft 1—2, 1933.

Wo:

$$\varphi(x, n, i) = 1 + i \left(\frac{n+1}{2} - \frac{\sum_{1}^{n} t\, l_{x+t}}{\sum_{1}^{n} l_{x+t}} \right)$$

Bei kleiner Dauer n (20 bis höchstens 25 Jahre) ist diese Formel recht verwendbar und zu unserem Zwecke sehr bequem.

Eine sehr scharfe Formel, die Berechnung fast aller in der Praxis vorkommenden abgekürzten Leibrenten gestattet, finden wir in der folgenden Weise: Bekanntlich verlaufen die meisten Absterbeordnungen (l_x) konkav vom Kindesalter bis in das hohe Greisenalter, und abgekürzte Versicherungswerte verlaufen deshalb in der Praxis fast immer über einer durchaus konkaven Absterbeordnung. Nimmt die Absterbeordnung l_{x+t} im Intervalle $(0, n)$ gradlinig ab von l_x bis l_{x+n}, so ist der Wert der n-jährigen nachschüssigen Leibrente ganz genau berechnet durch

$$a_{\overline{n}|} \frac{l_x \left(1 - \frac{\sum_{1}^{n} t\, v^t}{n\, a_{\overline{n}|}} \right) + \frac{\sum_{1}^{n} t\, v^t}{n\, a_{\overline{n}|}}\, l_{x+n}}{l_x} = \frac{1 - {}_n p_x}{i} +$$

$$+ a_{\overline{n}|} \left(1 - \frac{1 - {}_n p_x}{n} \left(n + 1 + \frac{1}{i} \right) \right)$$

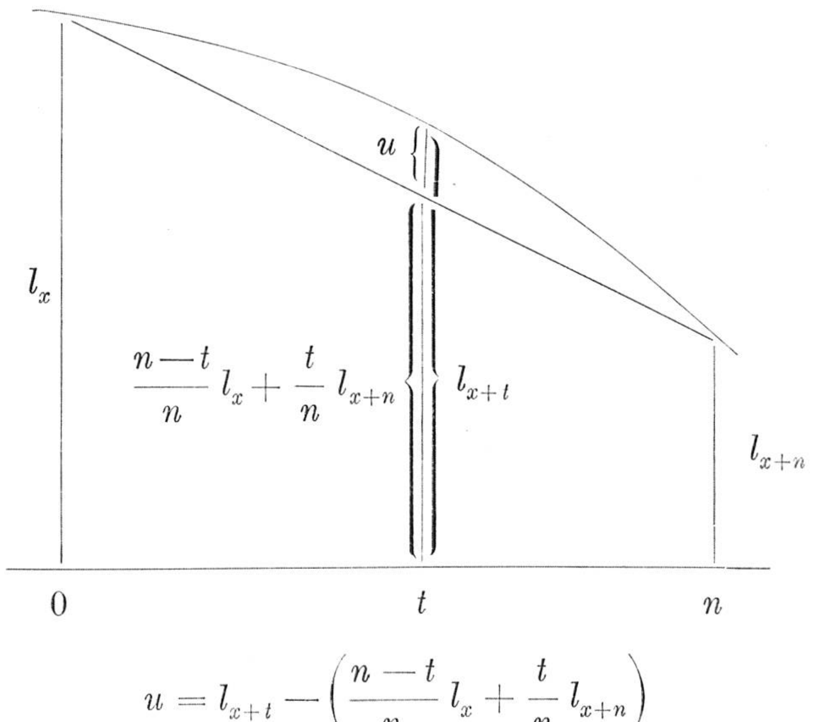
Vorausgesetzt, dass l_{x+t} im Intervalle $(0, n)$ konkav verläuft, muss die Grösse oben um das folgende Korrektionsglied vergrössert werden, damit sich der gesuchte Leibrentenwert ergibt:

