

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 26 (1931)

**Artikel:** Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und  
Hinterlassenenversicherung

**Autor:** Zwinggi, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-967420>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und Hinterlassenenversicherung.

Von Dr. E. Zwinggi, Bern.

---

### Einleitung.

Zu den vornehmsten Aufgaben, die heute dem Mathematiker überbunden werden können, gehört die Schaffung der Rechnungsgrundlagen in der Sozialversicherung. Der 6. internationale Kongress für Versicherungs-Wissenschaft in Wien 1909 hat sich bereits mit dieser Frage beschäftigt, Versicherungstechniker wie *Kaan*, *Bortkiewicz* haben grundlegende Arbeiten über die Finanzsysteme verfasst. Aber erst den letzten Jahren blieb die praktische Verwirklichung vorbehalten, die theoretischen Ansätze der ersten Untersuchungen mussten den neuern Beobachtungen angepasst werden.

Zu der Einzelversicherung, wo jedes Individuum nach Alter und Beschaffenheit eingereiht wird, steht die Sozialversicherung in bewusstem Gegensatz. Der Eintritt in die Versicherung ist obligatorisch, die Leistungen und Beiträge durch das Gesetz vorgeschrieben.

Dieser Unterschied muss sich auch in den Finanzsystemen auswirken. Die Einzelversicherung mit nach dem Alter abzustufenden Prämien kann nur ein Verfahren kennen, das dem individualistischen Charakter des Unternehmens Rechnung trägt; aus der Gleichsetzung der Barwerte der künftigen Leistungen und Gegenleistungen leitet sich die Prämie ab, und das Finanzsystem ist als Anwartschaftsdeckung durch Prämien

erkannt. Theoretisch liesse sich dieses Vorgehen auch auf die Sozialversicherung übertragen, obschon das ganze Verfahren dann mehr einer «obligatorischen Einzelversicherung» gleichen würde. Das *Alter* hat aufgehört, eine klassifizierende Masszahl zu sein, an seine Stelle tritt die *Zeit*, in der das Individuum steht. An Stelle der *Einzelperson* kommt das *Kollektiv*, die *Individualprämie* wird ersetzt durch den *Durchschnittsbeitrag*, das *Deckungsverfahren* wird abgelöst von den *Umlageverfahren*. Es ist nicht unsere Aufgabe, hier zu entscheiden, welches System zweckmässiger sei, da neben rein versicherungstechnischen Erwägungen die *soziale Einstellung* zum ganzen Problem massgebend ist. Unser Ziel ist vielmehr, die Umlageverfahren auf ihre Auswirkung hin zu prüfen, vor allem aber, die notwendigen mathematischen Grundlagen zu einer solchen Berechnung zu entwickeln.

Die Wahl des Umlageverfahrens hat uns die «Gesamtheit» als Rechnungselement festgelegt. Die zeitliche Entwicklung dieser Gesamtheiten darzustellen aber ist eine Aufgabe, die uns die *Bevölkerungsstatistik* löst. Über den ursprünglichen Zweck der Statistik, einen Zustand zu beschreiben, schreiten wir hinaus in die *Bevölkerungsdynamik*. Wir begnügen uns nicht damit, von Zeit zu Zeit einen Riss durch die Bevölkerung hindurch zu tun, wir verlangen nach einer «Filmdarstellung» des Funktionsverlaufes. In seiner Darstellung «*Intensitätsfunktion und Zivilstand*» <sup>1)</sup> hat *W. Friedli* eindrücklich auf diesen Umstand hingewiesen, wie aus der blossen statischen Alters- und Zivilstandsgliederung der Bevölkerung nach einer Verknüpfung mit dem Bewegungsverlauf zu suchen ist.

Auf diese bevölkerungsdynamischen Grundlagen kann dann der Versicherungstechniker aufbauen. Seine

Aufgabe besteht darin, zwischen den künftigen Leistungen und Gegenleistungen Äquivalenz herzustellen, die mutmasslichen Ausgaben an Renten in die Zukunft rechnerisch zu verfolgen. Er muss also auch wissen, wie sich seine versicherten Bestände künftig entwickeln, kurz, er muss Grösse und Aufbau der Bevölkerung *vorausberechnen*. Nur bei Kenntnis dieser Entwicklung kann er für die Aufbringung der nötigen Mittel sorgen, nur wenn er die Alterszusammensetzung kennt, darf er Bestimmtes über die Höhe der Beiträge aussagen. Erst wenn die Frage der Bevölkerungsvermehrung gelöst ist, können die verschiedenen Finanzsysteme auf ihre Auswirkung hin geprüft und miteinander verglichen werden.

### **I. Die Vermehrungsformel.**

Aus unsern einleitenden Bemerkungen geht die *Notwendigkeit* der Bevölkerungsvorausberechnung hervor, nicht aber die *Möglichkeit*. Für eine Reihe von Jahren können wir, zurückblickend, Grösse und innere Zusammensetzung einer Bevölkerung den statistischen Berichten entnehmen. Wir sind auch imstande, innerhalb der Beobachtungsgrenzen den Wachstumsverlauf durch eine mathematische Formel darzustellen. Das genügt aber noch nicht, um das Wachstum auch für die *Zukunft* festzulegen. Ja, es mag zuerst erscheinen, dass diese Frage überhaupt unlösbar sei. Eines dürfen wir vorwegnehmen: es wird nicht möglich sein, ein «*Gesetz*» des Wachstums zu erstellen, so wie wir z. B. physikalische Gesetze kennen. Wir sind uns gewohnt, von Sterblichkeitsgesetzen, z. B. von einem Makehamschen Gesetze, zu sprechen, und doch haben uns die neuern Sterblichkeitsbeobachtungen gelehrt, dass es kein Gesetz im üblichen Sinne geben kann. In verstärktem Masse muss das Gesagte auch für unser «Wachstumsgesetz» Gültig-



keit haben. Um dieser Erkenntnis auch formal zu genügen, wollen wir den Ausdruck «Vermehrungsgesetz» in «Vermehrungsformel» umändern. Unsere Formel wird den Verlauf so voraussagen, wie wir ihn *heute* als am besten möglich halten. Zu der *Beobachtung* tritt also noch die *Hypothese* hinzu.

Die Beobachtung hat für die meisten Bevölkerungen eine stetsfort *fallende Geburtenziffer* erwiesen. Wurde vor dem Kriege dieser Erscheinung nur temporäre Wirkung zugeschrieben, so haben wir seither erkennen müssen, dass die sinkende Geburtenziffer eine das Wachstum kennzeichnende Grösse ist. Auch kürzere Perioden des Wiederansteigens können den allgemein fallenden Verlauf nicht aufhalten, man ist im Gegenteil berechtigt, anzunehmen, dass auch künftighin eine Abnahme zu konstatieren sei. Dabei wird diese Abnahme nicht gegen null hin erfolgen, sondern sich einem untern Grenzwert nähern \*). Es muss also eine Zeit eintreten, wo die Zahl der jährlichen Geburten und Todesfälle konstant bleibt, die Bevölkerung als Ganzes wird ebenfalls einem festen Grenzwert zustreben.

Dieser feste Grenzwert lässt sich noch anders begründen. Kein Land wird nach unserer Voraussicht die Möglichkeit bieten, eine stetsfort zunehmende Anzahl Bürger zu ernähren. Bei einer bestimmten Grenze sind die Möglichkeiten erschöpft, dazu kommt noch, dass der Lebensstandard durchwegs zugenommen hat und sich kaum mehr der frühern Lage nähern wird. Als Folge davon tritt eine Beschränkung der Kinderzahl ein <sup>2)</sup>, diese wiederum zieht eine fallende Geburtenziffer nach

---

\*) Wir behandeln nur den Fall einer wachsenden Bevölkerung, auf die verwickelten Verhältnisse bei einer abnehmenden treten wir nicht näher ein.

sich. War die Abnahme zuerst nur durch die Beobachtung erhärtet, so lässt sich die künftige Tendenz auch durch Überlegung finden.

Zusammengefasst kann das Ergebnis festgehalten werden, dass die Bevölkerung gegen einen *obern Grenzwert*, mithin gegen einen *Beharrungszustand* hintendiert. Neueste Untersuchungen gehen noch einen Schritt weiter. Die Beobachtung der weiblichen Fruchtbarkeit und die daraus abzuleitende Fortschreibung des Bevölkerungsstandes lassen eine zeitweise *abnehmende* Bevölkerung möglich erscheinen, es erfolgt aber später dennoch eine Stabilisierung auf einen festen Grenzwert hin. — Die Vermehrungsformel muss also dieser Erkenntnis angepasst werden, sie hat die Brücke zu schlagen von der Beobachtung zum Endzustand. Es würde in einer versicherungstechnischen Untersuchung zu weit führen, eingehend auf alle diese Verhältnisse einzutreten, wir begnügen uns mit der kurzen Darstellung einiger wichtiger Formeln.

