

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	28 (1933)
<b>Artikel:</b>	Untersuchung einer versicherungsmathematischen Funktion
<b>Autor:</b>	Michel, W.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-967437">https://doi.org/10.5169/seals-967437</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Untersuchung einer versicherungsmathematischen Funktion.

Von Dr. W. Michel, Bern.

---

### § 1. Der Barwert der kontinuierlichen Leibrente als analytische Funktion.

In einer vielseitigen Abhandlung «Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen» (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 13. Heft, Juni 1918) stösst Prof. Friedli auf eine analytische Funktion  $S(x, z)$ , welche hier eingehender untersucht werden soll. Einleitend folgen wir seinen Ausführungen bezüglich des Barwertes der kontinuierlichen Leibrente. Dieser Barwert ergibt sich aus der Formel

$$(a) \quad \bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty v^\tau l_{x+\tau} d\tau$$

Führt man die Intensitätsfunktionen der Verzinsung und Sterblichkeit ein:

$$v = e^{-\delta} \quad \frac{dl_{x+t}}{l_{x+t} dt} = -\mu_{x+t}, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{l_{x+\tau}}{l_x} = e^{-\int_0^\tau \mu_{x+t} dt}$$

so geht (a) über in

$$(b) \quad \bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{\tau} (\mu_{x+t} + \delta) dt}$$

Als Grundlage für die Absterbeordnung nehmen wir das Gompertz-Makehamsche Gesetz an:

$$(c) \quad l_{x+t} = K s^{x+t} g^{c^{x+t}}, \quad \text{also}$$

$$(d) \quad \mu_{x+t} = \log \frac{1}{s} + c^{x+t} \log c \log \frac{1}{g}$$

dann wird

$$(e) \quad \int_0^{\tau} (\mu_{x+t} + \delta) dt = -c^x \log \frac{1}{g} + \left( \log \frac{1}{s} + \delta \right) \tau + c^x \log \frac{1}{g} c^{\tau}$$

Ferner führen wir der Reihe nach folgende neue Größen ein:

$$(A) \quad \lambda = c^x \log \frac{1}{g} \quad (B) \quad u = \lambda c^x \quad (C) \quad k = -\frac{\delta + \log \frac{1}{s}}{\log c}$$

Vermittels derselben und der Formel (e) geht (b) über in

$$(f) \quad \bar{a}_x = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^k \log c} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du \quad \text{oder}$$

$$(g) \quad \bar{a}_x = \frac{e^{\lambda} Q_{\lambda}(k)}{\lambda^k \log c}$$

Damit ist der Barwert der kontinuierlichen Leibrente als analytische Funktion aller auftretenden Größen dargestellt. Von diesem Ausdruck ausgehend, unter-

sucht Prof. Friedli namentlich die Wirkung, die eine Variierung der Konstanten  $s$  des Makehamschen Gesetzes hervorruft. Diese Konstante  $s$  tritt, wie aus den Substitutionen (A), (B), (C) ersichtlich ist, nur in der Grösse  $k$  auf. Daher ist nach (C)

$$(h) \quad \frac{d \bar{a}_x}{ds} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k} \cdot \frac{dk}{ds} = \frac{1}{s \log c} \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k}$$

und nach (g)

$$(i) \quad \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k} = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \log c} \left\{ \frac{\partial Q_\lambda(k)}{\partial k} + \log \frac{1}{\lambda} Q_\lambda(k) \right\}$$

Führen wir nun die neue Funktion

$$(D) \quad S(\lambda, k) = \frac{\partial Q_\lambda(k)}{\partial k} + \log \frac{1}{\lambda} Q_\lambda(k)$$

ein, so wird nach (i) und (h)

$$(k) \quad \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k} = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \log c} S(\lambda, k)$$

$$(l) \quad \frac{d \bar{a}_x}{ds} = \frac{e^\lambda}{s \lambda^k (\log c)^2} S(\lambda, k)$$

Zur weiteren Untersuchung dieser Ableitungen (k) und (l) ist daher vor allem eine genaue Kenntnis der Funktion  $S(\lambda, k)$  notwendig. Bei der Herleitung der Haupteigenschaften empfiehlt es sich,  $\lambda$  und  $k$  gleich als komplexe Variable zu betrachten, um so die Überlegungen der Funktionentheorie verwenden zu können. Wir setzen deshalb  $\lambda = x$ ;  $k = z$ , also  $S(\lambda, k) = S(x, z)$ ;  $Q_\lambda(k) = Q(x, z)$ .

