B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

Die Elemente der Lebensversicherungs-Rechnung.

Von Prof. Dr. **H. Kinkelin.**

Neue Ausgabe, veranstaltet von der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker zur Erinnerung an ihren ersten Präsidenten auf dessen 100. Geburtstag, 11. November 1932.

Vorwort.

Am 2. Januar 1913 ist im Alter von 80 Jahren Herr Professor Dr. Hermann Kinkelin, einer der Gründer der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, gestorben. Er war ihr erster, langjähriger und hingebender Präsident. Im 8. Heft der «Mitteilungen» findet sich aus berufener Feder eine Würdigung der Tätigkeit Kinkelins als Kantonsschullehrer und Hochschulprofessor, als Politiker und namentlich als Sachverständiger im Gebiete des Versicherungswesens. Die besondere Vorliebe Kinkelins galt dem Hilfskassenwesen, dessen Förderung und versicherungstechnische Fundierung ihm sozusagen ein Herzensbedürfnis war. Eines der hauptsächlichen Mittel zur Hebung des Verständnisses für versicherungstechnische Fragen erblickte er in der Abfassung klarer, leicht verständlicher Abhandlungen und Gutachten.

Mit seinen «Elementen der Lebensversicherungs-Rechnung» (1. Auflage 1869, 2. Auflage 1875) verfolgte er den besondern Zweck, die Versicherungsrechnung in den Unterricht an den Gymnasien einzugliedern und den Lehrern der Mathematik ein brauchbares, kurz gefasstes Lehrmittel an die Hand zu geben.

Im Vorstand der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker wurde vor einigen Jahren der Wunsch geäussert, es möchte jene Schrift einer Neubearbeitung unterzogen und wieder herausgegeben werden. Die Anregung fiel auf fruchtbaren Boden. Der Vorstand der Vereinigung hielt es allerdings für wünschbar, die Herausgabe der «Elemente» auf den 100. Geburtstag Kinkelins zu verschieben. Es wurde vorgesehen, die Kinkelinsche Arbeit in den «Mitteilungen» des Jahres 1932 abzudrucken und auf diese Weise das Andenken des langjährigen ersten Präsidenten der Vereinigung in sinnfälliger Weise zu ehren.

Dieser Plan kommt heute zur Ausführung. Die Schrift von Kinkelin erfuhr zunächst eine Neubearbeitung. Insbesondere erwies es sich als wünschbar, im wesentlichen zu der internationalen Bezeichnungsweise überzugehen. Dann aber mussten alle durch die Entwicklung der Verhältnisse veralteten Hinweise, sei es auf Gegenstände der Literatur, sei es auf solche des praktischen Versicherungswesens, ausgeschaltet werden. Gleichzeitig musste die Darstellungsform durch leichte Änderungen an die moderne Rechtschreibung und Ausdrucksweise angepasst werden.

Bei den Änderungen hat man sich jedoch auf das Notwendigste beschränkt. Es wurde Wert darauf gelegt, an der ursprünglichen Fassung der «Elemente» möglichst wenig zu ändern und so das kleine Meisterwerk in der ursprünglichen Form vor dem Leser neu erstehen zu lassen.

Die Beibehaltung der ursprünglichen Fassung gilt namentlich hinsichtlich der methodischen Seite. Die Stärke der Kinkelinschen Schrift liegt darin, dass mit ganz wenigen Begriffen die Hauptprobleme der Versicherungsrechnung behandelt werden. So wird beispielsweise in der ganzen Arbeit bloss der *nachschüssige* Rentenbarwert verwendet und auch nur dieser eingeführt. Ferner hatte sich Kinkelin in seinen Formeln bloss der Aufzinsungsfaktoren bedient; in dieser Hinsicht erschien eine gewisse Erweiterung durch Einbezug der so wichtigen und heute allgemein verwendeten Abzinsungsfaktoren wünschbar.

Beibehalten wurde namentlich auch die Sterbetafel. Es ist die der 17 englischen Gesellschaften, die, wenn auch noch da und dort in praktischem Gebrauch, doch als veraltet angesehen werden muss. Zur Durchführung von Beispielen im Unterricht und beim Selbststudium spielt jedoch die Wahl der Tafel keine wesentliche Rolle, so dass kein Grund vorlag, zu einer Tafel aus neuerer Zeit überzugehen. Dagegen wurde Wert auf Nachprüfung aller Zahlenbeispiele gelegt.

Die Schrift wird demnächst als besondere Broschüre im Buchhandel erscheinen. Möge sie, wie schon zu ihrer Zeit die in der Schweighauserschen Verlagsbuchhandlung in Basel erschienene ursprüngliche Abhandlung des Meisters Kinkelin, viele aufmerksame Leser finden und das Verständnis für versicherungstechnische Fragen in der privaten und öffentlichen Versicherung vertiefen helfen.

Prof. W. Friedli, Bern.

Einleitung.

Bei der wachsenden Verbreitung der Lebensversicherung und angesichts der unvollständigen Kenntnis ihrer Grundlagen auch im gebildeten Publikum muss es auffallen, dass die Literatur auf diesem Gebiete nicht reicher ist und dass die Lehrer der Mathematik an mittleren und höheren Lehranstalten es häufig etwas vernachlässigen. Der Verfasser hat schon frühzeitig (Die gegenseitigen Hülfsgesellschaften der Schweiz, Bern 1868) auf diesen anregenden und bildenden Unterrichtsstoff aufmerksam gemacht und ihn jeweilen in den oberen Klassen der Basler Gewerbeschule behandelt. Aus diesem Unterricht heraus sind dann seine «Elemente der Lebensversicherungs-Rechnung» entstanden. Bei ihrer Herausgabe leitete den Verfasser das Bestreben, Lehrern und anderen Personen, welche sich darum interessieren und in den Fall kommen können, im gegebenen Fall zu belehren und zu raten, nützlich zu sein. Er hat dabei lediglich die Absicht verfolgt, ihnen eine klare Einsicht in das Wesen der Versicherungsrechnung zu verschaffen und einen Wegweiser zu bieten, an dessen Hand sie einschlägige Fragen beurteilen können.

Was die Ausführung betrifft, so musste sie sich, der Absicht des Verfassers gemäss, ebensosehr von der Ausführlichkeit eigentlicher Lehrbücher fernhalten als von dem Versuche, das Versicherungswesen ohne mathematische Hilfsmittel zu behandeln. Die Formelsprache ist die kürzeste und ausdruckvollste und lässt sich nicht ersetzen.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist ganz aus dem Spiel gelassen und durch den Begriff des Durchschnittes oder des Mittels, der an sich schon verständlicher ist, ersetzt worden.

Die Formeln sind nicht weiter, als es für passend erachtet wurde, reduziert und für die Reserve meistens nicht in die bei den grössern Versicherungsanstalten, welche jährlich Tausende solcher Rechnungen zu machen haben und den hierfür geeignetsten Ausdruck wählen, beliebte Form gebracht worden, um den Umfang der Schrift nicht überflüssig zu vergrössern. Dagegen ist besondere Rücksicht auf die Rechnungen für kleinere gegenseitige Versicherungsvereine genommen.

Beispiele, die nach den beigegebenen vier Tabellen gerechnet sind, erläutern die einzelnen Aufgaben.

Beim Unterricht lohnt es sich, durch die Schüler graphische Darstellungen der Sterblichkeitsverhältnisse, Prämien u. dgl. machen zu lassen, wobei die Jahre als Abszissen, die darzustellenden Zahlen als Ordinaten aufgetragen werden.

Erstes Kapitel.

Von der Sterblichkeit.

Das Leben des Menschen ist begrenzt. Beispiele von mehr als 100jährigen Menschen sind so selten, dass unter Hunderttausenden kaum einer an ein so hohes Alter hinanreicht. Man darf daher hundert Jahre als Altersgrenze betrachten. Wenige kommen an dieses Ziel. Natur und Lebensweise sorgen dafür, dass bei dem einen Menschen früher, bei dem andern später die das Leben unterhaltenden Organe in ihrer Tätigkeit erlahmen, dieselbe einstellen und dadurch den Tod veranlassen. Je älter der Körper, um so weniger widersteht er im allgemeinen zerstörenden Einflüssen. Im Kindesalter, wo er noch unausgebaut ist, beeinflussen ebenso die äussere Umgebung, die Pflege, die natürliche Anlage sein Gedeihen, das durch die geringfügigsten Ursachen unterbrochen und vernichtet werden kann. Schon aus diesen allbekannten Beobachtungen ergibt sich, dass die Sterblichkeit des Menschen im Kindesalter sehr bedeutend ist, mit den Jahren allmählich abnimmt, bis sie ein Minimum erreicht, und von da an wieder wächst bis zur obern Altersgrenze. Es ist richtig, dass die Sterbenshäufigkeit nicht allein durch das Alter, sondern auch durch andere Verhältnisse mitbedingt wird, welche mit demselben in keiner direkten Beziehung stehen, durch Unglücksfälle, Tötungen, Selbstmorde u. dgl. Die Statistik hat aber anhand sorgfältiger Beobachtungen gezeigt, dass das Alter im grossen und ganzen der wesentlichste Faktor ist und dass die Sterblichkeit einer Bevölkerung sich nach ihm richtet. Das nämliche gilt von Personen des nämlichen Berufs oder in sonst gleichartigen äusseren Verhältnissen. Diese Erfahrung stützt sich auf so zahlreiche Fälle und wiederholt sich bei den Versicherungsanstalten fast täglich, dass an ihrer Richtigkeit nicht mehr zu zweifeln ist. Die betreffenden Verhältnisse sind allerdings im Zeitenlauf Veränderungen unterworfen, wie denn z. B. nachgewiesen ist, dass die Sterblichkeit seit der Einführung der Kuhpockenimpfung merklich abgenommen hat.

Hievon ausgehend, wird man die Sterblichkeit für die verschiedenen Altersklassen durch Zahlen auszudrücken haben. Eine Tabelle, welche dies leistet, heisst *Mortalitäts-* oder *Sterblichkeitstafel.* Sie kommt in zwei Formen vor.

Die eine besteht darin, dass angegeben ist, wie viele von einer gegebenen Anzahl von Personen eines bestimmten Alters nach 1, 2, 3, 4, ... Jahren noch leben. Tab. I, Rubrik «Lebende», enthält eine solche Tafel nach den Erfahrungen von 17 der ältesten Lebensversicherungsgesellschaften Englands an 62537 Personen während der Jahre 1762—1840. Sie beginnt mit dem Alter von 10 Jahren und ist so zu verstehen, dass von 100000 zehnjährigen Personen nach 1 Jahr noch 99324, nach 2 Jahren noch 98650 usw. leben. Man sieht aus ihr zugleich, wie viele von irgendeinem andern Alter nach einer gegebenen Reihe von Jahren noch am Leben sind, z. B. von 93268 zwanzigjährigen nach 1 Jahr noch 92588, nach 2 Jahren 91905 usw. Die Zahl, welche in dieser Tabelle neben einem gegebenen Alter steht, wird in Zukunft mit dem Buchstaben l, dem das betreffende Altersjahr als Zeiger angehängt ist, bezeichnet werden. Es bedeutet also $l_{10} = 100000$ die Zahl der Lebenden von 10 Jahren, $l_{20} = 93268$ die von 20 Jahren, allgemein l_x die von x Jahren, $l_{x+1}, l_{x+2}, \ldots$ diejenigen im Alter von $x+1$, $x+2, \ldots$ Jahren. — Die Differenz zweier Zahlen der Lebenden gibt die Anzahl der in dem bezüglichen Zeitraum Gestorbenen an. So z. B. sterben vom 10. bis zum 11. Jahre $100000 - 99324 = 676$, vom 10.—12. $100000 - 98650 = 1350$, vom 40.—60. $78653 - 55973 = 22680$ Personen. Die Anzahl der $x$jährigen Personen, welche im Laufe eines Jahres sterben, wird die Zahl der im $x$ten Altersjahr *Gestorbenen* genannt und ist gleich $l_x - l_{x+1}$. Man bezeichnet sie nach der internationalen Schreibweise mit d_x, so dass gilt

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Bei der zweiten Form wird angegeben, welche *einjährige Lebenswahrscheinlichkeit* für eine Person gegebenen Alters vorhanden ist. Man versteht darunter die Zahl, welche angibt, wieviel mal kleiner die Zahl der Lebenden am Ende des Jahres ist als die an seinem Anfange, und findet sie, wenn man die erste durch die zweite dividiert. Ist demnach l_x die Zahl der Lebenden vom Alter x, l_{x+1} die vom Alter $x+1$ und bezeichnet man die einjährige Lebenswahrscheinlichkeit für eine Person vom Alter x mit p_x, so ist

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

z. B.

$$p_{10} = \frac{99324}{100000} = 0{,}99324, \qquad p_{15} = \frac{95965}{96636} = 0{,}99306.$$

Multipliziert man die Zahl p_x mit 100, so erhält man die Zahl der $x$jährigen Personen, welche nach einem Jahr noch leben, in Prozenten der anfangs Lebenden ausgedrückt, z. B. von den Fünfzehnjährigen leben nach 1 Jahr noch $99{,}_{306}$ %. — Auf ähnliche Weise wird die *einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit* gefunden, d. h. das Verhältnis der im Laufe des Jahres Sterbenden zu der Zahl der Lebenden zu Anfang des Jahres. Bezeichnet man sie mit q_x für das Alter x, so ist also

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x,$$

z. B. $$q_{10} = 1 - 0{,}99324 = 0{,}00676,$$
$$q_{15} = 1 - 0{,}99306 = 0{,}00694.$$

Die mit 100 multiplizierte Sterbenswahrscheinlichkeit gibt die Anzahl der Personen eines gegebenen Alters, welche im Laufe eines Jahres sterben, in Prozenten der anfangs Lebenden ausgedrückt. (Tab. I, Kolonne «Lebenswahrscheinlichkeit» und «Sterbenswahrscheinlichkeit».)

Wie man nach dem Vorigen aus der ersten gebräuchlicheren Form der Mortalitätstafel zur zweiten übergehen kann, so kann man auch aus der zweiten die erste ableiten. Kennt man nämlich die q_x für alle Alter, so folgt aus der Gleichung

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad \text{sofort:} \; l_{x+1} = p_x \cdot l_x.$$

Nimmt man daher z. B. $l_{10} = 100\,000$ an, so wird

$$l_{11} = p_{10} \cdot l_{10} = 0{,}99324 \cdot 100000 = 99324$$
$$l_{12} = p_{11} \cdot l_{11} = 0{,}99321 \cdot \;\; 99324 = 98650$$
$$l_{13} = p_{12} \cdot l_{12} = 0{,}99319 \cdot \;\; 98650 = 97978 \text{ usw.}$$

Es ist somit vollkommen gleichgültig, welche der beiden Formen der Mortalitätstafel als die ursprüngliche vorausgesetzt wird.

Wenige Züge mögen andeuten, wie man aus Beobachtungen Mortalitätstafeln angelegt hat. Die einfachste Methode würde darin bestehen, aus den Sterbelisten mehrerer Jahre die Verstorbenen nach den Altersklassen zu ordnen. Da es gleichgültig ist, wann dieselben geboren waren, vorausgesetzt, dass die Sterbeverhältnisse die nämlichen geblieben sind, so darf man annehmen, alle so beobachteten Personen seien gleichzeitig geboren worden. Das Alter von 1 Jahr würden dann alle die erreichen, welche bei dem Tode 1 Jahr oder mehr alt waren, das Alter von 2 Jahren alle die, welche im Alter von 2 oder mehr Jahren gestorben sind, das von 3 Jahren die, welche 3 oder mehr Jahre alt waren usw., auf welche Weise die Zahl der Lebenden für jedes Alter leicht gefunden wird. Nach diesen Grundsätzen ist die erste Sterblichkeitstafel von *Halley* aus Beobachtungen in Breslau während der Jahre 1687—1691 zusammengestellt worden und nach seinem Beispiel die weiteren Tafeln von *Duvillard* für Frankreich, *Price* für Northampton, 1735—1780, *Süssmilch* für Deutschland 1741 u. a. m. Man sieht aber bald ein, dass diese Methode unrichtige

Resultate geben muss, sobald nicht in jedem Jahr gleich viele Personen geboren werden und die Bevölkerung nicht stationär bleibt. Denn ein Jahr, das zufällig weniger Geburten als gewöhnlich hervorbringt, wird für die ganze Zeit, wo noch Personen aus ihm am Leben sind, eine gegenüber normalen Jahren zu kleine Zahl von Absterbenden ergeben. Ebenso ist bekannt, dass die europäische Bevölkerung seit den letzten 100 Jahren beständig zunimmt, womit auch die Geburtenzahl von Jahr zu Jahr wächst. Dies hat zur Folge, dass bei übrigens gleichbleibender Sterblichkeit die Zahl der in den ersten Lebensjahren Sterbenden im Verhältnis zu den übrigen zu gross erscheint. Eine so konstruierte Mortalitätstafel wird also eine zu grosse Sterblichkeit, namentlich in den jüngeren Jahren, aufweisen, was wirklich bei den oben genannten der Fall ist.

Richtigere Resultate gibt eine zweite Methode, welche auf der Verbindung der Volkszählungen mit den jährlichen Geburts- und Sterbelisten beruht. Bei der Volkszählung verlangt man bekanntlich die Altersangabe einer jeden Person, wodurch man Kenntnis von der Zusammensetzung der Bevölkerung nach den Altersklassen gewinnt. Ebenso hat man aus den Sterbelisten das Alter der Verstorbenen jedes Jahres. Hieraus ergibt sich das Verhältnis der Zahl der in einem Jahr Gestorbenen zu derjenigen der bei seinem Anfang Lebenden, d. h. die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x, aus der man wiederum $p_x = 1 - q_x$ und damit die Mortalitätstafel herstellt. Nach dieser Methode wurden die Tafeln für ganze Bevölkerungen berechnet, so die von *Quételet* für Belgien 1856, von *Heym* für Sachsen 1840 bis 1849, von *Gisi* für die Schweiz 1850—1865 usw. Obgleich auch dieser Methode Fehler anhaften, da sie die Aus- und Eingewanderten nicht berücksichtigt, so ist sie doch die einzige, welche hier brauchbar ist und annähernd richtige Resultate bietet.

Nach einer dritten Methode, welche einzig tadellose Ergebnisse liefern kann, beobachtet man eine grosse Anzahl von Personen von der Geburt oder von gegebenem Alter an bis zum Tode. Die Lebensversicherungs- und Rentenanstalten notieren von jedem ihrer Versicherten das Ein- und Austrittsalter resp. Todesalter. Man bemerkt sich nun alljährlich, wie viele Personen der verschiedenen Altersklassen jeweilen am Jahresanfang der Gesellschaft angehörten, wie viele darunter im Laufe des Jahres gestorben oder sonst ausgetreten sind. Hiedurch erhält man, wie bei der zweiten Methode, die Werte der q_x und p_x und aus ihnen die l_x. Auf diese Weise sind u. a. konstruiert die Mortalitätstafeln von *Morgan* für die Equitable Society 1815—1828, von *Deparcieux* für die französische Tontinenanstalt 1689—1696, von *Brune* für die allgemeine preussische Witwenkasse 1776—1845, die der 17 englischen Gesellschaften und viele andere. Es bedarf nicht der besondern Erinnerung, dass diese Tafeln nur wieder für Personen in ähnlichen Verhältnissen gelten und nicht auf ganze Bevölkerungen angewendet werden dürfen. Die im folgenden benutzte Tafel der 17 englischen Gesellschaften war lange Zeit bei den meisten englischen und vielen kontinentalen Versicherungsanstalten im Gebrauch. Eine eingehende Darstellung derselben gibt *Jones* (A new rate of mortality, London 1843).

Erste Aufgabe. Es ist anzugeben, wie viele Personen einer gegebenen Gesellschaft nach einem Jahr noch am Leben und wie viele gestorben sein werden.

Auflösung. Es befinden sich L Personen vom Alter x bei der Gesellschaft. Wenn nun von l_x Personen zu

Ende des Jahres noch l_{x+1} leben, so hat man bei L solchen die Proportion

$$L : X = l_x : l_{x+1},$$

also

$$X = L \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} = L \cdot p_x,$$

d. h. man multipliziere die einjährige Lebenswahrscheinlichkeit mit der Personenzahl. Die Summe dieser Produkte für die verschiedenen Alter wird die verlangte Anzahl Lebender am Ende des Jahres sein.

Weil ferner von l_x Personen d_x das Jahr hindurch sterben, so ergibt sich die Zahl der von L Personen Sterbenden durch die Proportion

$$L : Y = l_x : d_x,$$

also

$$Y = L \cdot \frac{d_x}{l_x} = L \cdot q_x.$$

Einfacher findet man sie durch Subtraktion der Zahl der Lebenden am Jahresschlusse von derjenigen am Jahresanfang. Man nennt diese Zahl die *erwartungsmässige Sterblichkeit.* Z. B.:

Alter x	Personen L	p_x	Lebende nach 1 Jahr	Sterbende in 1 Jahr
20	30	0,99271	29,78	0,22
25	40	0,99223	39,69	0,31
30	60	0,99158	59,49	0,51
35	25	0,99071	24,77	0,23
40	90	0,98964	89,07	0,93
	245		242,80	2,20

Auf analoge Weise findet man die Anzahl der Personen, welche nach 2, 3, ... n Jahren noch in der Gesellschaft sein werden, indem man die einjährige Lebenswahrscheinlichkeit durch die 2, 3 ... $n$jährige ersetzt, welche für das Alter x bezüglich den Brüchen gleich sind:

$$\frac{l_{x+2}}{l_x}, \frac{l_{x+3}}{l_x}, \ldots \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Zweite Aufgabe. Es ist anzugeben, wieviel eine auf den Todesfall versichernde Anstalt voraussichtlich im nächsten Jahre zu zahlen haben wird.

Auflösung. Es werden wieder L Personen vom Alter x angenommen, an welche im Falle des Todes je T Fr. Versicherungssumme zu zahlen seien. Da im nächsten Jahre nach der ersten Aufgabe $L \cdot q_x$ sterben, so ist an sie im ganzen die Summe von $L \cdot q_x \cdot T$ Fr. auszuzahlen, an eine von ihnen also durchschnittlich $\frac{L \cdot q_x \cdot T}{L}$ oder $q_x \cdot T$. Man findet also die *erwartungsmässige Zahlung* des nächsten Jahres für jeden einzelnen Versicherten, wenn man seine einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit mit seiner Versicherungssumme multipliziert. Die Summe aller dieser Produkte ist die erwartungsmässige Totalausgabe des Jahres. Z. B. :

Versicherte	Alter x	Versicherungssumme $T \cdot$ Fr.	q_x	erwartungsmässige Zahlung, Fr.
A	36	10000	0,00948	94,80
B	40	3000	0,01036	31,08
C	53	2000	0,01909	38,18
D	67	5000	0,05147	257,35
			Total Fr.	421,41

Die erwartungsmässige Zahlung wird mit der wirklichen im allgemeinen nicht so gut stimmen, wie es bei der erwartungsmässigen Sterblichkeit geschieht, weil die Versicherungssummen der einzelnen Versicherten sehr ungleich sind.