#### **$\alpha$ ) Die Verhulstsche Formel (Pearl-Reed-Formel) <sup>3)</sup>.**

Die mathematisch vielleicht eleganteste Art der Ableitung geht aus dem Begriff der *Vermehrungsintensität* hervor. Es stelle uns  $B(t)$  die Grösse der Bevölkerung zur Zeit  $t$  dar. Als Intensität der Vermehrung  $\xi(t)$  ist dann definiert

$$\xi(t) = \frac{B'(t)}{B(t)}$$

Die sinkende Geburtenziffer zieht eine abnehmende Intensität der Vermehrung nach sich, wobei die Abnahme als Funktion der jeweiligen Bevölkerungsgrösse angesehen werden kann. Also

$$\xi(t) = \delta - f[B(t)]$$

Im einfachsten Fall können wir die Abnahme direkt proportional  $B(t)$  setzen, mithin

$$\xi(t) = \frac{B'(t)}{B(t)} = \delta - kB(t)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich als Lösung:

$$(1) \quad B(t) = \frac{B(\infty)}{1 + e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}}$$

wobei  $B(\infty)$  die maximale Bevölkerungsgrösse ist, die bei  $t = \infty$  asymptotisch erreicht wird.  $\alpha$  und  $\beta$  sind Konstante, die sich aus dem vorliegenden Zahlenmaterial bestimmen. Die mitgeteilte Vermehrungsformel wurde erstmals abgeleitet durch *Verhulst*. Ihre praktische Verwendung zur Darstellung des Wachstumsverlaufes wurde erwiesen von *Pearl* und *Reed* für *Amerika*, von *Yule* für *England* und von *Krummeich* für *Frankreich*. Für die genannten Länder darf die Übereinstimmung von Beobachtung und Berechnung als sehr gut bezeichnet werden. Versuche, die Verhulstsche Formel auch auf die *Schweiz* und die *Tschechoslowakei* anzuwenden, haben zu keinem Ergebnis geführt. Man darf daher die Gültigkeit der Formel für grosse, sich ungestört entwickelnde Bevölkerungen annehmen, nicht aber für kleinere, wo sich die Störungen besser auswirken können.

#### **b) Die Vermehrungsformel von W. Friedli <sup>4)</sup>.**

Die von *W. Friedli* erstellte Vermehrungsformel für die Schweiz trägt der sinkenden Geburtenziffer Rechnung durch bestimmte Annahmen über den *Vermehrungsfaktor*. Als Vermehrungsfaktor ist nämlich definiert:

$$f(t) = \frac{B(t+1)}{B(t)}$$

Der Annahme einer fallenden Geburtenziffer und der stetigen Erreichung einer obern Grenze tragen wir Rechnung durch den Ansatz:

$$f(0) > f(1) > f(2) > \dots > f(n) = 1$$

Die obere Grenze ist somit nach  $n$  Jahren erreicht. Analytisch ist  $f(t)$  gegeben durch die Funktion

$$\log f(t) = k(n-t) v^t \quad (t < n)$$

wodurch sich ein verlangsamtes Wachstum und asymptotisches Anschmiegen an den Beharrungszustand bei  $t = n$  ergibt. Die Konstanten  $k$ ,  $n$  und  $v$  lassen sich auf Grund bestimmter Annahmen über die maximale Bevölkerung und über die Schnelligkeit der Vermehrung bestimmen.

Von den nun bekannten Vermehrungsfaktoren schliesst man sofort auf  $B(t)$  durch die Beziehung:

$$B(t) = B(0) \prod_0^{t-1} f(t)$$

### c) Eine Vermehrungsformel auf Grund der Fruchtbarkeitsziffern.

In den bisherigen Ableitungen haben wir die Bevölkerung als Ganzes genommen, die Hypothesen bezogen sich auf die Bevölkerung als solche. Man könnte aber ebensogut über den Verlauf der *Geburtenzahlen* in der Zukunft bestimmte Voraussetzungen treffen. Die sinkende Geburtenziffer weist auf eine abnehmende Fruchtbarkeit hin; eine Masszahl, welche die Fruchtbarkeit misst, haben wir in der Fruchtbarkeitsziffer. Als

*Fruchtbarkeitsziffer* definieren wir die Zahl der jährlich lebend geborenen Kinder pro weibliches Element eines bestimmten Alters. (In der Praxis wird die Zahl meist für Altersgruppen für alle oder nur verheiratete Elemente angegeben.) Bei bekannter Alterszusammensetzung kann somit auch die Zahl der jährlich zu erwartenden Geburten berechnet werden, durch Fortsetzung des Verfahrens ist damit auch die Entwicklung der Bevölkerung bekannt.

Angenommen, im Ausgangszeitpunkt  $t = 0$  sei die Bevölkerung statistisch nach Geschlechtern aufgenommen. Es stellen uns

$$\begin{aligned} L_0^{(0)}, L_1^{(0)}, \dots, L_x^{(0)}, \dots, L_\omega^{(0)} \\ L_0^{(0)}, L_1^{(0)}, \dots, L_y^{(0)}, \dots, L_\omega^{(0)} \end{aligned}$$

die Bestände der männlichen und weiblichen Elemente des Alters  $x$  resp.  $y$  im Zeitpunkt  $t = 0$  dar. Nach Ablauf von  $t$  Jahren seien die entsprechenden Bestände durch  $L_x^{(t)}$  und  $L_y^{(t)}$  gekennzeichnet.

Wir bezeichnen nun mit  $f(y)$  die Zahl der jährlichen Knabengeburten, bezogen auf ein  $y$ -jähriges weibliches Element gleich welchen Zivilstandes. Da das Verhältnis der Mädchen- zu den Knabengeburten konstant anzusetzen ist, so sind damit auch die Zahlen  $k(y) f(y)$  der Mädchengeburten gegeben.

Bezeichnen wir die Zahl der Knabengeburten mit  $G^m(t)$ , so ist:

$$G^m(t+1) = \sum_y^{\omega} L_y^{(t)} f(y)$$

und analog die Zahl der Mädchengeburten  $G^w(t)$ :

$$(2) \quad G^w(t+1) = \sum_y^{\omega} L_y^{(t)} k(y) f(y)$$

Um also die Grössen  $G^m(t)$  und  $G^w(t)$  zu berechnen, müssen die  $L_y^{(t)}$  bekannt sein. Nun besteht aber die Relation:

$$(3) \quad L_y^{(t)} = G^w(t - y) \cdot \frac{l_y}{l_0}$$

denn die heute  $y$ -jährigen Frauen sind vor  $y$  Jahren geboren und stunden  $y$  Jahre unter Sterberisiko. Für ein ganz bestimmtes  $t$  lassen sich alle Alter  $y \leq t - 1$  auf diese Gleichung zurückführen. Diejenigen  $L_y^{(t)}$ , wo  $y \geq t$  ist, rühren aus der Eröffnungsgesamtheit her, gemäss der Formel:

$$L_y^{(t)} = L_{y-t}^{(0)} \frac{l_y}{l_{y-t}}$$

Der Bestand der weiblichen Elemente zur Zeit  $t$  nimmt damit die Form an:

$$\sum_0^{\omega} L_y^{(t)} = \sum_t^{\omega} L_{y-t}^{(0)} \cdot \frac{l_y}{l_{y-t}} + \frac{1}{l_0} \sum_0^{t-1} G^w(t - y) l_y$$

und endlich

$$(4) \quad G^w(t + 1) = \sum_t^{\omega} L_{y-t}^{(0)} \cdot \frac{l_y}{l_{y-t}} k(y) f(y) + \frac{1}{l_0} \sum_0^{t-1} G^w(t - y) l_y k(y) f(y)$$

Zur Berechnung der jährlichen Geburtenzahlen  $G^w(t)$  müssen auch die frühern bekannt sein, wir schreiten also von Jahr zu Jahr durch *Rekursion* fort.

Bei der Erfassung des männlichen Bevölkerungsstandes brauchen wir nur die erwachsenen Elemente zu nehmen, die der Versicherungspflicht unterstehen. Der Eintritt geschehe im Alter  $z$ . Es gelten dann ohne weiteres die Beziehungen:

$$B(t) = \sum_x^{\omega} L_x^{(t)}$$

$$L_x^{(t)} = L_{x-t}^{(0)} \cdot \frac{l_x}{l_{x-t}} \text{ für } x \geq t, \quad L_x^{(t)} = G^m(t-x) \frac{l_x}{l_0} \text{ für } x \leq t-1$$

Der ganze Bestand setzt sich zusammen aus den Überlebenden der Eröffnungsgesamtheit und den Überlebenden der inzwischen erfolgten Geburten. Es ergibt sich daher die Darstellung:

$$B(t) = \sum_x^{\omega} L_{x-t}^{(0)} \cdot \frac{l_x}{l_{x-t}} + \frac{1}{l_0} \sum_x^{t-1} G^m(t-x) l_x$$

$$B(t) = \sum_x^{\omega} L_{x-t}^{(0)} \cdot \frac{l_x}{l_{x-t}} + \frac{1}{l_0} \sum_x^{t-1} l_x \sum_y^{\omega} L_y^{(t-x-1)} f(y)$$