$$\frac{1}{l_x}\sum_1^n\left(l_{x+t}-\left(\frac{n-t}{n}\,l_x+\frac{t}{n}\,l_{x+n}\right)\right)v^t=a_{\overline{n}|}\,Q\,(x,n,i),$$

wo:

$$Q\,(x,n,i)=\frac{\frac{1}{l_x}\sum_1^n\left(l_{x+t}-\left(\frac{n-t}{n}\,l_x+\frac{t}{n}\,l_{x+n}\right)\right)v^t}{\sum_1^n v^t}=$$

$$=\frac{a_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}-1+\frac{1}{n}\,(1-{}_np_x)\,\frac{\sum_1^n t\,v^t}{\sum_1^n v^t}$$



$$u=l_{x+t}-\left(\frac{n-t}{n}\,l_x+\frac{t}{n}\,l_{x+n}\right)$$

Die Funktion $Q(x, n, i)$ entwickeln wir in eine Reihe nach Potenzen von i und bekommen:

$$Q(x, n, 0) = \frac{e_{x:\overline{n|}}}{n} - 1 + \frac{1 - {}_n p_x}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$$

$$\frac{d}{di} Q(x, n, 0) = \frac{e_{x:\overline{n|}}}{n} \left(\frac{n+1}{2} - \frac{\sum_1^n t\, l_{x+t}}{\sum_1^n l_{x+t}} \right) - \frac{1 - {}_n p_x}{n} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{6}$$

$$\frac{d^2}{di^2} Q(x, n, 0) = \frac{1}{n\, l_x} \left(\sum_1^n t(t+1)\, l_{x+t} - (n+1) \sum_1^n t\, l_{x+t} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2-1}{6} \sum_1^n l_{x+t} \right) + \frac{1 - {}_n p_x}{n} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{6}$$

In $\frac{d^2}{di^2} Q(x, n, 0)$ finden wir die dritte Summe der l_x-Werte, die wir $\frac{1}{2} \sum t(t+1)\, l_{x+t}$ schreiben können. Indem wir unsere Reihe mit der zweiten Potenz von i abbrechen, wollen wir einen «Näherungswert» für $\frac{d^2}{di^2} Q(x, n, 0)$ bestimmen und dabei die dritte Summe der l_x-Werte vermeiden.

Wir betrachten die Grösse:

$$\frac{1}{n\, l_x} \left(\sum_1^n t(t+1)\, l_{x+t} - (n+1) \sum_1^n t\, l_{x+t} + \frac{n^2-1}{6} \sum_1^n l_{x+t} \right) =$$

$$= \frac{1}{n\, l_x} \sum_1^n l_{x+t} \left(t^2 - n\, t + \frac{n^2-1}{6} \right) = \frac{1}{n\, l_x} \sum_1^n g(t)\, h(t)$$

Hier ist: $g(t) = l_{x+t}$ und $h(t) = t^2 - n\,t + \frac{n^2-1}{6}$

Die Funktion $h(t)$ ist eine Parabel zweiten Grades mit der Achse $x = \frac{n}{2}$ und dem Schnittpunkt mit der Achse $\left(\frac{n}{2},\ -\frac{n^2+2}{12}\right)$.

Wir schreiben:

$$h(t) = s(t) - \frac{n^2+2}{12}$$

Also ist:

$$s(t) = h(t) + \frac{n^2+2}{12} = t^2 - nt + \frac{n^2}{4}$$

$s(t)$ ist dann eine immer positive Funktion. Wenn, wie vorausgesetzt, $g(t) = l_{x+t}$ im ganzen Intervalle $(0, n)$ konkav ist, gibt die Ungleichheit Hölder-Jensens:

$$\sum_1^n g(t)\,h(t) < \sum_1^n s(t) \cdot g\left(\frac{\sum_1^n t\,s(t)}{\sum_1^n s(t)}\right) - \frac{n^2+2}{12}\sum_1^n g(t)$$