§ 2. **Definition der Funktion  $S(x, z)$ .**

Die Funktion  $S(x, z)$  ist nach (D) § 1 definiert durch

$$\text{I. } S(x, z) = \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z} - \log x Q(x, z)$$

wo  $Q(x, z)$  die unvollständige Gammafunktion bedeutet.

$$\begin{aligned} \text{1. } Q(x, z) &= \int_x^\infty e^{-u} u^{z-1} du \\ \text{2. } \frac{\partial Q(x, z)}{\partial z} &= \int_x^\infty e^{-u} u^{z-1} \log u du, \quad \text{somit wird} \end{aligned}$$

$$\text{II. } S(x, z) = \int_x^\infty e^{-u} u^{z-1} \log \frac{u}{x} du$$

Wie aus der Theorie der  $\Gamma$ -Funktion bekannt ist, hat man den Integrationsweg in der  $u$ -Ebene folgenden Einschränkungen zu unterwerfen:

1. Er darf den Ursprung nicht umschlingen.
2. Für  $\Re(z) \leq 0$  darf er nicht durch  $u = 0$  hindurchgehen.
3. Für grosse Werte von  $|u|$  muss immer  $\Re(u) > 0$   $-\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \leq \arg u \leq \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$  für  $u \rightarrow \infty$  angenommen werden ( $\delta > 0$ ).

Unter Beachtung dieser drei Bedingungen darf der Integrationsweg sonst willkürlich gewählt werden. Dann stellt das Integral II. für jedes endliche  $x \neq 0$  eine ganze Funktion von  $z$  dar. Wir wollen vorerst einige Haupteigenschaften dieser Funktion  $S(x, z)$  aus der Definition II. herleiten.

§ 3. Rekursionsformeln.

Die partielle Differentiation nach  $x$  gibt nach bekannten Regeln:

$$\text{III. } \frac{\partial S(x, z)}{\partial x} = S'(x, z) = -\frac{1}{x} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du$$

Dies integrieren wir partiell, indem wir setzen:

$$U = e^{-u} u^z; \quad dU = e^{-u} (zu^{z-1} - u^z) du$$

$$dV = \frac{du}{u}; \quad V = \log u - \log x = \log \frac{u}{x}$$

Der ausintegrierte Teil

$$UV = \left[ e^{-u} u^z \log \frac{u}{x} \right]_x^{\infty}$$

verschwindet, und man erhält:

$$S'(x, z) = \frac{z}{x} \int_x^{\infty} e^{-u} u^{z-1} \log \frac{u}{x} du - \frac{1}{x} \int_x^{\infty} e^{-u} u^z \log \frac{u}{x} du$$

Dies ist aber nach der Definition II. nichts anderes als

$$\text{IV. } S'(x, z) = \frac{z}{x} S(x, z) - \frac{1}{x} S(x, z+1)$$

Aus III. folgt durch Multiplikation mit  $x$

$$(3) \quad x S'(x, z) = - \int_x^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du$$

Differentiert man hierin beide Seiten nochmals partiell nach  $x$ , so erhält man:

$$\text{V. } \frac{\delta}{\delta x} (x S'(x, z)) = S''(x, z) + S'(x, z) = e^{-x} x^{z-1}$$

Analog erhält man aus IV.

$$(4) \quad x S'(x, z) = z S(x, z) - S(x, z+1)$$

$$\frac{\delta}{\delta x} (x S'(x, z)) = z S'(x, z) - S'(x, z+1);$$

dies ist nach IV.

$$= z \left( \frac{z}{x} S(x, z) - \frac{1}{x} S(x, z+1) \right) - \left( \frac{z+1}{x} S(x, z+1) - \frac{1}{x} S(x, z+2) \right)$$

also

$$\text{VI. } \frac{\delta}{\delta x} (x S'(x, z)) = \frac{z^2}{x} S(x, z) - \frac{2z+1}{x} S(x, z+1) + \frac{1}{x} S(x, z+2)$$

