B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

Über den natürlichen Beharrungszustand bei einer Rentenkasse.

Von Prof. Dr. **W. Friedli**, Bern.

Im nachstehenden sind einige Betrachtungen über die den natürlichen Beharrungszustand einer Rentengesamtheit beherrschenden Grössenbeziehungen zusammengestellt. Diese geben Anlass zu einer interessanten Gegenüberstellung von mittlerer Lebenserwartung und Rentenbarwert, die ihrerseits besonders bei der Übertragung auf die Invalidenversicherung, unter Heranziehung der Schaertlinschen Gesamtheiten und Relationen, zu einer einfachen Darstellung des Deckungskapitals einer Invalidenkasse führt. Ferner ziehen wir die Moserschen Integralrelationen zum Vergleiche heran, indem wir zeigen, dass unsere Formel einen Spezialfall von Mosers sogenanntem Dreiflächensatz darstellt. Zum Schluss werden das Deckungsverhältnis und das durchschnittliche Deckungskapital untersucht, wobei namentlich dem Grenzfall, Verzinsung 0, noch einige Aufmerksamkeit geschenkt wird. Wir bedienen uns zur Herleitung der Ergebnisse der kontinuierlichen Methode, setzen also eine stetige Erneuerung der Gesamtheit und die Auszahlung der Renten in unendlich vielen unendlich kleinen Raten voraus.

I.

1. Unter einem Personenbestand im *natürlichen* Beharrungszustand wollen wir mit *Saxer* [1]) eine Gesamtheit

[1]) Prof. Dr. *W. Saxer*, Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 27, Bern 1932.

verstehen, bei der sich die Besetzungszahlen der Jahrgänge verhalten wie die Zahlen der Ausscheideordnung; handelt es sich beispielsweise um die Alter a, b, c, so soll gelten

$$L_b : L_a = l_b : l_a$$

also

$$L_b = \frac{L_a}{l_a} l_b$$

ferner

$$L_c = \frac{L_b}{l_b} l_c = \frac{L_a}{l_a} l_c$$

und allgemein für ein beliebiges Alter x, wenn

$$\frac{L_a}{l_a} = c$$

eine Konstante bedeutet:

$$L_x = c \cdot l_x \tag{1}$$

Dabei ist mit l_x die Besetzungszahl (x) in der Ausscheideordnung, L_x die Besetzung des Jahrgangs x im Beharrungszustand gemeint. Handelt es sich um das Ausscheiden durch Tod allein, so ist unter l die Absterbeordnung verstanden.

2. Ist speziell $c = 1$, so wird

$$L_x = l_x \tag{2}$$

Man kann also die Grössenrelationen des natürlichen Beharrungszustandes am einfachsten ableiten, wenn man als Strukturtafel die Zahlen der Ausscheideordnung wählt.

Der *Umfang* H der Gesamtheit ergibt sich unter dieser Voraussetzung aus dem Integral

$$H = \int_x^\infty l_z \, dz \tag{3}$$

wenn wir mit x das niedrigste Alter, mit z ein beliebiges Alter $z \geqq x$ bezeichnen.

Da aber

$$\frac{1}{l_x} \int_x^\infty l_z \, dz = \bar{e}_x \tag{4}$$

die mittlere künftige Verbleibsdauer (speziell für die Absterbeordnung: mittlere künftige Lebenserwartung) beim Alter x bedeutet, so folgt

$$H = l_x \cdot \bar{e}_x \tag{5}$$

in Worten:

Der Umfang eines Bestandes im natürlichen Beharrungszustand ergibt sich als Produkt aus Erneuerungszahl und mittlerer künftiger Verbleibsdauer der Neueintretenden.

3. Der Ausdruck *Erneuerungszahl* erklärt sich sofort. Setzen wir die Struktur des natürlichen Beharrungszustandes voraus, so muss stets dem Alter $z = x + t$ die Personenzahl l_{x+t} zugeordnet sein. Dies ist nur möglich, wenn jeweilen im Alter x gerade l_x Elemente neu in den Bestand eintreten; sie liefern alsdann t Jahre später die genannte Besetzungszahl des Jahrgangs z.