Nach Kenntnis der Grössen  $G^w(t)$  aus (4) und nach Einsetzung in (3) sind die  $L_y^{(t)}$  bekannt, damit aber auch die Entwicklung von  $B(t)$ . Diese Berechnungsart erscheint in der Hauptsache als Funktion von  $f(y)$ . Wir passen unsere Formel der fallenden Geburtenziffer an, indem wir  $f(y)$  auch als Funktion der Zeit  $t$  ansetzen  $f(y, t)$ . Damit geht die letzte Beziehung über in:

$$B(t) = \sum_x^{\omega} L_{x-t}^{(0)} \cdot \frac{l_x}{l_{x-t}} + \frac{1}{l_0} \sum_x^{t-1} l_x \sum_y^{\omega} L_y^{(t-x-1)} f(y, t-x-1)$$

Für  $f(y, t)$  können wir eine gegen einen untern Grenzwert stetig fallende Funktion annehmen. Die Autoren *Stránský* und *Bulina* <sup>5)</sup> haben auf dieser Grundlage den Versuch unternommen, die Bevölkerung der *Tschechoslowakei* vorauszuberechnen. Sie haben dabei den mehr generellen Ansatz getan, dass die Zahl der jährlich

lebend geborenen Kinder, bezogen auf Altersgruppen, der Beziehung gehorche:

$$f(t) = f(o) \frac{a + bt}{c + dt}$$

Eine Variante bezog sich ferner auf  $f(t) = \text{konstant}$ .

Eine überaus eingehende Studie über die künftige Bevölkerungsbewegung in *Deutschland* hat das *Statistische Reichsamt* veröffentlicht, wobei die Berechnungen auf den soeben mitgeteilten Überlegungen basieren. Auch die Frage einer abnehmenden Bevölkerung findet darin eingehende Beachtung <sup>6)</sup> <sup>7)</sup>.

Parallel mit dieser Veröffentlichung zeigt *A. J. Lotka* <sup>8)</sup> für die *amerikanische* Bevölkerung eine ebenfalls auf den gleichen Grundsätzen beruhende Vorausberechnung.

Auf das Bild, das uns die angegebenen Arbeiten geben, treten wir im III. Abschnitt näher ein, vorerst sei noch eine prinzipielle Bemerkung über die Vermehrungsformel angefügt. Die Formeln von *Verhulst* und *Friedli* unterscheiden sich in einer Beziehung wesentlich voneinander. In der ersten Formel wird man die Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $B(\infty)$  aus den vorhandenen *Beobachtungsdaten* bestimmen, die angenommene Hypothese hat sich einzig in der *Formelableitung* ausgewirkt. Neben dem Charakter einer Extrapolationsformel kommt ihr also auch das Wesen einer Interpolationsformel zu. Das Urteil von *E. J. Gumbel* <sup>9)</sup> scheint uns aber zu streng zu sein, das nur den Interpolationscharakter anerkennen will. — Die Formel von *Friedli* dagegen ist reine Extrapolationsbeziehung, da an eine Ableitung einer Vermehrungsformel aus den vorhandenen Daten nicht gedacht werden konnte, wollte man die Störungen aus der Kriegszeit, wie beabsichtigt, nach Möglichkeit ausschalten. *K. Gold-*



ziher <sup>23)</sup> hat dieser Berechnungsart eine auf andere Voraussetzungen aufbauende Vermehrungsformel gegenübergestellt. Er schloss die Störungen der frühern Jahre bewusst in seine Berechnungen ein und hat auf Grund der beiden Rahmendaten  $B_0$  (1910) und  $B_1$  (1920) die folgende Wachstumsformel erstellt:

$$B(\tau) = \frac{(1 - \tau) B_0^{k+1} + \tau B_1^{k+1}}{(1 - \tau) B_0^k + \tau B_1^k}$$

$B(\tau)$  strebt mit  $\lim \tau = \infty$  ebenfalls gegen einen festen Grenzwert hin; die einzige Konstante  $k$  bestimmt sich leicht aus dem vorliegenden Zahlenmaterial. — Es ist aber festzuhalten, dass sich die erwartete *Umschichtung der Bevölkerung* auf beiden Wegen übereinstimmend ergibt, wobei die «Überalterung» nach Goldziher gegenüber Friedli noch ausgeprägter erscheint. Ob allerdings eine Extrapolation, die sich auf ein bloss 10-jähriges Intervall stützt, die Verhältnisse auch absolut wiederzugeben vermag, ist eine Frage, auf die wir hier nicht näher eingreten können.

Die folgenden Abschnitte befassen sich in der Hauptsache mit den Zusammenhängen zwischen der Vermehrung und den Finanzsystemen. Die betrachtete Bevölkerung umfasst daher nur noch erwachsene Elemente, die alle einheitlich im Alter  $z$  eintraten (mit Ausnahme der Eröffnungsgesamtheit). Die Zahl der jährlichen Eintritte, die *Erneuerungszahl*, bezeichnen wir mit  $B(t) \varphi(t)$ , um den Anschluss an die bisherigen Arbeiten leichter zu gestalten. Sodann besteht die Beziehung:

$$(5) \quad L_x^{(t)} = B(t - x + z) \varphi(t - x + z) \frac{l_x}{l_z}$$

und daraus:

$$(6) \quad B(t) = \sum_z^{\omega} L_x^{(t)} = \frac{1}{l_z} \sum_z^{\omega} B(t-x+z) \varphi(t-x+z) l_x$$

oder nach Transformation von  $t-x+z$  in  $\tau$  und der Setzung

$$\frac{l_{z+t-\tau}}{l_z} = p_z(t-\tau)$$

die Schlussbeziehung

$$(6 a) \quad B(t) = \sum_{-\omega+x}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Die Beziehung gilt für  $t \geq 0$ .

## II. Die Erneuerung.

Die Berechnung der Unterschiede der einzelnen Finanzsysteme muss auf die Kenntnis der Bevölkerungsumschichtung aufbauen, allein auf Grund der blossen Vermehrungsformel können noch keine bindenden Schlüsse gezogen werden. In erster Linie wird der Altersaufbau massgebend sein, ob eine Zunahme der Belastung erfolgt ist und nach einer Beitragserhöhung verlangt. In der Altersversicherung z. B. braucht die Zunahme des Rentnerbestandes noch keine Erhöhung des Umlagebeitrages nach sich zu ziehen, wenn auch eine äquivalente Vergrösserung des Prämienzahlerbestandes erfolgt ist.

Die Alterszusammensetzung wird nun mit Vorteil gekennzeichnet durch den prozentualen Anteil, den ein ganz bestimmter Jahrgang an der Gesamtheit hat. Diese Masszahl wird als *relative Altersstruktur* bezeichnet und ist analytisch gegeben durch:

$$\frac{L_x^{(t)}}{B(t)}$$

Da sich aber  $L_x^{(t)}$  nach der Formel (5) bestimmt zu:

$$L_x^{(t)} = B(t - x + z) \varphi(t - x + z) \frac{l_x}{l_z}$$

müssen wir somit die Grösse  $B(t) \varphi(t)$ , also die Erneuerungszahl, kennen; dabei ist  $B(t)$  eine im vorhergehenden Abschnitt wohlbestimmte Funktion. Das Problem der Messung der Alterszusammensetzung einer Bevölkerung muss auf das Erneuerungsproblem zurückgeführt werden, um dann über die Struktur hinaus zu den Finanzsystemen selber schreiten zu können.

Aus der gegebenen Vermehrungsformel  $B(t)$  und den bekannten Sterblichkeitsverhältnissen ist also die Erneuerungszahl  $B(t) \varphi(t)$  zu bestimmen. Es kann sich hier nicht darum handeln, die verschiedenen, sich auf die infinitesimale Betrachtungsweise gründenden Methoden zu behandeln, wir beschränken uns auf zwei der Praxis leicht zugängliche Verfahren.