Dritte Aufgabe. Die mittlere zukünftige Lebensdauer einer Person gegebenen Alters zu finden.

Auflösung. Die Aufgabe besteht darin, anzugeben, wie viele Jahre eine jetzt $x$jährige Person im Durchschnitt noch zu leben habe. Man soll also den Durchschnitt aus allen zukünftigen Lebensjahren einer grossen Anzahl $x$jähriger Personen nehmen. Er wird gefunden, wenn man die Summe dieser Jahre durch die Anzahl der Personen dividiert. Wählt man der Einfachheit wegen die in der Mortalitätstafel stehende Personenzahl l_x so leben nach 1 Jahr noch l_{x+1}. Unter der vorläufigen Annahme, dass der Tod bei allen während dieser Zeit Gestorbenen gleich am Jahresanfang eingetreten sei, werden also von den l_x Personen l_{x+1} je 1 Jahr durchlebt haben, somit alle zusammen l_{x+1} Jahre. Auf die gleiche Weise erhält man für das nächste Jahr die Summe von l_{x+2} Lebensjahren, im folgenden l_{x+3} usw. Die anfänglichen l_x Personen werden demnach bis zu ihrem gänzlichen Aussterben $l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} \dots$ zukünftige Lebensjahre haben, wobei die Summe bis an das Ende der Tafel fortzusetzen ist und *Summe der Lebenden* vom Alter $x + 1$ genannt wird. Die durchschnittliche zukünftige Lebensdauer einer Person würde somit gleich

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x}.$$

Man bezeichnet diese Grösse mit e_x, so dass

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x}.$$

Die Annahme, dass sämtliche Todesfälle auf den Anfang jedes Jahres eintreten, ist aber insofern nicht zutreffend, als sich dieselben vielmehr über das ganze Jahr ungefähr gleich verteilen, so dass man richtiger annehmen würde, dass sie im Durchschnitt in die Mitte des Jahres fallen. Es ist demnach durch die vorige Annahme jede Person um ein halbes Jahr verkürzt worden, und die mittlere Lebensdauer wird gleich

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x} + \frac{1}{2}.$$

Jahren sein. Man findet sie also, wenn man die Summe der Lebenden des nächsthöhern Altersjahrs durch die Zahl der Lebenden des gegebenen Alters dividiert und den Quotienten um $\frac{1}{2}$ vermehrt (Tab. I, vierte Kolonne). Man bezeichnet diese Grösse mit $\mathring{e}_x$, so dass gilt

$$\mathring{e}_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots}{l_x} + \frac{1}{2}$$

Beispiel. Die mittlere Lebensdauer eines 90jährigen ist $\mathring{e}_{90} = (892 + 570 + 339 + 184 + 89 + 37 + 13 + 4 + 1)$ $: 1319 + 0{,}5 = 2{,}11$ Jahre.

Vierte Aufgabe. Eine Anzahl gleichalter Ehepaare sei gegeben; man soll finden, wie viele von ihnen nach einer gegebenen Zeit noch leben, wie viele ausgestorben sind, wie viele Witwen und Witwer zurückgelassen wurden.

Auflösung. Die Anzahl der Ehepaare sei L, die Männer seien je x, die Frauen je y Jahre alt und der zu betrachtende Zeitraum betrage n Jahre. Zunächst findet sich die Zahl der nach n Jahren noch lebenden Frauen durch die Proportion

$$L : Y = l_y : l_{y+n},$$

$$Y = L \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}.$$

Die Zahl der noch lebenden Ehen ist darin enthalten nach Massgabe der noch lebenden Männer. Von den Männern, welche anfangs mit obigen Y Frauen verbunden waren, seien noch X am Leben, so verhält sich

$$L \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} : X = l_x : l_{x+n}.$$

$$X = L \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}, \tag{1}$$

und dies ist die Zahl der Frauen, welche ihre Männer noch besitzen, d. h. die Zahl der noch *lebenden Ehen.*

Die übrigen Frauen, deren Männer nicht mehr leben, sind *Witwen;* ihre Zahl ist gleich

$$Y - X = L \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} - L \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= L \frac{l_{y+n}}{l_y} \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right). \tag{2}$$

Ganz auf gleiche Weise wird die Zahl der Witwer gefunden. Die Zahl der überhaupt noch lebenden Männer ergibt sich aus der Proportion

$$L : Z = l_x : l_{x+n},$$

$$Z = L \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

folglich ist die Zahl der *Witwer* gleich

$$Z - X = L \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} - L \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= L \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right). \qquad (3)$$

Die *ausgestorbenen Ehen* werden durch Subtraktion der lebenden Ehen, der Witwen und Witwer von den gegebenen Ehen erhalten, nämlich

$$U = L - X - (Y - X) - (Z - X)$$

$$= L \left[1 - \frac{l_{y+n}}{l_y} \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{y+n}}{l_y} \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) - \frac{l_{x+n}}{l_x} \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)\right]$$

$$U = L \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)$$

oder $$U = L \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right). \qquad (4)$$

Beispiel. Von 400 Ehen, wo die Männer 30, die Frauen 25 Jahre alt sind, gibt es nach 10 Jahren

$$400 \cdot \frac{l_{35}}{l_{25}} \left(1 - \frac{l_{40}}{l_{30}}\right) = 32{,}55 \text{ Witwen,}$$

$$400 \cdot \frac{l_{40}}{l_{30}} \left(1 - \frac{l_{35}}{l_{25}}\right) = 29{,}44 \text{ Witwer,}$$

$$400 \cdot \frac{l_{35}}{l_{25}} \cdot \frac{l_{40}}{l_{30}} = 335{,}15 \text{ lebende Ehen,}$$

$$400 \cdot \left(1 - \frac{l_{35}}{l_{25}}\right)\left(1 - \frac{l_{40}}{l_{30}}\right) = 2{,}86 \text{ erloschene Ehen.}$$

Es ist eine weitverbreitete Meinung, dass schon die ersten Jahre des Bestandes einer Witwenkasse auf ihr zukünftiges Gedeihen schliessen lassen. Ferner wird gewöhnlich angenommen, dass ein grosser Zugang junger Mitglieder einer morsch gewordenen Kasse aufhelfen könne. Die Irrtümlichkeit dieser Ansichten wird durch nachfolgendes Beispiel dargetan.

Eine Witwenkasse enthalte 400 Ehepaare, in denen die Männer 30, die Frauen 25 alt sind. Sobald eine Frau stirbt, trete der Witwer aus. Die gestorbenen und die ausgetretenen Mitglieder werden jeweilen nach 10 Jahren durch neue Ehen von den angegebenen Altern ersetzt, so dass die Gesamtzahl alle zehn Jahre wieder auf 400 steht. Dann sind vorhanden:

nach Jahren	Witwen		Lebende erste Mitglieder	Witwen der ersten Mitglieder
	Anzahl	in % der Ehen		
10.	32,55	8,14	335,15	32,55
20.	69,79	17,45	267,00	64,43
30.	116,23	29,06	183,31	99,29
40.	159,36	39,84	86,46	121,72
50.	158,96	39,74	16,53	90,78
60.	123,50	30,87	0,37	23,75

Hieran knüpfen sich folgende Bemerkungen. Würden zunächst keine neuen Mitglieder eintreten, so zeigen die die ersten Mitglieder betreffenden Zahlen, dass die Witwenzahl bis zu einem zwischen dem 30. und 40. Vereinsjahr (genauer zwischen dem 37. und 38.) liegenden Zeitpunkt unter der Mitgliederzahl bleibt, von dort an aber rasch grösser wird, so dass nach 60 Jahren die zahlenden Mitglieder ausgestorben, dagegen noch 24 Witwen am Leben sind. Ähnliche Umstände würden eintreten, wenn während längerer Zeit keine oder nur wenig neue Mitglieder dem Verein beiträten. Auch bei Wiederersetzung der gestorbenen und ausgetretenen Mitglieder zeigt die Witwenzahl eine beständige Zunahme bis zum 40. Vereinsjahr, erreicht dort ein Maximum von nahe 40 % der Mitgliederzahl, nimmt vom 50. Jahr an wieder ab bis auf etwa 30 % und wächst später wieder [1]. Etwas günstiger gestaltet sich die Sache, wenn die Mitgliederzahl selbst im Zustand des Wachsens ist; aber dies Wachstum kann nicht ins Unendliche fortgehen, und es wird einmal ein Stillstand oder Rückgang eintreten, und von diesem Moment an wird das Verhältnis der Zahl der Witwen zu der der Mitglieder in um so stärkerem Masse zunehmen. Diese Beobachtung hat grosse Wichtigkeit für Witwenkassen, welche die zu verwerfende Einrichtung haben, dass der Betrag der Witwenpension

[1] Dieses von *Kinkelin* aufgeworfene Problem ist später durch *O. Schenker* einer eingehenden mathematischen Behandlung unterworfen worden (Mitteil. schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 11, Bern 1916). Es führt auf eine Integralgleichung. Die Aufgabe bedeutet einen Spezialfall der von Prof. *Moser* betrachteten «sich erneuernden Gesamtheiten», deren Vorgänge mathematisch durch Integralgleichungen festgelegt sind (vgl. *Ch. Moser*, Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit, Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 21, Bern 1926).

von dem Stande der Kasse, d. h. von der Anzahl der zahlenden Mitglieder, abhängt. Einem derartigen Vereine kann nichts Schlimmeres begegnen als ein plötzlicher starker Zugang neuer Mitglieder, dem ein Stillstand folgt. Denn in diesem Fall wächst die Zahl der Witwen anfangs beinahe so, wie in der ersten Abteilung obiger Tabelle angegeben ist; infolgedessen nehmen die Witwengehalte ab, was wieder eine Rückwirkung auf den Zutritt neuer Mitglieder ausübt und nun eine um so raschere Zunahme der Witwen, wie sie die zweite Abteilung der Tabelle zeigt, verursacht. Wer es mit unsern Witwen-, Alters- und Sterbekassen aufrichtig meint, muss aufs dringendste vor dem Abhängigmachen der Bezugsbeträge von der Mitgliederzahl warnen, weil sie dies mit mathematischer Gewissheit einer traurigen Zukunft entgegenführt.

Wenn die Anzahl L der Ehen von den resp. Altern x und y des Mannes und der Frau gleich $l_x \cdot l_y$ ist, so vereinfachen sich die Ausdrücke (1) bis (4), und man erhält nach n Jahren die Zahl der

$$\left.\begin{array}{ll} \text{lebenden Ehen} & X = l_{x+n} \cdot l_{y+n} \\ \text{Witwen} & Y - X = l_x \, l_{y+n} - l_{x+n} \cdot l_{y+n} = l_{y+n} \, (l_x - l_{x+n}) \\ \text{Witwer} & Z - X = l_y \cdot l_{x+n} - l_{y+n} \cdot l_{x+n} = l_{x+n} \, (l_y - l_{y+n}) \\ \text{erloschenen Ehen} & U = (l_x - l_{x+n}) \, (l_y - l_{y+n}) \end{array}\right\} \quad (5)$$

Es mag schliesslich bemerkt werden, dass, was soeben für Ehen aufgestellt wurde, auf irgendwelche andere Paare verbundener Personen gilt, z. B. Vater und Sohn, Mutter und Tochter oder dgl. Ebenso wird es keine Schwierigkeit haben, ähnliche Formeln für den Fall von je 3 verbundenen Personen abzuleiten.

Zweites Kapitel.

Von der Verzinsung.

Ein wesentliches Moment im Versicherungswesen bildet die Verzinsung der ein- und ausgehenden Gelder; bei den eingehenden im Sinn einer Vermehrung des Kassabestandes, bei den ausgehenden in dem einer Verminderung. Obgleich nun die bürgerliche Gesetzgebung nicht gestattet, von rückständig gebliebenen Zinsen noch einmal Verzugszinsen zu verlangen, so kann doch niemand hindern, dass man eingehende Gelder jeder Art sofort wieder zinsbar macht, und es wird an eine gute Verwaltung sogar diese Forderung gestellt werden müssen. Man hat demnach bei den Einnahmen mit Zinseszinsen zu rechnen. Was die Ausgaben betrifft, so gibt jeder Posten dieser Art von dem Augenblick des Ausgebens an keinen Zins mehr. Die Zinse des ganzen Kapitals laufen daher bloss bis zum Zeitpunkt der Verminderung desselben. Man kann nun entweder die Rechnung so stellen, dass man wirklich jeden Zins nur für die Zeiten rechnet, innerhalb welcher das Kapital jeweilen unverändert bleibt; oder, was einfacher ist, man rechnet den Zins des ganzen Kapitals von Anfang an bis zu Ende der ganzen Zeit und zieht von ihm die Zinsen der ausgegebenen Posten ab von dem Augenblick ihres Ausgangs ebenfalls bis zu Ende des ganzen Zeitraums, wie es z. B. in den gewöhnlichen kaufmännischen Konto-Korrenten geschieht. Der übrigbleibende Rest, nachdem man die Ausgaben samt Zinsen von den Einnahmen samt Zinsen abgezogen hat, bildet das Schlusskapital.

Beispiel. Am 1. Januar werden 350 Fr. zu 4% angelegt und hiervon am 15. August 120 Fr. abgelöst, welches Guthaben besitzt man am 31. Dezember?

350 Fr. geben vom 1. Januar bis 15. August Fr. 8,75 Zins
230 » » » 15. August bis 31. Dez. » 3,45 »

Es bleiben Fr. 230 Kapital + Fr. 12,20 Zins = Fr. 242,20

oder einfacher:

350 Fr. geben vom 1. Januar bis 31. Dezember Fr. 14,00 Zins, zusammen	Fr. 364,00
120 Fr. geben vom 15. August bis 31. Dezember Fr. 1,80 Zins, zusammen	» 121,80
Es bleiben wie vorhin	Fr. 242,20

Ganz auf gleiche Weise verfährt man bei der Rechnung mit Zinseszinsen. Sämtliche Posten, sowohl die eingehenden als die ausgehenden, werden von dem Datum ihrer Einzahlung oder Auszahlung an bis auf den Schlusstermin verzinst, hierauf wird die Summe aller Ausgaben samt Zinseszinsen von der Summe der Einnahmen samt Zinseszinsen abgezogen.

Erste Aufgabe. Den Wert eines Kapitals samt Zinseszinsen nach einer gegebenen Anzahl von Jahren zu bestimmen.

Auflösung. Das Kapital K sei zu p % angelegt, so ist der einjährige Zins $= \frac{K\,p}{100} = K \cdot i$, wenn wir $\frac{p}{100} = i$ setzen. Dieser zum Kapital geschlagen, gibt dessen Wert nach einem Jahr

$$K_1 = K + \frac{K \cdot p}{100} = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\,(1 + i).$$

Die Zahl $1 + i$ nennt man gewöhnlich den *Zinsfaktor;* bezeichnet man sie mit r, so ist also $r = 1 + i$ und umgekehrt $i = r - 1$. Folglich

$$K_1 = K \cdot r, \tag{1}$$

d. h. man findet den Wert eines Kapitals nach einem Jahr, wenn man den Anfangswert mit dem Zinsfaktor multipliziert.

Legt man nun das ganze Kapital K_1 wieder ein Jahr lang an Zins, so ist sein Wert am Ende desselben

$$K_2 = K_1 \cdot r = K \cdot r^2;$$

am Ende des dritten und vierten Jahres wird das Kapital angewachsen sein auf

$$K_3 = K_2 \cdot r = K \cdot r^3, \; K_4 = K_3 \cdot r = K \cdot r^4,$$

allgemein ist sein Wert am Ende des $n$ten Jahres

$$K_n = K \cdot r^n. \tag{2}$$

Man findet ihn also, *wenn man den Anfangswert mit der $n$ten Potenz des Zinsfaktors multipliziert.*

Für eine Verzinsung von 3¼ % ist $r = 1{,}0325$, von 3½ % 1,035, von 3¾ % 1,0375, von 4 % 1,04. In Tabelle II sind die Werte von r^n von 1 bis 100 Jahren angegeben für die Verzinsungen von 3½ und 4 %.

Beispiel. 4563 Fr. wachsen in 27 Jahren mit 4 % Zinseszinsen an auf

$$4563 \cdot 1{,}04^{27} = 4563 \cdot 2{,}8834 = \text{Fr. } 13157.—.$$

Bei dieser Aufgabe wurde eine *jährliche* Verzinsung vorausgesetzt. Man sieht aber leicht ein, dass die nämliche Schlussweise gilt, wenn die Zinszahlung *halb-* oder *vierteljährlich* oder *monatlich* erfolgt. In diesem Fall ist mit dem halb- oder vierteljährlichen oder monatlichen Prozentsatz und der Anzahl der Halb- oder Vierteljahre oder Monate zu rechnen.

Beispiel. Wenn die vorigen Fr. 4563 auf halbjährliche Verzinsung angelegt sind, so ist der halbjährliche Prozentsatz 2 %, also $r = 1{,}02$ und das Kapital nach 27 Jahren oder 54 Halbjahren gleich

$$4563 \cdot 1{,}02^{54} = 4563 \cdot 2{,}9135 = \text{Fr. } 13294{,}30.$$

Diese Bemerkung gilt auch für alle folgenden Aufgaben.

Zweite Aufgabe. Wenn am Ende jedes Jahres gleiche Summen an Zinseszins gelegt werden, so soll man angeben, wieviel das Guthaben nach einem gegebenen Zeitraum beträgt.

Auflösung. Die jährliche Einzahlung sei B und die Anzahl der Einlagen gleich n, so ist am Ende des $n$ten Jahres der Wert

der ersten Zahlung		$= B \cdot r^{n-1}$
» zweiten	»	$= B \cdot r^{n-2}$
....		
» vorletzten	»	$= B \cdot r$
» letzten	»	$= B$

also das ganze Kapital

$$S = B + B \cdot r + B \cdot r^2 + \ldots . B \cdot r^{n-2} + B \cdot r^{n-1}$$

oder, da dies die Summe einer geometrischen Reihe ist,

$$S = B \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \text{ oder } S = B \frac{r^n - 1}{i}. \tag{3}$$

Beispiel. Wieviel macht eine jährliche Einzahlung von Fr. 100 in eine Sparkasse, welche sie zu $3\frac{1}{2}$ % verzinst, in 20 Jahren?

$$\text{Antwort: } 100 \cdot \frac{1{,}035^{20} - 1}{0{,}035} = \text{Fr. } 2828. —.$$

Dritte Aufgabe. Ein Kapital ist unverzinslich in einem gegebenen Zeitpunkt zu bezahlen (fällig); man soll seinen gegenwärtigen Wert (Barwert) finden.

Auflösung. Der Barwert eines verzinslichen, wenn auch später fälligen Kapitals ist seinem Nominalbetrag gleich, da es, theoretisch genommen, gleichgültig ist, ob der jetzige Schuldner dasselbe verzinst oder, falls er es vorher zurückzahlt, ein anderer, dem man es wieder leiht. Die Verhältnisse werden aber andere, wenn das Kapital dem Gläubiger, solange es der Schuldner in Händen hat, keine Zinsen abwirft und er nach Ablauf des Termins nur die Kapitalsumme zu empfangen hat. Denn während dieser Zeit geniesst der Schuldner das ganze Zinserträgnis, das ihm verloren ginge, wenn er das Kapital sofort auszahlte. Alsdann hätte umgekehrt der Gläubiger die Nutzniessung der Zinsen. Soll demnach das Kapital sofort abgeführt werden, so ist daran ein angemessener Abzug zu machen. Die Barsumme wird nur so gross zu sein brauchen, dass der Gläubiger, wenn er sie an Zinseszinsen legt, nach Ablauf des Termins gerade den Nominalbetrag hat. Auch der Schuldner hätte, wenn er die so bestimmte Barsumme, statt sie auszuzahlen, an Zinseszinsen legte, nach Verfluss des Termins den Nominalbetrag in Händen, den er dann aushändigen könnte. Bezeichnet man daher den Nominalwert des Kapitals mit K, seinen Barwert mit x und nimmt an, es sei nach n Jahren fällig, so muss x mit den n-jährigen Zinseszinsen gleich K werden, also

$$x \cdot r^n = K, \quad x = \frac{K}{r^n} = K \cdot \frac{1}{r^n}, \tag{4}$$

d. h. man findet den Barwert eines nach n Jahren fälligen unverzinslichen Kapitals, wenn man es durch die $n$te Potenz des Zinsfaktors dividiert oder mit dem reziproken Wert desselben multipliziert. Tabelle II gibt diese reziproken Werte von r^n für 3½- und 4 %ige Verzinsung.

Man pflegt den reziproken Wert des Zinsfaktors r als Abzinsungsfaktor v zu bezeichnen, also $v = \frac{1}{r}$. Dann gilt an Stelle von (4):

$$x = K \cdot v^n \quad \ldots \tag{4a}$$

d. h. *man findet den Barwert eines nach n Jahren fälligen unverzinslichen Kapitals, wenn man es mit der nten Potenz des Abzinsungsfaktors multipliziert.*

Man ist leicht geneigt, zu glauben, dass man den Barwert einfach dadurch finde, dass man die Zinse oder Zinseszinse von dem Kapital abziehe, ohne zu bedenken, dass dadurch der Gläubiger zu kurz kommt. Denn von dem Abzug (Diskonto) kann er keine Zinsen mehr erhalten und hat also am Ende des Termins auch nicht das volle ihm gehörende Kapital. Wenn man z. B. von Fr. 100, die nach einem Jahr fällig sind, sofort den Zins von Fr. 4 abzieht und nur Fr. 96 entrichtet, so geben diese nach

Verfluss des Jahres mit den Zinsen nur Fr. 99,84. Rechnet man aber nach Formel (4), so ist der Barwert dieser Fr. 100 gleich $\frac{100}{1,04}$ = Fr. 96,15, welche nach 1 Jahr mit den Zinsen Fr. 96,15 + 3,85 = 100 geben, wie es sein soll. Man sieht übrigens aus diesem Beispiel, dass allerdings die Resultate nach beiden Verfahren für Fristen innerhalb eines Jahres unbedeutend voneinander abweichen. Dieser Umstand rechtfertigt es, dass im Geschäftsleben die Diskontierung der Wechsel nach der bedeutend einfachern Methode des Zinsabzugs geschieht. Dagegen ist dies für längere Termine ganz unzulässig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Der Barwert von Fr. 10 000, fällig nach 30 Jahren, ist bei Annahme von 4 % Zinsen gleich $10\,000 \cdot \frac{1}{1{,}04^{30}}$ = Fr. 3083,20. Die Zinsen von Fr. 10 000 wären Fr. 12 000. Wollte man diese nach kaufmännischer Weise einfach vom Kapital abziehen, so hätte der Gläubiger dem Schuldner noch Fr. 2000 *herauszuzahlen*, statt etwas von ihm zu empfangen.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen füge ich noch die Bemerkung bei, dass, wenn zwei Kapitalwerte in irgendeinem Zeitpunkt einander gleich sind, sie diese Eigenschaft zu jeder Zeit besitzen müssen, solange ihr Zinsfuss der nämliche ist. Sind sie ungleich, so bleibt ihr Verhältnis unverändert. Denn, sind K und K_1 die beiden Werte, so sind sie nach n Jahren bezüglich $= K \cdot r^n$ und $K_1 \cdot r^n$ und ihr Verhältnis

$$K \cdot r^n : K_1 \cdot r^n = K : K_1.$$

Es ist somit vollkommen gleichgültig, welcher Zeitpunkt für die Vergleichung zweier Kapitalwerte gewählt wird; sie müssen aber immerhin auf den *nämlichen Zeitpunkt* gestellt werden.