Wir finden:

$$\sum_1^n s(t) = n\,\frac{n^2+2}{12}$$

und

$$\frac{\sum_1^n t\,s(t)}{\sum_1^n s(t)} = n\,\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{n^2+2}$$

$$g\left(\frac{\sum_{1}^{n} t\, s(t)}{\sum_{1}^{n} s(t)}\right) = l_{x+\frac{(n+1)(n+2)}{2(n^2+1)}n} \sim l_{x+\frac{n+3}{2}}$$

Die hier eingeführte Annäherung

$$n\,\frac{(n+1)(n+2)}{2(n^2+2)} \sim \frac{n+3}{2}$$

ist, von sehr kleinen Werten der Dauer n abgesehen, sehr scharf, und wenn n klein ist, ist das hier betrachtete Glied unserer Reihenentwicklung bedeutungslos.

Wir haben also:

$$\frac{1}{n\,l_x}\sum_{1}^{n} g(t)\,h(t) < \frac{n^2+2}{12}\left({}_{\frac{n+3}{2}}p_x - \frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\right)$$

Andererseits können wir schreiben:

$$\frac{1}{n\,l_x}\sum_{1}^{n} g(t)\,h(t) > \frac{1}{12}\left((n^2+2)\left(1-\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{2}(1-{}_np_x)\right)$$

Die rechte Seite dieser letzten Ungleichheit ist der genaue Wert von $\frac{1}{n\,l_x}\sum_{1}^{n} g(t)\,h(t)$, wenn l_{x+t} gradlinig von l_x bis l_{x+n} abnimmt.

Wir bilden den Mittelwert dieser zwei Grenzwerte und bekommen einen zu unserem Zwecke recht gut verwendbaren Wert. Wir schreiben also:

$$\frac{1}{n\,l_x}\sum_{1}^{n} g(t)\,h(t) = \frac{1}{24}\Bigg[(n^2+2)\,(1+{}_{\frac{n+3}{2}}p_x)\,-$$

$$-\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\,(1-{}_np_x)\Bigg] - \frac{n^2+2}{12}\cdot\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}$$

Und eingesetzt:

$$\frac{d^2}{di^2}\,Q\,(x,n,0) = \frac{n^2+2}{24}\,(1+{}_{\frac{n+3}{2}}p_x)\,-$$

$$-\frac{1-{}_np_x}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\left(\frac{n^2+2}{24}-\frac{n-1}{12}\right)-\frac{n^2+2}{12}\cdot\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}$$

Indem wir, wie erwähnt, höhere Potenzen als i^2 in unserer Reihenentwickelung der Funktion $Q\,(x,\,n,\,i)$ vernachlässigen, erhalten wir die folgende Formel:

$$\underline{a_{x:\overline{n}|} = \frac{1-{}_np_x}{i} + a_{\overline{n}|}\left[\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\,\Phi\,(x,n,i) - \Psi\,(x,n,i)\right]} \qquad (7)$$

Hier sind $\Phi\,(x,\,n,\,i)$ und $\Psi\,(x,\,n,\,i)$ die folgenden, rechnerisch verhältnismässig einfachen Funktionen, die sich leicht berechnen lassen:

$$\Phi\,(x,n,i) = 1 + i\left(\frac{n+1}{2} - \frac{\sum_{1}^{n} t\,l_{x+t}}{\sum_{1}^{n} l_{x+t}} - \frac{n^2+2}{24}\,i\right)$$

$$\Psi\,(x,n,i) = \frac{1-{}_np_x}{n}\left[\frac{1}{i}+\frac{n+1}{2}\left(1+i\left(\frac{n-1}{6}\left(1-\frac{i}{4}\right)+i\,\frac{n^2+2}{48}\right)\right)\right]-$$