#### a) Die Erneuerungsformel von H. Wyss <sup>10)</sup>.

Greift man aus der Eröffnungsgesamtheit (also zur Zeit  $t = 0$ ) den Jahrgang  $L_x^{(0)}$  heraus, so sterben im folgenden Jahr davon  $L_x^{(0)} q_x$ . Aus dem ganzen Bestand somit:

$$\sum_z^{\omega} L_x^{(0)} q_x$$

Diese ausscheidenden Elemente müssen ersetzt werden. Dazu kommt noch die jährliche Bestandesvermehrung; innert Jahresfrist hat die Bevölkerung um  $B(1) - B(0) = \Delta B(0)$  zugenommen. Die Erneuerungszahl im Zeitpunkt 1 ist daher:

$$B(1) \varphi(1) = \Delta B(0) + \sum_z^{\omega} L_x^{(0)} q_x$$

Diese Formel kann sofort auf jeden beliebigen Zeitpunkt  $t$  ausgedehnt werden:

$$B(t+1) \varphi(t+1) = \Delta B(t) + \sum_z^{\omega} L_x^{(t)} q_x$$

Die Beziehung ist dem Wesen nach eine Rekursionsformel, da zu allen Zeiten  $t$  die Grösse  $L_x^{(t)}$  bekannt sein muss. Sie lässt sich aber noch so umformen, dass man nicht von den  $L_x^{(t)}$  ausgeht, sondern von den früheren Erneuerungszahlen. Im Zeitpunkt  $t$  weist unsere Gesamtheit Elemente auf, die dem Eröffnungsbestand angehörten, und solche, die erst nachher eintraten. Es empfiehlt sich daher, die beiden Bestände zu trennen. Der Bestand, der die nachträglichen Eintritte umfasst, kann die Alter von  $z$  bis höchstens  $z+t-1$  aufweisen. Greifen wir speziell den Jahrgang  $L_{z+t-\tau}^{(t)}$  heraus, so darf  $\tau$  von 1 bis  $t$  variieren. Von diesen Elementen scheiden im nächsten Jahre aus  $L_{z+t-\tau}^{(t)} q_{z+t-\tau}$  und vom ganzen Teilbestand

$$\sum_{\tau=1}^t L_{z+t-\tau}^{(t)} q_{z+t-\tau}$$

Der Summand lässt sich aber umschreiben zu

$$L_{z+t-\tau}^{(t)} \frac{l_z}{l_{z+t-\tau}} \frac{l_{z+t-\tau} - l_{z+t-\tau+1}}{l_z}$$

Der erste Faktor hat aber nach Formel (5) die Bedeutung von  $B(\tau) \varphi(\tau)$ . Damit lässt sich die Zahl der aus diesem Teilbestand Ausscheidenden schreiben als:

$$\frac{1}{l_z} \sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

Sodann bedenken wir, dass der anfängliche Bestand nach Ablauf der  $t$  Jahre noch die Alter  $z + t$  bis  $\omega$  umfassen kann. Von diesem Teilbestand scheiden demnach aus:

$$\sum_x^{\omega} L_x^{(0)} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} q_{x+t}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Erneuerungszahl zu:

$$(7) \quad B(t+1) \varphi(t+1) = \Delta B(t) + \sum_x^{\omega} L_x^{(0)} \frac{l_{x+t}}{l_x} q_{x+t} + \frac{1}{l_z} \sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

Diese Beziehung wurde auf etwas anderer Grundlage durch *H. Wyss* <sup>10)</sup> abgeleitet. — Die beiden Summen lassen sich rein formell noch vereinigen; diese Zusammenfassung dient ferner zu einer spätern einfachen Darstellung in den Finanzsystemen. Man kann sich nämlich denken, dass die  $x$ -Jährigen zur Zeit 0 vor  $x - z$  Jahren als  $z$ -jährig eintraten. Also

$$L_x^{(0)} = B(-x + z) \varphi(-x + z) \frac{l_x}{l_z}$$

Wir setzen oben in der ersten Summe ein, transformieren  $-x + z$  in  $\tau$  und passen die Summationsgrenzen der neuen Variablen an:

$$(8) \quad B(t+1) \varphi(t+1) = \Delta B(t) + \frac{1}{l} \sum_{\tau=-\omega+z}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

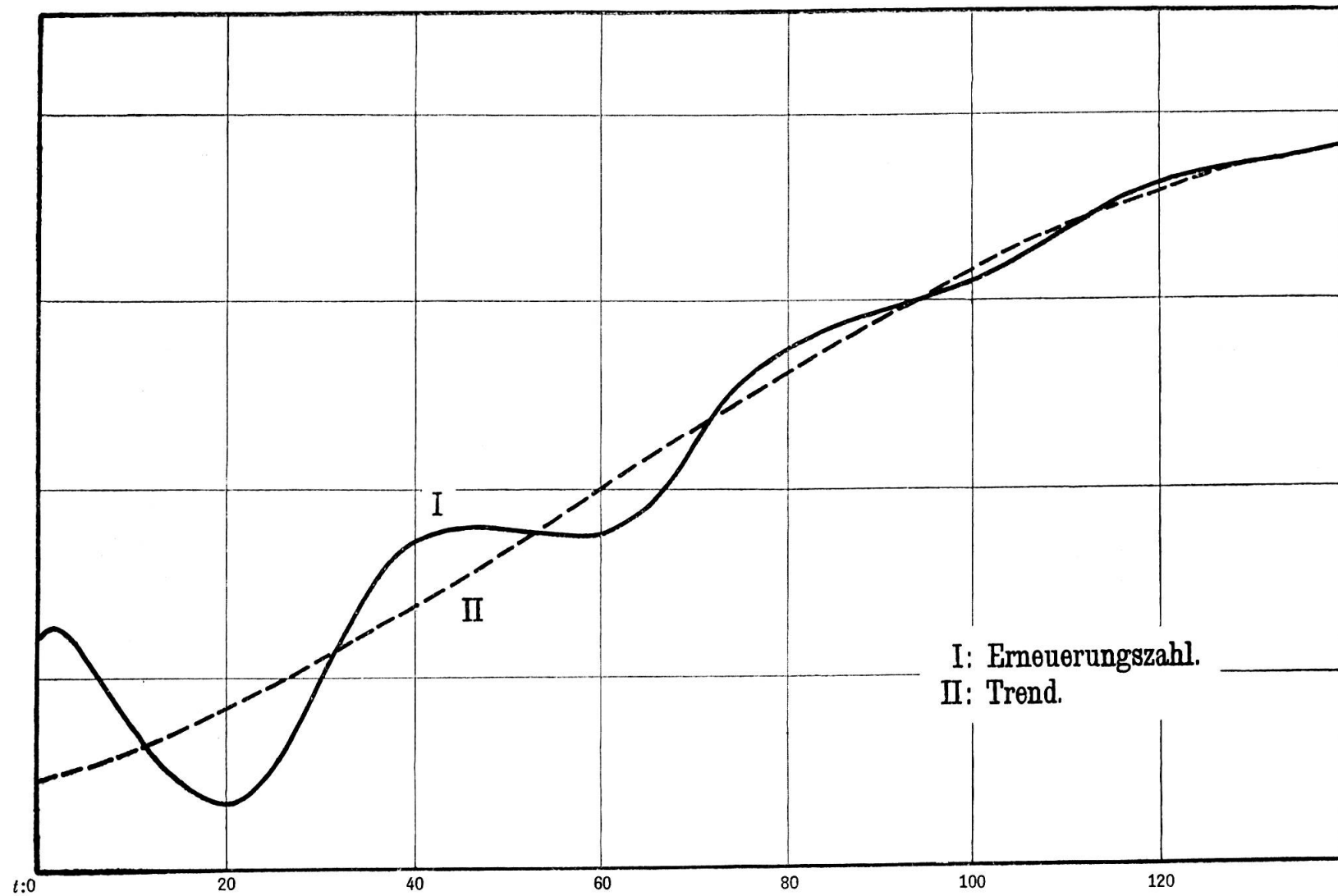
Auch diese Beziehung ist eine Rekursionsformel, da zur Berechnung von  $B(t+1) \varphi(t+1)$  alle Erneuerungszahlen bis  $B(t) \varphi(t)$  bekannt sein müssen.

### **b) Der Verlauf der Erneuerungszahl.**

Die abgeleiteten Formeln gestatten uns, von Jahr zu Jahr fortschreitend die jährlichen Eintritte vorzuberechnen. Nicht erkennen wir aber den *Verlauf* dieser Erneuerungszahl. Es ist ja zu vermuten, dass sich die Erneuerung grundsätzlich so fortsetzt wie der Bestand auch. Die künftige Bestandesentwicklung werden wir «glatt», d. h. ohne sekundäre Schwingungen, voraussetzen müssen, da sich solche Abweichungen der mathematischen Erfassung entziehen. (Dabei muss naturgemäss die Wachstumsformel auf Grund der Fruchtbarkeit ausgeschlossen werden, da dort die Erneuerung zum vornherein gegeben ist.) Die Erneuerungszahl weist aber keinen glatten Verlauf auf, einem *Trend*, der mit dem Gesamtbestand gleichen Verlauf hat, überlagert sich eine *gedämpfte Wellenbewegung*. In unserer 1. Darstellung zeigen wir die zeitliche Entwicklung der Erneuerungszahl, wenn die Gesamtheit einer Verhulsttschen Vermehrungsformel gehorcht.

Es würde zu weit führen, hier auf den mathematischen Beweis einzutreten <sup>11)</sup>, wir wollen vielmehr auf einige Folgen dieser Eigenschaft hinweisen. Die Höhe der ausbezahlten Renten, die Zahl der neuentstehenden und vorhandenen Witwen ist Funktion des Neuzugangs. Eine Schwingung in der Zahl der Neueintritte muss sich nach Ablauf der Beitragspflicht auch in einer relativen Zunahme (oder Abnahme) der rentengenössigen Mitglieder auswirken. Ebenso wird die daraus folgende stärkere Besetzung der höhern Altersklassen die Zahl der neuentstehenden Witwen beeinflussen. Die Schwin-

Darstellung 1.