Beispiel. Welches Angebot ist mehr wert: Fr. 7000 nach 4 Jahren zahlbar oder Fr. 7500 zahlbar nach 5 Jahren? — Ihre Barwerte sind

$$7000 \cdot \frac{1}{1{,}04^4} = \text{Fr. } 5983{,}60; \; 7500 \cdot \frac{1}{1{,}04^5} = \text{Fr. } 6164{,}47;$$

letzteres ist grösser im Verhältnis von 5983,60 : 6164,47 = 1 : 1,0302.

Ihre Werte auf Ende des 5. Jahres sind dagegen

$$7000 \cdot 1{,}04 = \text{Fr. } 7280; \; \text{Fr. } 7500$$

und ihr Verhältnis = 7280 : 7500 = 1 : 1,0302, wie vorhin.

Vierte Aufgabe. Den Barwert einer vom Ende des Jahres an alljährlich innerhalb eines gegebenen Zeitraums erfolgenden gleichbleibenden Zahlung zu finden.

Auflösung. Der Wert dieser Zahlungen, die wir mit B bezeichnen, ist nach Formel (3) der zweiten Aufgabe auf das Ende des $n$ten Jahres

$$S = B \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

also ihr Barwert

$$W = \frac{S}{r^n} = B \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)} = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1} \tag{5}$$

oder

$$W = B \frac{1 - v^n}{i}. \tag{5a}$$

Beispiel. Der Barwert einer zu Ende jedes Jahres fälligen Rente von Fr. 500, zahlbar während 30 Jahren, ist bei 4 % Zinsen gleich

$$500 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}04^{30}}}{1{,}04 - 1} = \text{Fr. } 8646.—.$$

Würde die erstmalige Rentenzahlung nicht schon nach Ablauf des ersten Jahres erfolgen, sondern z. B. erst am Ende des siebenten, so würde die gefundene Zahl den Wert der Rente auf den Anfang des siebenten oder Ende des sechsten Jahres darstellen, und der heutige Wert wäre gleich

$$8646 \cdot \frac{1}{1{,}04^6} = \text{Fr. } 6833{,}10.$$

Drittes Kapitel.

Die Lebensversicherung im allgemeinen.

Ein Vertrag zwischen zwei Parteien, durch den sich die eine verpflichtet, der andern oder deren Rechtsnachfolgern gegen eine im voraus zu entrichtende Entschädigung *(Beitrag, Prämie)* in einem bestimmten Fall, der von dem Leben oder Tod einer oder mehrerer gegebener Personen abhängt, eine gewisse Geldsumme zu zahlen, heisst eine *Lebensversicherung*. Das über den Versicherungsvertrag ausgefertigte Schriftstück heisst *Police*. Die nähern Bestimmungen über das Inkrafttreten, die Fortdauer oder das Ungültigwerden des Vertrages, über die Erledigung von Streitigkeiten u. dgl. sind in den Versicherungsbedingungen, bei den kleinen Sterbevereinen usw. in den *Statuten* enthalten. Diejenige der beiden Parteien, welche der andern für den vorausbestimmten Fall die Zahlung der Geldsumme *(Versicherungssumme)* zusichert, heisst der *Versicherer* oder *Versicherungsgeber*, die andere, der die Zahlung versprochen wird, heisst der *Versicherte* oder *Versicherungsnehmer*. Die Person, von deren Leben oder Tod die Auszahlung der Versicherungssumme abhängt, ist meist der Versicherte selbst oder seine Gattin.

Sieht man von den vereinzelten Fällen ab, wo eine Person einer andern ein gewisses Vermögen, Haus oder Feld gegen lebenslängliche Verpflegung übergibt, welche bei Spitalpfründern, Landleuten, die ihr Heimwesen den Kindern abtreten, usw. vorkommen und in denen das finanzielle Interesse, wenigstens bei der einen Partei, eine sehr untergeordnete Rolle spielt, so wird sich sonst kaum jemand finden, der einem einzelnen gegenüber eine Versicherung übernehmen wollte. Denn für einzelne Personen ist der Zeitpunkt des Todes nach menschlichen Begriffen durchaus unbestimmt. Anders aber ist es, wenn die Zahl der Versicherten eine grössere ist. Wenn zwar auch da noch der Sterbemoment für den einzelnen ungewiss bleibt, so ist es doch möglich, anhand der Mortalitätstafel annähernd die Zahl der Todesfälle für die verschiedenen Altersklassen in den kommenden Jahren anzugeben. Abweichungen der wirklichen Todesfälle von den vorausgesehenen werden immerhin noch vorkommen, werden aber um so geringer sein und der Gesamtheit gegenüber um so weniger ins Gewicht fallen, je grösser die Zahl der versicherten Personen ist und je mehr Gleichmässigkeit in ihren Versicherungssummen vorhanden ist. Es liegt daher im natürlichen Interesse des Versicherers, zunächst möglichst viele Versicherungsverträge abzuschliessen, um gegen ungünstige Ereignisse geschützt zu sein. Ferner darf er nicht Summen versichern, die weit über das durchschnittliche Mass der übrigen hinausgehen, da er für sie dem reinen Zufall preisgegeben wäre. Kann er trotzdem solchen Fällen nicht ausweichen, so versichert er selbst wieder einen Teil der Versicherung bei einem oder mehreren anderen Versicherern *(Rückversicherung)*.

Den Versicherten ihrerseits gebietet das Interesse, nur solide Versicherer aufzusuchen, um sich gegen mögliche Verluste zu decken. Er findet bei einer Kollektivgesellschaft grössern Schutz als bei einer einzelnen Person, wie anderseits ein einzelner Versicherer sich selten finden wird, der die Garantie für so beträchtliche Summen, wie sie auf diesem Gebiete vorkommen, übernehmen wollte. Diese beiden Umstände begründen die Erscheinung, dass die Versicherer meistens als Gesellschaften *(Versicherungsgesellschaften)* auftreten. Die Organisation derselben ist sehr verschieden. Im grossen und ganzen lassen sie sich in zwei Hauptgruppen sondern, die übrigens auf mannigfache Weisen ineinander übergehen können. Entweder wird die Versicherung durch den Staat oder eine öffentliche Korporation oder durch eine Aktiengesellschaft übernommen, welche dann das ganze Risiko für allfällige Verluste übernehmen und daher gewöhnlich einen Teil des Gewinnes beanspruchen; oder aber die Versicherten bilden unter sich eine Gemeinschaft, welche als solche die Verluste trägt und allen Gewinn den Teilnehmern *(Mitgliedern)* zuwendet. In den Namen, welche sich die Gesellschaften selbst beilegen, Versicherungsbanken, -anstalten, -vereine, -gesellschaften, -kassen usw., ist kein durchgehendes Prinzip zu erkennen. Um aber doch die beiden Hauptgruppen voneinander zu unterscheiden, wollen wir in gegenwärtiger Schrift jedes Institut, bei dem man sich versichern kann, eine *Versicherungsanstalt*, die Anstalten der ersten Gruppe

Versicherungsbanken und die der zweiten nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch *gegenseitige Gesellschaften* oder *Versicherungsvereine* nennen. Die inneren Einrichtungen der Versicherungsanstalten sind ausserordentlich mannigfaltig und richten sich nach den Landesgesetzen, den Bedürfnissen und der Konvenienz; für eine Beschreibung derselben wäre hier nicht der Ort. Nur das sei bemerkt, dass man nicht ohne weiteres den Vorzug der Aktiengesellschaften vor den gegenseitigen oder umgekehrt behaupte, indem sich bei beiden Formen sehr gewichtige Gründe dafür und dagegen beibringen lassen.

Es ist nun das allgemeine Prinzip aufzusuchen, nach dem sich die Versicherungen richten sollen. Wer irgendein finanzielles Unternehmen beginnen und zu einem guten Ende bringen will, muss vor allem über die Mittel klar sein, mit denen er arbeitet, und über die beste Art ihrer Verwendung. Was den ersten Punkt betrifft, so ist einleuchtend, dass für die Einrichtung einer Versicherungsanstalt zunächst ein Gründungsfonds von angemessener Grösse vorhanden sein muss, aus dem die ersten Anschaffungen und nötigenfalls die ersten Auszahlungen fällig gewordener Versicherungssummen bestritten werden können. Bei Aktiengesellschaften leisten die Aktionäre, bei Staatsunternehmen der Staat, bei Versicherungsvereinen die Mitglieder selbst die hiezu nötigen Einzahlungen, die später wieder zurückerstattet oder wenigstens verzinst werden müssen. Von dem Augenblick der vollendeten Einrichtung an aber sollen einzig die Beiträge und Prämien der Versicherten sowie die Zinsen derselben den Versicherer resp. die Gesellschaft für die Auslagen jeglicher Art decken. Dies gilt ebensowohl für Aktien- wie für gegenseitige Gesellschaften. Dem Versicherer ist demnach die Summe der verfügbaren

Einnahmen genau umschrieben; er wird daher auch die Ausgaben für die Versicherungssummen danach einrichten müssen, d. h. *er hat vor allem aus die Gleichheit der Einnahmen und der Ausgaben herzustellen.* Erst wenn er auf dieser Grundlage seine Preise berechnet hat, kann er für die Verwaltungskosten, zur Deckung möglicher Verluste, zur Realisierung eines Gewinnes, zur Abtragung oder Verzinsung des Gründungsfonds, zur Äuffnung des Stammkapitales entweder Aufschläge auf die zu fordernden Prämien oder, was auf dasselbe herauskommt, Abzüge von den zu zahlenden Versicherungssummen machen und danach die Tarife aufstellen.

Ist hiermit der allgemeine Grundsatz der Gleichheit der Ausgaben und Einnahmen in ihrer Gesamtheit festgestellt, so fragt es sich weiter, wie sich die Anstalt dem einzelnen Versicherten gegenüber zu verhalten habe. Mannigfache Vorurteile bestehen über diesen Punkt und machen eine einlässliche Besprechung notwendig. Stellen wir uns zunächst auf den Boden, wo der Versicherer und Versicherte verschiedene Personen sind, d. h. in die Verhältnisse einer *Versicherungsbank.* Die Bank wird dann so rechnen: Wenn das Geschäft gedeiht, so werden sich eine grössere Anzahl von Personen gleichen Alters und mit gleichen Versicherungssummen, auf welche Bedingungen es allein ankommt, beteiligen. Da man bei keiner von ihnen den Todestag im voraus weiss, so muss für jede ein Durchschnitt in der Weise genommen werden, dass die voraussichtliche Summe ihrer Gesamtbeiträge gleich wird der Summe aller Auszahlungen, nachdem alle gestorben sein werden, wobei die Zinsen ebenfalls mitzurechnen sind. Auf diese Weise findet weder Gewinn noch Verlust statt. Personen gleichen Alters, aber mit ungleichen Versicherungssummen, müssen nach Verhältnis der letzteren ihre Prämien bezahlen. Personen mit gleichen Versicherungssummen, aber ungleichen Alters müssen ebenfalls verschiedene Prämien entrichten nach Massgabe der durch die Mortalitätstafel normierten Sterblichkeit. Hiedurch ist dann das Gleichgewicht zwischen Einnahme und Ausgabe sowohl als das zwischen den Versicherten der verschiedenen Klassen hergestellt. Sollte ein *Versicherungsverein*, wo jeder Versicherte der Gesamtheit aller andern gegenübersteht, wo es also umsomehr darauf ankommt, die Pflichten und die Rechte der einzelnen so genau als möglich gegeneinander abzuwägen und das Prinzip der Gleichberechtigung aller nach Massgabe ihrer Leistungen zu befolgen, anders verfahren? Gewiss nicht. Wenn er Bestand haben soll, so wird er seine Anforderungen an die Mitglieder ganz ebenso zu seinen eigenen Leistungen ins Verhältnis setzen müssen. Die Gerechtigkeit verlangt, dass kein Mitglied gegen die andern weder in ungünstigere noch in günstigere Umstände versetzt werde, und es ist ungerecht, wenn eine Klasse von Mitgliedern durch Befolgung irrtümlicher Statuten verkürzt wird. Man hört hiegegen von gegenseitigen Vereinen meistens den Einwurf, dass sie, wenn sie auf die gleiche Art, wie die Aktiengesellschaften rechnen wollten, keine gemeinnützigen oder wohltätigen Anstalten mehr wären, sondern zu Spekulationsgeschäften herabsinken würden. Ich frage aber, ob das eine gemeinnützige oder wohltätige Anstalt sei, bei der nach Willkür verfahren und nicht jedem das Seine zugeteilt wird, je nach den Leistungen? Lobt man nicht vielmehr jeden Hausvater, der seine Mittel richtig abwägt und seine Ausgaben so einrichtet, dass er für die Zeiten, wo die grossen Kosten für Ausbildung der Kinder beginnen, zum voraus das Nötige auf die Seite legt und jedem von ihnen je nach seinen Eigentümlichkeiten nach Billigkeit zuteilt?

Tut dies ein Hausvater an seinen Kindern, die doch nichts für ihn geleistet haben, um wieviel mehr muss ein Verein, dessen Mitglieder alle an seine Kasse beigesteuert haben, nach diesen Regeln handeln! Freilich kann man die voraussichtlichen Leistungen des einzelnen Mitgliedes nicht mit Bestimmtheit angeben, da weder der Versicherte noch die Anstalt seine Todesstunde kennt. Ihre Kenntnis würde jede Versicherung überflüssig machen und die Sparkasse an deren Stelle treten lassen. Fasst man aber die Leistungen eines Mitgliedes als durchschnittliche auf, und zwar von solchen Personen, die in gleichen Umständen bezüglich des Alters und der Versicherungssumme stehen, so ist der Gerechtigkeit Genüge geleistet, sowohl gegenüber der Anstalt wie gegenüber den Versicherten. Auch ist es unmöglich, den Mitgliedern zu allen Zeiten die nämlichen Vorteile zu bieten, wenn nicht streng an diesem Prinzipe festgehalten wird; denn im andern Fall erhalten entweder die nachkommenden oder die frühern Mitglieder mehr aus der Kasse, wodurch entweder die einen oder die andern notwendig verkürzt werden und die Gegenseitigkeit, die in der Gerechtigkeit und Billigkeit für alle Mitglieder und alle Zeiten beruhen soll, aufgehoben wird. Alle die Streitigkeiten und Reklamationen, von denen die Geschichte der gegenseitigen Versicherungsvereine unzählige Beispiele bietet, fliessen daraus, dass die durchschnittliche Leistung und Gegenleistung aus übelverstandener und übelberatener Gemeinnützigkeit nicht für jedes einzelne Mitglied gleichgestellt werden. Nicht dadurch, dass eine Versicherungsanstalt eine wohltätige zu sein behauptet, ist sie es schon; sie wird es erst, wenn sie jedem und zu jeder Zeit das Seine in gleichem Masse zukommen lässt. Dabei ist es vollkommen einerlei, ob die Anstalt von einer gegenseitigen oder einer Aktiengesellschaft getragen wird;

denn die Wohltat besteht in der Möglichkeit einer *soliden* Versicherung.

Überblicken wir, bevor zur speziellen Ausführung geschritten wird, noch einmal das gewonnene Resultat und vervollständigen wir es. Das Rechnungswesen einer jeden Lebensversicherungsanstalt soll darauf beruhen, dass die sämtlichen voraussichtlichen Einnahmen einer grossen Zahl von Versicherten gleichen Alters und mit gleicher Versicherungssumme gleich sein müssen den sämtlichen voraussichtlichen Ausgaben an dieselben mit Inbegriff der Zinsen auf den Zeitpunkt, wo alle gestorben sein werden. Für einen einzelnen Versicherten gilt der Durchschnitt. Mit andern Worten: Der Durchschnittswert sämtlicher Einnahmen mit Zinseszinsen soll gleich sein dem Durchschnittswert sämtlicher Ausgaben mit Zinseszinsen auf den Moment des Aussterbens aller unter den nämlichen Bedingungen Versicherten. Wenn aber die Gleichheit der Werte auf irgendeinen Zeitpunkt besteht, so wird sie auch für jeden andern vorhanden sein, wie in der 3. Aufgabe des II. Kapitels gezeigt wurde. Daher gilt es vollkommen gleich, auf welchen Zeitpunkt man diese Werte berechnet. Es hat sich der Gebrauch gebildet, die *Barwerte* anzunehmen und miteinander in Beziehung zu setzen. Da alle Zahlungen unverzinslich geleistet werden, so gilt zur Berechnung der Barwerte die Formel (4) des II. Kapitels. Das bei allen Aufgaben gleichmässig anzuwendende Verfahren ist also folgendes: *Man wählt eine grosse Zahl von Personen gleichen Alters* (z. B. die bei diesem Alter in der Mortalitätstafel stehende) *und mit gleichen Versicherungsbedingungen, rechnet für jedes Jahr, wo laut Vertrag Ein- oder Auszahlungen vorkommen können, diese selbst sowie ihre Barwerte aus und setzt den Barwert aller Einnahmen der Kasse gleich dem Barwert aller Ausgaben.* Diese Gleichung gibt das Verhältnis, in welchem die von dem Versicherten zu leistende Prämie zu der beanspruchten Versicherungssumme steht. Die so berechneten Prämien sind die sogenannten *Nettoprämien*. Sie werden um einen Zuschlag für die Kosten der Verwaltung u. dgl. erhöht und geben dann die in den Anstaltstarifen geforderten *Bruttoprämien*.

Was den *Zinsfuss* betrifft, mit dem die Barwerte reduziert werden, so ist es geraten, ihn nicht zu hoch anzusetzen, da sonst leicht einmal die Wirklichkeit hinter der Voraussetzung zurückbleiben könnte. Überdies ist es nicht immer möglich, die eingegangenen Gelder sofort auf sichere und vorteilhafte Weise anzulegen; hiedurch entstehen Zinsverluste, welche ungünstig auf den Gesamtzinsertrag einwirken. Mehr als 4% sollten der Berechnung nicht zugrunde gelegt werden; noch besser ist es, nur 3½ % anzunehmen. Gelingt es der Administration, einen höhern Zinsertrag herbeizuführen, so liegt der Vorteil auf seiten der Anstalt resp. der Versicherten, insofern ihnen ein Anteil am Gewinn zukommt.

Stände nun das wirkliche Ergebnis in allen Teilen, d. h. sowohl in der Sterblichkeit als in der Verzinsung, mit dem vorausgesetzten im Einklang, so hätte die Anstalt von dem Moment des Vertragsabschlusses mit dem Versicherten an nichts weiter zu tun, als den Dingen ihren Lauf zu lassen und bloss für die gute Verwaltung und den Betrieb zu sorgen. Da dies aber bei keinem finanziellen Unternehmen zutrifft, so wird es für sie notwendig, sich in bestimmten Terminen Gewissheit über den Stand des Geschäftes zu verschaffen oder die Bilanz zu ziehen, d. h. nachzusehen, ob der Erfolg den Erwartungen entsprochen, oder aber um wieviel er darüber oder darunter steht. Dies ist um so mehr geboten, wenn der Überschuss als sogenannter Gewinn ebenfalls periodisch verteilt werden soll. Strenge genommen, kann freilich nur das

Ergebnis der bereits vollständig abgewickelten Versicherungen ermittelt werden. Allein abgesehen davon, dass diese jeweilen einen im Verhältnis zum Totalbestand unbedeutenden Bruchteil ausmachen (man denke nur daran, dass die meisten Versicherungen über 20 Jahre dauern) und daher keinen Schluss auf die Ergebnisse der noch bestehenden gestatten, so bringt z. B. jede Lebensverlängerung eines auf den Todesfall Versicherten über die erwartungsmässige Zeit der Anstalt einen entsprechenden Gewinn und ebenso jede zu einem höhern als dem angenommenen Zinsfuss ausgeführte Geldanlage, sowie das Umgekehrte Verlust bringt. Gewinn und Verlust gehören aber den gegenwärtigen Versicherten oder Aktionären und nicht den zukünftigen. Man ist somit genötigt, auch die noch laufenden Versicherungen mit in Berechnung zu ziehen, wobei selbstverständlich nur wieder derselbe Durchschnittsmassstab bezüglich Sterblichkeit und Zinsfuss zur Anwendung kommt, der bei der Bestimmung der Prämien angesetzt wurde. Die Aufstellung der Bilanz erfordert die Kenntnis der zukünftigen Ausgaben, d. h. die der Anstalt obliegenden Verpflichtungen als Passiva, sowie der zukünftigen Prämieneinnahmen als Aktiva, beide auf ihren Barwert reduziert, und zwar für jede einzelne Person aus dem Durchschnitt vieler unter den nämlichen Bedingungen Versicherten. Der Überschuss der Passiva über die Aktiva muss für jeden Versicherten durch den Kassabestand gedeckt sein und sich daher als Vermögensbestandteil der Anstalt vorfinden. Man nennt ihn die *Prämienreserve* oder das *Deckungskapital.* Die periodische, meist jährliche Feststellung des Deckungskapitals bildet einen wesentlichen Teil des Rechnungswesens einer Versicherungsanstalt; denn das Deckungskapital ist nicht etwa, wie vielfach geglaubt wird, bloss eine

Hilfsquelle zur Deckung allfälliger Verluste, sondern es muss in der Kasse unumgänglich vorhanden sein, damit sie die ihr obliegenden Verpflichtungen überhaupt zu erfüllen imstande sei.