$$-\,i^2\,\frac{n^2+2}{48}\,(1+{}_{\frac{n+3}{2}}p_x)$$

Die Formel (7) lässt sich, wie wir später beispielsweise sehen werden, für sämtliche abgekürzten Leibrenten verwenden, deren Dauer nicht über dem ersten (im Kindesalter) oder dem letzten Kehrpunkte (im Greisenalter) der Absterbeordnung verlaufen. Bekanntlich macht die Absterbeordnung nach dem Kehrpunkte im Greisenalter eine starke konvexe Krümmung und nähert sich der Abszissenachse asymptotisch. Für Leibrenten, die nur über diesem letzten Teile der Absterbeordnung verlaufen, empfiehlt sich dann offenbar nicht das obenstehende Verfahren: die Leibrente von einem auf gradlinig abnehmender Absterbeordnung aufgebauten Teile und einem Korrektionsgliede zusammenzusetzen. Auch für diese Leibrenten bekommen wir eine scharfe Formel in der folgenden Weise:

Wir schreiben:

$$a_{x:\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\, R\,(x, n, i)$$

Die Funktion $R\,(x, n, i) = \dfrac{a_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$ entwickeln wir in eine Reihe nach Potenzen von i. Brechen wir die Reihe nach der ersten Potenz ab, so erhalten wir die Formel (6) oben. Nehmen wir noch ein Glied mit in die Rechnung hinein, so haben wir:

$$\frac{d^2}{di^2}\, R\,(x, n, 0) =$$

$$= \frac{1}{n\, l_x}\left[\sum_1^n t\,(t+1)\, l_{x+t} - (n+1)\sum_1^n t\, l_{x+t} + \frac{n^2-1}{6}\sum_1^n l_{x+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{n\, l_x}\sum_1^n g\,(t)\, h\,(t)$$

Für diese Grösse können wir auch hier mit gutem Erfolge denselben Wert wie in Formel (7) benutzen.

Trifft der letzte Kehrpunkt der Absterbeordnung beim Alter z ein, so bekommen wir nun:

$$x \overline{\overline{>}} z: \quad \underline{a_{x:\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\left[\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\,\Phi(x, n, i) + P(x, n, i)\right]} \quad (8)$$

$$\Phi(x, n, i) \qquad \text{wie oben}$$

$$P(x, n, i) = \frac{i^2}{2}\left[\frac{n^2+2}{24}\left(1 + {}_{\frac{n+3}{2}}p_x\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{48}\left(1 - {}_n p_x\right)\right]$$

Bei lebenslänglichen Renten hat man hier: $n = \omega - x$, wo ω das höchste Alter in der Absterbeordnung bezeichnet ($l_\omega > 0$).

Leibrenten, deren Dauer über dem letzten Kehrpunkte der Absterbeordnung verlaufen, lassen sich als Summe von zwei Gliedern sehr scharf mittels Formeln (7) und (8) berechnen. Im Falle der lebenslänglichen Renten hat man:

$$a_x = a_{x:\overline{z-x}|} + v^{z-x} \cdot {}_{z-x}p_x \cdot a_z$$

Für $a_{x:\overline{z-x}|}$ benützt man Formel (7) und für a_z Formel (8).

Die Kehrpunkte der Absterbeordnung findet man in der Praxis sehr einfach durch Betrachtung der d_x-Reihe [1]).

In den Tafeln unten sind die Formeln (7) und (8) für die Grundlage im Text-Book (Part II) geprüft. Bei dieser Grundlage hat die Absterbeordnung Kehrpunkte

---

[1]) Siehe die früher erwähnte Arbeit des Verfassers. Die Absterbeordnung hat Kehrpunkte bei denselben Werten von x, wo die d_x-Reihe Extrema hat.

Abgekürzte Renten $a_{x:\overline{n}|}$

x	Dauer $n=z-x=$ $=73-x$	Zinsfuss $2^1/_2$% $i=0.025$			Zinsfuss 4% $i=0.04$			Zinsfuss 6% $i=0.06$		
		Formel (7)	Genau	Fehler	Formel (7)	Genau	Fehler	Formel (7)	Genau	Fehler
15	58	25.071	25.052	0.019	19.245	19.230	0.015	14.350	14.370	—0.020
25	48	22.336	22.316	0.020	17.707	17.678	0.029	13.600	13.575	0.025
35	38	19.235	19.224	0.011	15.807	15.788	0.019	12.569	12.543	0.026
45	28	15.423	15.420	0.003	13.199	13.192	0.007	10.943	10.931	0.012
55	18	10.941	10.941	0.000	9.798	9.798	0.000	8.542	8.541	0.001