Setzt man für die linke Seite den in V. gefundenen Wert ein, so erhält man nach Multiplikation mit  $x$  die in  $x$  und  $z$  gültige Identität:

$$\text{VII. } z^2 S(x, z) - (2z+1) S(x, z+1) + S(x, z+2) - e^{-x} x^z \equiv 0$$

Kennt man also die Werte der Funktion  $S(x, z)$  etwa im Fundamentalstreifen  $0 \leq \Re(z) < 2$ , so lassen sich aus dieser Identität zunächst die Funktionswerte in den anliegenden Streifen  $-1 \leq \Re(z) < 0$  und  $2 \leq \Re(z) < 3$  rekursiv berechnen mittels der Formeln.

$$\text{VIII. } z^2 S(x, z) = (2z+1) S(x, z+1) - S(x, z+2) + e^{-x} x^z$$

$$\text{IX. } S(x, z+2) = e^{-x} x^z - z^2 S(x, z) + (2z+1) S(x, z+1)$$

Speziell ist  $S(x, 2) = e^{-x} + S(x, 1)$

Durch fortgesetzte Rekursion erhält man so den ganzen Wertevorrat von  $S(x, z)$ .

Es ist leicht, eine weitere Rekursionsformel zwischen den  $S$ -Funktionen allein aufzustellen. Multipliziert man einmal VII. mit  $x$  und ersetzt ein andermal in VII.  $z$  durch  $z+1$ , subtrahiert beide Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} X. \quad & x z^2 S(x, z) - (z^2 + (2z+1)(x+1)) S(x, z+1) + \\ & + (x+2z+3) S(x, z+2) - S(x, z+3) \equiv 0 \end{aligned}$$

wodurch vier  $S$  Funktionen rational miteinander verknüpft sind.

Um diese Identität zur rekursiven Auswertung verwenden zu können, muss man aber jetzt vorerst die Funktionswerte von  $S(x, z)$  in einem Fundamentalstreifen von der Breite 3 kennen, etwa im Streifen

$$0 \leq \Re(z) < 3.$$

Aus X. erhält man speziell für  $z = 0$  die Relation

$$(x+1) S(x, 1) - (x+3) S(x, 2) + S(x, 3) = 0$$

#### § 4. Partielle Differentialgleichung.

Von der Formel V. ausgehend, lässt sich leicht die von Prof. Friedli aufgestellte partielle Differentialgleichung herleiten. Es war dort

$$(A) \quad x S''(x, z) + S'(x, z) = e^{-x} x^{z-1}$$

Differentiert man dies nochmals partiell nach  $x$ , so bekommt man

$$(B) \quad x S'''(x, z) + 2S''(x, z) = -e^{-x} x^{z-1} + (z-1) e^{-x} x^{z-2}$$

Addiert man die mit  $(x+1-z)$  multiplizierte Gleichung  $A$  zu der mit  $x$  multiplizierten Gleichung  $B$ , so erhält man

$$\text{XI. } x^2 \frac{\delta^3 S(x, z)}{\delta x^3} + (x+3-z) x \frac{\delta^2 S(x, z)}{\delta x^2} + (x+1-z) \frac{\delta S(x, z)}{\delta x} = 0$$

Die Funktion  $S(x, z)$  ist ein Integral dieser Differentialgleichung. Ein weiteres partikuläres Integral ist die einfache Funktion

$$J(x, z) = F(z) \log x + G(z)$$

wo  $F(z)$  und  $G(z)$  willkürliche Funktionen von  $z$  allein sind.

### § 5. Entwicklungen von $S(x, z)$ .

Um die Funktion  $S(x, z)$  numerisch berechnen zu können, wollen wir dieselbe auf eine für die Auswertung brauchbarere Form bringen. Allerdings hat man dabei den Variabilitätsbereich der Veränderlichen  $x$  und  $z$  meist wesentlich einzuschränken. Prof. Friedli gibt die folgende Entwicklung von  $S(x, z)$  an.

$$\text{XII. } S(x, z) = \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + e^{-x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}}{z(z+1)\dots(z+s)} x^{z+s}$$

die offenbar für  $0 < |x| < \infty$  und alle Werte von  $z$  mit Ausnahme von  $z = 0, -1, -2, \dots$  gilt. Die hier auftretende Reihe konvergiert zwar ziemlich rasch, besitzt jedoch schwerfällige Koeffizienten.