Die Reserve eines Versicherten für einen gegebenen Zeitpunkt gibt überdies den *Wert der Police* in diesem Moment an, d. h. den Wert der Versicherung sowohl für die Anstalt selbst wie für den Versicherten. Würde nämlich die Anstalt die Versicherung aufheben und dem Versicherten die Reserve auszahlen, so könnte sich dieser mit derselben als einmaliger Nettoprämie bei jeder andern Anstalt unter den nämlichen Bedingungen wieder einkaufen. Denn die betreffende Versicherung muss für beide Anstalten den gleichen Wert haben. Wenn sie also von der einen aufgegeben und von der andern wieder aufgenommen wird, so muss diese sich gerade mit der nämlichen Summe für die zukünftigen Verpflichtungen Deckung geben lassen wie jene. Ebendasselbe müsste der Fall sein, wenn der Versicherte selbst den Vertrag aufheben wollte. Er kann kein anderes Äquivalent für die bereits geleisteten Prämien ansprechen als diese Reserve, weil er sich, theoretisch gesprochen, mit ihr wieder bei einer andern Anstalt einkaufen kann. In der Praxis gestaltet sich freilich die Sache dadurch anders, dass erstens die zweite Anstalt beim Eintritt nicht nur die theoretische Nettoprämie, sondern die Bruttoprämie mit dem Aufschlag verlangt, und dass zweitens jede Anstalt ein Interesse hat, möglichst wenige Versicherte durch Austritt zu verlieren, und daher den freiwillig Austretenden gewöhnlich nicht die vollen Reserven auszahlt.

Bei der Berechnung der Reserven ist selbstverständlich, dass für den Barwert der zukünftigen Einnahmen von den einzelnen Versicherten nicht ihre

Bruttoprämie genommen werden darf, sondern nur die Nettoprämie, weil der in jener enthaltene Aufschlag für die Bestreitung der Verwaltung und allfällige Verluste bestimmt ist und kein Äquivalent für die Versicherung selbst bildet. Dies dürfte höchstens bei gegenseitigen Vereinen und nur dann geschehen, wenn der Staat oder eine andere Korporation oder der Zinsertrag eines anderweitigen grösseren Vermögens den Aufwand für Verwaltung und Ausfälle deckt.

Für eine solide Anstalt ist es durchaus erforderlich, dass der Betrag der Reserven in verzinslichen Wertschriften beständig in der Kasse vorliege. Dagegen darf der Überschuss des Vermögensbestandes über die Reserven und sonstigen Verpflichtungen hinausgegeben werden. Bei Abschluss der Bilanz sind zunächst die fälligen Verwaltungskosten auszuweisen und eine angemessene Abschreibung an den Gründungskosten und Vermögensbeständen in Mobilien und Immobilien vorzunehmen. Was sich sodann über die Reserven und sonstigen Verpflichtungen hinaus in der Kasse befindet, bildet den sogenannten *Gewinn*. Er wird nach den Bestimmungen der Statuten an die Versicherten oder Aktionäre usw. verteilt und entweder ausbezahlt oder in irgendeiner Form gutgeschrieben.

Kleinere Vereine kümmern sich leider selten um die Reserve, sondern begnügen sich mit der gewöhnlichen Kassarechnung des Verwalters und einem Vorschuss in derselben. Sie bedenken dabei nicht, dass ein vermeintlicher Vorschuss mit einem wirklichen Rückgang verbunden sein kann, wenn er nämlich kleiner ist, als er nach der genauen Reserveberechnung sein sollte. Das Übel wird dann immer schlimmer und macht einen um so bemühenderen Eindruck, als die Mitglieder nur sich selbst Vorwürfe machen können, da es einer kleinen

Mühe bedurft hätte, um sich jeden Augenblick durch eine Reserverechnung Gewissheit über die Vereinsfinanzen zu verschaffen. Freilich müsste man das Vorurteil fallen lassen, dass ein Versicherungsverein etwas ganz anderes sei als eine Spekulationsanstalt. Sei man doch überzeugt, dass jede solide Spekulationsbank ihren Reservefonds aufs sorgfältigste bestimmt in dem Bewusstsein, dass eine Verkürzung desselben später einen sichern Verlust hervorbringt, der bei den beträchtlichen anvertrauten Summen möglicherweise zur Liquidation und zur Einbusse des Aktienkapitals führen kann. Um so mehr sollte man von den gemeinnützigen Gegenseitigkeitsvereinen erwarten, dass sie nicht wie ein sorgloser Haushalter in den Tag hinein leben und den nachkommenden Witwen oder Invaliden das Nachsehen lassen oder umgekehrt die gegenwärtigen zugunsten der spätern benachteiligen. Die Stelle des Deckungskapitals wird bei ihnen gewöhnlich durch das sogenannte *Stammkapital* vertreten. Es ist dieses ein unangreifbares Kapital, das durch die Eintrittsgelder, Nachzahlungen, Geschenke, Vermächtnisse, einen Teil der Jahresbeiträge der Mitglieder und oft durch einen Teil seiner Zinsen gespeist wird. Der übrige Teil der Jahresbeiträge und Zinsen wird für die Auszahlungen verwendet. So löblich der dem Stammkapital zugrunde liegende Gedanke an sich ist, so wenig erfüllt er seinen Zweck. Denn entweder ist es zu gross; dann ist der an die Mitglieder in Form von Witwen- und Invalidenpensionen zurückkehrende Teil der Einzahlungen zu gering und jene selbst also zu klein und erst für spätere Geschlechter erspriesslicher; oder aber er ist zu klein, und dann tritt das Umgekehrte ein. Der Umstand schon, dass mit der Aufstellung des Stammkapitals die Mitglieder durchschnittlich nicht ihre ganzen Einzahlungen in Form von Bezügen wiedererhalten, sondern von einem Teil nur die Zinsen, muss davon überzeugen, dass es unrichtig ist, ein solches Stammkapital zu bilden. Die Reserve soll zwar jeweilen auch unantastbar sein, aber sie richtet sich nach der Mitgliederzahl und ihrem Alter, ist also veränderlich und steigt bald an, bald fällt sie, je nach dem Ergebnis der Berechnung; während das Stammkapital sich nur sehr langsam ändert und sich den Bewegungen im Mitgliederbestand nicht anschmiegt, überdies nie abnehmen kann. Die Folge davon ist, dass, wenn einmal die Zahl der Genussberechtigten abnimmt, ihre Bezüge steigen; dadurch werden neue Mitglieder angezogen, es treten eine grosse Anzahl solcher ein, das Stammkapital genügt nicht mehr, und es erfolgt die schon im I. Kapitel in ihren Folgen beschriebene Erscheinung. Wir denken uns vielmehr die richtige Organisation so: Wenigstens alle 3 Jahre ist eine Berechnung der Reserve vorzunehmen. Zeigt sich ein Überschuss des Vermögensbestandes über dieselbe, wozu neben sorgfältiger Verwaltung Geschenke u. dgl. mit beitragen können, so bilde man daraus ein Stammvermögen, aus dem ein allfällig sich ausweisender Verlust des Reservefonds bei dem nächsten Abschluss ersetzt wird. Dem Stammvermögen sind zuzuweisen alle Geschenke, Vermächtnisse, Subventionen, denen nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung zugedacht ist, und seine Zinsen; dagegen sind aus ihm alle Verwaltungskosten zu bestreiten und die nicht aufgezehrten Zinsen ganz oder teilweise an die Genussfähigen zu verteilen. Von einer Berechnung der Reserve bis zur nächsten verändert sich dieselbe so, dass die Eintrittsgelder und Beiträge der Mitglieder in sie fliessen und aus ihr die Bezüge der Berechtigten bezahlt werden. Bei jeder ausserordentlichen Verumständung, z. B. starker Zu- oder Abnahme der Mitgliederzahl, Statutenänderungen

u. dgl. sind die Tarife zu verifizieren und die Reserveberechnung vorzunehmen. Zeigen sich ungewöhnliche Verluste, so sind sofort unter Zuziehung eines sachverständigen Mathematikers die zu ihrer Wiederersetzung erforderlichen Massregeln zu beraten und auszuführen.

Viertes Kapitel.

Versicherungen auf eine Person.

Den Erläuterungen des vorigen Abschnittes zufolge ist jede Versicherungsrechnung auf die Gleichsetzung der durchschnittlichen Barwerte der Einnahmen und Ausgaben der Anstalt für den betreffenden Versicherten zurückgeführt. Der Durchschnitt ist von einer grossen Zahl Personen, die unter den gleichen Bedingungen versichert sind, zu nehmen. Die beiden ersten Aufgaben haben die Ausmittlung von Barwerten, als Grundlage der Versicherung, zum Gegenstand.

Erste Aufgabe. Den Barwert einer Zahlung zu finden, welche während einer Anzahl von Jahren unter der Bedingung geleistet wird, dass eine bezeichnete Person noch am Leben ist.

Auflösung. Die Person sei x Jahre alt, der Betrag einer jeden Zahlung sei B Fr. und ihr Gesamtbarwert $= W$ Fr. Man kann nun mehrere Fälle unterscheiden: 1. Die Zahlung wird nur einmal geleistet; 2. die Zahlung erfolgt alljährlich bis zum Tode der Person oder 3. nur während einer bestimmten Zeit. Den zweiten Fall behandeln wir unter zwei verschiedenen Voraussetzungen.

Erster Fall. Die Zahlung wird einmal, nach n Jahren geleistet.

Von l_x Personen, welche in der Sterblichkeitstafel bei dem Alter x verzeichnet sind, leben nach n Jahren noch l_{x+n}. An diese sind je B Fr. zu zahlen, also im ganzen $l_{x+n}\,B$ Fr., deren Barwert gleich $l_{x+n}\,B : r^n = l_{x+n}\,B\,v^n$ ist; demnach der durchschnittliche Barwert für eine der l_x Personen

$$W = B\,\frac{l_{x+n}}{r^n \cdot l_x} = B\,\frac{v^n\,l_{x+n}}{l_x}. \tag{1}$$

Man hat zur Vereinfachung mancher Formeln einen besondern Ausdruck eingeführt, die sogenannte *diskontierte Zahl der Lebenden*, die für das Alter x mit D_x bezeichnet wird und gleich ist der Zahl der Lebenden l_x dividiert durch die $x$te Potenz des Zinsfaktors r oder multipliziert mit der $x$ten Potenz des Abzinsungsfaktors v, d. h.

$$D_x = \frac{l_x}{r^x} = v^x\,l_x\,. \tag{2}$$

Die Werte von D_x sind in Tab. III für $3\frac{1}{2}\,\%$ Zinsen angegeben. — Multipliziert man Zähler und Nenner von (1) mit v^x, so kommt

$$W = B \cdot \frac{v^{x+n}\,l_{x+n}}{v^x\,l_x} = B \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{1a}$$

Obgleich bei den am häufigsten vorkommenden Versicherungen die Anwendung der Zahlen D_x nicht notwendig ist, so sind sie doch hier aufgenommen worden, da sie die Berechnung zusammengesetzterer Aufgaben ausserordentlich vereinfachen. Indessen werden die meisten Formeln mit und ohne Anwendung der D_x angegeben.

Beispiel. Der Barwert einer Zahlung von Fr. 1000, welche nach 15 Jahren an eine jetzt 30jährige Person entrichtet werden soll, ist nach (1) und (1a)

$$W = 1000 \cdot \frac{l_{45}}{1{,}035^{15} \cdot l_{30}} = \text{Fr. } 514{,}90\,;$$

$$W = 1000 \cdot \frac{D_{45}}{D_{30}} = \text{Fr. } 514{,}90.$$

2. Fall. Die Zahlung B wird nach einem Jahr zum erstenmal und von da an alljährlich bis zum Tode der Person geleistet.

Nach dem vorigen Fall, Formel (1), sind die Barwerte der einzelnen nach 1, 2, 3, ... Jahren geleisteten Zahlungen der Reihe nach:

$$B \cdot \frac{l_{x+1}}{r \cdot l_x},\; B \cdot \frac{l_{x+2}}{r^2 \cdot l_x},\; B \cdot \frac{l_{x+3}}{r^3 \cdot l_x},\; \ldots$$

also ihre Summe

$$W = B \cdot \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots \right),$$

wobei die Reihe bis ans Ende der Mortalitätstafel fortzusetzen ist. Nimmt man die Zahlung B gleich Fr. 1 an und bezeichnet ihren Barwert mit a_x, so wird

$$a_x = \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots \right), \tag{3}$$

$$W = B \cdot a_x. \tag{4}$$

Die Berechnung einer Tabelle für a_x, welches wir *Renteneinheit* für das Alter x nennen, geschieht am einfachsten auf folgende Weise. Aus (3) folgt

$$l_x \cdot a_x = \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \ldots,$$

ebenso ist

$$l_{x+1} \cdot a_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{r} + \frac{l_{x+3}}{r^2} + \frac{l_{x+4}}{r^3} + \ldots.$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch r, so bemerkt man sofort, dass

$$l_x \cdot a_x = \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+1}\, a_{x+1}}{r} = \frac{l_{x+1}(1+a_{x+1})}{r},$$

also

$$a_x = \frac{l_{x+1}(1+a_{x+1})}{l_x \cdot r}. \tag{3 a}$$

Man bestimmt nun zuerst nach (3):

$$a_{98} = \frac{1}{l_{98}} \frac{l_{99}}{1{,}035} = 0{,}242,$$

hierauf nach (3 *a*)

$$a_{97} = \frac{l_{98}\,(1 + a_{98})}{l_{97} \cdot 1{,}035} = 0{,}369,$$

auf gleiche Weise a_{96}, dann a_{95} usf., was leicht auszuführen ist.

Eine andere Methode zur Berechnung von a_x ergibt sich mittels der diskontierten Zahlen der Lebenden. Die Formel (3) kann nämlich geschrieben werden:

$$a_x = \frac{1}{v^x\, l_x}\,(v^{x+1} \cdot l_{x+1} + v^{x+2} \cdot l_{x+2} + v^{x+3} \cdot l_{x+3} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{D_x}\,(D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots).$$

Die Grösse in der Klammer ist die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden vom Ende der Mortalitätstafel bis und mit derjenigen vom Alter $x + 1$ und wird kurz die *Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden* genannt. Bezeichnet man sie für das Alter x mit N_x, also

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots,$$

so ist die Grösse in der Klammer $= N_{x+1}$, demnach

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{3b}$$

Die Renteneinheit bildet das Hauptelement der Versicherungsrechnung und ist in Tab. III sowohl zu $3\frac{1}{2}$ als zu 4 % angegeben. Die nämliche Tabelle enthält die Werte von N_x zu $3\frac{1}{2}$ %.

Beispiel. Der Barwert einer am Ende des ersten Jahres beginnenden lebenslänglichen Jahresrente von Fr. 300 ist für eine 50jährige Person und zu $3\frac{1}{2}$ % gleich

$$300 \cdot a_{50} = 300 \cdot 13{,}116 = \text{Fr. } 3934{,}80.$$

3. Fall. Die Zahlung B wird nach m Jahren zum ersten Male entrichtet und jährlich bis zum Tode der Person fortgesetzt.

Die Barwerte der bezüglich nach m, $m + 1$, $m + 2$, ... Jahren geleisteten Zahlungen sind der Reihe nach, zufolge (1)

$$B \cdot \frac{l_{x+m}}{l_x \cdot r^m}, \quad B \cdot \frac{l_{x+m+1}}{l_x \cdot r^{m+1}}, \quad B \cdot \frac{l_{x+m+2}}{l_x \cdot r^{m+2}} \ldots,$$

also ihre Summe

$$W = B \cdot \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+m}}{r^m} + \frac{l_{x+m+1}}{r^{m+1}} + \frac{l_{x+m+2}}{r^{m+2}} + \dots \right),$$

welche man auch so schreiben kann:

$$W = B \cdot \frac{l_{x+m-1}}{l_x \cdot r^{m-1}} \cdot \frac{1}{l_{x+m-1}} \left(\frac{l_{x+m}}{r} + \frac{l_{x+m+1}}{r^2} + \dots \right)$$

oder wegen (3)

$$W = B \cdot \frac{l_{x+m-1}}{l_x \, r^{m-1}} \, a_{x+m-1}. \qquad (5)$$

Die Formel gestaltet sich mit Hilfe der D_x einfacher. Multipliziert und dividiert man den ersten Ausdruck für W mit r^x, so wird

$$W = B \cdot \frac{r^x}{l_x} \left(\frac{l_{x+m}}{r^{x+m}} + \frac{l_{x+m+1}}{r^{x+m+1}} + \frac{l_{x+m+2}}{r^{x+m+2}} + \dots \right)$$

oder

$$W = B \frac{1}{D_x} (D_{x+m} + D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \dots)$$

oder

$$W = B \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x}. \qquad (5a)$$

B e i s p i e l. Der Barwert einer in 10 Jahren erstmals fälligen lebenslänglichen Jahresrente von Fr. 300 ist für eine 50jährige Person, zu $3\frac{1}{2}$ %, nach (5) und (5a)

$$W = 300 \cdot \frac{l_{59} \cdot a_{59}}{l_{50} \cdot 1{,}035^9} = \text{Fr. } 1847{,}40;$$

$$W = 300 \cdot \frac{N_{60}}{D_{50}} = \text{Fr. } 1847{,}40.$$

4. Fall. Die Zahlung B wird nach m Jahren zum ersten und nach s Jahren zum letzten Male geleistet.

Die Barwerte der bezüglich nach m, $m + 1$, $m + 2$, ... s Jahren fälligen Zahlungen sind der Reihe nach, zufolge Formel (1),

$$B \cdot \frac{l_{x+m}}{l_x \cdot r^m},\ B \frac{l_{x+m+1}}{l_x r^{m+1}},\ B \frac{l_{x+m+2}}{l_x r^{m+2}},\ \ldots\ B \frac{l_{x+s}}{l_x r^s},$$

demnach ihre Summe

$$W = B \cdot \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+m}}{r^m} + \frac{l_{x+m+1}}{r^{m+1}} + \frac{l_{x+m+2}}{r^{m+2}} + \ldots + \frac{l_{x+s}}{r^s} \right).$$

Denkt man sich die Summe bis an das Ende der Mortalitätstafel fortgesetzt, so sind die hinzugefügten Glieder wieder abzuziehen. Dies gibt

$$W = B \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+m}}{r^m} + \frac{l_{x+m+1}}{r^{m+1}} + \ldots \right)$$

$$- B \frac{1}{l_x} \left(\frac{l_{x+s+1}}{r^{s+1}} + \frac{l_{x+s+2}}{r^{s+2}} + \ldots \right)$$

oder auch

$$W = B \frac{l_{x+m-1}}{l_x r^{m-1}} \frac{1}{l_{x+m-1}} \left(\frac{l_{x+m}}{r} + \frac{l_{x+m+1}}{r^2} + \ldots \right)$$

$$- B \frac{l_{x+s}}{l_x \cdot r^s} \frac{1}{l_{x+s}} \left(\frac{l_{x+s+1}}{r} + \frac{l_{x+s+2}}{r^2} + \dots \right)$$

oder

$$W = B \left(\frac{l_{x+m-1}}{l_x r^{m-1}} a_{x+m-1} - \frac{l_{x+s}}{l_x r^s} a_{x+s} \right). \tag{6}$$

Um eine Formel mit den D_x zu erhalten, multipliziere und dividiere man den ersten Ausdruck von W mit r^x, so kommt

$$W = B \frac{r^x}{l_x} \left(\frac{l_{x+m}}{r^{x+m}} + \frac{l_{x+m+1}}{r^{x+m+1}} + \dots + \frac{l_{x+s}}{r^{x+s}} \right)$$

oder

$$W = B \frac{1}{D_x} (D_{x+m} + D_{x+m+1} + \dots + D_{x+s}).$$

Denkt man sich, wie vorhin, die Summe bis ans Ende der Tafel fortgesetzt und subtrahiert die Summe der hinzugefügten Glieder

$$D_{x+s+1} + D_{x+s+2} + \dots = N_{x+s+1}$$

wieder, so kommt

$$W = B \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+s+1}}{D_x}. \tag{6a}$$

Im Fall die erste Zahlung schon nach einem Jahre fällig wird, hat man $m = 1$ zu setzen und erhält aus (6) und (6a)

$$W = B \left(a_x - \frac{l_{x+s}}{l_x r^s} a_{x+s} \right) \tag{7}$$

$$W = B \frac{N_{x+1} - N_{x+s+1}}{D_x}. \qquad (7a)$$

Beispiel. Den Barwert einer von einer 25jährigen Person während 30 Jahren, heute zum ersten Male zu leistenden jährlichen Zahlung von Fr. 100 bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen zu finden.

Antwort: Die erste Zahlung hat den Barwert Fr. 100, und für die übrigen vom Ende des ersten Jahres an fälligen ist $x = 25$, $s = 29$, also der Gesamtbarwert nach (7a) gleich

$$100 + 100 \cdot \frac{N_{26} - N_{55}}{D_{25}} = \text{Fr. } 1708{,}20.$$

Zweite Aufgabe. Den Wert einer Zahlung zu finden, welche bei dem innerhalb einer bezeichneten Frist erfolgenden Tod einer Person geleistet wird.

Auflösung. Die Person sei x Jahre alt und der Betrag der bei ihrem Tod fälligen Summe, von der vorausgesetzt wird, dass sie am *Schlusse* des Todesjahres bezahlt werde, gleich T. Wir unterscheiden zwei Fälle, nämlich: 1. wenn die für die Zahlung festgesetzte Frist eine unbegrenzte ist, d. h. wenn die Summe T bezahlt wird, wann immer die Person sterben möge; 2. wenn diese Frist eine begrenzte ist.