Diese Anzahl ist gleich gross wie die jeweilige Anzahl Ausscheidungen des ganzen Bestandes, nämlich, wenn μ die Intensität des Ausscheidens darstellt:

$$\int_x^\infty l_z \, \mu_z \, dz = - \int_x^\infty l'_z \, dz = l_x$$

Ein Beharrungszustand kann sich auch bilden, wenn ausser beim Alter x noch in andern Altersstufen Neueintritte stattfinden, die Struktur weicht aber dann von der des natürlichen Beharrungszustandes ab. Handelt es sich um die stetige Erneuerung eines Bestandes im natürlichen Beharrungszustand, so ist die Erneuerungszahl stets identisch mit der Besetzungszahl des jüngsten Jahrgangs x. Bezeichnen wir sie allgemein statt mit l_x mit α, so gilt wegen (5):

$$\alpha = \frac{H}{\bar{e}_x} \tag{6}$$

in Worten:

Die Erneuerungszahl ergibt sich als Quotient aus Umfang des Bestandes und mittlerer künftiger Verbleibsdauer der Neueintretenden.

4. Wir nehmen jetzt an, es handle sich um eine gewöhnliche *Rentenkasse*. Die Elemente der Gesamtheit seien einheitlich für eine jährliche Rente von Fr. 1.— versichert. Jedes neue Mitglied hat also die *Einlage* $\bar{a}_x$ zu leisten und für jedes Element (z) ist das Deckungskapital

$$\bar{a}_z = \frac{1}{l_z} \int_0^\infty v^t \, l_{z+t} \, dt$$

oder

$$\bar{a}_z = \frac{r^z}{l_z} \int_z^\infty v^u \, l_u \, du \tag{7}$$

zu bestellen, also für den ganzen Bestand das Deckungskapital

$$Z = \int_x^\infty l_z \, \bar{a}_z \, dz$$

oder

$$Z = \int_x^\infty r^z \, dz \int_z^\infty v^u \, l_u \, du$$

Dieses Doppelintegral lässt sich durch Anwendung des Satzes von Dirichlet vereinfachen.

$$Z = \int_x^\infty v^u \, l_u \int_x^u r^z \, dz \, du$$

$$= \int_x^\infty v^u \, l_u \left(\frac{r^u - r^x}{\delta} \right) du$$

$$= \frac{1}{\delta} \left(\int_x^\infty l_u \, du - r^x \int_x^\infty v^u \, l_u \, du \right)$$

und unter Heranziehung von (4) und (7)

$$Z = \frac{l_x}{\delta} \left(\bar{e}_x - \bar{a}_x \right)$$

oder allgemein

$$Z = \frac{\alpha}{\delta} \left(\bar{e}_x - \bar{a}_x \right) \tag{8}$$

in Worten:

Das Deckungskapital der Rentenkasse im natürlichen Beharrungszustand ergibt sich, indem wir für Neueintretende die Differenz zwischen mittlerer Lebenserwartung und Rentenbarwert bilden, sie mit der Erneuerungszahl multiplizieren und durch den Zinsfuss dividieren.

Während also die mittlere Lebenserwartung bei der Ermittlung des Deckungskapitals einer Einzelrente keine Rolle spielt, tritt sie bei der Ermittlung des Deckungskapitals des Bestandes als gleichberechtigte Rechnungsgrösse neben dem Rentenbarwert auf.