Nun lässt sich aber sowohl das Integral II. wie auch die Entwicklung XII. auf eine für die Auswertung viel günstigere Form bringen. Damit die folgenden Opera-

tionen erlaubt sind, schränken wir den Variabilitätsbereich von  $x$  und  $z$  genügend ein und nehmen vorerst  $\Re(x) > 0$  an. Es sei also  $x$  ein Punkt in der rechten  $u$ -Halbebene. Dann ziehen wir den durch  $u = 0$  gehenden Halbstrahl durch  $x$  und wählen denselben als Integrationsweg, was nach der Bemerkung in § 1 statthaft ist. Wir setzen also  $u = tx$ ,  $du = xdt$ , wo  $t$  positiv reell ist. Für  $u = x$  wird  $t = 1$ , für  $u = \infty$  wird  $t = \infty$ , und das Integral II. geht über in

$$\text{XIII.} \quad S(x, z) = x^z \int_1^\infty e^{-tx} t^{z-1} \log t \, dt$$

wobei die neue Integrationsvariable  $t$  jetzt die positiv reelle Achse von 1 bis  $\infty$  durchläuft. Für  $\Re(x) > 0$  hat dieses Integral für jeden endlichen Wert von  $z$  einen Sinn. Nun nehmen wir ausser  $\Re(x) > 0$  auch noch  $\Re(z) > 0$  an. Dann darf der Integrationsweg durch den Nullpunkt gelegt werden, und man kann so XIII. zerlegen in

$$(5) \quad S(x, z) = x^z \int_0^\infty e^{-tx} t^{z-1} \log t \, dt - x^z \int_0^1 e^{-tx} t^{z-1} \log t \, dt$$

Nach Nielsen «Handbuch der Theorie der  $\Gamma$ -Funktion» (§ 69) ist

$$(6) \quad x^z \int_0^\infty e^{-tx} t^{z-1} \log t \, dt = \Gamma(z) (\psi(z) - \log x)$$

Das zweite Integral in (5) konvergiert unter der Annahme  $\Re(z) > 0$  für jeden endlichen Wert von  $x$ , also selbst für  $x = 0$ , und stellt somit eine ganze Funktion von  $x$  dar, die wir in eine Taylorsche Reihe entwickeln können. Um diese zu erhalten, gehen wir zunächst von der Funktion aus:

$$(7) \quad T(x, z) = \int_0^1 e^{-tx} t^{z-1} dt$$

dann ist offenbar

$$(8) \quad \frac{\delta T(x, z)}{\delta z} = \int_0^1 e^{-tx} t^{z-1} \log t dt$$

Nun ist

$$e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} t^n$$

Setzt man dies in (7) ein, so erhält man, da unter der gemachten Annahme  $\Re(z) > 0$  gliedweise Integration und Differentiation erlaubt ist,

$$(9) \quad T(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^n}{n+z}$$

$$(10) \quad \frac{\delta T(x, z)}{\delta z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^n}{(n+z)^2}$$

Somit erhält man nach (8) und (10)

$$(11) \quad -x^z \int_0^1 e^{-tx} t^{z-1} \log t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+z}}{(n+z)^2}$$

eine Reihe, die sehr gut konvergiert. Setzt man (6) und (11) in (5) ein, so erhält man

$$\text{XIV. } S(x, z) = \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+z}}{(n+z)^2}$$

Diese Formel eignet sich zur numerischen Berechnung von  $S(x, z)$  sehr gut. Nun sieht man, dass man die

vorhin gemachten Einschränkungen  $\Re(x) > 0$ ,  $\Re(z) > 0$  wieder fallen lassen kann; denn die rechte Seite von XIV. hat für jedes endliche  $x \neq 0$  und jedes  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  einen Sinn. Nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie kann man deshalb zur Berechnung des Integrales II. den bequemeren Ausdruck XIV. wählen, und zwar für alle Werte von  $x$  und  $z$ , für welche dieser Ausdruck existiert. Aus dieser Formel leitet man ebenfalls leicht alle Resultate von § 2 und § 3 her.

Durch Vergleichung der Formeln XII. und XIV. erkennt man so die Identität

$$\text{XV. } e^{-x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}}{z(z+1)\dots(z+s)} x^{s+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+z}}{(n+z)^2}$$

die man, wenn auch mühsam, direkt beweisen könnte, indem man links die Funktion  $e^{-x}$  durch die zugehörige Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

ersetzt, die beiden Reihen miteinander multipliziert und das Produkt nach steigenden Potenzen von  $x$  ordnet.