1. Fall. Die Zahlungsfrist ist unbegrenzt.

Wählen wir wieder l_x Personen, so leben nach einem Jahr noch l_{x+1}, und die Zahl der Gestorbenen des ersten Jahres ist $l_x - l_{x+1}$, ebenso die des zweiten $l_{x+1} - l_{x+2}$, des dritten $l_{x+2} - l_{x+3}$ usw. Da für jeden Toten T Fr. bezahlt werden, so sind am Ende des 1., 2., 3. . . . Jahres die Summen

$$T\,(l_x - l_{x+1}),\ T\,(l_{x+1} - l_{x+2}),\ T\,(l_{x+2} - l_{x+3}),\ \ldots$$

zu zahlen, deren Barwerte sind

$$T\,\frac{l_x - l_{x+1}}{r},\ T\,\frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{r^2},\ T\,\frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{r^3},\ \ldots$$

Der Barwert aller Zahlungen ist demnach im Durchschnitt für eine Person

$$W = \frac{T}{r l_x}\left(l_x - l_{x+1} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{r} + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{r^2} + \ldots\right)$$

oder

$$W = \frac{T}{r l_x}\left[l_x - l_{x+1}\left(1 - \frac{1}{r}\right) - l_{x+2}\,\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{r}\right) - \ldots\right] =$$

$$= \frac{T}{r l_x}\left[l_x - \frac{l_{x+1}}{r}\,(r - 1) - \frac{l_{x+2}}{r^2}\,(r - 1) - \ldots\right]$$

oder

$$W = \frac{T}{r l_x}\left[l_x - (r - 1)\left(\frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \ldots\right)\right].$$

Da die Reihe, welche in dem mit $(r - 1)$ multiplizierten Faktor enthalten ist, bis ans Ende der Mortalitätstafel fortgesetzt wird, so ist derselbe $= l_x \cdot a_x$ (Formel 3), also endlich

$$W = T \cdot \frac{1 - (r - 1)\,a_x}{r} \tag{8}$$

oder, da $r - 1 = i$:

$$W = T\,\frac{1 - i \cdot a_x}{r}. \tag{8a}$$

Beispiel. Für eine 30jährige Person ist der Barwert einer bei ihrem Tode an die Hinterlassenen zu zahlenden Summe von Fr. 1000 bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen gleich

$$1000 \cdot \frac{1 - 0{,}035 \cdot a_{30}}{1{,}035} = \text{Fr. } 346{,}87.$$

2. Fall. Die Zahlungspflicht beginnt sofort und erlöscht nach s Jahren.

Alsdann kommen bloss die zwischen dem $x$ten und $(x+s)$ten Altersjahr Sterbenden in Betracht. Nimmt man wieder l_x Personen an, so ist die Zahl der Toten resp. im 1., 2., 3., ... $s$ten Jahre gleich

$$l_x - l_{x+1},\ l_{x+1} - l_{x+2},\ \ldots\ l_{x+s-1} - l_{x+s},$$

und die Barwerte der für sie erfolgenden Zahlungen sind

$$T \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{r},\ T \cdot \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{r^2},\ \ldots\ T\,\frac{l_{x+s-1} - l_{x+s}}{r^s},$$

folglich der Gesamtdurchschnitt für eine von den jetzt lebenden l_x Personen

$$W = \frac{T}{l_x \cdot r}\left(l_x - l_{x+1} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{r} + \ldots + \frac{l_{x+s-1} - l_{x+s}}{r^{s-1}}\right)$$

oder

$$W = \frac{T\,r^x}{l_x \cdot r}\left[\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \ldots + \frac{l_{x+s-1}}{r^{x+s-1}}\right.$$

$$\left. - r\left(\frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \ldots + \frac{l_{x+s}}{r^{x+s}}\right)\right]$$

oder

$$W = \frac{T}{D_x r}\left[N_x - N_{x+s} - r(N_{x+1} - N_{x+s+1})\right]$$

oder, da

$$N_{x+1} = N_x - D_x,\ N_{x+s+1} = N_{x+s} - D_{x+s},$$

$$W = T \cdot \frac{1}{D_x}\left[D_x - D_{x+s} - \frac{i}{r}(N_x - N_{x+s})\right], \qquad (9)$$

wie man leicht findet.

Diese Formel enthält auch den vorigen Fall, wenn man $s = 100$ setzt, wodurch $x + s$ grösser als das höchst erreichbare Altersjahr wird, daher $D_{x+s} = 0$, $N_{x+s} = 0$. Die Substitution dieser beiden Werte gibt nach leichter Reduktion die Formel (8).

Mit Hilfe der Formeln (1) bis (9), welche die Elemente der Versicherungsrechnung für eine Person bilden, ist es leicht, jede auf diesem Gebiete vorkommende Aufgabe zu lösen. Nach den im dritten Kapitel gegebenen Erläuterungen hat man zu diesem Zweck einfach den Barwert der Zahlungen der Versicherten und den Barwert der Zahlungen der Anstalt zu bestimmen und einander gleichzusetzen. Aus der so gebildeten Gleichung kann man entweder die von den Versicherten für eine gegebene Versicherungssumme zu zahlende Nettoprämie oder umgekehrt die einer gegebenen Nettoprämie entsprechende Versicherungssumme bestimmen. Um die Bruttoprämie zu erhalten, schlägt man gewöhnlich je nach dem Alter des Versicherten und den Versicherungsbedingungen 10—50 % auf die Nettoprämie. Bei grössern Versicherungsanstalten spielt selbstverständlich die Konkurrenzfrage bedeutend mit. Sie werden dadurch veranlasst, die Prämien nicht höher zu setzen, als durchaus nötig ist. Kleinere Versicherungsvereine tun ebenfalls sehr gut, einen angemessenen Aufschlag zu machen, um ungünstigen Zufällen zu begegnen und die Verwaltungskosten, die oft verhältnismässig hoch sind, zu decken. Die ungünstigen Zufälle üben bei kleinern Anstalten einen grössern Einfluss aus als bei denen mit einem ausgedehntern Geschäftskreis, auf deren allgemeines Ergebnis lokale Störungen, hervorgebracht durch Epidemien u. dgl., nur in geringem Masse einwirken können. Ist jedoch schon ein bedeutendes Stammvermögen neben dem Reservefonds da oder werden allfällige Verluste auf dem letzteren durch andere Hilfsquellen ausgeglichen, so kann der Aufschlag auf ein Minimum reduziert werden.

Die Reserve endlich ergibt sich für jeden Versicherten in irgendeinem Zeitpunkt, wenn man den Barwert seiner zukünftig fälligen Zahlungen von dem Barwert seiner zukünftigen Bezüge subtrahiert. Es wird im folgenden stets vorausgesetzt werden, dass die Reserverechnung jeweilen am Ende eines Jahres abgeschlossen wird, dass also die nächsten Prämienzahlungen sofort mit *Anfang* des folgenden Jahres und die nächsten Versicherungsauszahlungen am *Ende* des folgenden Jahres geschehen. Sollte das letztere nicht der Fall sein, sondern die nächsten Auszahlungen schon mit Beginn des folgenden Jahres geschehen, so wären diese zuerst als Passivum von dem vorhandenen Vermögen auszuscheiden. Über die Ausführung der Reserverechnung selbst ist noch zu bemerken, dass sie, für Versicherte von gleichem Alter und gleicher Versicherungssumme, gruppenweise geschehen kann.

Bei allen folgenden Aufgaben nehmen wir das Alter des Versicherten bei Eingehung des Vertrages zu x und bei Berechnung der Reserve zu z Jahren an. Eine einmalige Prämie soll mit A, eine jährliche mit P und die Reserve mit V bezeichnet werden.

Dritte Aufgabe. Jemand wünscht, falls er nach n Jahren noch lebt, nach deren Ablauf ein Kapital L zu erhalten; was hat er der Versicherungsanstalt 1. an einmaliger Prämie, 2. an jährlicher Prämie zu zahlen? (Versicherung auf Lebensfall.)

Auflösung. Handelt es sich um eine *einmalige* Prämie, so hat die Person den Barwert der Versicherungssumme zu erlegen, also nach Formel (1) und (1a)

$$W = L \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot r^n} = L \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{10}$$

Die Reserve ist ebenfalls gleich dem Barwert der Versicherungssumme, welche vom $z$ten Jahre hinweg nach $n - z$ Jahren fällig wird, so dass sie gefunden wird, wenn man in (10) z statt x, und $x + n - z$ statt n setzt. Demnach

$$V = L \cdot \frac{l_{x+n}}{l_z r^{n-z}} = L \cdot \frac{D_{x+n}}{D_z}. \tag{11}$$

Wird dagegen eine *jährliche* Prämie ausbedungen, die am Anfang jedes Jahres, erstmals bei Eingehung des Vertrages und nach $n - 1$ Jahren letztmals bezahlt wird, so ist der Barwert derselben gleich der erstmaligen Prämie vermehrt um den Barwert der während $k - 1$ Jahren am Ende jedes Jahres fälligen Prämien P, nach Formel (7), in der $s = n - 1$ zu setzen ist, gleich

$$P + P\left(a_x - \frac{l_{x+n-1}}{l_x r^{n-1}} a_{x+n-1}\right) =$$

$$= P\left(1 + a_x - \frac{l_{x+n-1}}{l_x r^{n-1}} a_{x+n-1}\right)$$

oder nach (7*a*)

$$P + P\frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} = P\frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} =$$

$$= P \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Der Barwert der Auszahlungen der Anstalt ist der nämliche wie vorhin, so dass man die Gleichung hat

$$P\left(1 + a_x - \frac{l_{x+n-1}}{l_x r^{n-1}} a_{x+n-1}\right) = L \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x \cdot r^n} \qquad (12)$$

oder auch

$$P\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = L\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

oder

$$P\,(N_x - N_{x+n}) = L \cdot D_{x+n}. \qquad (12a)$$

Für die Reserve gelten bezüglich der Grössen x und n die Bemerkungen zu (11), und es ist daher

$$V = L\frac{D_{x+n}}{D_z} - P \cdot \frac{N_z - N_{x+n}}{D_z}. \qquad (13)$$

Beispiel. Welche Nettoprämien sind bei dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ % von einer 30jährigen Person zu verlangen, welche nach 20 Jahren ein Kapital von Fr. 1000 zu erhalten wünscht?

Antwort: Man setze $x = 30$, $n = 20$, so kommt

$$W = 1000 \cdot \frac{D_{50}}{D_{30}} = \text{Fr. } 404{,}86.$$

$$P \cdot (N_{30} - N_{50}) = 1000 \cdot D_{50}, \quad P = \text{Fr. } 29{,}77.$$

Die Reserve nach 10 Jahren ist bei einmaliger Prämie, da $z = 40$,

$$V = 1000 \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} = \text{Fr. } 626{,}55.$$

und bei jährlichen Prämien

$$V = 1000 \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} - 29{,}77 \cdot \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} = \text{Fr. } 382{,}13.$$

Vierte Aufgabe. Jemand versichert sich auf eine nach n Jahren erstmals fällige jährliche Leibrente R; wieviel hat er 1. an einmaliger, 2. an jährlicher Prämie zu bezahlen, wenn er die letztere bei Eingehung des Vertrages zum ersten Male und nach m Jahren zum letzten Male bezahlen will? (Rentenversicherung.)

Auflösung. Unter einer *Leibrente* versteht man eine in regelmässig bestimmten Terminen (monatlich, vierteljährlich, halbjährlich oder jährlich) wiederkehrende Zahlung, welche eine Person zu geniessen hat, falls sie noch am Leben ist. Man unterscheidet *temporäre* und *lebenslängliche* Leibrenten, je nachdem sie höchstens während einer bestimmten Anzahl von Jahren oder lebenslänglich ausgerichtet wird. *Sofort beginnend* heisst sie, wenn sie mit Ablauf des ersten Termines, *aufgeschoben*, wenn sie erst später zum ersten Male bezahlt wird.

Als einmalige Prämie hat die Person wieder den Barwert der Rente an die Anstalt abzugeben, daher ist nach Formel (5) oder (5a)

$$W = R \cdot \frac{l_{x+n-1}}{l_x \cdot r^{n-1}} \cdot a_{x+n-1} = R \frac{N_{x+n}}{D_x}. \qquad (14)$$

Bei jährlichen Prämien bis nach Verfluss von m Jahren ist der Barwert der Prämienzahlungen, die erste sofort zahlbare inbegriffen, nach (7 a) gleich

$$P + P \frac{N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} = P \cdot \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} =$$

$$= P \cdot \frac{N_x - N_{x+m+1}}{D_x}$$

und der Barwert der Renten gleich dem vorigen in (14), folglich durch Gleichsetzung beider Barwerte und Multiplikation mit D_x

$$P\,(N_x - N_{x+m+1}) = R \cdot N_{x+n}. \tag{15}$$

Beispiel. Welche Rente vom 60. Altersjahr an kann ein 25jähriger Mann beanspruchen gegen eine jährliche Prämie von Fr. 24, zahlbar während 30 Jahren und unter Annahme von 3½ % Zinsen?

Antwort: Hier ist $x = 25$, $n = 35$, $m = 29$, $P = 24$, also

$$24 \cdot (N_{25} - N_{55}) = R \cdot N_{60},$$

$$R = \text{Fr. } 203{,}31.$$

Die Reserve bei einmaliger Prämienzahlung ist gleich dem Barwert einer mit dem $(x + n)$ten Altersjahr beginnenden Rente an eine jetzt $z$jährige Person, folglich

$$V = R \frac{N_{x+n}}{D_z}. \tag{16}$$

Bei der jährlichen Prämienzahlung dagegen hat man dreierlei Perioden zu unterscheiden.

1. Die Prämie wird noch *fortbezahlt* und ist am Anfang des nächsten Jahres wieder fällig. Alsdann findet

man den Barwert der zukünftigen Prämien, wenn man im oben angegebenen Barwert der Prämien der $x$jährigen Person, welche nunmehr z Jahre alt ist, z statt x, $m - (z - x) = m - z + x$ statt m setzt, gleich

$$P \cdot \frac{N_z - N_{x+m+1}}{D_z};$$

daher ist die Reserve

$$V = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_z} - P \cdot \frac{N_z - N_{x+m+1}}{D_z}. \tag{17}$$

2. Die Prämie wird *nicht mehr* bezahlt, aber auch die Rente noch nicht bezogen (Stillstandsjahre). Die zukünftige Einnahme ist dann wie bei (16) gleich null, also

$$V = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_z}. \tag{17a}$$

3. Die Rente wird *schon bezogen* und ist am Ende des nächsten Jahres zuerst wieder fällig. Die Reserve ist gleich dem Barwert einer sofort beginnenden Rente (Formel 4):

$$V = R \cdot a_z. \tag{17b}$$

Diese Aufgabe findet Anwendung bei den *Alters-* und *Invalidenkassen.* Meistenteils sind bei ihnen sowohl die jährlichen Prämien als die Renten für alle Mitglieder gleich hoch angesetzt, welchen Alters sie auch sein mögen. Weil aber hiedurch die jüngeren in Nachteil kämen, so müssen die älteren ein erhöhtes *Eintrittsgeld* bezahlen, welches zunächst zu bestimmen ist. Es sei P die bei dem Eintritt erstmals zu entrichtende jährliche Nettoprämie, R die entsprechende Rente, E das Eintrittsgeld, so folgt aus der Gleichheit der Barwerte sämtlicher Einnahmen und Ausgaben der Anstalt für einen Versicherten

$$E + P \cdot \frac{N_x - N_{x+m+1}}{D_x} = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}, \qquad (18)$$

welche Gleichung die zwischen dem Eintrittsgeld E, der Jahresprämie P und der Altersrente R vorhandene Beziehung ausdrückt. Zahlen die jüngsten Mitglieder kein besonderes Eintrittsgeld, so ist für sie $E = 0$, also aus (18)

$$P \cdot (N_x - N_{x+m+1}) = R \cdot N_{x+n}, \qquad (19)$$

nach welcher Gleichung sich die Renten und die Prämien richten müssen. Die *Berechnung der Reserve* lässt sich für diesen Fall, wo R, P sowie das Alter bei dem Aufhören der Prämien und bei dem erstmaligen Rentenbezug, d. h. $x + m$ und $x + n$, für alle Mitglieder gleich sind, bedeutend *vereinfachen*. Man teile die Mitglieder in die oben angegebenen drei Klassen: Für die erste Klasse ist aus (17)

$$V = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_z} + P \cdot \frac{N_{x+m+1}}{D_z} - P \cdot \frac{N_z}{D_z}.$$

Da die Faktoren R und P für alle Mitglieder die nämlichen sind, so schreibe man für jedes die seinem Alter entsprechenden Werte von $\frac{N_{x+n}}{D_z}$, $\frac{N_{x+m+1}}{D_z}$ und $\frac{N_z}{D_z}$, über die man sich ein für alle Male eine Tabelle anfertigt, in drei Kolonnen, nehme von jeder Kolonne die Summe, multipliziere die erste mit R, die zweite und dritte mit P, so gibt die Summe der beiden ersten Posten, vermindert um den dritten, den Reservefonds für alle betreffenden Mitglieder.

Würde die erste Rente ein Jahr später, als die letzte Prämie ausgerichtet, so wäre $n = m + 1$, also $N_{x+n} = N_{x+m+1}$, und

$$V = (R + P) \cdot \frac{N_{x+n}}{D_z} - P \cdot \frac{N_z}{D_z},$$

welche Formel eine noch einfachere Rechnung gestattet als die vorige.

Für die zweite Klasse, welche die stillestehenden Mitglieder enthält, ist

$$V = R \cdot \frac{N_{x+n}}{D_z}.$$

Man stelle also wieder die $\frac{N_{x+n}}{D_z}$ zusammen, addiere und multipliziere mit R.

Endlich ist für die dritte Klasse

$$V = R \cdot a_z,$$

so dass man nur den Wert der Renteneinheit für jedes Mitglied aufzuschreiben und ihre Summe mit R zu multiplizieren hat.

Beispiel. Bei einer Alterskasse kann man im 25. Jahre eintreten mit einem jährlichen Beitrag von Fr. 20, den man bis zum vollendeten 44. Jahre bezahlt und dafür von 50 Jahren an eine lebenslängliche Rente empfängt. Man soll die Grösse der Rente und den Betrag des Eintrittsgeldes für jedes Alter bestimmen und ein Schema für die Reserveberechnung herstellen, bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen.

Hier ist $x + m = 44$, $x + n = 50$, $P = 20$ für jedes Mitglied, demnach für ein 25jähriges nach (19)

$$20 \cdot (N_{25} - N_{45}) = R \cdot N_{50}, \quad R = \text{Fr. } 59{,}29$$

als Nettorente. Als Bruttorente kann man Fr. 55 ansetzen. Nimmt man nun für alle Mitglieder den nämlichen Wert von R, so ergeben sich die Eintrittsgelder für 30 und 35jährige aus den Gleichungen (18)

$$E \cdot D_{30} + 20 \cdot (N_{30} - N_{45}) = 59{,}29 \cdot N_{50}, \quad E = \text{Fr. } 113{,}83$$

$$E \cdot D_{35} + 20 \cdot (N_{35} - N_{45}) = 59{,}29 \cdot N_{50}, \quad E = \text{Fr. } 255{,}36.$$

Das Schema der Reserverechnung ist folgendes:

Mitglied		Alter z	$\frac{N_{50}}{D_z}$	$\frac{N_{45}}{D_z}$	$\frac{N_z}{D_z}$	a_z
I. Kl.	Nr. 1.	27	5,0299	7,0956	19,875	—
	2.	35	7,0931	10,0061	18,266	—
			12,1230	17,1017	38,141	—
II. Kl.	3.	47	12,195	—	—	—
	4.	49	13,434	—	—	—
			25,629	—	—	—
III. Kl.	5.	53	—	—	—	12,143
	6.	64	—	—	—	8,434
			—	—	—	20,577

I. Kl. $12{,}1230 \cdot 59{,}29 + 17{,}1017 \cdot 20 - 38{,}141 \cdot 20$
$= \text{Fr. } 297{,}98.$

II. Kl. $25{,}629 \cdot 59{,}29 = $ » $1519{,}54.$

III. Kl. $20{,}577 \cdot 59{,}29 = $ » $1220{,}01.$

Totalreserve $= \text{Fr. } 3037{,}53.$

Fünfte Aufgabe. Eine Person wünscht sich so zu versichern, dass bei ihrem Tode an die hinterlassenen Erben eine bestimmte Summe T ausbezahlt wird. Wieviel muss betragen 1. eine einmalige Prämie, 2. eine lebenslängliche Jahresprämie, 3. eine Jahresprämie, die nur eine begrenzte Zahl von Jahren hindurch entrichtet wird? (Lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall, Todesversicherung.)

Auflösung. Die Versicherungssummen werden gewöhnlich nicht sofort nach dem Tode der Versicherten ausgerichtet, sondern etwas später. Man nimmt daher der Einfachheit wegen an, dass sie jeweilen auf das Ende des Jahres fällig werden. Der Zuschlag zu der Nettoprämie beträgt 20 bis 30 % bei Versicherungen *mit* Anspruch auf Gewinnanteil, und ungefähr 10 % *ohne* solchen.

1. Fall. Es wird eine einmalige Prämie beim Abschluss des Vertrages bezahlt.

Die Prämie W muss gleich dem Barwert der Todesversicherung T sein, also nach (8a)

$$W = T\frac{1 - i a_x}{r}, \tag{20}$$

ebenso die Reserve für das Alter z der Person

$$V = T\frac{1 - i a_z}{r}. \tag{21}$$

Beispiel. Wieviel beträgt die Einmaleinlage bei 4 % Zinsen für einen 25jährigen Mann, für eine Todesversicherung von Fr. 10 000?

Antwort: $W = 10\,000 \cdot \frac{1 - 0{,}04 \cdot a_{25}}{1{,}04} = \text{Fr. } 2768{,}10.$

Das mittlere zukünftige Alter dieser Person ist 38 Jahre. Würde sie die Summe von Fr. 2768,10 an Zinseszins legen, so hätte sie nach 38 Jahren $2768{,}10 \cdot 1{,}04^{38}$ = Fr. 12 287, also mehr als die Versicherungssumme. Jedoch beträgt der Unterschied nicht so viel, dass dadurch der Vorteil, Fr. 10 000 zu hinterlassen, wann immer der Tod eintreten möge, aufgewogen würde.