5. Wir wollen der Formel (8) noch eine etwas andere Gestalt geben. Führen wir an Stelle von α wiederum l_x ein, so gilt statt (8)

$$\frac{Z}{l_x} = \frac{1}{\delta}\left(\bar{e}_x - \bar{a}_x\right)$$

also

$$\int_x^\infty \frac{l_z}{l_x}\,\bar{a}_z\,dz = \frac{1}{\delta}\left(\bar{e}_x - \bar{a}_x\right)$$

oder

$$\int_0^\infty {}_tp_x\,\bar{a}_{x+t}\,dt = \frac{1}{\delta}\left(\bar{e}_x - \bar{a}_x\right) \qquad (9)$$

Tritt also in einer Ableitung das Integral links auf, so kann es in einfacher Weise mit den Hilfszahlen $\bar{e}$, $\bar{a}$, δ geschlossen dargestellt werden.

II.

1. Denken wir uns jetzt eine *Invalidenkasse* im natürlichen Beharrungszustand. Die Struktur der Aktiven wird gegeben durch die Aktivitätsordnung l_z^{aa} und ihr Umfang durch das Integral

$$H^a = \int_x^\infty l_z^{aa}\cdot dz = l_x^{aa}\cdot \bar{e}^{aa} \qquad (1)$$

wenn wiederum mit x das Alter der jüngsten Elemente bezeichnet wird. Die Erneuerung ist gegeben durch

$$\alpha = l_x^{aa}$$

Dem Bestand der Aktiven ist der Bestand der Invaliden zugeordnet mit der Struktur l_z^{ii} und dem Umfang

$$H^i = \int_x^\infty l_z^{ii}\, dz \tag{2}$$

Bezeichnen wir die Gesamtzahl aller Aktiven (z) und Invaliden (z) mit l_z, also

$$l_z = l_z^{aa} + l_z^{ii} \tag{3}$$

und setzen wir für $z = x$ voraus

$$\left.\begin{aligned} l_x^{ii} &= o \\ l_x^{aa} &= l_x \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

so sind durch die Zahlenreihen l_x, l_x^{aa}, l_x^{ii} die *Schaertlinschen Gesamtheiten* [1]) charakterisiert.

Der Umfang des Invalidenbestandes ergibt sich ohne weiteres, indem man vom Gesamtbestand der Aktiven und Invaliden den Bestand der Aktiven wegnimmt, also

$$H^i = H - H^a \tag{5}$$

also

$$H^i = l_x\, \bar{e}_x - l_x^{aa}\, \bar{e}_x^{aa}$$

oder

$$\underline{H^i = l_x\, (\bar{e}_x - \bar{e}_x^{aa})} \tag{6}$$

Dagegen ist $\quad H^i \neq l_x^i \cdot \bar{e}_x^i$

[1]) Vgl. Dr. *G. Schaertlin,* Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 1, Bern 1906.

Für die Besetzungszahlen l_z^{ii} gelten die Ansätze

$$l_z^{ii} = l_z - l_z^{aa} \tag{7}$$

$$l_z^{ii} = \int_x^z l_u^{aa} \, \nu_u \, {}_{z-u}p_u^i \, du \tag{8}$$

sofern wir im Sinne der Schaertlinschen Theorie annehmen, die Sterblichkeit der Invaliden sei bloss von deren Alter abhängig und die Reaktivierung sei 0.

An Stelle von (8) kann ferner gesetzt werden

$$l_z^{ii} = l_z^i \sum_x^{z-1} F_\lambda$$

wenn wir mit *Spangenberg* [1]) setzen

$$F_\lambda = \int_\lambda^{\lambda+1} \frac{l_u^{aa}}{l_u^i} \, \nu_u \, du$$

Dabei ist unter ν die Invalidierungsintensität verstanden.

2. Jedes invalide Mitglied beziehe eine Jahresrente von 1.—. Jedes aktive Mitglied sei für eine solche Rente versichert, und zwar gegen eine während der Aktivität zahlbare Prämie im Betrage P.