Wie eben bemerkt, versagt die Darstellung der Funktion  $S(x, z)$  durch die Ausdrücke XII. und XIV. für  $z = 0$  und alle negativ ganzzahligen Werte von  $z$ . Der Grund dieses Versagens liegt darin, dass man bei der Umformung des Integrales XIII. den Integrationsweg durch den Nullpunkt gelegt hat, was eben für diese Werte von  $z$  nicht erlaubt ist. Nach der Definition II. existiert aber  $S(x, z)$  auch für die Werte  $z = 0, -1, -2, \dots$ . Man hat deshalb nach einer anderen Darstellung zu suchen.

§ 6. Die Funktionen  $S(x, -k)$  für ganzzahliges  $k \geqq 0$ .

Man gelangt von der Formel XIV. durch eine leichte Umformung zunächst zu einer konvergenten Entwicklung von  $S(x, 0)$ . Wir nehmen aus der Reihe das erste Glied  $\frac{x^z}{z^2}$  heraus, welches für  $z = 0$  unendlich gross wird. In der neuen Reihe ersetzen wir  $n$  durch  $n+1$ , und man kann so XIV. in der Form schreiben

$$(12) \quad S(x, z) = \frac{z^2 \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + x^z}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x^{n+z+1}}{(n+z+1)^2}$$

Für  $z = 0$  konvergiert jetzt die neue Reihe und stellt eine ganze Funktion von  $x$  dar. Bedeutet  $C$  die Eulersche Konstante und  $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$ , so ist nach Nielsen

$$(13) \quad z \Gamma(z) = \Gamma(z+1) = 1 - Cz + \frac{C^2 + s_2}{2} z^2 + O(z^3)$$

$$(14) \quad z \psi(z) = z \psi(z+1) - 1 = -1 - Cz + s_2 z^2 + O(z^3)$$

Nun ist der Zähler auf der rechten Seite von (12)

$$(15) \quad \begin{aligned} Z(z) &= z^2 \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + x^z \\ &= \Gamma(z+1) (z \psi(z+1) - 1 - z \log x) + x^z \end{aligned}$$

eine im Innern des Einheitskreises  $|z| < 1$  reguläre Funktion von  $z$ . Wir entwickeln dieselbe in eine Potenzreihe, wobei uns die Kenntnis der drei ersten Glieder genügt. Es ist

$$(16) \quad x^z = 1 + \log x \cdot z + \frac{1}{2} \log^2 x \cdot z^2 + O(z^3)$$

$$(17) \quad \Gamma(z+1) (\psi(z+1) - 1) = -1 + \frac{C^2 + s_2}{2} \cdot z^2 + O(z^3)$$

$$(18) \quad -z \Gamma(z+1) \log x = -\log x \cdot z + C \log x \cdot z^2 + O(z^3)$$

$$(19) \quad Z(z) = \left( \frac{C^2 + s_2}{2} + C \log x + \frac{1}{2} \log^2 x \right) z^2 + O(z^3)$$

Setzt man (19) in (12) ein, so wird

$$(20) \quad S(x, z) = \frac{C^2 + s_2}{2} + C \log x + \frac{1}{2} \log^2 x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{n+z+1}}{(n+z+1)^2} + O(z)$$

Dieser Ausdruck ist jetzt für  $z = 0$  regulär, und man erhält:

$$\text{XVI. } S(x, 0) = \frac{C^2 + s_2}{2} + C \log x + \frac{1}{2} \log^2 x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Analog erhält man für ganzzahliges  $k > 0$  eine konvergente Darstellung von  $S(x, -k)$ . Wir nehmen in XIV. aus der Reihe das gefährliche Glied

$$\frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{k+z}}{(k+z)^2}$$

heraus, welches für  $z = -k$  unendlich gross wird. Was übrigbleibt, verhält sich in der Umgebung von  $z = -k$  regulär. Wir schreiben also XIV. in der Form:

$$(21) \quad S(x, z) = \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{k+z}}{(k+z)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+z}}{(n+z)^2}$$

wo der Index beim Summenzeichen bedeutet, dass der Wert  $n=k$  auszulassen ist. Setzt man zur Abkürzung