Verlauf der Erneuerungszahl bei einer Verhulstschen Vermehrungsformel.

gung pflanzt sich auf alle Vorgänge über, ihre Maxima aber treten nicht zu gleicher Zeit auf, da sie von der Art der betrachteten Vorgänge abhängig sind <sup>12)</sup>. Die *Stärke* der Schwingung hängt ab von der Alterszusammensetzung der Bevölkerung im Ausgangszeitpunkt  $t = 0$ . Für gewisse Zwecke aber wäre es angenehm, bloss den *Trend* zu kennen, mithin Unabhängigkeit von der Anfangsstruktur herzustellen und nur den *allgemeinen Verlauf* zu untersuchen. In diesem Fall kann wie folgt vorgegangen werden.

**c) Die Erneuerungsformel von A. J. Lotka <sup>13)</sup>.**

Wir setzen voraus,  $B(t)$  lasse sich wie folgt darstellen:

$$B(t) = \sum_z^{\omega} L_x^{(t)} = \frac{1}{l_z} \sum_z^{\omega} B(t-x+z) \varphi(t-x+z) l_x = \sum_i^n K_i \cdot e^{\delta_i t}$$

wo sich die Konstanten  $K_i$  und  $\delta_i$  aus dem vorliegenden Material zu bestimmen haben. Für die Funktion  $B(t) \varphi(t)$  nehmen wir dann an:

$$B(t) \varphi(t) = \sum_i^n n_i \cdot e^{\delta_i t}$$

wo die  $n_i$  noch zu berechnen sind. Oben eingesetzt, erhalten wir

$$K_i = n_i \sum_z^{\omega} e^{-\delta_i(x-z)} \cdot \frac{l_x}{l_z}$$

Abkürzend bezeichnen wir die Summe mit  $b_i$ . Damit nimmt  $B(t) \varphi(t)$  die Form an:



$$B(t) \varphi(t) = \sum_1^n \frac{K_i}{b_i} e^{\delta_i t}$$

Im Gegensatz zu den frühern Beziehungen ist die neue keine Rekursionsformel, sie gestattet die Berechnung des Trend in jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$ . — Wir wollen noch zeigen, dass sich die Formel sehr leicht auf die *Verhulstsche* Beziehung anwenden lässt. Mit den Setzungen  $1 : \alpha = \delta$  und  $\beta = 0$  folgt aus (1):

$$B(t) = \frac{B(\infty)}{1 + e^{-\delta t}}$$

Der Bruch kann aber umgeformt werden zu:

$$(9) \quad B(t) = B(\infty) \sum_1^{\infty} (-1)^{i+1} e^{i\delta t} \quad (t < 0)$$

$$(10) \quad B(t) = B(\infty) \sum_0^{\infty} (-1)^i e^{-i\delta t} \quad (t > 0)$$

Die Weiterführung wird zuerst mit (9) vorgenommen. Es entsprechen einander:

$$\delta_i = i\delta, \quad K_i = (-1)^{i+1} B(\infty)$$

$$b'_i = \frac{1}{l_z} \sum_z^{\omega} e^{-i\delta(x-z)} l_x$$

Damit wird:

$$(\alpha) \quad B(t) \varphi(t) = B(\infty) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} e^{i\delta t}}{b'_i}$$

Für die andere Reihenentwicklung erhält man in ganz gleicher Weise:

$$(\beta) \quad B(t) \varphi(t) = B(\infty) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^i e^{-i\delta t}}{b_i}$$

wobei diesmal

$$b_i = \frac{1}{l_z} \sum_z^{\omega} e^{i\delta(x-z)l_x}$$

Die beiden Formeln können noch vereinigt werden. Multiplizieren wir nämlich mit der Identität:

$$1 = \frac{1}{1 + e^{-\delta(t+\tau)}} + \frac{1}{1 + e^{\delta(t+\tau)}}$$

und trennen bei der Summenbildung über den zweiten Ausdruck das erste Glied ab, formen es etwas um und schreiben den ganzen übrigen Rest als  $R_1$ , so wird:

$$B(t) \varphi(t) = \frac{B(\infty) e^{-\delta\tau}}{b'_1} \frac{1}{1 + e^{-\delta(t+\tau)}} + R_1$$

Genau gleich gehen wir bei  $(\beta)$  vor, indem das erste Glied abgetrennt und der Rest mit  $R_2$  bezeichnet wird:

$$B(t) \varphi(t) = \frac{B(\infty)}{b_0} \frac{1}{1 + e^{-\delta(t+\tau)}} + R_2$$

Damit nun aber die ersten Teile in den beiden letzten Formeln übereinstimmen, braucht für die Unbestimmte  $\tau$  gesetzt zu werden:

$$\tau = \frac{1}{\delta} (\ln b_0 - \ln b'_1)$$

denn diese Gleichung leitet sich ab aus

$$\frac{B(\infty)}{b_0} = \frac{B(\infty) e^{-\delta r}}{b'_1}$$

Damit ist die Erneuerungszahl endgültig bestimmt zu

$$B(t) \varphi(t) = \frac{B(\infty) : b_0}{1 + e^{-\delta(t+r)}} + R$$

wo  $R$  einmal  $R_1$  (bei  $t < 0$ ) und das andere Mal  $R_2$  (bei  $t > 0$ ) bedeutet. Dabei ist  $R$  gegen den ersten Teil von untergeordneter Bedeutung.

### III. Die relative Alterszusammensetzung.

Die Kenntnis der Bestandesentwicklung und die bestimmte Erneuerung setzen uns nun instand, die relative Alterszusammensetzung einer Bevölkerung vor auszuberechnen. Unsere Formeln haben freilich den Zivilstand noch nicht berücksichtigt, die Ergebnisse gestatten dennoch, eine Reihe wichtiger Schlüsse zu ziehen.

In einer ersten Tabelle stellen wir die relative Alterszusammensetzung für einige Bevölkerungen zusammen. Wir geben noch kurz die Voraussetzungen zu diesen Berechnungen an.

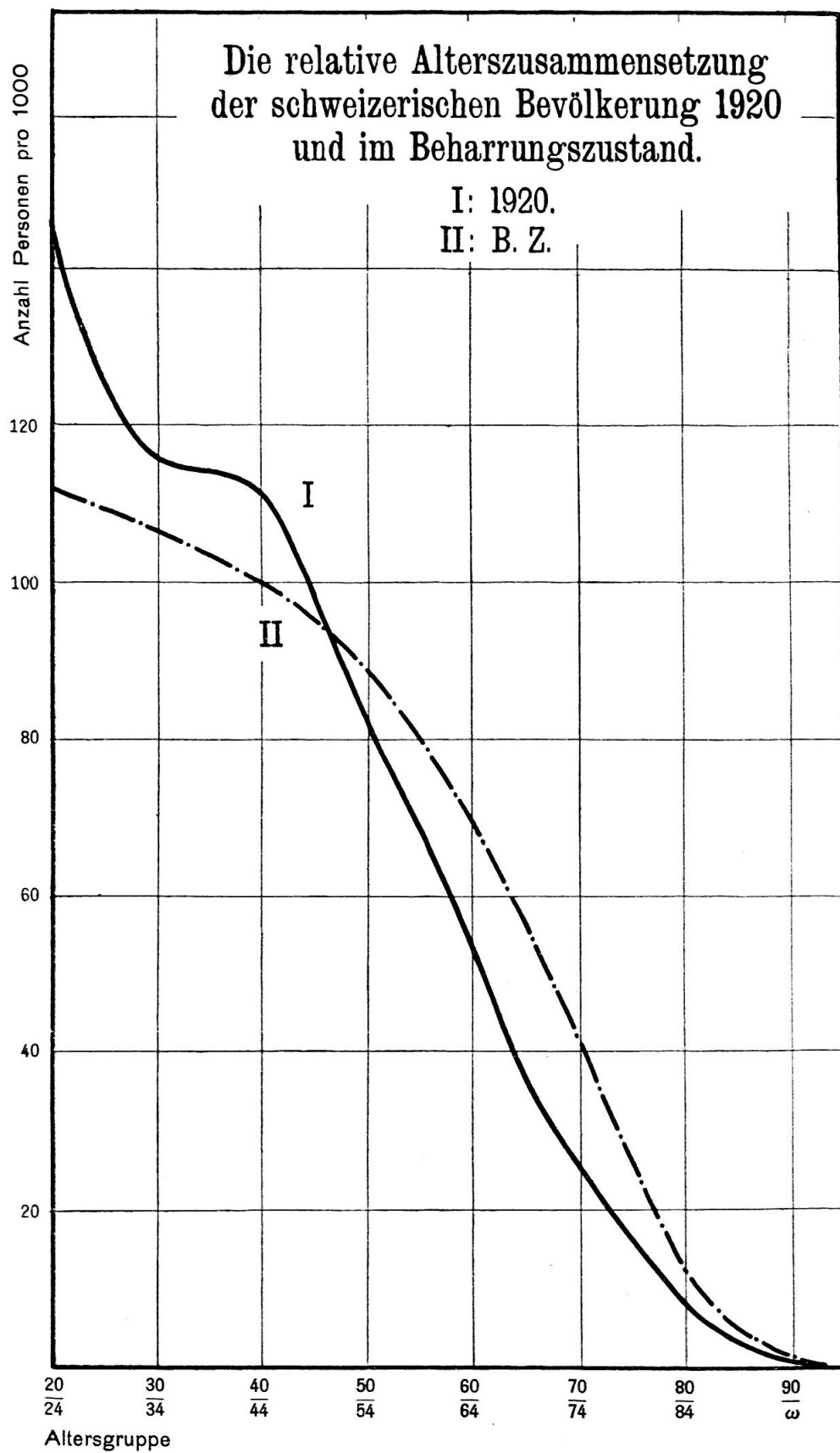
a) *Vereinigte Staaten von Nordamerika* (Autor: A. J. Lotka)<sup>8)</sup>.