Das Deckungskapital für ein invalides Mitglied (z) stellt sich auf

$$\bar{a}_z^i$$

und für ein aktives Mitglied auf

$$\bar{a}_z^{ai} - P\,\bar{a}_z^{aa}, \quad \text{worin } P = \frac{\bar{a}_x^{ai}}{\bar{a}_x^{aa}}$$

---

[1]) Dr. *P. Spangenberg*, Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft XX, Berlin 1911.

Das Deckungskapital Z des ganzen Bestandes setzt sich zusammen aus dem Deckungskapital der Aktiven

$$\mathrm{I} = \int_x^\infty l_z^{aa}\, \bar{a}_z^{ai}\, dz - P \int_x^\infty l_z^{aa}\, \bar{a}_z^{aa}\, dz$$

und dem Deckungskapital der Invaliden

$$\mathrm{II} = \int_x^\infty l_z^{ii}\, a_z^i\, dz$$

somit $$Z = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

3. Zunächst gilt für die Anwartschaft eines Aktiven (z) die nach Schaertlin benannte Beziehung

$$\bar{a}_z^{ai} = \bar{a}_z - \bar{a}_z^{aa} + \frac{l_z^{ii}}{l_z^{aa}} (\bar{a}_z - \bar{a}_z^i) \tag{9}$$

nämlich aus der Darstellung des Kapitalwertes einer jährlichen Rente 1 an alle Personen (z)

einerseits durch $l_z \bar{a}_z = l_z^{aa} a_z + l_z^{ii} \bar{a}_z$

anderseits durch $l_z^{aa} (\bar{a}_z^{aa} + a_z^{ai}) + l_z^{ii} \bar{a}_z^i$

woraus sich ohne weiteres (9) ergibt. Anderseits kann jene Anwartschaft durch das Integral dargestellt werden

$$\bar{a}_z^{ai} = \frac{1}{l_z^{aa}} \int_0^\infty v^t\, l_{z+t}^{aa}\, \nu_{z+t}\, \bar{a}_{z+t}^i\, dt \tag{10}$$

Man kann auf elegante Weise dieses Integral auf die Form (9) bringen. Zunächst ist

$$\overline{a}_z^i = \int_0^\infty v^\tau \, {}_\tau p_z^i \, d\tau \qquad \text{und}$$

$$\overline{a}_{z+t}^i = \int_0^\infty v^\tau \, {}_\tau p_{z+t}^i \, d\tau$$

Somit, wenn in (10) eingesetzt wird:

$$l_z^{aa} \, \overline{a}_z^{ai} = \int_0^\infty dt \int_0^\infty v^{t+\tau} \, l_{z+t}^{aa} \, \nu_{z+t} \, {}_\tau p_{z+t}^i \, d\tau \qquad , \; t + \tau = s$$

$$= \int_0^\infty l_{z+t}^{aa} \, \nu_{z+t} \, dt \int_t^\infty v^s \, {}_{s-t} p_{z+t}^i \, ds \qquad \begin{array}{c|c} \tau & s \\ \hline 0 & t \\ \infty & \infty \end{array}$$

$$= \int_0^\infty v^s \, ds \underbrace{\int_0^s l_{z+t}^{aa} \, \nu_{z+t} \, {}_{s-t} p_{z+t}^i \, dt}_{J}$$

Das Integral J kann mit Hilfe der Besetzungszahlen des Invalidenbestandes dargestellt werden. Es handelt sich um die Anzahl der Invaliden, die in der Alterszone z bis $z + s$ aus dem Aktivenbestand hervorgehen, also

$$J = l_{z+s}^{ii} - l_z^{ii} \, {}_s p_z^i$$

was sich auch rein algebraisch mit Hilfe von (8) ergibt; folglich

$$l_z^{aa} \, \overline{a}_z^{ai} = \int_0^\infty v^s \, ds \, l_{z+s}^{ii} - l_z^{ii} \int_0^\infty v^s \, {}_s p_z^i \, ds$$

oder unter Berücksichtigung von (7)

$$l_z^{aa} \, \overline{a}_z^{ai} = l_z \, \overline{a}_z - l_z^{aa} \, \overline{a}_z^{aa} - l_z^{ii} \, \overline{a}_z^i$$

und damit ohne weiteres (9).