$z+k=z'$ , so wird für  $z=-k$ ,  $z'=0$ . Wir untersuchen also die Funktion

$$(22) \quad U(x, z) = \Gamma(z) (\psi(z) - \log x) + \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{k+z}}{(k+z)^2}$$

$$= \frac{k! z'^2 \Gamma(z'-k) (\psi(z'-k) - \log x) + (-1)^k x^{z'}}{k! z'^2}$$

in der Umgebung von  $z=-k$  oder  $z'=0$ . Es ist

$$(23) \quad \Gamma(z') = (z'-1)(z'-2)\cdots(z'-k) \Gamma(z'-k)$$

$$(24) \quad \psi(z') = \frac{1}{z'-1} + \frac{1}{z'-2} + \cdots + \frac{1}{z'-k} + \psi(z'-k)$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Beziehungen so wie der Gleichungen (13) und (14) geht (22) nach Erweiterung mit  $(z'-1)(z'-2)\cdots(z'-k)$  über in

$$(25) \quad U(x, z) =$$

$$k! \Gamma(z'+1) \left\{ z' \psi(z'+1) - 1 + \frac{z'}{1-z'} + \cdots + \frac{z'}{k-z'} - z' \log x \right\} +$$

$$+ \frac{(-1)^k (z'-1)\cdots(z'-k) x^{z'}}{k! (z'-1)(z'-2)\cdots(z'-k) z'^2}$$

Ferner ist

$$(26) \quad (z'-1)\cdots(z'-k) =$$

$$= (-1)^k k! + (-1)^{k-1} k! \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \cdot z' + (-1)^{k-2} k! \sum_{l>i=1}^k \frac{1}{il} \cdot z'^2 + 0(z'^3)$$

$$(27) \quad \frac{z'}{1-z'} + \cdots + \frac{z'}{k-z'} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} z' + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} z'^2 + 0(z'^3)$$

(26) und (27) in (25) eingesetzt gibt

$$(28) \quad U(x, z) = \frac{\Gamma(z'+1) \left\{ z' \psi(z'+1) - 1 - z' \log x + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \cdot z' + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \cdot z'^2 \right\} + \left\{ 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \cdot z' + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \cdot z'^2 \right\} x^{z'} + 0(z'^3)}{(z'-1)(z'-2) \cdots (z'-k) z'^2}$$

Nach (15) und (19) ist

$$(29) \quad V_1(x, z) = \frac{\Gamma(z'+1) \{ z' \psi(z'+1) - 1 - z' \log x \} + x^{z'}}{z'^2} \\ = \frac{C^2 + s_2}{2} + C \log x + \frac{1}{2} \log^2 x + 0(z')$$

Weiter ist nach (13) und (16)

$$V_2(x, z) = \frac{\Gamma(z'+1) \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} z' + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} z'^2 \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} z' - \sum_{l>i=1}^k \frac{1}{il} z'^2 \right\} x^{z'}}{z'^2} \\ = \frac{(1 - Cz') \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} z' + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} z'^2 \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} z' - \sum_{l>i=1}^k \frac{1}{il} z'^2 \right\} (1 + \log x \cdot z') + 0(z'^3)}{z'^2}$$

$$(30) \quad V_2(x, z) = -C \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} + \sum_{l>i=1}^k \frac{1}{il} - \log x \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + 0(z')$$

Die zweite und dritte Summe kann man noch zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} + \sum_{l>i=1}^k \frac{1}{il} &= \sum_{l \geq i=1}^k \frac{1}{il} = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot k} \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot k} \\
 &\quad + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot k} \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad + \frac{1}{k \cdot k}
 \end{aligned}$$

Bedenkt man, dass

$$(31) \quad U(x, z) = \frac{V_1(x, z) + V_2(x, z) + 0(z')}{(z'-1)(z'-2) \cdots (z'-k)} \quad \text{ist,}$$

so erhält man aus (21), (22), (29), (30) und (31) für  $z'=0$  oder  $z=-k$  die gewünschte konvergente Darstellung:

$$\begin{aligned}
 \text{XVII.} \quad S(x, -k) &= \\
 &= \frac{(-1)^k}{k!} \left[ \frac{C^2 + s_2}{2} - C \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + \sum_{l \geq i=1}^k \frac{1}{il} + \left\{ C - \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right\} \log x + \frac{1}{2} \log^2 x \right] \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)^2}
 \end{aligned}$$