Die Zahlen beziehen sich auf die weisse weibliche Bevölkerung. Als Ausgangspunkt wurde die Zählung 1920 genommen. Die Vermehrungsformel baut auf die Fruchtbarkeitsverhältnisse auf, wie sie sich aus den statistischen Erhebungen 1920 ergaben. Dabei ist angenommen, dass die Fruchtbarkeitsziffern zeitlich konstant bleiben. Im Prinzip ist also unsere 3. Vermehrungsformel angewandt worden.

b) *Tschechoslowakei* (Autoren: *Stránský und Bulina*) <sup>5)</sup>. Als Ausgangspunkt dienten die statistischen Erhebungen im Jahre 1921. Die Vermehrungsformel ist ebenfalls vom Typus III, wobei infolge mangelnder eigener Erfahrungen die deutschen Fruchtbarkeitsziffern herbeigezogen wurden. Eine erste Variante mit der Annahme, dass diese Ziffern auf 75 % des ursprünglichen Wertes herabsinken, ergab eine Bevölkerungsabnahme für die Zeit nach 1941. Da sich diese Folge nicht mit der Überlegung zu vertragen schien, setzte man in einer 2. Variante zeitlich konstante Verhältnisse fest. Wir geben nachstehend die Ergebnisse für die männliche Bevölkerung nach dieser 2. Variante wieder.

c) *Deutschland* (Autor: *Statistisches Reichsamt*) <sup>7)</sup>. Auch die deutsche Vorausberechnung stützt sich auf die Fruchtbarkeit, wobei 3 Varianten zur Durchführung kamen. Die erste setzt zeitliche Konstanz der Geburtenzahlen fest, die zweite Konstanz der Fruchtbarkeit. Die letzte endlich nimmt an, dass die Fruchtbarkeitsziffer bis zum Jahre 1954/55 nach einer Parabel 3. Grades auf 75 % des ursprünglichen Wertes absinke und nachher konstant bleibe. Wir teilen die Werte für diese letzte (und zugleich pessimistische) Variante mit, wobei sich auch hier eine abnehmende Bevölkerung ergibt.

d) *Schweiz* (Autor: *W. Friedli*). Der Wachstumsverlauf ist durch die mitgeteilte Vermehrungsformel gegeben. Die Volkszählung 1920 dient als Ausgangspunkt, der Überblick konnte bis zum Beharrungszustand ( $\infty$ ) ausgedehnt werden. Das Material wurde uns in freundlicher Weise vom *Bundesamt für Sozialversicherung* zur Verfügung gestellt, wofür auch hier der verbindlichste Dank ausgesprochen sei.



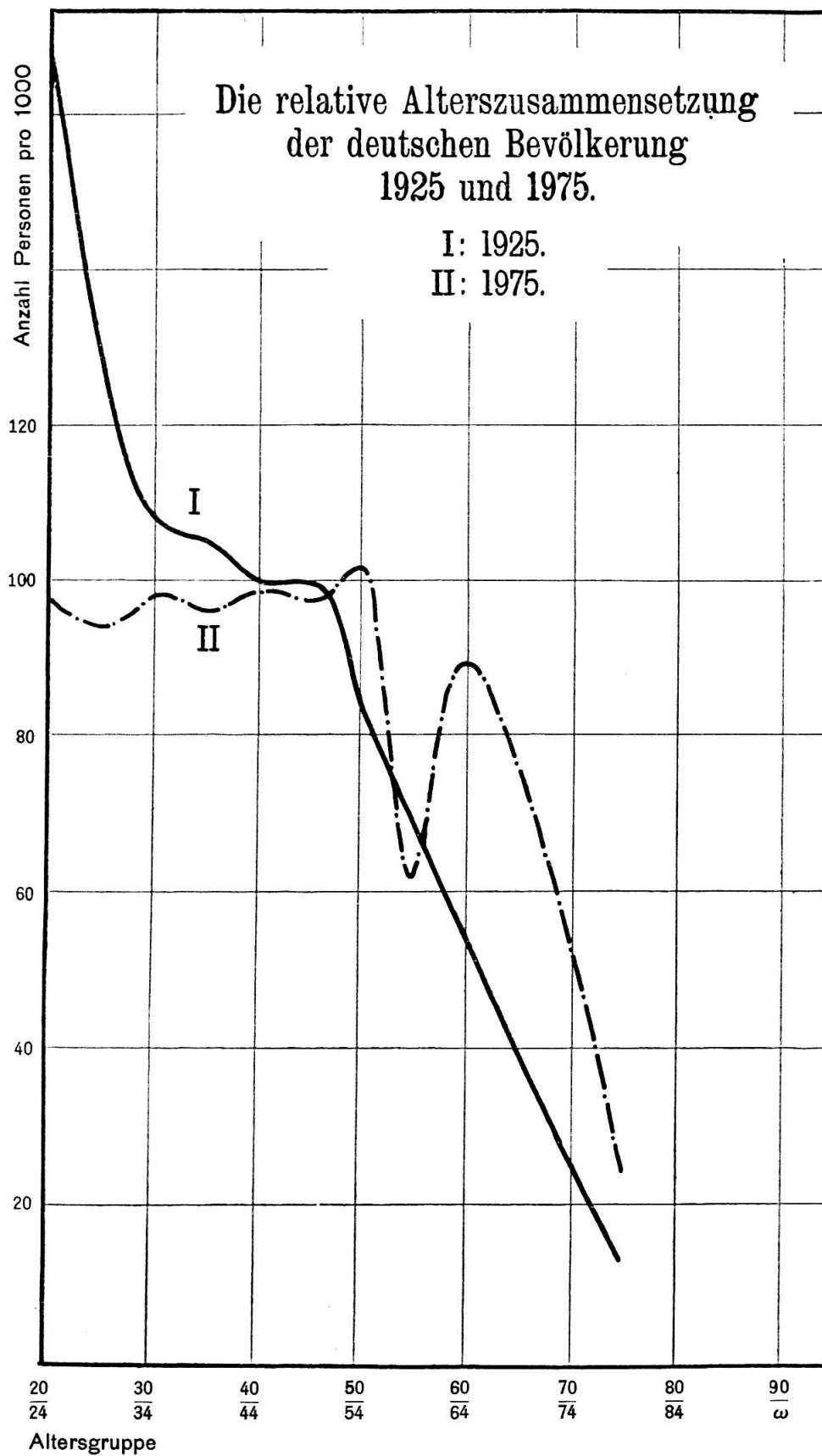


Tabelle 1: Die relative Alterszusammensetzung.

Alters- gruppe	Auf 1000 Elemente der erwachsenen Bevölkerung kommen in der betr. Altersgruppe								
	<i>Amerika</i>		<i>Tschecho- slowakei</i>		<i>Deutsch- land</i>		<i>Schweiz</i>		
	weisse Frauen		Männer		Männer		Männer		
	1920	1985	1921	1971	1925	1975	1920	1980	∞
20—24	152	122	169	121	167	97	146	114	112
25—29	147	115	130	117	129	94	126	110	109
30—34	130	108	111	113	108	98	115	107	106
35—39	120	102	103	108	105	96	114	103	103
40—44	101	97	96	102	100	99	111	98	99
45—49	88	90	91	96	100	97	98	93	95
50—54	74	82	83	59	84	102	82	87	88
55—59	57	73	68	81	70	62	70	79	80
60—64	48	64	58	79	54	89	53	69	69
65—69	34	55	42	59	39	76	36	56	56
70—74	23	43	41	56	25	53	25	42	41
75—79	15	27			13	25	15	26	25
80—84	7	14	8	9	6	12	7	12	12
85—89	3	6					2	3	4
90—∞	1	2					—	1	1
	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

*Ergebnisse:* Aus allen Beispielen geht eindeutig die *Veraltung* der Bevölkerung hervor, besonders ausgeprägt in Deutschland. Wir erkennen damit aber auch mit aller Deutlichkeit, wie gefährlich es wäre, die Beitragsberechnungen einzig und allein auf Grund der *heutigen* Verhältnisse vorzunehmen. Ebenso unrichtig müsste das Bild ausfallen, das die Finanzsysteme miteinander vergleicht, wenn die Zukunft nicht mit einbezogen wird. Unlösbar sind diese Systeme mit der

Bevölkerungsvermehrung verbunden, eine getrennte Behandlung unstatthaft. — Deutlich geht auch der Geburtenausfall während des Krieges hervor. Die überaus niedrige Besetzung der Jahrgänge 50/54 in der *Tschechoslowakei* im Jahre 1971 und der Gruppe 55/59 in *Deutschland* 1975 folgt zwangslos aus den gestörten Verhältnissen der Kriegs- und Nachkriegszeit. Auch für die *Schweiz* bliebe eine Einsenkung bei den betreffenden Jahrgängen zu erwarten, wenn auch der Ausfall weniger eindrücklich gewesen sein mag als bei den kriegführenden Ländern. Es liegt aber im Sinne der Berechnungen von *Friedli*, dass diese Störungen tunlichst ausgemerzt wurden, da eine gesetzmässige Erfassung unmöglich ist und derartige anfängliche Störungen mit der Zeit stets geebnet werden. Ob die bereits genannte Formel von *Goldziher* diese Erscheinung besser erkennen lässt, kann hier nicht entschieden werden, da die angegebenen Zahlwerte eine diesbezügliche Untersuchung nicht vornehmen lassen.