4. Für $z = x$ wird $l_x^{ii} = 0$, also

$$\bar{a}_x^{ai} = \bar{a}_x - \bar{a}_x^{aa} \tag{11}$$

und

$$P = \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_x^{aa}} - 1 \tag{12}$$

5. Kehren wir nun zum Deckungskapital zurück. Der Ausdruck für die Anwartschaft der Aktiven wird vereinfacht für die Mitglieder (z) in

$$\begin{aligned} l_z^{aa}\,\bar{a}_z^{ai} &= l_z^{aa}\,(\bar{a}_z - \bar{a}_z^{aa}) + l_z^{ii}\,(\bar{a}_z - \bar{a}_z^{i}) \\ &= l_z\,\bar{a}_z - l_z^{aa}\cdot\bar{a}_z^{aa} - l_z^{ii}\,\bar{a}_z^{i} \end{aligned}$$

und für den ganzen Bestand in

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_x^\infty l_z\,\bar{a}_z\,dz - \int_x^\infty l_z^{aa}\,\bar{a}_z^{aa}\,dz - \int_x^\infty l_z^{ii}\,\bar{a}_z^{i}\,dz \\ &= \frac{l_x}{\delta}\,(e_x - \bar{a}_x) - \frac{l_x^{aa}}{\delta}\,(e_x^{aa} - \bar{a}_x^{aa}) - \mathrm{II} \end{aligned}$$

folglich das gesamte Deckungskapital der Invalidenkasse in

$$Z = \frac{1}{\delta}\left[l_x\,(\bar{e}_x - \bar{a}_x) - l_x^{aa}\,(\bar{e}_x^{aa} - \bar{a}_x^{aa}) - P\cdot l_x^{aa}\,(\bar{e}_x^{aa} - \bar{a}_x^{aa})\right]$$

oder wegen der Anfangsbedingung (4)

$$Z = \frac{\alpha}{\delta}\left[\bar{e}_x - \bar{a}_x - (1 + P)\,(\bar{e}_x^{aa} - \bar{a}_x^{aa})\right] \tag{13}$$

Diese Formel lässt eine einfache Deutung zu. Der erste Teil rechts

$$\frac{\alpha}{\delta}\,(\bar{e}_x - \bar{a}_x)$$

würde dem Deckungskapital entsprechen, das für eine reine Rentenkasse bei *sofortigem* Beginn der Auszahlung der Renten an *alle* Mitglieder notwendig wäre.

Der zweite Teil

$$\frac{\alpha}{\delta}\,(\bar{e}_x^{aa} - \bar{a}_x^{aa})\,(1 + P)$$

stellt die Korrektur dar, welche anzubringen ist, weil die Rentenzahlung bis zur erfolgten Invalidierung aufgeschoben ist und weil die Mitglieder bis dahin eine Prämie entrichten müssen.

6. Die Formel verträgt noch eine Vereinfachung. Berücksichtigt man (12), so wird das Deckungskapital

$$Z = \frac{\alpha}{\delta}\left[\bar{e}_x - \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_x^{aa}}\,\bar{e}_x^{aa}\right] \tag{14}$$

Wie bei der reinen Rentenkasse hängt also das Deckungskapital der Invalidenkasse ab von den Hilfszahlen $\bar{e}$ und $\bar{a}$ und ausserdem von den entsprechenden Zahlen $\bar{e}^{aa}$ und $\bar{a}^{aa}$ der Aktivitätsordnung. Alle 4 Grössen beziehen sich auf den jüngsten Jahrgang der Kasse, wie das für den natürlichen Beharrungszustand charakteristisch ist.