Lebenslängliche Renten: a_x $(\omega = 101,\ z = 73)$

x	Zinsfuss $2^1/_2$ % $i = 0.025$			Zinsfuss 4 % $i = 0.04$			Zinsfuss 6 % $i = 0.06$		
	Formeln (7) und (8)	Genau	Fehler	Formeln (7) und (8)	Genau	Fehler	Formeln (7) und (8)	Genau	Fehler
15	25.505	25.486	0.019	19.418	19.403	0.015	14.402	14.422	—0.020
25	22.923	22.902	0.021	17.977	17.949	0.028	13.699	13.674	0.025
35	20.046	20.034	0.012	16.238	16.221	0.017	12.760	12.734	0.026
45	16.571	16.566	0.005	13.905	13.900	0.005	11.321	11.309	0.012
55	12.661	12.659	0.002	11.021	11.024	—0.003	9.334	9.333	0.001
$z=73$	5.839	5.832	0.007	5.392	5.408	—0.016	4.918	4.920	—0.002

beim Alter 13 und beim Alter 73 Jahre ($z = 73$). Zwischen diesen beiden Altern ist die Absterbeordnung konkav, sonst konvex. Um die Formel (7) für Leibrenten von der längsten Dauer zu prüfen, sind die Dauern sämtlicher abgekürzten Renten bis zum letzten Kehrpunkte (bei Alter 73) der Absterbeordnung erstreckt.

Der lange konkave Verlauf der Absterbeordnung — vom ersten Kehrpunkte im Kindesalter zum letzten Kehrpunkte im Greisenalter — wird bekanntlich bei einigen Sterbetafeln von einem kürzeren konvexen Verlaufe im Jugendalter gestört. Mit Bezug auf die Verwendbarkeit der Formel (7) ist aber diese Störung des konkaven Verlaufes der Absterbeordnung bedeutungslos und darf ausser acht gelassen werden. Wir rechnen also immer, als ob die Absterbeordnung ununterbrochen konkav vom ersten zum letzten Kehrpunkte verlaufe, und dürfen über dieser ganzen Strecke Formel (7) verwenden, was die Tafel unten, die für die norwegische Lebensversicherungsgrundlage N. 1925 berechnet ist, bestätigt. Bei dieser Grundlage hat die Absterbeordnung wegen einer ungewöhnlich hohen Jugendsterblichkeit, ausser bei den Altern 11 und 77 Jahre, auch Kehrpunkte bei den Altern 21 und 31 Jahre, und verlauft zwischen den letzten Altern konvex. Die Tafel gilt für abgekürzte Renten, deren Dauer bis zum letzten Kehrpunkte der Absterbeordnung verläuft, und die Formel (7) ist ohne Rücksicht auf die Kehrpunkte bei den Altern 21 und 31 verwendet.

Unsere Formeln (7) und (8), die also durchaus sehr scharf sind, sind auch für die Lösung unserer Aufgabe gut verwendbar. Indem wir für die Berechnung des einem gegebenen Leibrentenbarwertes entsprechenden Zinsfusses Newtons Approximationsformel (5) benutzen werden, müssen wir von unseren Formeln die Abgeleitete

Abgekürzte Renten: $a_{x:\overline{n}|}$ $(n = z - x)$

x	Dauer $n = 77 - x$	Zinsfuss 4 % $i = 0.04$ Formel (7)	Genau	Fehler	Zinsfuss 5 % $i = 0.05$ Formel (7)	Genau	Fehler
15	62	19.558	19.547	0.011	16.648	16.662	—0.014
25	52	18.616	18.578	0.038	16.089	16.052	0.037
35	42	16.942	16.913	0.029	14.914	14.879	0.035
45	32	14.475	14.461	0.014	13.019	13.002	0.017
55	22	11.262	11.261	0.001	10.385	10.385	0.000

mit Bezug auf i der Leibrente herleiten. Mit Klammern — $[a_{x:\overline{n}|}]$ — bezeichnen wir einen mittels Formeln (7) und (8) berechneten Leibrentenwert und bekommen:

Für die Leibrente, deren Dauer *nicht über* den letzten Kehrpunkt (z) der Absterbeordnung hinausreicht:

$$\frac{d}{di}[a_{x:\overline{n}|}] = \frac{1}{i}\left[n\, v^{n+1}\left(\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\,\Phi(x, n, i) - \Psi(x, n, i)\right) - [a_{x:\overline{n}|}]\right] +$$

$$+ a_{\overline{n}|}\left[\frac{e_{x:\overline{n}|}}{n}\,\frac{d}{di}\,\Phi(x, n, i) - \frac{d}{di}\,\Psi(x, n, i)\right],$$

wo:

$$\frac{d}{di}\,\Phi(x, n, i) = \frac{n+1}{2} - \frac{n^2+2}{12}\, i - \frac{\sum_1^n t\, l_{x+t}}{\sum_1^n l_{x+t}}$$

$$\frac{d}{di}\,\Psi(x, n, i) = \frac{1 - {}_n p_x}{n}\left[\frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\left(1 - \frac{i}{2}\right) + i\,\frac{n^2+2}{24}\right) - \frac{1}{i^2}\right] -$$

$$- i\,\frac{n^2+2}{24}\,(1 + {}_{\frac{n+3}{2}}p_x)$$

Für die Leibrente, deren Dauer *über* den letzten Kehrpunkt der Absterbeordnung hinausreicht:

$$\frac{d}{di}\left[a_{x:\overline{n|}}\right] = \frac{d}{di}\left[a_{x:\overline{z-x|}}\right] +$$

$$+ {}_{z-x}p_x \, v^{z-x}\left[\frac{d}{di}\left[a_{z:\overline{x+n-z|}}\right] - v\,(z-x)\left[a_{z:\overline{x+n-z|}}\right]\right],$$

$$\text{wo:} \qquad \frac{d}{di}\left[a_{z:\overline{x+n-z|}}\right] =$$

$$= a_{\overline{x+n-z|}}\left[\frac{e_{z:\overline{x+n-z|}}}{x+n-z}\,\frac{d}{di}\,\Phi\,(z,\, x+n-z,\, i) + \frac{d}{di}\,P\,(z,\, x+n-z,\, i)\right] -$$

$$- \frac{a_{z:\overline{x+n-z|}}}{i}\left(1 - \frac{x+n-z}{s_{\overline{x+n-z|}}}\right)$$

Hier ist:

$$\frac{d}{di}\,\Phi\,(z,\, x+n-z,\, i) =$$

$$= \frac{x+n+1-z}{2} - \frac{(x+n-z)^2+2}{12}\,i - \frac{\sum\limits_{1}^{x+n-z} t\, l_{z+t}}{\sum\limits_{1}^{x+n-z} l_{z+t}}$$

$$\frac{d}{di}\,P\,(z,\, x+n-z,\, i) = i\left[\frac{(x+n-z)^2+2}{24}\left(1 + {}_{\frac{x+n-z+3}{2}}p_z\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(x+n-z+1)\,(x+n-z+2)}{48}\left(1 - {}_{x+n-z}p_z\right)\right]$$

$$s_{\overline{x+n-z|}} = \sum_{1}^{x+n-z}(1+i)^t$$

Bei lebenslänglichen Renten ist: $x + n = \omega$.