2. Fall. Es wird eine lebenslängliche Prämie bezahlt.

Der Barwert aller Prämien P ist gleich der ersten sofort fälligen, vermehrt um den Barwert der übrigen vom Ende des ersten Jahres an, also nach (4) gleich

$$P + P \cdot a_x = P \cdot (1 + a_x);$$

der Barwert der Todesversicherung ist gleich gross wie im ersten Falle; somit besteht die Gleichung

$$P\,(1 + a_x) = T\,\frac{1 - i \cdot a_x}{r} = W. \tag{22}$$

Beispiel. Für die im vorigen Beispiel angenommene Person war W = Fr. 2768,10, also

$$P = \frac{2768{,}10}{1 + a_{25}} = \text{Fr. } 147{,}22.$$

Bei $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen wäre

$$P = 10\,000 \cdot \frac{1 - 0{,}035\, a_{25}}{1{,}035 \cdot (1 + a_{25})} = \text{Fr. } 156{,}33.$$

Fügen wir zu obigen Fr. 147,22 einen Aufschlag von 10 %, also 14,72, so erhalten wir die Bruttoprämie, gleich Fr. 161,94. Um zu finden, wieviel die Prämien samt Zinsen in 38 Jahren betragen würden, nehmen wir zunächst an, dieselben würden je auf das Ende des Jahres bezahlt, dann würden sie nach 38 Jahren zufolge (3) betragen

$$161{,}94 \cdot \frac{1{,}04^{38} - 1}{0{,}04} = \text{Fr. } 13\,922.$$

Da sie aber am Anfang der Jahre bezahlt werden, so ist jede, folglich auch ihre Summe um einen Jahreszins grösser, also gleich $13\,922 + 556{,}88 =$ Fr. 14 479, worüber die schon bei dem vorigen Beispiel gemachte Bemerkung gilt. Übrigens erreichen die Prämien samt Zinseszinsen erst nach 33 Jahren die Versicherungssumme. Diese Zeit ist bei älteren Versicherten kleiner, weil sie höhere Prämien geben müssen. Stirbt eine Person, die sich im Alter von 25 Jahren versichert hatte, so hat sie demnach Gewinn, wenn sie vor Ablauf von 33 Jahren, d. h. vor dem 58. Altersjahr, stirbt, dagegen Verlust, wenn der Tod erst später eintritt.

Die Reserve für die Person, wenn sie z Jahre alt ist, ist gleich der Differenz der dazumaligen Barwerte der künftigen Ausgaben und Einnahmen, also

$$V = T \cdot \frac{1 - i a_z}{r} - P \cdot (1 + a_z)$$

oder, nach Einführung von P aus (22) und Reduktion

$$V = T \cdot \frac{a_x - a_z}{1 + a_x} = T \cdot \left(1 - \frac{1 + a_z}{1 + a_x}\right). \tag{23}$$

B e i s p i e l. Für die 25jährige Person ist die Reserve nach 10 Jahren

$$V = 10000 \cdot \left(1 - \frac{1 + a_{35}}{1 + a_{25}}\right) = \text{Fr. } 882{,}30,$$

ebenso nach 20, 30, 40, 50, 60 Jahren bezüglich gleich Fr. 2099, Fr. 3630, Fr. 5301, Fr. 6854, Fr. 8115 und erreicht nach 74 Jahren oder im 99. Altersjahr, wo $a_z = 0$, die Summe von Fr. 9468,17, welche, um die Nettoprämie Fr. 147,22 vermehrt und ein Jahr verzinst, auf Ende desselben die auszuzahlenden Fr. 10 000 gibt. Die gesamten Einzahlungen dieser Person betragen aber an Nettoprämien und ohne Zinsen in 10, 20, 30, 40, 50, 60 Jahren bezüglich Fr. 1472, Fr. 2944, Fr. 4417, Fr. 5889, Fr. 7361, Fr. 8833, also mehr als die jeweilige Reserve. Sie hätte also, wenn sie in irgendeinem Zeitpunkt von der Versicherung zurücktreten wollte, auch wenn ihr die volle Reserve herausgegeben würde, jedenfalls einen Verlust an Kapital, ohne den an Zinsen zu rechnen. Der Grund liegt darin, dass die Anstalt für die fälligen Versicherungssummen einen Teil der Prämien der noch lebenden Mitglieder verwenden musste und die wirkliche Ausgleichung erst nach dem Tode aller unter den nämlichen Bedingungen Versicherten stattfindet.

Bei Versicherungsvereinen, welche einheitliche Todesfallzahlungen und Prämien haben, verfahre man wie bei den Alterskassen (vgl. vierte Aufgabe). Man bestimme zuerst das Verhältnis der Todesversicherung zur Prämie für ein Mitglied vom jüngsten zugelassenen Alter durch die Formel (22)

$$P = T \cdot \frac{1 - i a_x}{r(1 + a_x)} \tag{24}$$

und dann das Eintrittsgeld E älterer Personen aus der Gleichung zwischen den Barwerten der Einnahmen und Ausgaben der Anstalt

$$E + P \cdot (1 + a_x) = T \cdot \frac{1 - i \cdot a_x}{r}. \tag{25}$$

Die Reserve ist, wie vorhin

$$V = T \cdot \frac{1 - (r - 1)\, a_z}{r} - P \cdot (1 + a_z) =$$

$$= \left(\frac{T}{r} - P\right) - \left(T \frac{r - 1}{r} + P\right) a_z$$

oder

$$V = \left(\frac{T}{r} - P\right) - \left[T - \left(\frac{T}{r} - P\right)\right] \cdot a_z. \tag{26}$$

Man schreibe also für jede Person die a_z auf, addiere dieselben und multipliziere die Summe mit $T - \left(\frac{T}{r} - P\right)$. Das Ergebnis subtrahiere man von der Summe der $\left(\frac{T}{r} - P\right)$ aller Personen, so hat man den Gesamtbetrag der Reserve.

Beispiel. Eine Sterbekasse setzt sich zum Zwecke, an die Hinterlassenen ihrer Mitglieder Fr. 500 auszuzahlen. Der Eintritt kann mit dem 20. Altersjahr geschehen. Man soll die nötigen Tarife und Reserven aufstellen für $3\frac{1}{2}\,\%$ Zinsen.

Man hat hier $T = 500$, $r = 1{,}035$; für die 25jährigen wird die Nettoprämie

$$P = 500 \cdot \frac{1 - 0{,}035 \cdot a_{25}}{1{,}035 \cdot (1 + a_{25})} = \text{Fr. } 7{,}816 \text{ (rund Fr. } 7{,}80).$$

Das Eintrittsgeld eines 30jährigen, der die gleiche Jahresprämie bezahlen soll, wird aus (25)

$$E = 500 \cdot \frac{1 - 0{,}035 \cdot a_{30}}{1{,}035} - 7{,}816 \cdot (1 + a_{30}) = \text{Fr. } 22{,}50,$$

das eines 40jährigen ist Fr. 78,33, und eines 50jährigen Fr. 151,00.

Ferner ist $\dfrac{T}{r} - P = \dfrac{500}{1{,}035} - 7{,}816 = 475{,}27.$

$$T - \left(\frac{T}{r} - P\right) = 500 - 475{,}27 = 24{,}73.$$

Das Schema der Rerserverechnung stellt sich für zwei Mitglieder so:

Mitglieder	Alter z	a_z
A	38	16,561
B	46	14,360
		30,921

Reserve $= 2 \cdot 475{,}27 - 24{,}73 \cdot 30{,}921 =$ Fr. 185,86.

3. Fall. Die Prämie wird nach m Jahren zum letzten Male bezahlt (abgekürzte Prämienzahlung).

Der Barwert sämtlicher Prämien, die erste sofort zu entrichtende inbegriffen, ist nach (7 a) gleich

$$P + P \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} = P \cdot \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} =$$

$$= P \cdot \frac{N_x - N_{x+m+1}}{D_x};$$

der Barwert der Todesversicherung ist dem des vorigen Falles gleich, also ist

$$P \cdot \frac{N_x - N_{x+m+1}}{D_x} = T \cdot \frac{1-(r-1)\,a_x}{r}. \qquad (27)$$

Bei Benützung der Formel (7) erhielte man

$$P \cdot \left(1 + a_x - \frac{l_{x+m}}{l_x\, r^m}\, a_{x+m}\right) = T \cdot \frac{1-(r-1)\,a_x}{r}.$$

Für die Reservebestimmung hat man zwei Zeitabschnitte zu unterscheiden, den ersten, wo die Prämie noch bezahlt wird, und den zweiten, wo dies nicht mehr geschieht. In beiden Fällen sind in den Ausdrücken für die Ausgabe und die Einnahme die Zeiger x durch z und m durch $m-(z-x) = m-z+x$ zu ersetzen. Solange also die Prämie bezahlt wird, ist

$$V = T \cdot \frac{1-(r-1)\,a_z}{r} - P \cdot \frac{N_z - N_{z+m+1}}{D_z}; \qquad (28)$$

wenn aber keine mehr bezahlt wird, so ist einfach

$$V = T \cdot \frac{1-(r-1)\,a_z}{r}. \qquad (29)$$

B e i s p i e l. Welche Prämie während 20 Jahren hat eine 25jährige Person für eine Todesversicherung von Fr. 10 000 zu zahlen, bei Annahme von 3½ % Zinsen?

Hier ist $x = 25$, $m = 19$, $T = 10000$, also nach (27)

$$P \cdot \frac{N_{25} - N_{45}}{D_{25}} = 10000 \cdot \frac{1 - 0{,}035 \cdot a_{25}}{1{,}035}, \quad P = \text{Fr. } 230{,}71;$$

10 % Aufschlag geben eine Bruttoprämie von Fr. 253,78, welche als jährliche Sparkasseneinlage auf Ende jedes Jahres nach 20 Jahren und bei 4 % erst

$$253{,}78 \cdot \frac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04} = \text{Fr. } 7556{,}93$$

oder als Einlage auf Anfang jedes Jahres (siehe Beispiel zu Formel (22)). 7556,93 + 302,28 = Fr. 7859,21 geben würde.

Der mit lebenslänglicher Zahlung Versicherte kann bei vielen Anstalten in irgendeinem Zeitpunkt zur abgekürzten Prämienzahlung übergehen. Alsdann ist die Reserve der bisherigen Versicherung als einmalige Einlage zu betrachten, und für die künftigen Prämien hat man die Gleichung

$$V + P \cdot \frac{N_z - N_{z+m+1}}{D_z} = T \cdot \frac{1 - (r-1)\, a_z}{r}, \tag{30}$$

woraus sich P bestimmt.

Beispiel. Die lebenslängliche Jahresprämie eines 25jährigen wurde für die Versicherungssumme von Fr. 10 000 und eine Verzinsung von $3\frac{1}{2}$ % gleich Fr. 156,33 gefunden. Gesetzt nun, dieser Versicherte wolle nach 7 Jahren zu einer auf 20 Jahre abgekürzten Prämienzahlung übergehen, so ist $z = 32$ und nach (23)

$$V = 10000 \cdot \left(1 - \frac{1 + a_{32}}{1 + a_{25}}\right) = \text{Fr. } 648{,}27,$$

ferner nach (30), worin $m = 19$ zu setzen,

$$648{,}27 + P \cdot \frac{N_{32} - N_{52}}{D_{32}} = 10000 \cdot \frac{1 - 0{,}035 \cdot a_{32}}{1{,}035},$$

$$P = \text{Fr. } 218{,}26.$$

Sechste Aufgabe. Jemand versichert sich auf eine begrenzte Zeit so, dass seine Hinterlassenen, falls er innerhalb derselben sterben sollte, eine bestimmte Versicherungssumme erhalten. Man soll 1. die einmalige, 2. die Jahresprämie des Versicherten bestimmen. (Abgekürzte Todesversicherung.)

Auflösung. Die Versicherung werde auf m Jahre abgeschlossen, so dass die Zahlungspflicht für die Todesfälle innerhalb dieser Zeit besteht. Die einmalige sowie die erste Jahresprämie wird am Anfang des ersten, die letzte am Anfang des $m$ten, also nach $m - 1$ Jahren, entrichtet. Die Versicherungssumme sei T Fr. Die einmalige Prämie ist gleich dem Barwert der Todesfallzahlungen, also nach Formel (9)

$$W = T \cdot \frac{1}{D_x}\left(D_x - D_{x+m} - \frac{r-1}{r}(N_x - N_{x+m})\right). \quad (31)$$

Die Reserve ergibt sich ebenfalls aus diesem Ausdruck, wenn man x durch z, m durch $m - (z - x) = m - z + x$ ersetzt, also

$$V = T \cdot \frac{1}{D_z}\left(D_z - D_{x+m} - \frac{r-1}{r}(N_z - N_{x+m})\right). \quad (32)$$

Der Barwert der Jahresprämie ist gleich der ersten Prämie, vermehrt um den aller folgenden, daher nach (7 a), worin $m - 1$ für m zu setzen ist,

$$P + P \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+m}}{D_x} = P \cdot \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+m}}{D_x} =$$

$$= P \cdot \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x},$$

so dass, wenn man dies dem in (31) angegebenen Barwert der Todesfallzahlungen gleich setzt, die Gleichung besteht:

$$P \cdot (N_x - N_{x+m}) = T \cdot \left(D_x - D_{x+m} - \right.$$

$$\left. - \frac{r-1}{r} (N_x - N_{x+m}) \right) = W \cdot D_x \,. \qquad (33)$$

Die Reserve ist gleich dem Unterschied der Barwerte der künftigen Ausgaben und Einnahmen der Anstalt, wobei in den vorigen Ausdrücken x durch z und m durch $m - z + x$ zu ersetzen sind, demnach

$$V = T \cdot \frac{1}{D_z} \left(D_z - D_{x+m} - \frac{r-1}{r} (N_z - N_{x+m}) \right)$$

$$- P \cdot \frac{N_z - N_{x+m}}{D_z}$$

oder

$$V = T \cdot \frac{D_z - D_{x+m}}{D_z} - \left(\frac{r-1}{r} T + P \right) \cdot \frac{N_z - N_{x+m}}{D_z} . \quad (34)$$

Beispiel. Welche Nettoprämie hat eine 30jährige Person für eine Todesversicherung von Fr. 20 000 auf 5 Jahre zu zahlen, bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen?

$$W = 20\,000 \cdot \frac{1}{D_{30}} \left(D_{30} - D_{35} - \frac{0{,}035}{1{,}035} (N_{30} - N_{35}) \right) =$$

$$= \text{Fr. } 776{,}39$$

$$P = \frac{776{,}09 \cdot D_{30}}{N_{30} - N_{35}} = \text{Fr. } 168{,}92 \,.$$

Siebente Aufgabe. Jemand versichert sich so, dass die Versicherungssumme an ihn bezahlt wird, wenn er ein gewisses Alter erreicht, oder an die Hinterlassenen, wenn er vorher stirbt. Man soll die Jahresprämie bestimmen. (Todesversicherung mit Alterskasse; sogenannte gemischte Versicherung.)

Auflösung. Wenn die Versicherung auf T Fr. und m Jahre abgeschlossen ist, so ist der Barwert der Auszahlungen gleich der Summe der Barwerte der Lebensfall- und der Todesfallzahlungen, also nach (10) und (31) gleich

$$T \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} + T \cdot \frac{1}{D_x}\left(D_x - D_{x+m} - \frac{r-1}{r}(N_x - N_{x+m})\right) =$$

$$= T \cdot \frac{1}{D_x}\left(D_x - \frac{r-1}{r}(N_x - N_{x+m})\right);$$

der Barwert der Einnahmen ist derselbe wie in voriger Aufgabe, demnach

$$P \cdot (N_x - N_{x+m}) = T \cdot \left(D_x - \frac{r-1}{r}(N_x - N_{x+m})\right) \quad (35)$$

und die Reserve wird

$$V = T \cdot \frac{1}{D_z}\left(D_z - \frac{r-1}{r}(N_z - N_{x+m})\right) - P \cdot \frac{N_z - N_{x+m}}{D_z}$$

oder

$$V = T - \left(\frac{r-1}{r} T + P\right) \cdot \frac{N_z - N_{x+m}}{D_z}. \quad (36)$$

Beispiel. Man verlangt die Jahresprämie, die ein 25jähriger für eine Versicherung von Fr. 10 000 entrichten muss, welche entweder an ihn selbst im Alter von 60 Jahren oder an seine Erben im Falle seines vorher erfolgenden Todes bezahlt werden soll. Es ist bei 3½ % Zinsen

$$P \cdot (N_{25} - N_{60}) = 10000 \left(D_{25} - \frac{0,035}{1,035} (N_{25} - N_{60}) \right),$$

$$P = \text{Fr. } 211,08\,;$$

für eine einfache lebenslängliche Versicherung müsste er Fr. 156,33 bezahlen, nach (22), und mit abgekürzter Prämienzahlung auf 35 Jahre Fr. 173,64, nach (27). Für den Vorteil, die Fr. 10 000 noch bei Lebzeiten im 60. Jahr zu erhalten, ist also eine jährliche Zusatzprämie von 211,07 — 173,64 = Fr. 37,43 zu leisten.

Diese Aufgabe ist eine Kombination der dritten mit der sechsten. Auf gleiche Weise, d. h. durch Summierung der Barwerte beider, können irgend zwei andere Versicherungen miteinander verbunden werden. Man kann auch von einer Versicherung zu einer andern übergehen, indem man die Reserve der ersten als erste Einzahlung betrachtet und ihr den Barwert der künftigen Prämien beifügt, wie es im dritten Fall der fünften Aufgabe geschah.

Neunte Aufgabe. Es gibt Anstalten, die sich für einfache Todesversicherungen während der ersten Jahre nur halbe Jahresprämien und erst später die ganzen bezahlen lassen. Man soll diese bestimmen.

Auflösung. Der Barwert der Todesfallzahlung ist durch die Formel (8) gegeben, und es handelt sich nur darum, den der Prämien zu bestimmen. Die halbe Prämie sei P und werde n Male bezahlt, später die ganze 2 P. Der Barwert der halben Prämien ist wie bei der dritten Aufgabe gleich

$$P \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

und der der ganzen vom Ende des $n$ten Jahres an nach (5 a) gleich $2\,P \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$, also die Summe der Barwerte aller Prämien gleich

$$P \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + 2\,P \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x} = P \cdot \frac{N_x + N_{x+n}}{D_x}.$$

Einnahmen und Ausgaben, einander gleichgesetzt, geben

$$P \cdot \frac{N_x + N_{x+n}}{D_x} = T \cdot \frac{1 - (r-1)\,a_x}{r}. \tag{37}$$

Für die Reserve sind zwei Zeitabschnitte zu unterscheiden. Für den ersten, wo nur die halben Prämien entrichtet werden, gelten die obigen Barwerte, in denen x durch z, n durch $n - (z - x) = n - z + x$ ersetzt werden müssen, also

$$V = T \cdot \frac{1 - (r-1)\,a_z}{r} - P \cdot \frac{N_z + N_{x+n}}{D_z}. \tag{38}$$

Für den zweiten gilt die Formel (23).

B e i s p i e l. Welche Prämien hat eine 25jährige Person für eine Todesversicherung von Fr. 10 000 zu leisten, wenn sie während der ersten 5 Jahre nur die halben Prämien bezahlen will? (Zinsfuss 3,5 %.)

$$P \cdot \frac{N_{25}+N_{30}}{D_{25}} = 10\,000 \cdot \frac{1 - 0{,}035\, a_{25}}{1{,}035}, \quad P = \text{Fr. } 88{,}20.$$

Sie entrichtet also die fünf ersten Prämien mit je Fr. 88,20, die folgenden mit je Fr. 176,40. Eine unveränderliche Jahresprämie würde Fr. 156,32 betragen.

Fünftes Kapitel.

Versicherungen auf zwei Personen.

Aus den mannigfaltigen Aufgaben, welche die Versicherungen auf zwei Personen darbieten, werden hier nur die hauptsächlichsten herausgegriffen, nach deren Vorbild die übrigen leicht behandelt werden können. Die beiden miteinander verbundenen Personen werden, wie schon im ersten Kapitel, als Ehepaar angenommen, ohne dass die Voraussetzung gerade notwendig ist. Das Alter des Mannes wird bei Abschluss des Vertrags immer zu x, das der Frau zu y Jahren vorausgesetzt, bei der Reserveberechnung seien ihre Alter v bzw. w. Bezüglich der Reserve wird wie bisher angenommen, dass sie auf Ende des Jahres gestellt sei und dass die nächsten Prämienzahlungen sofort nach Neujahr und die nächsten Auszahlungen der Anstalt erst auf Ende des folgenden Jahres erfolgen. Die beiden ersten Aufgaben befassen sich mit der Ermittlung von Barwerten.

Erste Aufgabe. Den Barwert einer Zahlung zu finden, welche während einer bezeichneten Anzahl von Jahren unter der Bedingung geleistet wird, dass ein bestimmtes Ehepaar noch am Leben ist.

Auflösung. Der Betrag einer einzelnen Zahlung sei B, der durchschnittliche Barwert aller sei W. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall. Die Zahlung wird nach n Jahren und nur einmal geleistet.

Die Zahl der zugrunde gelegten Ehepaare sei $l_x \cdot l_y$, so sind nach n Jahren noch $l_{x+n} \cdot l_{y+n}$ solche vorhanden, nach (5). An diese sind im ganzen zu zahlen Franken: $B \cdot l_{x+n} \cdot l_{y+n}$, deren Barwert beträgt $B \cdot \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{r^n}$. Der durchschnittliche Barwert für eines der anfänglichen Paare ist somit

$$W = B \cdot \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y\, r^n}. \tag{39}$$

Beispiel. Der Barwert von Fr. 1000, zahlbar nach 30 Jahren an ein gegenwärtig bezüglich 30 und 25 Jahre altes Ehepaar, wenn es dann noch lebt, ist bei $3\frac{1}{2}$ %

$$W = 1000 \cdot \frac{l_{60}\, l_{55}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{30}} = \text{Fr. } 163{,}27.$$

2. Fall. Die Zahlung B wird nach 1 Jahr zum ersten Male und von dort an jährlich bis zum Tode des einen Ehegatten geleistet (einfache Eherente).

Zufolge (39) sind die Barwerte der Zahlungen zu Ende des 1., 2., 3. Jahres der Reihe nach gleich

$$B \cdot \frac{l_{x+1}\, l_{y+1}}{l_x\, l_y\, r}, \quad B \cdot \frac{l_{x+2}\, l_{y+2}}{l_x\, l_y\, r^2}, \quad B \cdot \frac{l_{x+3}\, l_{y+3}}{l_x\, l_y\, r^3}, \ \ldots$$

also ihre Summe

$$W = B \cdot \frac{1}{l_x\, l_y} \left(\frac{l_{x+1}\, l_{y+1}}{r} + \frac{l_{x+2}\, l_{y+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}\, l_{y+3}}{r^3} + \ldots \right),$$

wo die Reihe bis an das Ende der Mortalitätstafel fortzusetzen ist. Die mit B multiplizierte Grösse bezeichnen wir mit a_{xy}, worin die Alterszahlen x und y als Zeiger funktionieren, und nennen sie die *Eherenteneinheit*. Dann ist

$$a_{xy} = \frac{1}{l_x l_y} \left(\frac{l_{x+1} l_{y+1}}{r} + \frac{l_{x+2} l_{y+2}}{r^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{l_{x+3} l_{y+3}}{r^3} + \ldots \right) \qquad (40)$$

und

$$W = B \cdot a_{xy}. \qquad (41)$$

Der Deutlichkeit halber schreibt man oft $a_{x:y}$ statt a_{xy}.