Die letzte Relation wollen wir nochmals umformen. Es ist

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}} = 1 + P$$

Somit

$$Z = \frac{\alpha}{\delta}\left(\bar{e} - \bar{e}^{aa} - P \cdot \bar{e}^{aa}\right)$$

und wegen $\alpha = l_x = l_x^{aa}$

$$Z = \frac{1}{\delta}\left(l_x \bar{e}_x - l_x^{aa} \bar{e}_x^{aa} - P\, l_x \bar{e}_x^{aa}\right) \qquad (15)$$

Nun gilt für die «anwartschaftliche Invaliditätsdauer» die Schaertlinsche Beziehung

$$\bar{e}_z^{ai} = \bar{e}_z - \bar{e}_z^{aa} + \frac{l_z^{ii}}{l_z^{aa}}\left(\bar{e}_z - \bar{e}_z^{i}\right)$$

Somit für das Anfangsalter x

$$\bar{e}_x^{ai} = \bar{e}_x - \bar{e}_x^{aa}$$

also $l_x \bar{e}_x - l_x^{aa} \bar{e}_x^{aa} = l_x^{aa} \cdot \bar{e}_x^{ai}$

und dies wiederum ist darstellbar durch

$$\int_x^\infty l_z^{aa}\, \nu_z\, \bar{e}_z^{i}\, dz$$

$$= \int_x^\infty l_z^{aa}\, \nu_z\, dz \int_z^\infty {}_{\tau-z}p_z^{i}\, d\tau$$

$$= \int_x^\infty d\tau \underbrace{\int_x^\tau l_z^{aa}\, \nu_z\, {}_{\tau-z}p_z^{i}\, dz}_{l_\tau^{ii}} = \int_x^\infty l_\tau^{ii}\, d\tau$$

folglich $l_x \bar{e}_x - l_x^{aa} \bar{e}_x^{aa} = H^{i}$ (16)

Setzen wir ein und beachten (1), so resultiert für das Deckungskapital die einfache Darstellung

$$Z = \frac{H^i - P \cdot H^a}{\delta} \tag{17}$$

Nun ist zu beachten, dass wir jedem Invaliden die Jahresrente 1 ausbezahlen und dass jeder Aktive die Jahresprämie P entrichtet. Die durch die Integrale H^i und H^a dargestellten Bestände sind also zahlenmässig massgebend für die laufende Jahresausgabe bzw. Prämieneinnahme der Kasse. Somit gilt für jedes Betriebsjahr die für den Beharrungszustand charakteristische Relation

$$P \cdot H^a + \delta \cdot Z = H^i \tag{18}$$

Führen wir noch an Stelle der Bezeichnungen H^a, H^i und Z die Symbole F_p, F_y und F_z ein und bezeichnen diese Grössen, entsprechend ihrer Bedeutung als bestimmte Integrale als Prämienfläche, Ausgabenfläche und Deckungskapitalfläche, so gilt

$$P \cdot F_p + \delta \cdot F_z = 1 \cdot F_y \tag{19}$$

Dies ist nichts anderes als der von Moser [1]) aufgestellte Dreiflächensatz.

7. Aus der Beziehung (17) folgt weiter, wenn wir (5) beachten

$$Z = \frac{H - H^a (1 + P)}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta} \left(H - H^a \frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}} \right) \tag{20}$$

---

[1]) Prof. Dr. *Chr. Moser*, Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 21, Bern 1926.

Daraus gewinnen wir drei verschiedene Durchschnitte, nämlich einmal das *Deckungsverhältnis*

$$\theta = \frac{Z}{H^i} \tag{21}$$

also das Verhältnis zwischen dem erforderlichen Deckungskapital und den Jahresausgaben; sodann das *durchschnittlich* auf ein Mitglied überhaupt entfallende *Deckungskapital*

$$\gamma = \frac{Z}{H} \tag{22}$$

und das durchschnittliche Deckungskapital auf ein *aktives* Mitglied:

$$\gamma^a = \frac{Z}{H^a} = \frac{H}{H^a}\,\gamma \tag{23}$$

Diese drei Grössen erlauben folgende einfache Darstellungen

$$\theta = \frac{1}{\delta}\,\frac{H - \frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}}\,H^a}{H - H^a} = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{H^a}{H - H^a}\,\frac{\bar{a} - \bar{a}^{aa}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

oder

$$\theta = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{\bar{e}^{aa}}{\bar{e} - \bar{e}^{aa}}\,\frac{\bar{a} - \bar{a}^{aa}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

oder

$$\theta = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{P(\delta)}{P(0)}\right] \tag{24}$$

wobei wir mit dem Argument andeuten, dass die Berechnung der Prämie in einem Fall zum Zinsfuss δ, im andern zum Zinsfuss 0 vorzunehmen ist.

Ferner

$$\gamma = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{H^a}{H}\,\frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{\bar{e}^{aa}}{\bar{e}}\,\frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

oder

$$\gamma = \frac{1}{\delta}\left[1 - \frac{P(\delta) + 1}{P(0) + 1}\right] \tag{25}$$

und schliesslich

$$\gamma^a = \frac{1}{\delta}\left[\frac{H}{H^a} - \frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

also

$$\gamma^a = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\bar{e}}{\bar{e}^{aa}} - \frac{\bar{a}}{\bar{a}^{aa}}\right]$$

oder

$$\gamma^a = \frac{1}{\delta}\left[P(0) - P(\delta)\right] \tag{26}$$

Ferner bestehen die Zusammenhänge

$$\left\{\begin{aligned} \gamma^a &= P(0)\cdot\theta \\ \gamma^a &= (P(0) + 1)\cdot\gamma \\ \gamma &= \frac{P(0)}{P(0)+1}\cdot\theta \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

8. Setzen wir den Zinsfuss $\delta = 0$, so werden die drei Zahlen θ, γ, γ^a zunächst unbestimmt. Die genauere Analyse ergibt einige interessante Beziehungen, die wir

hier herleiten wollen, weil mit diesem Grenzfall gleichzeitig die Möglichkeit geboten wird, eine obere Schranke sowohl für das Deckungskapital wie das Deckungsverhältnis festzulegen.

Zunächst wird, wenn der Index x weggelassen wird:

$$P(0) = \frac{\bar{a}(0)}{\bar{a}^{aa}(0)} - 1$$

also $$P(0) = \frac{\bar{e}}{\bar{e}^{aa}} - 1$$

Ferner wird

$$\gamma^a(0) = \frac{P(0) - P(\delta)}{\delta}\bigg|_{\delta=0} = \frac{0}{0}$$

$$= - \frac{P'(\delta)}{1}\bigg|_{\delta=0}$$

also $$\gamma^a(0) = - P'(0)$$

also wegen (12)

$$\gamma^a(0) = \operatorname*{Limes}_{\delta=0} \frac{1}{\left(\bar{a}^{aa}\right)^2} \left[\bar{a}\,\bar{a}'^{aa} - \bar{a}^{aa}\,\bar{a}'\right]$$

also $$\gamma^a(0) = \frac{1}{\bar{e}^{aa}} \left[\bar{e}\,\frac{\bar{a}'^{aa}_{(0)}}{\bar{e}^{aa}} - \bar{a}'(0)\right] \tag{28}$$

Wir berechnen zunächst die Ableitung des gewöhnlichen Rentenbarwertes $\bar{a}$ nach dem Zinsfuss δ.