Die folgenden zwei Tafeln zeigen einige Resultate bei Verwendung der Formeln (7) und (8) und einmaligen Approximation mittels Newtons Formel (5) für die Lösung unserer Aufgabe. In der ersten Tafel sind einige gegebene Zahlenwerte als Barwerte der abgekürzten, zum letzten Kehrpunkte der Absterbeordnung laufenden Leibrenten ($a_{x:\overline{z-x|}}$) betrachtet, wenn die Sterbetafel im Text-Book ($z = 73$) zugrunde gelegt wird. Die diesen Barwerten entsprechenden Zinsfüsse sind mittels der Formeln (7) und (5) und zum Vergleich auch mittels Formeln (4) [und (5)] berechnet.

x	Gegebene Leibrentenbarwerte: $a_{x:\overline{z-x|}} = a_{x:\overline{73-x|}}$	Grenzwerte des gesuchten Zinsfusses Formeln (2) und (3)	Gewählter Ausgangswert $100\,i$	Die Formeln (7) und (5) geben $100\,i$	Die Formeln (4) und (5) geben $100\,i$
15	19.230	$3.25 < 100\,i < 4.50$	3.75	3.996	4.050
25	17.678	$3.25 < 100\,i < 4.50$	3.75	4.003	4.048
35	15.788	$3.25 < 100\,i < 4.50$	3.75	4.003	4.039
45	13.192	$3.375 < 100\,i < 4.625$	4.25	4.001	4.033
55	9.798	$3.375 < 100\,i < 4.625$	4.25	3.998	4.023

Der genaue Wert der gesuchten Zinsfüsse ist immer 4 %.

In der nächsten Tafel sind für lebenslängliche Leibrenten dieselben Zahlenwerte wie in der ersten Tafel (Seite 27) gegeben, und für die Sterbegrundlage im Text-Book die entsprechenden Zinsfüsse mittels der Formeln (7), (8) und (5) berechnet.

Der genaue Wert ist immer: $100\,i = 4.00$, und die Resultate lassen sich direkt mit den entsprechenden in der ersten Tafel (Seite 27) vergleichen.

x	Gegebene Leibrenten-barwerte: a_x	Gewählter Ausgangs-wert: $100\,\bar{i}$	Die Formeln (7), (8) und (5) geben: $100\,i$
15	19.403	3.75	3.994
25	17.949	3.75	4.001
35	16.221	3.75	4.001
45	13.900	4.25	3.998
55	11.024	4.25	3.993
65	7.850	4.25	3.980
75	4.846	4.375	3.939

Von dem höchsten Alter (75 Jahre) abgesehen, geben also unsere Formeln (7) und (8) die gesuchten Zinsfüsse mit sehr scharfer Annäherung. Die Formel (4) scheint bessere Werte der gesuchten Zinsfüsse bei lebenslänglichen als bei abgekürzten Renten zu liefern, und in der Tat gibt diese Formel gewöhnlich die Leibrentenbarwerte verhältnismässig schärfer für lebenslängliche als für abgekürzte Renten. Wie erwähnt, hat auch J. F. Steffensen seine Formel nur für lebenslängliche Renten gegeben.

Unsere Auseinandersetzungen für die Herleitung der Formeln (7) und (8) dürften auch für die Lösung des sogenannten Zinsfussproblems bei der Leibrente von Nutzen sein. Die Aufgabe ist hier, wenn die Kommutationszahlen für einen Zinsfuss i vorliegen, einzelne Leibrentenwerte für irgendeinen Zinsfuss i_1 zu berechnen. Wir bezeichnen mit $a^1_{x:\overline{n}|}$ den gesuchten Leibrentenwert (Zinsfuss i_1); und mit h die Differenz der Zinsfüsse: $h = i_1 - i$. Wir haben dann wie bekannt:

$$v_1 = \frac{1}{1 + i_1} = v\,(1 + hv)^{-1}$$

und

$$a^1_{x:\overline{n|}} = \sum_1^n \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t (1 + hv)^{-t} = \sum_1^n \frac{D_{x+t}}{D_x} (1 + hv)^{-t}$$