Für  $k \geq 1$  lassen sich diese Funktionen  $S(x, -k)$  mit Hilfe der in § 2 gefundenen Formeln der Reihe nach aus den bekannten Ausdrücken für  $S(x, 0)$ ,  $S(x, 1)$ ,

$S(x, 2)$  auch leicht rekursiv berechnen. So folgt aus den Formeln VIII. und X., indem man dort nacheinander  $z = -1, -2, -3, \dots$  setzt:

$$\text{XVIII. } \begin{cases} S(x, -1) = -S(x, 0) - S(x, 1) + \frac{e^{-x}}{x} \text{ oder} \\ xS(x, -1) = -xS(x, 0) - (x+1)S(x, 1) + S(x, 2) \end{cases}$$

$$\text{XIX. } \begin{cases} 4S(x, -2) = -3S(x, -1) - S(x, 0) + \frac{e^{-x}}{x^2} \\ 4xS(x, -2) = (1-3x)S(x, -1) + (1-x)S(x, 0) + S(x, 1) \end{cases}$$

usw.

### § 7. Beziehungen zum Integrallogarithmus und zur unvollständigen $\Gamma$ -Funktion.

Aus XIV. erhält man für  $z = 1$

$$(32) \quad S(x, 1) = -C - \log x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Anderseits lautet die bekannte Eulersche Entwicklung für den Integrallogarithmus:

$$(33) \quad l_i(e^{-x}) = C + \log x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Daher ist

$$\text{XX. } S(x, 1) = - \left[ C + \log x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right] = -l_i(e^{-x})$$

Zwischen der Funktion  $S(x, z)$  und der unvollständigen  $\Gamma$ -Funktion  $Q(x, z)$  hat man natürlich die De-

definitionsgleichung I. Eine zweite Relation, welche  $Q(x, z)$  als rationale Verbindung zweier  $S$ -Funktionen darstellt, leitet man leicht aus der Definition (1) von  $Q(x, z)$  her.

Wir nehmen wieder vorübergehend  $\Re(x) > 0$  an, führen wie in § 4 eine neue reelle Integrationsvariable  $t$  ein vermittels  $u = tx$ ,  $du = x dt$ . So wird

$$(34) \quad Q(x, z) = \int_x^\infty e^{-u} u^{z-1} du = x^z \int_1^\infty e^{-tx} t^{z-1} dt$$

Dies integrieren wir partiell, indem wir setzen

$$U = e^{-tx} t^z; \quad dU = -e^{-tx} (xt^z - zt^{z-1}) dt; \quad dV = \frac{dt}{t}; \quad V = \log t$$

Weil der ausintegrierte Teil

$$UV = \left[ e^{-tx} t^z \log t \right]_1^\infty$$

verschwindet, so erhält man

$$(35) \quad Q(x, z) = x^{z+1} \int_1^\infty e^{-tx} t^z \log t dt - zx^z \int_1^\infty e^{-tx} t^{z-1} \log t dt$$

was nach XIII. nichts anderes ist als:

$$\text{XXI.} \quad Q(x, z) = S(x, z+1) - z S(x, z)$$

Setzt man hierin für  $S(x, z+1)$  und  $S(x, z)$  die zugehörigen Ausdrücke XIV. ein, so erhält man nach leichten Umformungen die bekannte Beziehung

$$Q(x, z) = \Gamma(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+z}}{n+z}$$

Hingegen erhält man für ganzzahlige nicht positive Werte von  $z$  nach XVII. und XXI. eine einfache Formel

für  $Q(x, -k)$ , die im oben zitierten Handbuch von Nielsen nicht angeführt ist. Nach XXI. ist

$$(36) \quad Q(x, -k) = S(x, -(k-1)) + k S(x, -k)$$

Für den Spezialfall  $k = 0$  liefert dies zunächst

$$(37) \quad Q(x, 0) = S(x, 1) = -l_i(e^{-x}) = -C - \log x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Führt man in (36) rechts für  $k-1$  und  $k (k \geq 1)$  die Ausdrücke XVII. ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\text{XXII. } Q(x, -k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} - C - \log x \right] - \sum_{n=0}^{\infty} {}' \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n-k}}{n-k}$$

---