$$\bar{a}' = - \int_0^\infty \bar{e}^{\delta t}\, t\, {}_tp\, dt$$

also $$\bar{a}'(0) = -\int_0^\infty t\,{}_tp\,dt$$

$$= x\int_0^\infty {}_tp_x\,dt - \int_0^\infty (x+t)\,{}_tp\,dt$$

$$= \left(x - \frac{\int_0^\infty (x+t)\,l_{x+t}\,dt}{\int_0^\infty l_{x+t}\,dt} \right) \frac{1}{l_x}\int_0^\infty l_{x+t}\,dt$$

$$= \left(x - \frac{\int_x^\infty z\,l_z\,dz}{H} \right) \bar{e}$$

also

$$\bar{a}'(0) = (x - < z >)\,\bar{e}$$

und

$$-\bar{a}'(0) = (< z > - x)\,\bar{e} \tag{29}$$

Dabei haben wir mit

$$\frac{1}{H}\int_x^\infty z\,l_z\,dz = < z > \tag{30}$$

das durchschnittliche Alter des Bestandes H eingeführt.

Analog ergibt sich beim Bestande der Aktiven, sofern die Grenzbedingung (4) erfüllt ist:

$$-\bar{a}'^{aa}(0) = (< z^a > - x)\,\bar{e}^{aa} \tag{31}$$

mit dem Durchschnittsalter des Bestandes der Aktiven

$$\frac{1}{H^a}\int_x^\infty z\,l_z^{aa}\,dz = < z^a > \tag{32}$$

Setzen wir in (28) ein, so erhalten wir den gesuchten Grenzwert

$$\gamma^a(0) = \frac{1}{\bar{e}^{aa}} \left[-\bar{e} \left(< z^a > - x \right) + \left(< z > - x \right) \bar{e} \right]$$

oder einfach

$$\gamma^a(0) = \left(< z > - < z^a > \right) \frac{\bar{e}}{\bar{e}^{aa}} \tag{33}$$

oder auch

$$\gamma^a(0) = \left(< z > - < z^a > \right) \frac{H}{H^a} \tag{34}$$

Daraus folgt sofort

$$\gamma(0) = \frac{\gamma^a(0)}{P(0) + 1}$$

also

$$\underline{\gamma(0) = < z > - < z^a >} \tag{35}$$

und weiter

$$\theta(0) = \frac{\gamma^a(0)}{P(0)}$$

$$= \frac{\left(< z > - < z^a > \right) \dfrac{\bar{e}}{\bar{e}^{aa}}}{\dfrac{\bar{e} - \bar{e}^{aa}}{\bar{e}^{aa}}}$$

also

$$\theta(0) = \frac{< z > - < z^a >}{\bar{e} - \bar{e}^{aa}} \, \bar{e} \tag{36}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist

$$\underline{\theta(0) = \left(< z > - < z^a > \right) \frac{H}{H^i}} \tag{37}$$

Für die Durchschnittsalter gilt offenbar die Beziehung

$$H^a \cdot < z^a > + H^i \cdot < z^i > = H < z >$$

also

$$< z^i > = \frac{H < z > - H^a < z^a >}{H^i}$$

$$= \frac{H}{H^i}\left(< z > - \frac{H^a}{H} < z^a >\right)$$

$$= \frac{H}{H^i}(< z > - < z^a >) + \frac{H}{H^i}\left(1 - \frac{H^a}{H}\right) < z^a >$$

$$= \frac{H}{H^i}(< z > - < z^a >) + < z^a >$$

folglich

$$\frac{H}{H^i}(< z > - < z^a >) = < z^i > - < z^a >$$

ferner

$$\frac{H}{H^a}(< z > - < z^a >) = (< z^i > - < z^a >)\frac{H^i}{H^a}$$

Somit statt (37) auch

$$\theta(0) = < z^i > - < z^a > \tag{38}$$

Wir haben also im zinslosen System bloss das Durchschnittsalter und den Umfang der drei Schaertlinschen Gesamtheiten zu bestimmen, um daraus auf einfachste Weise das Deckungskapital der im natürlichen Beharrungszustand befindlichen Invalidenrentenkasse berechnen zu können. Damit gewinnen wir rasch eine obere Grenze für das zu einem bestimmten Zinsfuss berechnete Deckungskapital.

Bern, 11. April 1934.