Untersucht man die Kurve der diskontierten Zahlen (D_x), so findet man, dass sie für die in der Praxis gewöhnlichen Zinsfüsse durchaus konvex verläuft. (Wenigstens der Verfasser hat nur konvexe D_x-Kurven gesehen.) Wir schreiben:

$$a^1_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - (1 + hv)^{-n}}{hv} \cdot \frac{\sum\limits_1^n \frac{D_{x+t}}{D_x} (1 + hv)^{-t}}{\sum\limits_1^n (1 + hv)^{-t}}$$

Die Grösse

$$\frac{\sum\limits_1^n \frac{D_{x+t}}{D_x} (1 + hv)^{-t}}{\sum\limits_1^n (1 + hv)^{-t}}$$

entwickeln wir in eine Reihe nach Potenzen von hv und verfahren in ganz analoger Weise wie bei der Herleitung der Formel (8), indem wir die Reihe nach der zweiten Potenz von hv abbrechen und die zweite Abgeleitete der Funktion durch dasselbe Näherungsverfahren, wie oben bei Formel (8), bestimmen.

Wir bekommen dann ganz einfach:

$$(9) \qquad a^1_{x:\overline{n}|} =$$

$$= (1 - (1 + hv)^{-n}) \Bigg[\frac{a_{x:\overline{n}|}}{n} \left(\frac{1}{hv} + \frac{n+1}{2} - \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\, N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}} - \right.$$

$$\left. - hv \frac{n^2+2}{24} \right) + \frac{hv}{2} \left(\frac{n^2+2}{24} \left(1 + \frac{D_{x+\frac{n+3}{2}}}{D_x} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{48} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \right) \right] {}^{1)}$$

Die folgenden Beispiele beleuchten die Verwendbarkeit der Formel (9). Für die Grundlage im Text-Book sind die Kommutationszahlen für den Zinsfuss 4 % überall als bekannt betrachtet ($i = 0.04$).

Lebenslängliche Leibrenten: $n = \omega - x \quad a^1_x$

x	$n = 101 - x$	$i_1 = 0.035 \quad h = -0.005$			$i_1 = 0.045 \quad h = 0.005$		
		Formel (9)	Genau	Fehler	Formel (9)	Genau	Fehler
15	86	21.122	21.134	—0.012	17.903	17.900	0.003
35	66	17.346	17.349	—0.003	15.210	15.208	0.002
55	46	11.528	11.528	—0.000	10.556	10.556	0.000
75	26	4.959	4.958	—0.001	4.740	4.739	0.001

[1]) Man rechnet gewöhnlich einfach:

$$1 - (1 + hv)^{-n} = \frac{(1+i_1)^n - (1+i)^n}{(1+i_1)^n}$$

Abgekürzte Leibrenten: $n = 30 \quad a^1_{x:\overline{30}|}$

x	$i_1 = 0.03$ $h = -0.01$			$i_1 = 0.05$ $h = 0.01$		
	Formel (9)	Genau	Fehler	Formel (9)	Genau	Fehler
15	18.044	18.046	−0.002	14.295	14.296	−0.001
35	16.632	16.633	−0.001	13.323	13.323	0.000
55	11.981	11.985	−0.004	10.072	10.073	−0.001
65	8.396	8.394	0.002	7.358	7.361	−0.003

$n = 90 - x \quad a^1_{x:\overline{90-x}|}$

x	$n = 90-x$	$i_1 = 0.03$ $h = -0.01$			$i_1 = 0.05$ $h = 0.01$		
		Formel (9)	Genau	Fehler	Formel (9)	Genau	Fehler
15	75	23.081	23.140	−0.059	16.596	16.588	0.008
35	55	18.601	18.608	−0.007	14.301	14.297	0.004
55	35	12.065	12.061	0.004	10.115	10.113	0.002

Die Formel, die in erster Linie auf die abgekürzten Renten zielt, ist auch für lebenslängliche Renten gut verwendbar, wenn die Zinsdifferenz nicht zu gross ist. Wie man sieht, bekommt man die besten Resultate, wenn die Zinsdifferenz h positiv ist.