Eine Tabelle für die a_{xy}, wie sie in Tab. IV zu $3\frac{1}{2}$ und 4 % mitgeteilt ist, wird auf dem für a_x im vierten Kapitel (erste Aufgabe) beschriebenen Weg konstruiert, indem man wie dort die Gleichung findet

$$a_{xy} = \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y r} \cdot \left(1 + a_{x+1:y+1}\right).$$

Bezüglich der Tabelle IV ist zu bemerken, dass ihre Angaben von 5 zu 5 Jahren fortschreiten. Handelt es sich um Reserverechnungen für kleinere Vereine, so darf man die Alterszahlen auf die nächsten 5 abrunden, z. B. 31 auf 30, 33 auf 35 usw., da die herauskommenden Resultate, obschon sie massgebend sind, wegen der kleinen Mitgliederzahl doch nur annähernde Gültigkeit haben können. Zur Bestimmung von Prämien aber und von Reserven grösserer Anstalten ist es nötig, die dazwischenliegenden Werte ebenfalls zu kennen. Man wendet hiezu die sogenannte Interpolation an wie folgt.

Es sei $a_{20:24}$ zu finden, so suche man $a_{20:20} = 16{,}919$ und $a_{20:25} = 16{,}495$. Man nehme an, was nahe richtig ist, dass die Rentenwerte innerhalb 5 Jahren jährlich gleich viel abnehmen, und rechne die Abnahme für 5 Jahre $16{,}919 - 16{,}495 = 0{,}424$. Die Abnahme für 1 Jahr ist dann $= 0{,}0848$ und für 4 Jahre $= 0{,}339$. Diese von 16,919 abgezogen, gibt

$$a_{20:24} = 16{,}580.$$

Es sei ferner $a_{23:24}$ zu finden. Man bestimme, wie vorhin angegeben, $a_{20:24} = 16{,}580$ und $a_{25:24} = 16{,}199$ (aus $a_{25:20}$ und $a_{25:25}$). Der ganze Unterschied dieser beiden ist $= 0{,}381$ (für 5 Jahre), für 1 Jahr $= 0{,}0762$, für 3 Jahre $= 0{,}229$. Dieser letztere von 16,580 abgezogen, gibt

$$a_{23:24} = 16{,}351,$$

welcher Wert erst in der zweiten Dezimalen von dem richtigen 16,365 abweicht.

3. Fall. Die Zahlung B wird alljährlich, und zwar nach n Jahren erstmals und nach m Jahren zum letztenmal, bezahlt, falls überhaupt beide Ehegatten noch leben.

Die Barwerte der bezüglich nach n, $n+1$, $n+2$, ... m Jahren fälligen Summen sind

$$B \cdot \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y\, r^n},\quad B \cdot \frac{l_{x+n+1}\, l_{y+n+1}}{l_x\, l_y\, r^{n+1}},\quad \ldots\quad B \cdot \frac{l_{x+m}\, l_{y+m}}{l_x\, l_y\, r^m},$$

also ihre Summe

$$W = \frac{B \cdot}{l_x\, l_y}\left(\frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{r^n} + \frac{l_{x+n+1}\, l_{y+n+1}}{r^{n+1}} + \ldots \frac{l_{x+m}\, l_{y+m}}{r^m}\right).$$

Um diesen Ausdruck auf eine bequemere Form zu bringen, denke man sich die Reihe bis ans Ende der Mortalitätstafel fortgesetzt und die hinzugefügten Glieder wieder abgezogen, dann wird

$$W = \frac{B}{l_x l_y}\left(\frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{r^n} + \ldots\right) - \frac{B}{l_x l_y}\left(\frac{l_{x+m+1}\, l_{y+m+1}}{r^{m+1}} + \ldots\right)$$

oder, wie man leicht findet,

$$W = B\left(\frac{l_{x+n-1}\, l_{y+n-1}}{l_x \cdot l_y \cdot r^{n-1}}\, a_{x+n-1:y+n-1}\right.$$

$$\left. - \frac{l_{x+m}\, l_{y+m}}{l_x \cdot l_y \cdot r^m}\, a_{x+m:y+m}\right) \ldots \qquad (42)$$

Würde die jährliche Zahlung schon zu Ende des *ersten* Jahres beginnen, so hätte man $n = 1$, $n - 1 = 0$ zu setzen, wodurch man erhielte

$$W = B \cdot \left(a_{xy} - \frac{l_{x+m}\, l_{y+m}}{l_x\, l_y \cdot r^m}\, a_{x+m:y+m}\right). \qquad (42a)$$

Beispiel. Wie gross ist der Barwert einer Prämie von Fr. 20 während 10 Jahren, die erste nach 1 Jahr fällig, einer darauf folgenden von Fr. 15 während 10 Jahren und einer nachherigen von Fr. 10 während weiterer 10 Jahre für ein Ehepaar von bezüglich 30 und 25 Jahren und zu $3\frac{1}{2}$ % Zinsen?

Antwort: Bei der ersten Prämienreihe ist $B = 20$, $n = 1$, $m = 10$, also

$$W = 20\left(a_{30:25} - \frac{l_{40} \cdot l_{35} \cdot a_{40:35}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{10}}\right) = \text{Fr. } 152{,}32,$$

für die zweite Reihe ist $B = 15$, $n = 11$, $m = 20$, also

$$W = 15\left(\frac{l_{40} \cdot l_{35} \cdot a_{40:35}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{10}} - \frac{l_{50} \cdot l_{45} \cdot a_{50:45}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{20}}\right) = \text{Fr. } 66{,}38,$$

für die dritte ist $B = 10$, $n = 21$, $m = 30$, demnach

$$W = 10\left(\frac{l_{50} \cdot l_{45} \cdot a_{50:45}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{20}} - \frac{l_{60} \cdot l_{55} \cdot a_{60:55}}{l_{30} \cdot l_{25} \cdot 1{,}035^{30}}\right) = \text{Fr. } 23{,}52.$$

Der Gesamtbarwert aller dieser Prämien ist sonach gleich Fr. 242,22.

Zweite Aufgabe. Man soll den Barwert einer Zahlung finden, welche nach dem Tode des Mannes für die Witwe geleistet wird.

Auflösung. Es kommen hauptsächlich folgende zwei Fälle vor:

1. Fall. Die Witwe erhält nach dem Tode des Mannes eine einmalige Versicherungssumme T, welche zu Ende des Jahres bezahlt wird, in dem der Mann stirbt.

Nehmen wir wieder $l_x\, l_y$ Ehepaare, so entstehen auf das Ende des ersten Jahres nach (5) $l_{y+1} \cdot (l_x - l_{x+1})$ Witwen, und es bleiben $l_{x+1}\, l_{y+1}$ ganze Ehen. Aus den letzteren entstehen ebenso auf Ende des zweiten Jahres $l_{y+2}\,(l_{x+1} - l_{x+2})$ Witwen, und es bleiben $l_{x+2}\, l_{y+2}$ Ehepaare; aus diesen kommen auf Ende des dritten Jahres $l_{y+3}\,(l_{x+2} - l_{x+3})$ Witwen usw. Die auf Ende des 1., 2., 3. . . . Jahres fälligen Zahlungen sind also der Reihe nach:

$$T \cdot l_{y+1}\,(l_x - l_{x+1}),\quad T \cdot l_{y+2}\,(l_{x+1} - l_{x+2}),$$
$$T \cdot l_{y+3}\,(l_{x+2} - l_{x+3}),\ \ldots$$

Die Barwerte derselben sind

$$T \cdot \frac{l_{y+1}\,(l_x - l_{x+1})}{r}, \quad T \cdot \frac{l_{y+2}\,(l_{x+1} - l_{x+2})}{r^2},$$

$$T \cdot \frac{l_{y+3}\,(l_{x+2} - l_{x+3})}{r^3}, \ldots$$

deren Summe nach Auflösung der Klammern und Vereinigung der positiven und negativen Glieder gleich wird

$$\left[T \cdot \frac{l_{y+1}\,l_x}{r} + \frac{l_{y+2}\,l_{x+1}}{r^2} + \ldots \right.$$

$$\left. - \left(\frac{l_{y+1}\,l_{x+1}}{r} + \frac{l_{y+2}\,l_{x+2}}{r^2} + \ldots\right)\right].$$

Somit ist der durchschnittliche Barwert aller Zahlungen für eine von den $l_x\,l_y$ Ehen

$$W = T \cdot \left[\frac{1}{l_x\,l_y}\left(\frac{l_{y+1}\,l_x}{r} + \frac{l_{y+2}\,l_{x+1}}{r^2} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{l_x\,l_y}\left(\frac{l_{y+1}\,l_{x+1}}{r} + \frac{l_{y+2}\,l_{x+2}}{r^2} + \ldots\right)\right]$$

oder, wenn man das erste Glied in der grossen Klammer mit l_{x-1} multipliziert und dividiert und Formel (40) berücksichtigt,

$$W = T \cdot \left(\frac{l_{x-1}}{l_x} a_{x-1:y} - a_{xy}\right). \tag{43}$$

Beispiel. Der Barwert einer Todesversicherung von Fr. 10 000 eines 25jährigen, die an seine um 5 Jahre jüngere Gattin ausbezahlt werden soll, ist bei 3½% gleich

$$10000\left(\frac{l_{24}}{l_{25}}\,a_{24:20}-a_{25:20}\right)=\text{Fr. } 2130.$$

Im Fall der Witwer nach dem Tode der Frau die Summe T bekommen wollte, wird man den Barwert erhalten, wenn man in (43) einfach x mit y vertauscht, nämlich:

$$W=T\cdot\left(\frac{l_{y-1}}{l_y}\,a_{x:y-1}-a_{xy}\right). \tag{43a}$$

Würde endlich beides zusammen ausbedungen, d. h. dass überhaupt der überlebende Teil die Summe T erhalten soll, so ist deren Barwert gleich der Summe der in (43) und (43 a) angegebenen Werte, also

$$W=T\cdot\left(\frac{l_{x-1}}{l_x}\,a_{x-1:y}+\frac{l_{y-1}}{l_y}\,a_{x:y-1}-2\,a_{xy}\right). \tag{43b}$$

Wenn die Witwen derjenigen Männer, welche in den ersten n Jahren sterben, die Versicherungssumme nicht erhalten sollen, so kommen sie nicht in Betracht, und die Berechnung des Barwertes beginnt erst vom Ende des $n$ten Jahres hinweg. Derselbe wird

$$W=T\cdot\frac{1}{l_x\,l_y}\left[\frac{l_{y+n+1}\,l_{x+n}}{r^{n+1}}+\frac{l_{y+n+2}\,l_{x+n+1}}{r^{n+2}}+\ldots\right.$$
$$\left.-\left(\frac{l_{y+n+1}\,l_{x+n+1}}{r^{n+1}}+\ldots\right)\right]$$

oder

$$W=T\cdot\frac{l_{y+n}}{l_x\,l_y\cdot r^n}\,(l_{x+n-1}\,a_{x+n-1:y+n}-l_{x+n}a_{x+n:y+n}). \tag{43c}$$

2. Fall. Die Witwe erhält nach dem Tode des Mannes eine Leibrente R auf Ende jedes Jahres.

Nehmen wir wie immer $l_x\,l_y$ Ehen, so leben gemäss Formel (5) des I. Kapitels nach 1, 2, 3, ... Jahren noch

$$l_{y+1}\,(l_x - l_{x+1}),\; l_{y+2}\,(l_x - l_{x+2}),\; l_{y+3}\,(l_x - l_{x+3}),\; \ldots$$

Witwen, an die je R Fr. zu zahlen sind. Die Barwerte dieser Zahlungen sind also

$$R\cdot\frac{l_{y+1}\,(l_x - l_{x+1})}{r},\; R\cdot\frac{l_{y+2}\,(l_x - l_{x+2})}{r^2},\; R\cdot\frac{l_{y+3}\,(l_x - l_{x+3})}{r^3},\; \ldots$$

und ihre Summe, auf ein Ehepaar bezogen, ist

$$W = R\cdot\frac{1}{l_x\,l_y}\left(\frac{l_{y+1}\,(l_x - l_{x+1})}{r} + \frac{l_{y+2}\,(l_x - l_{x+2})}{r^2} + \ldots\right)$$

oder nach Auflösung der Klammern und Vereinigung der entsprechenden Glieder

$$W = R\cdot\left[\frac{1}{l_y}\left(\frac{l_{y+1}}{r} + \frac{l_{y+2}}{r^2} + \ldots\right) - \frac{1}{l_x\,l_y}\left(\frac{l_{y+1}\,l_{x+1}}{r} + \frac{l_{y+2}\,l_{x+2}}{r^2} + \ldots\right)\right]$$

oder endlich

$$W = R\cdot(a_y - a_{xy}). \tag{44}$$

Will der Mann nach dem Tode der Frau die Rente R beziehen, so wird

$$W = R\cdot(a_x - a_{xy}), \tag{44a}$$

und falls beides erfolgen soll, d. h. wenn jeder Hinterlassene nach dem Tode des andern Eheteils die Rente R beziehen will, so ist der Barwert gleich der Summe derjenigen in (44) und (44a), also

$$W = R \cdot (a_x + a_y - 2\, a_{xy}). \qquad (44\,b)$$

Beispiel. Der Barwert einer Witwenrente von Fr. 500 für ein Ehepaar von bezüglich 35 und 30 Jahren ist, zu 4 %, gleich

$$500\,(a_{30} - a_{35:30}) = \text{Fr. } 1616.—.$$

Es kommt bei Witwenkassen oft vor, dass die Witwe eines Mitgliedes, das innerhalb der ersten n Jahre stirbt, keine Pension erhält, sondern erst diejenigen Witwen, welche aus den am Ende des $n$ten Jahres nach dem Eintritt in die Kasse noch bestehenden Ehen entspringen. Sind nun am Anfange $l_x\, l_y$ Ehen, so bestehen davon nach n Jahren noch $l_{x+n}\, l_{y+n}$. Diese geben auf den Jahresschluss $l_{y+n+1}\,(l_{x+n} - l_{x+n+1})$, auf das Ende des folgenden Jahres $l_{y+n+2}\,(l_{x+n} - l_{x+n+2})$ Witwen usw. Der Barwert der Rentenzahlungen beträgt demnach für ein Ehepaar durchschnittlich:

$$W = \frac{R}{l_x\, l_y} \cdot \left[l_{x+n} \left(\frac{l_{y+n+1}}{r^{n+1}} + \frac{l_{y+n+2}}{r^{n+2}} + \dots \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{l_{y+n+1}\, l_{x+n+1}}{r^{n+1}} + \frac{l_{y+n+2}\, l_{x+n+2}}{r^{n+2}} + \dots \right) \right]$$

oder

$$W = R \cdot \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y \cdot r^n} \left(a_{y+n} - a_{x+n:y+n} \right). \qquad (44\,c)$$

Dritte Aufgabe. Ein Ehepaar versichert sich so, dass die Frau oder der Mann oder jedes von ihnen beim Tode des andern Eheteils eine einmalige Versicherungssumme erhält. Man soll die Prämien bestimmen. (Witwen-, Witwer-, gegenseitige Erbversicherung.)

Auflösung. Wir nehmen an, dass die Auszahlung der Versicherungssumme T an die Berechtigten schon erfolgt, wenn der Tod im ersten Jahre erfolgt.

Die einmalige Prämie ist gleich dem Barwert der Versicherungssumme, also nach (43) für die Witwenversicherung

$$W = T \cdot \left(\frac{l_{x-1}}{l_x} a_{x-1:y} - a_{xy} \right) \tag{45}$$

und die Reserve

$$V = T \cdot \left(\frac{l_{v-1}}{l_v} a_{v-1:w} - a_{vw} \right). \tag{46}$$

Die Jahresprämie dagegen wird vom Anfang des ersten Jahres an bezahlt, solange noch beide Eheteile am Leben sind. Ihr Barwert ist also gleich der ersten Prämie, vermehrt um den Barwert derjenigen vom Ende des ersten Jahres an, somit nach (41) gleich

$$P + P \cdot a_{xy} = P \cdot (1 + a_{xy}).$$

Dieser, dem Barwert der Versicherung gleichgesetzt, gibt

$$P \cdot (1 + a_{xy}) = T \cdot \left(\frac{l_{x-1}}{l_x} a_{x-1:y} - a_{xy} \right). \tag{47}$$

Soll die Prämienzahlung abgekürzt werden und nach m Jahren zum letzten Male erfolgen, so muss nach (42 a)

$$P \cdot \left(1 + a_{xy} - \frac{l_{x+m}\, l_{y+m}}{l_x\, l_y \cdot r^m}\, a_{x+m:y+m}\right) =$$

$$= T \cdot \left(\frac{l_{x-1}}{l_x}\, a_{x-1:y} - a_{xy}\right). \qquad (47\,a)$$

Die Reserve ist bei lebenslänglicher Prämienzahlung

$$V = T\left(\frac{l_{v-1}}{l_v}\, a_{v-1:w} - a_{vw}\right) - P\,(1 + a_{vw}). \quad (48)$$

Bei der Witwer- oder der gegenseitigen Erbversicherung sind für den Wert der Todesfallzahlung die Ausdrücke (43 a) oder (43 b) in Anwendung zu bringen.

Im Fall n Probejahre ausbedungen wären in der Weise, dass die Witwe statt der Versicherungssumme nur die bezahlten Prämien zurückerhält, wenn der Mann vor n Jahren sterben sollte, so hat man zunächst als Ausgabe der Kasse den Barwert der Todesfallzahlung laut (43 c) zu nehmen. Als fernere Ausgabe sind die zurückzuzahlenden Prämien zu betrachten, nämlich an jede Witwe des ersten Jahres P Fr., an die Witwen des zweiten $2 \cdot P$ Fr. usw., endlich an die des $n$ten Jahres $n \cdot P$ Fr.

Was die kleineren Versicherungsvereine betrifft, wo die Prämie P und die Versicherungssumme T für alle Mitglieder gleich gross sind, so wird der Unterschied im Alter der eintretenden Paare durch das Eintrittsgeld ausgeglichen werden müssen, gerade so, wie es bei den Versicherungen auf eine Person geschah, indem man zu der Grösse links vom Gleichheitszeichen in (47) und (47a) noch E hinzufügt. Für die Reserverechnung kann man dann (48) in folgende Form bringen

$$V = T \cdot \left(\frac{l_{v-1}}{l_v} a_{v-1:w} + 1\right) - (P + T) \cdot (1 + a_{vw}),$$

deren Anwendung in die Augen springt.

Beispiel. Welche Jahresprämie hat ein Ehepaar von bezüglich 30 und 25 Jahren zu bezahlen, um eine Witwenversicherung von Fr. 10 000 zu erwerben, bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen?

Antwort. Der Barwert der Versicherung ist nach Gleichung (43) zu bestimmen und beträgt Fr. 2290. Der Barwert der Prämien ist $P \cdot (1 + a_{30:25}) = P \cdot 16{,}634$; aus der Gleichung $P \cdot 16{,}634 = 2290$ folgt $P =$ Fr. 137,67. Die Nettoprämie für eine einfache Todesversicherung des Mannes würde Fr. 179,60 betragen.

Vierte Aufgabe. Ein Ehepaar versichert sich so, dass der eine Eheteil nach dem Tode des andern eine Leibrente erhält. Man soll die Prämie bestimmen. (Witwen-, Witwer-, gegenseitige Erbrente.)

Auflösung. Wir behandeln den gewöhnlichsten Fall, wo die Witwe eine Rente beziehen soll, und zwar vom Ende des Jahres an, in dem der Mann gestorben ist, und setzen die jährliche Rente $= R$ Fr. Alsdann ist die einmalige Prämie gleich dem Barwert der Rente, also nach (44)

$$W = R \cdot (a_y - a_{xy}) \tag{50}$$

und die Reserve

$$V = R \cdot (a_w - a_{vw}). \tag{51}$$

Zahlt man jährliche Prämien, so ist deren Barwert gleich dem in der vorigen Aufgabe. Somit besteht die Gleichung

$$P \cdot (1 + a_{xy}) = R \cdot (a_y - a_{xy}). \tag{52}$$

Die Reserve ist bei Lebzeiten des Mannes

$$V = R \,.\, (a_w - a_{vw}) - P \cdot (1 + a_{vw}). \tag{53}$$

Vom Tode des Mannes hinweg ist die Reserve gleich dem Barwert der Rente an die lebende Witwe, also nach (17 *b*)

$$V = R \cdot a_w.$$

Die übrigen Fälle, wo entweder eine Witwerrente (44 *a*) oder eine gegenseitige Erbrente (44 *b*) oder eine erst später beginnende Bezugsberechtigung (44 *c*) oder auch eine abgekürzte Prämienzahlung (42 *a*) ausbedungen sind, bieten keine Schwierigkeiten dar.

1. Beispiel. Welche Witwenrente kann man für die am Schluss der ersten Aufgabe dieses Kapitels angenommene Prämienzahlung bieten, wenn überdies mit Anfang des ersten Jahres Fr. 30 einbezahlt werden?

Antwort. Der Barwert sämtlicher Prämien ist $= 30 + 242{,}22 =$ Fr. 272,22. Die Witwenrente bestimmt sich daher aus der Gleichung

$$272{,}22 = R \cdot (a_{25} - a_{30:25}),\quad R = \text{Fr. } 75.85.$$

2. Beispiel. Bei einer Witwenkasse zahlt man jährlich Fr. 20 Beitrag und überdies ein Eintrittsgeld von Fr. 30, wenn das eintretende Ehepaar nicht über 25 und 20 Jahre alt ist. Hingegen verpflichtet sich die Kasse, vom Tode des Mannes hinweg am Ende jedes Jahres den Witwen eine lebenslängliche Rente zu zahlen,

die für alle gleich gross sein soll. Man soll die betreffenden Rechnungen anstellen mit einem Zinsfuss von 4 %.

Aus (52) ergibt sich mit Hinzurechnung der ersten Fr. 30.

$$30 + 20 \cdot (1 + a_{25:20}) = R \cdot (a_{20} - a_{25:20}), \quad R = \text{Fr. } 118{,}11;$$

die Bruttorente kann zu Fr. 100 angesetzt werden.

Das Eintrittsgeld für ein Ehepaar von 35 bzw. 25 Jahren wird bestimmt wie folgt:

$$E + 20\,(1 + a_{35:25}) = 118{,}11\,(a_{25} - a_{35:25}), \quad E = \text{Fr. } 132{,}87,$$

d. h. es sind als Nachzahlung über das kleinste Eintrittsgeld von Fr. 30 hinaus Fr. 102,87 einzuzahlen. Ähnlich bestimmt sich das Eintrittsgeld für jede andere Alterskombination.