Aus der nachgewiesenen Veraltung können folgende, für die Sozialversicherung wichtigen Schlüsse gezogen werden, wenn zum Vergleich noch die Altersrentenversicherung beigezogen wird. Die relative Abnahme der Besetzung durch junge Elemente und die dadurch bedingte Zunahme durch alte muss eine *Erhöhung* des Umlagebeitrages nach sich ziehen. In der Witwenversicherung wird die Veraltung im allgemeinen auch eine *Beitragserhöhung* zur Folge haben, das relativ stärkere Vorhandensein der Alten lässt mehr Witwen entstehen. Aber erst die Untersuchung der Struktur nach Zivilständen kann darüber genauer Auskunft geben.



#### IV. Die Alterszusammensetzung nach Zivilständen.

Für die Zwecke der reinen Altersrentenversicherung konnte es genügen, die Struktur der Bevölkerung als Ganzes zu kennen. Die Witwenversicherung aber bedarf feinerer Unterscheidungsmerkmale, denn das Verhältnis der Bestände der Unverheirateten einerseits und der Verheirateten andererseits lässt bestimmte Schlüsse zu über die Zahl der zu erwartenden Witwen. Ferner müssen wir auch die Grösse des vorhandenen Witwenbestandes berechnen, um auf die zeitliche Veränderung der Belastung durch Witwenrenten zu schliessen.

Zur Berechnung dieser Bestände bedienen wir uns mit Vorteil einer Integralbeziehung, die seinerzeit durch *Ch. Moser* hergeleitet wurde <sup>14)</sup>. Vom Beginn der Entwicklung  $t = 0$  an werde in der Eröffnungsgesamtheit ein Vorgang  $y(t)$  verfolgt, der nach  $t$  Jahren den Umfang  $B(o) y(t)$  annehme. Angenommen, der Neuzugang im Zeitmoment  $d\tau$  weise stets die gleiche Alterszusammensetzung auf wie die Ausgangsgesamtheit, und es werde ebenfalls der Vorgang  $y(t)$  beobachtet, so geben die  $B(\tau) \varphi(\tau) d\tau$  eintretenden Elemente im Zeitpunkt  $t$  (also nach Ablauf von  $t - \tau$  Jahren) Anlass zum Vorgang  $B(\tau) \varphi(\tau) y(t - \tau) d\tau$ . Summiert man noch über alle Eintritte von  $\tau = 0$  bis  $\tau = t$ , so ist der ganze Vorgang gegeben durch:

$$B(t) Y(t) = B(o) y(t) + \int_0^t B(\tau) \varphi(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Die Annahme, dass die Neueintretenden stets die gleiche Alterszusammensetzung wie die ursprünglichen Elemente aufweisen, trifft bei uns nicht zu. Es empfiehlt sich daher, den Neuzugang von der Eröffnungsgesamt-

heit zu trennen, wobei zu beachten ist, dass wir nach genauer Durchführung der Rechnung für die eine Gruppe sofort auch auf die andere schliessen können.

### **a) Der Abbau des Neuzuganges.**

In unserer Integralbeziehung haben wir also nur das zweite Glied zu nehmen. Da alle Eintritte im Alter  $z$  geschehen, bezeichnen wir den Vorgang mit  $y_z(t)$ . Zur praktischen Berechnung ersetzen wir das Integral durch eine Summe, bemerken aber ausdrücklich, dass dadurch keine Annäherung vorgenommen wird, denn es lässt sich ein vollständiges Gegenstück zur *Moserschen* Integralbeziehung auch in der diskontinuierlichen Betrachtungsweise aufstellen. Für den Neuzugang ist demnach der Vorgang dargestellt durch

$$\sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) y_z(t - \tau)$$

wenn der Neuzugang erstmalig nach einem Jahr stattfindet. Im besonderen handelt es sich darum, aus der bekannten Erneuerungszahl  $B(\tau) \varphi(\tau)$  die Bestände der Ledigen, Verheirateten, Witwer und Witwen zu bestimmen, sowohl der Grösse nach wie auch nach Massgabe der Alterszusammensetzung. Unsere erste Aufgabe besteht also darin, die entsprechenden Vorgangszahlen  $y_z(t)$  zu berechnen. Es liegt im Sinne der *Moserschen* Integralbeziehung, dass wir zu diesen Berechnungen nur eine *geschlossene Gruppe* benötigen, wodurch Unabhängigkeit von der Form des Neuzugangs hergestellt ist. Die Vorgangszahlen brauchen nur ein für allemal bestimmt zu werden, eine einfache Summation der mit den Erneuerungszahlen multiplizierten Werte ergibt sofort den Gesamtvorgang. Wir erkennen damit, dass die Trennung in Neuzugang und Eröffnungsgesamtheit nicht bloss

formalen Charakter hatte, sondern einen nicht zu vernachlässigenden *Rechenworteil* in sich birgt.

Hat die Bevölkerung einmal die obere Grenze erreicht, so ist damit auch die Anfangsgesamtheit ausgestorben. Die Erneuerungszahl ist zu einer Konstanten  $B(\infty) \varphi(\infty)$  geworden, und der betrachtete Vorgang ist dargestellt durch die Gleichung

$$B(\infty) Y(\infty) = B(\infty) \varphi(\infty) \sum_0^{\infty} y_z(\tau)$$

Die Berechnung des *Beharrungszustandes* lässt uns hier in einfacher Weise die *Richtung* der Entwicklung erkennen, so dass dieser Rechnung auch ausserhalb der engern Sozialversicherung in der Mathematik der Pensionskassen grundlegende Bedeutung zukommt. Es ist interessant, hier festzuhalten, dass eine solche Erfassung des Beharrungszustandes erstmals durch *G. Schärftlin* in seinem Gutachten über «Die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten»<sup>15)</sup> bereits im Jahre 1889 erfolgt ist.

a) *Die Zahl der Ledigen.* In erster Linie berechnen wir die Zahl der Ledigen,  $y_z(t)$  ist also mit der Zahl der Ledigen zu identifizieren, die nach Ablauf von  $t$  Jahren aus einer geschlossenen Gesamtheit Lediger noch als ledig am Leben sind. Dabei bezieht sich  $y_z(t)$  immer auf ein Element.

Es bezeichne uns  $m(z)$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein ( $z$ -jähriges) Mitglied beim Eintritt noch ledig sei,  $n(z)$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit, verheiratet und  $r(z)$  verwitwet zu sein. Den Zivilstand geschieden lassen wir in unsern Ableitungen ausser Betracht. Nach Definition muss dann sein:

$$m(z) + n(z) + r(z) = 1$$

Sodann betrachten wir eine geschlossene Gesamtheit  $Km(z) = B_z^l$  Lediger des Alters  $z$ . Bedeutet  $'q_z^l$  die unabhängige Sterbewahrscheinlichkeit und  $'h_z^l$  die unabhängige Heiratswahrscheinlichkeit, so hat sich die ursprüngliche Gesamtheit nach einem Jahr herabgemindert zu:

$$B_{z+1}^l = B_z^l (1 - 'q_z^l) (1 - 'h_z^l)$$

Nach Ablauf von  $t$  Jahren ist die Zahl der nun  $z + t$ -jährigen Ledigen gegeben durch:

$$B_{z+t}^l = B_z^l \prod_{\xi=0}^{t-1} (1 - 'q_{z+\xi}^l) (1 - 'h_{z+\xi}^l)$$

Definitionsgemäss muss dann sein:

$$y_z(t) = \prod_{\xi=0}^{t-1} (1 - 'q_{z+\xi}^l) (1 - 'h_{z+\xi}^l)$$

Endlich ist die Zahl der Ledigen im Zeitpunkt  $t$  (herrührend aus dem Neuzugang) gleich

$$m(z) \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) \prod_{\xi=0}^{t-\tau-1} (1 - 'q_{z+\xi}^l) (1 - 'h_{z+\xi}^l)$$

Damit ist die Zahl der Ledigen vollständig bestimmt.