Gewöhnlich werden bei solchen Witwenkassen die Renten nicht am Ende des Jahres, sondern, wie die Prämien, jeweilen am Anfang des folgenden Jahres bezahlt und sind bei Feststellung der Reserve noch in der Kasse. Ihr Betrag muss demnach zuerst von dem Vereinsvermögen ausgeschieden werden, bevor die Reserve bestimmt wird. — Die Formel (53) kann in dem Fall, wo alle Renten und alle Prämien gleich sind, so umgeformt werden:

$$V = R \cdot (1 + a_w) - (P + R) \cdot (1 + a_{vw}).$$

Man schreibe also für jedes Ehepaar die Werte von $1 + a_w$ und $1 + a_{v:w}$ auf und addiere sie; die Summe der erstern multipliziere man mit der Rente R, die Summe der letzteren mit der um die Prämie vermehrten Rente $P + R$. Die Differenz der beiden Produkte gibt den

Reservefonds für sämtliche lebenden Ehepaare. Für die lebenden Witwen ist die Reserve

$$V = R \cdot a_w,$$

d. h. man schreibe für jede Witwe die ihrem Alter entsprechende Renteneinheit a_w auf, summiere und multipliziere die Summe mit der Rente R.

Oft besteht noch die Bestimmung, dass allfällig vorhandene Kinder nach dem Tode der Frau oder Witwe die nämliche Pension wie diese geniessen, bis das jüngste 14 bis 18 Jahre alt ist. Bei der Berechnung der Prämien oder Renten kann man von der Berücksichtigung dieses Umstandes Umgang nehmen, wenn der Aufschlag auf jener oder der Abzug an dieser angemessen gewählt wird oder wenn die Kasse bereits ein Vermögen hat, das den Reservefonds beträchtlich übersteigt. Dagegen geben solche Kinder einen wesentlichen Posten in der Reserve, indem ihre Sterblichkeit im allgemeinen, von den ersten Lebensjahren abgesehen, gering ist. Aus diesem Grund nimmt man an, dass die Rentenzahlungen an sie *gewiss* erfolgen, und benutzt hiezu Formel (5) des zweiten Kapitels:

$$V = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1},$$

worin n die Anzahl der Zahlungen bedeutet, welche an das jüngste Kind der Familie noch geleistet werden müssen. Man stellt sich hierüber leicht eine Tabelle auf. Für unser Beispiel wollen wir annehmen, dass die Kinder die Rente bis zum abgelaufenen 16. Altersjahr geniessen. Das Schema der Reserverechnung gestaltet sich so:

	Nummer bzw. Name	Alter des Mannes v	Alter der Frau w	Barwerte a_w	Barwerte $1+a_w$	Barwerte $1+a_{vw}$	Reserve Fr.
Ehen	A	53(55)	46(45)	—	14,857	10,321	
	B	41(40)	49(50)	—	13,470	11,724	
				—	28,327	22,045	301,07
Witwen	C	—	35	16,144	—	—	
	D	—	62	8,780	—	—	
				24,924	—	—	2943,77
Kinder	E	7	—	—	—	—	878,17
						Summe:	4123,01

wobei $R = 118{,}11 \quad P = 20{,}00$ und

$$301{,}07 = 118{,}11 \cdot 28{,}327 - 138{,}11 \cdot 22{,}045$$

$$2943{,}77 = 118{,}11 \cdot 24{,}924$$

$$878{,}17 = 118{,}11 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}04^9}}{0{,}04} = 118{,}11 \cdot 7{,}4353.$$

Fünfte Aufgabe. Ein Ehepaar will bis zum Tode des zuletztsterbenden Ehegatten eine Rente geniessen; man soll die einmalige Prämie bestimmen.

Auflösung. Die Rente sei R; sie wird bezahlt 1. an das Ehepaar, solange beide Gatten leben, 2. an die Witwe, solange sie lebt, 3. an den Witwer, solange er lebt. Ihr Barwert setzt sich demnach zusammen aus den Barwerten einer Eherente, einer Witwen- und einer Witwerrente und ist nach (41), (44) und (44 a) gleich

$$R \cdot a_{xy} + R \cdot (a_y - a_{xy}) + R \cdot (a_x - a_{xy}) = R \cdot (a_x + a_y - a_{xy}).$$

Ebenso gross muss die einmalige Prämie sein, also

$$W = R \cdot (a_x + a_y - a_{xy}). \tag{54}$$

Die Reserve wird

$$V = R \cdot (a_v + a_w - a_{v:w}). \tag{55}$$

Beispiel. Welche Rente bis zum Aussterben geniesst ein Paar von 50 und 45 Jahren gegen eine einmalige Einlage von Fr. 10 000 bei 4 % Zinsen?

$$10\,000 = R\,(a_{50} + a_{45} - a_{50:45})\,,\; R = \text{Fr. } 622{,}43,$$

d. h. 6,22 % des Kapitals.

Inhaltsverzeichnis:

Tabelle I.

Mortalitätstafel der 17 englischen Gesellschaften.

Altersjahre x	Zahl der Lebenden l_x	Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Einjährige Lebenswahrscheinlichkeit p_x	Mittlere zukünftige Lebensdauer $\mathring{e}_x$
10	100000	0,006760	0,99324	48,36
11	99324	006786	99321	47,68
12	98650	006812	99319	47,01
13	97978	006848	99315	46,33
14	97307	006896	99310	45,64
15	96636	006943	99306	44,96
16	95965	007003	99300	44,27
17	95293	007063	99294	43,58
18	94620	007134	99287	42,88
19	93945	007206	99279	42,19
20	93268	007291	99271	41,49
21	92588	007377	99262	40,79
22	91905	007464	99254	40,09
23	91219	007564	99244	39,39
24	90529	007666	99233	38,68
25	89835	007770	99223	37,98
26	89137	007887	99211	37,27
27	88434	008006	99199	36,56
28	87726	008139	99186	35,86
29	87012	008275	99173	35,15
30	86292	008425	99158	34,43
31	85565	008578	99142	33,72
32	84831	008747	99125	33,01
33	84089	008919	99108	32,30
34	83339	009096	99090	31,58
35	82581	009288	99071	30,87
36	81814	009485	99052	30,15
37	81038	009687	99031	29,44
38	80253	009906	99009	28,72
39	79458	010131	98987	28,00
40	78653	010362	98964	27,28

Altersjahre x	Zahl der Lebenden l_x	Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Einjährige Lebenswahrscheinlichkeit p_x	Mittlere zukünftige Lebensdauer $\mathring{e}_x$
41	77838	0,010612	0,98939	26,56
42	77012	010894	98911	25,84
43	76173	011251	98875	25,12
44	75316	011697	98830	24,40
45	74435	012212	98779	23,69
46	73526	012839	98716	22,97
47	72582	013516	98648	22,27
48	71601	014260	98574	21,56
49	70580	015061	98494	20,87
50	69517	015939	98406	20,18
51	68409	016898	98310	19,50
52	67253	017947	98205	18,82
53	66046	019093	98091	18,16
54	64785	020313	97969	17,50
55	63469	021664	97834	16,86
56	62094	023126	97687	16,22
57	60658	024679	97532	15,59
58	59161	026386	97361	14,97
59	57600	028246	97175	14,37
60	55973	030336	96966	13,77
61	54275	032612	96739	13,18
62	52505	035120	96488	12,61
63	50661	037840	96216	12,05
64	48744	040826	95917	11,51
65	46754	044082	95592	10,97
66	44693	047614	95239	10,46
67	42565	051474	94853	9,96
68	40374	055630	94437	9,47
69	38128	060087	93991	9,00
70	35837	064933	93507	8,54

Altersjahre x	Zahl der Lebenden l_x	Einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Einjährige Lebenswahrscheinlichkeit p_x	Mittlere zukünftige Lebensdauer $\mathring{e}_x$
71	33510	0,070158	0,92984	8,10
72	31159	075805	92420	7,67
73	28797	081883	91812	7,26
74	26439	088468	91153	6,86
75	24100	095560	90444	6,48
76	21797	103179	89682	6,11
77	19548	111469	88853	5,76
78	17369	120444	87956	5,42
79	15277	130065	86994	5,09
80	13290	140406	85959	4,78
81	11424	151436	84856	4,48
82	9694	163194	83681	4,18
83	8112	175912	82409	3,90
84	6685	189679	81032	3,63
85	5417	205095	79490	3,36
86	4306	222480	77752	3,10
87	3348	242234	75777	2,84
88	2537	265274	73473	2,59
89	1864	292382	70762	2,35
90	1319	323730	67627	2,11
91	892	360987	63901	1,89
92	570	405263	59474	1,67
93	339	457227	54277	1,47
94	184	516304	48370	1,28
95	89	584270	41573	1,12
96	37	648649	35135	0,99
97	13	692308	30769	0,89
98	4	750000	25000	0,75
99	1	1,0000	00000	0,50
100	0	—	—	—

Tabelle II. *Zinseszinsen.*

Jahre n	1 Fr. mit Zinseszins r^n		Barwert von 1 Fr. $\frac{1}{r^n} = v^n$	
	zu 3,5 %	zu 4 %	zu 3,5 %	zu 4 %
1	1,0350	1,0400	0,96618	0,96154
2	1,0712	1,0816	0,93351	0,92456
3	1,1087	1,1249	0,90194	0,88900
4	1,1475	1,1699	0,87144	0,85480
5	1,1877	1,2167	0,84197	0,82193
6	1,2293	1,2653	0,81350	0,79031
7	1,2723	1,3159	0,78599	0,75992
8	1,3168	1,3686	0,75941	0,73069
9	1,3629	1,4233	0,73373	0,70259
10	1,4106	1,4802	0,70892	0,67556
11	1,4600	1,5395	0,68495	0,64958
12	1,5111	1,6010	0,66178	0,62460
13	1,5640	1,6651	0,63940	0,60057
14	1,6187	1,7317	0,61778	0,57748
15	1,6753	1,8009	0,59689	0,55526
16	1,7340	1,8730	0,57671	0,53391
17	1,7947	1,9479	0,55720	0,51337
18	1,8575	2,0258	0,53836	0,49363
19	1,9225	2,1068	0,52016	0,47464
20	1,9898	2,1911	0,50257	0,45639
21	2,0594	2,2788	0,48557	0,43883
22	2,1315	2,3699	0,46915	0,42196
23	2,2061	2,4647	0,45329	0,40573
24	2,2833	2,5633	0,43796	0,39012
25	2,3632	2,6658	0,42315	0,37512
26	2,4460	2,7725	0,40884	0,36069
27	2,5316	2,8834	0,39501	0,34682
28	2,6202	2,9987	0,38165	0,33348
29	2,7119	3,1187	0,36875	0,32065
30	2,8068	3,2434	0,35628	0,30832
31	2,9050	3,3731	0,34423	0,29646
32	3,0067	3,5081	0,33259	0,28506
33	3,1119	3,6484	0,32134	0,27409
34	3,2209	3,7943	0,31048	0,26355
35	3,3336	3,9461	0,29998	0,25342

Jahre n	1 Fr. mit Zinseszins r^n		Barwert von 1 Fr. $\frac{1}{r^n} = v^n$	
	zu 3,5 %	zu 4 %	zu 3,5 %	zu 4 %
36	3,4503	4,1039	0,28983	0,24367
37	3,5710	4,2681	0,28003	0,23430
38	3,6960	4,4388	0,27056	0,22529
39	3,8254	4,6164	0,26141	0,21662
40	3,9593	4,8010	0,25257	0,20829
41	4,0978	4,9931	0,24403	0,20028
42	4,2413	5,1928	0,23578	0,19257
43	4,3897	5,4005	0,22781	0,18517
44	4,5433	5,6165	0,22010	0,17805
45	4,7024	5,8412	0,21266	0,17120
46	4,8669	6,0748	0,20547	0,16461
47	5,0373	6,3178	0,19852	0,15828
48	5,2136	6,5705	0,19181	0,15219
49	5,3961	6,8333	0,18532	0,14634
50	5,5849	7,1067	0,17905	0,14071
51	5,7804	7,3910	0,17300	0,13530
52	5,9827	7,6866	0,16715	0,13010
53	6,1921	7,9941	0,16150	0,12509
54	6,4088	8,3138	0,15603	0,12028
55	6,6331	8,6464	0,15076	0,11566
56	6,8653	8,9922	0,14566	0,11121
57	7,1056	9,3519	0,14073	0,10693
58	7,3543	9,7260	0,13598	0,10282
59	7,6117	10,1150	0,13138	0,09886
60	7,8781	10,5196	0,12693	0,09506
61	8,1538	10,9404	0,12264	0,09140
62	8,4392	11,3780	0,11849	0,08789
63	8,7346	11,8332	0,11449	0,08451
64	9,0403	12,3065	0,11062	0,08126
65	9,3567	12,7987	0,10688	0,07813
66	9,6842	13,3107	0,10326	0,07513
67	10,0231	13,8431	0,09977	0,07224
68	10,3739	14,3968	0,09640	0,06946
69	10,7370	14,9727	0,09314	0,06679
70	11,1128	15,5716	0,08999	0,06422

Jahre n	1 Fr. mit Zinseszins r^n		Barwert von 1 Fr. $\frac{1}{r^n} = v^n$	
	zu 3,5 %	zu 4 %	zu 3,5 %	zu 4 %
71	11,5018	16,1945	0,08694	0,06175
72	11,9043	16,8423	0,08400	0,05937
73	12,3210	17,5160	0,08116	0,05709
74	12,7522	18,2166	0,07842	0,05490
75	13,1986	18,9453	0,07577	0,05278
76	13,6605	19,7031	0,07320	0,05075
77	14,1386	20,4912	0,07073	0,04880
78	14,6335	21,3108	0,06834	0,04692
79	15,1456	22,1633	0,06603	0,04512
80	15,6757	23,0498	0,06379	0,04338
81	16,2244	23,9718	0,06164	0,04172
82	16,7922	24,9307	0,05955	0,04011
83	17,3800	25,9279	0,05754	0,03857
84	17,9883	26,9650	0,05559	0,03709
85	18,6179	28,0436	0,05371	0,03566
86	19,2695	29,1653	0,05190	0,03429
87	19,9439	30,3320	0,05014	0,03297
88	20,6420	31,5452	0,04844	0,03170
89	21,3644	32,8071	0,04681	0,03048
90	22,1122	34,1193	0,04522	0,02931
91	22,8861	35,4841	0,04369	0,02818
92	23,6871	36,9035	0,04222	0,02710
93	24,5162	38,3796	0,04079	0,02606
94	25,3742	39,9148	0,03941	0,02505
95	26,2623	41,5114	0,03808	0,02409
96	27,1815	43,1718	0,03679	0,02316
97	28,1329	44,8987	0,03555	0,02227
98	29,1175	46,6947	0,03434	0,02142
99	30,1366	48,5625	0,03318	0,02059
100	31,1914	50,5049	0,03206	0,01980

Tabelle III. *Versicherungen auf eine Person.*

Altersjahre x	Diskontierte Zahl der Lebenden D_x zu 3,5 %	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden N_x zu 3,5 %	Barwert der Rente 1.— a_x zu 3,5 %	zu 4 %
10	70892	1577588	21,253	19,454
11	68032	1506696	21,147	19,369
12	65285	1438664	21,036	19,282
13	62648	1373379	20,922	19,191
14	60114	1310731	20,804	19,096
15	57681	1250617	20,682	18,998
16	55344	1192936	20,555	18,896
17	53098	1137592	20,424	18,790
18	50940	1084494	20,290	18,681
19	48866	1033554	20,151	18,567
20	46873	984688	20,007	18,451
21	44958	937815	19,860	18,329
22	43117	892857	19,708	18,204
23	41348	849740	19,551	18,075
24	39648	808392	19,389	17,941
25	38013	768744	19,223	17,803
26	36443	730731	19,052	17,660
27	34933	694288	18,875	17,512
28	33481	659355	18,693	17,360
29	32086	625874	18,506	17,202
30	30744	593788	18,314	17,040
31	29454	563044	18,116	16,872
32	28214	533590	17,912	16,698
33	27021	505376	17,703	16,520
34	25875	478355	17,487	16,335
35	24772	452480	17,266	16,144
36	23712	427708	17,037	15,948
37	22693	403996	16,802	15,744
38	21713	381303	16,561	15,534
39	20771	359590	16,312	15,317
40	19866	338819	16,055	15,093

Altersjahre x	Diskontierte Zahl der Lebenden D_x zu 3,5 %	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden N_x zu 3,5 %	Barwert der Rente 1. — a_x zu 3,5 %	Barwert der Rente 1. — a_x zu 4 %
41	18995	318953	15,791	14,861
42	18158	299958	15,519	14,621
43	17353	281800	15,240	14,374
44	16577	264447	14,952	14,119
45	15829	247870	14,658	13,857
46	15107	232041	14,360	13,590
47	14409	216934	14,055	13,317
48	13734	202525	13,747	13,039
49	13080	188791	13,434	12,757
50	12447	175711	13,116	12,470
51	11835	163264	12,795	12,179
52	11241	151429	12,471	11,884
53	10666	140188	12,143	11,585
54	10109	129522	11,813	11,283
55	9568	119413	11,480	10,978
56	9044,6	109845	11,145	10,670
57	8536,7	100800	10,808	10,359
58	8044,4	92263	10,469	10,046
59	7567,3	84219	10,129	9,731
60	7104,9	76652	9,788	9,415
61	6656,4	69547	9,448	9,098
62	6221,6	62890	9,108	8,780
63	5800,0	56669	8,770	8,464
64	5391,9	50869	8,434	8,149
65	4996,8	45477	8,101	7,835
66	4615,0	40480	7,771	7,525
67	4246,7	35865	7,445	7,217
68	3891,9	31618	7,124	6,913
69	3551,1	27726	6,808	6,613
70	3224,8	24175	6,497	6,317

Altersjahre x	Diskontierte Zahl der Lebenden D_x zu 3,5 %	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden N_x zu 3,5 %	Barwert der Rente 1.— a_x zu 3,5 %	zu 4 %
71	2913,5	20950	6,191	6,026
72	2617,4	18037	5,891	5,740
73	2337,2	15420	5,597	5,459
74	2073,3	13082	5,310	5,184
75	1826,0	11009	5,029	4,915
76	1595,6	9183,1	4,755	4,651
77	1382,6	7587,5	4,488	4,394
78	1186,9	6204,9	4,228	4,143
79	1008,7	5018,0	3,975	3,899
80	847,8	4009,3	3,729	3,661
81	704,1	3161,5	3,490	3,429
82	577,3	2457,4	3,256	3,203
83	466,7	1880,1	3,028	2,980
84	371,6	1413,4	2,803	2,761
85	291,0	1041,8	2,580	2,544
86	223,5	750,8	2,359	2,328
87	167,9	527,3	2,140	2,114
88	122,9	359,4	1,923	1,901
89	87,2	236,5	1,709	1,691
90	59,7	149,3	1,500	1,485
91	39,0	89,6	1,296	1,284
92	24,1	50,6	1,100	1,090
93	13,8	26,5	0,914	0,906
94	7,3	12,7	0,742	0,737
95	3,4	5,4	0,588	0,584
96	1,4	2,0	0,465	0,462
97	0,5	0,6	0,369	0,367
98	0,1	0,1	0,242	0,240
99	0,0	0,0	0,000	0,000
100	0,0	0,0	—	—

Tabelle IV. *Versicherungen auf zwei Personen.*

Alter der älteren x	Alter der jüngeren y	Barwert der Eherente 1.— $a_{xy} = a_{yx}$ zu 3,5 %	zu 4 %
10	10	18,179	16,832
15	10	17,874	16,578
	15	17,602	16,353
20	10	17,472	16,243
	15	17,239	16,048
	20	16,919	15,778
25	10	16,960	15,811
	15	16,767	15,649
	20	16,495	15,417
	25	16,125	15,100
30	10	16,321	15,270
	15	16,166	15,134
	20	15,943	14,944
	25	15,634	14,675
	30	15,209	14,305
35	10	15,544	14,600
	15	15,419	14,491
	20	15,242	14,333
	25	14,991	14,118
	30	14,641	13,808
	35	14,157	13,381
40	10	14,598	13,772
	15	14,503	13,688
	20	14,365	13,565
	25	14,170	13,391
	30	13,892	13,148
	35	13,498	12,795
	40	12,945	12,299
45	15	13,387	12,695
	20	13,285	12 601
	25	13,137	12,470

Alter der älteren x	Alter der jüngeren y	Barwert der Eherente 1.— $a_{xy} = a_{yx}$	
		zu 3,5 %	zu 4 %
	30	12,927	12,281
	35	12,623	12,009
	40	12,180	11,607
	45	11,544	11,027
50	20	12,030	11,469
	25	11,925	11,371
	30	11,771	11,233
	35	11,548	11,030
	40	11,212	10,724
	45	10,708	10,261
	50	10,022	9,627
55	25	10,576	10,136
	30	10,470	10,038
	35	10,312	9,894
	40	10,071	9,671
	45	9,694	9,321
	50	9,160	8,825
	55	8,464	8,174
60	25	9,129	8,795
	30	9,057	8,728
	35	8,952	8,630
	40	8,788	8,477
	45	8,521	8,227
	50	8,129	7,860
	55	7,601	7,362
	60	6,919	6,717
65	30	7,594	7,354
	35	7,527	7,291
	40	7,421	7,192
	45	7,243	7,024
	50	6,973	6,768
	55	6,596	6,410
	60	6,091	5,929
	65	5,450	5,317

Alter der älteren x	Alter der jüngeren y	Barwert der Eherente 1.— $a_{xy} = a_{yx}$	
		zu 3,5 %	zu 4 %
70	40	6,056	5,896
	45	5,943	5,788
	50	5,767	5,620
	55	5,516	5,380
	60	5,166	5,045
	65	4,702	4,599
	70	4,136	4,054
75	45	4,691	4,588
	50	4,583	4,485
	55	4,426	4,333
	60	4,201	4,116
	65	3,890	3,815
	70	3,492	3,430
	75	3,016	2,967
80	50	3,474	3,413
	55	3,383	3,325
	60	3,250	3,195
	65	3,058	3,009
	70	2,802	2,759
	75	2,480	2,445
	80	2,096	2,069
85	55	2,403	2,370
	60	2,333	2,302
	65	2,229	2,201
	70	2,085	2,059
	75	1,894	1,871
	80	1,652	1,633
	85	1,353	1,339
90	65	1,358	1,345
	70	1,295	1,283
	75	1,209	1,197
	80	1,092	1,082
	85	0,938	0,930
	90	0,697	0,692