In ganz ähnlicher Weise können wir nun auch die andern Gesamtheiten berechnen. Aus der Ledigen-Gesamtheit hat sich indessen eine *Verheirateten-Gesamtheit*, eine *Witwer-Gesamtheit* und eine *Witwen-Gesamtheit* gebildet. Dazu kommen noch diejenigen, welche beim Eintritt schon verheiratet oder verwitwet waren und diesen Zivilstand heute noch aufweisen.

Zur Berechnung dieser Gesamtheiten müssen wir bestimmte Vereinfachungen vornehmen. Wir setzen

voraus, dass zwischen den Ehegatten ein *konstanter Altersunterschied* herrsche. Das dem Eintrittsalter  $z$  des Mannes entsprechende Alter der Frau sei  $y_z$ , der Altersunterschied somit

$$\Delta = z - y_z$$

Die Formeln liessen sich auch auf einen variablen Altersunterschied ausdehnen, die Darstellung kompliziert sich aber derart, dass wir darauf verzichten müssen. Sodann nehmen wir an, dass in dem Sterbejahr des einen Ehegatten der überlebende Teil nicht mehr heiratet; abgesehen von den gesetzlichen Bestimmungen über die Wartefrist der Frau, beeinflussen diese Ansätze unser Resultat nur ganz geringfügig.

Wir bezeichnen mit  $B_{z+t}^v$  die Zahl der verheirateten Männer in der geschlossenen Gesamtheit nach Ablauf von  $t$  Jahren (diese Männer weisen also das Alter  $z + t$  auf), mit  $B_{z+t}^w$  die entsprechende Zahl der Witwer und mit  $W_{y_z+t}$  die Zahl der Witwen.

Auf die genannten Bestände wirken nun die folgenden Grössen vermindernd oder vermehrend ein:

$q_{z+t}^v$  Sterbewahrscheinlichkeit eines  $z + t$ -jährigen verheirateten Mannes.

$q_{y_z+t}^v$  Sterbewahrscheinlichkeit einer  $y_z + t$ -jährigen verheirateten Frau.

$q_{z+t}^w$  resp.  $q_{z+t}^w$  unabhängige resp. abhängige Sterbewahrscheinlichkeit eines  $z + t$ -jährigen Witwers.

$q_{y_z+t}^w$  resp.  $q_{y_z+t}^w$  unabhängige resp. abhängige Sterbewahrscheinlichkeit einer  $y_z + t$ -jährigen Witwe.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass neben den *unabhängigen* Wahrscheinlichkeiten gleichberechtigt die *abhängigen* auftreten. Zum Unterschiede sei die erste

Gattung stets durch den Akzent ' gekennzeichnet. Wo aber nur eine Ausscheideursache vorliegt, wie bei den Verheirateten (Scheidung ist ausgeschlossen), stimmen beide Arten überein, der Akzent ist daher weggelassen. Zu diesen Grössen kommen noch die *Intensitäten der Wiederverheiratung* hinzu. Es bedeute  $\nu_{z+t}$  resp.  $\nu_{w_z+t}$  die Intensität der Wiederverheiratung für einen Witwer resp. für eine Witwe. Der klareren Darstellung wegen führen wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten erst später ein, da auch hier die abhängigen und unabhängigen nebeneinander auftreten. Der Akzent ' kennzeichne wiederum die unabhängigen.

b) *Der Zerfall der Verheirateten-Gesamtheit.* Im Gegensatz zu der Ledigen-Gesamtheit, wo sich die Berechnung der Ledigen durch eine einfache Produktenbildung vornehmen liess, müssen wir hier durch Rekursion von Alter zu Alter fortschreiten. Angenommen, wir kennen im Zeitpunkt  $t$  die Zahl der Verheirateten, sie ist  $B_{z+t}^v$ . Diese Gesamtheit zerfällt nach Jahresfrist in eine Untergesamtheit (gekennzeichnet durch Indexe links unten) noch bestehender Ehen  ${}_2B_{z+t+1}^v$ , in eine Untergesamtheit  ${}_2B_{z+t+1}^w$  neuentstehender und überdauernder Witwer und in eine ebensolche  ${}_2W_{w_z+t+1}$  neuentstandener und überlebender Witwen.

Wir benötigen somit der Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ehegatten das Jahr vereint überleben, und der Wahrscheinlichkeit, dass der eine Teil stirbt und der andere im Witwer- resp. Witwenzustand überlebt. Diese Werte sind aber in der Theorie der Versicherung verbundener Leben bereits bekannt; wir greifen hier auf die Ergebnisse von *J. Riethmann* <sup>16)</sup> in seiner Untersuchung: «Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben» zurück und zitieren

die für uns in Betracht kommenden Grössen ohne Ableitung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ehegatten überleben, ist dargestellt durch:

$$(1 - q_{z+t}^v) (1 - q_{y_z+t}^v) = p_{z+t}^v \cdot p_{y_z+t}^v$$

Da die Ehe nur durch Tod gelöst werden kann, brauchen wir nicht zwischen unabhängigen und abhängigen Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden. Damit wird aber:

$${}_2B_{z+t+1}^v = B_{z+t}^v \cdot p_{z+t}^v \cdot p_{y_z+t}^v$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau im Laufe des Jahres stirbt, der Mann aber als Witwer überlebt, ist unter dem angenommenen Ausschluss der Wiederverheiratung im Sterbejahr dargestellt durch:

$$p_{z+t, y_z+t}^{vw} = q_{y_z+t}^v \cdot p_{z+t}^w \frac{1 + p_{z+t}^v}{1 + p_{z+t}^w}$$

oder bei Anwendung einer noch etwas roheren Annäherung:

$$p_{z+t, y_z+t}^{vw} = q_{y_z+t}^v \cdot p_{z+t}^w$$

Durch Vertauschen der Indexe  $z$  und  $y_z$  erhält man sofort die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann stirbt, die Frau aber als Witwe überlebt:

$$p_{y_z+t, z+t}^{vw} = q_{z+t}^v \cdot p_{y_z+t}^w$$

Demnach ergibt sich:

$${}_2B_{z+t+1}^w = B_{z+t}^v \cdot q_{y_z+t}^v \cdot p_{z+t}^w$$

$${}_2W_{y_z+t+1} = B_{z+t}^v \cdot q_{z+t}^v \cdot p_{y_z+t}^w$$

c) *Der Zerfall der Witwer-Gesamtheit.* Auf die Witwer-Gesamtheit wirkt vermindern einmal die Intensität der Wiederverheiratung  $\nu_{z+t}$ . Im Zeitmoment  $d\tau$  beträgt also die Abnahme durch Heiratsfälle:

$$B_{z+t+\tau}^w \cdot \nu_{z+t+\tau} \cdot d\tau$$

Damit ist die Zahl der jährlichen Heiraten gegeben durch:

$$(11) \quad \int_0^1 B_{z+t+\tau}^w \cdot \nu_{z+t+\tau} \cdot d\tau = B_{z+t}^w \cdot h_{z+t}^w$$

wobei  $h_{z+t}^w$  die *abhängige* Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit ist. Zwischen der später auftretenden *unabhängigen* und den verbundenen Sterbewahrscheinlichkeiten besteht näherungsweise die Beziehung:

$$(12) \quad h_{z+t}^w = {}^w h_{z+t}^w \left( 1 - \frac{{}^w q_{z+t}}{2} \right)$$

$$(13) \quad q_{z+t}^w = {}^w q_{z+t}^w \left( 1 - \frac{{}^w h_{z+t}^w}{2} \right)$$

Über die genauen Zusammenhänge zwischen den beiden Arten von Wahrscheinlichkeiten verweisen wir auf: *W. Friedli*: «Intensitätsfunktion und Zivilstand» <sup>1)</sup> und vom gleichen Verfasser: «Grundlagen zur Sozialversicherung» <sup>17)</sup>.

Näherungsweise setzen wir fest, dass die Heiraten in der Jahresmitte erfolgen, die Verbindung steht also noch ein halbes Jahr unter Sterberisiko. Von den Ehen, die Witwer geschlossen haben, bestehen am Ende des Jahres demnach noch:

$${}_3 B_{z+t+1}^w = B_{z+t}^w \cdot h_{z+t}^w (1 - \frac{1}{2} q_{z+t}^w) (1 - \frac{1}{2} q_{y_z+t}^w)$$



Will man noch die Zahl der Witwer und Witwen bestimmen, die aus den neugeschlossenen Ehen sofort wieder hervorgehen, so kann das durch die Formeln geschehen:

$${}_3aB_{z+t+1}^w = B_{z+t}^w \cdot h_{z+t}^w \cdot \frac{q_{y_z+t}^v}{2} (1 - \frac{1}{2} q_{z+t}^w)$$

$${}_3W_{y_z+t+1} = B_{z+t}^w \cdot h_{z+t}^w \cdot \frac{q_{z+t}^v}{2} (1 - \frac{1}{2} q_{y_z+t}^w)$$

Bei praktischen Berechnungen werden diese beiden letzten Grössen das Resultat einzig in den ersten Beobachtungsjahren geringfügig beeinflussen, nachher dürfen sie füglich vernachlässigt werden.

Um endlich noch die Zahl der unverheiratet überlebenden Witwer zu berechnen, stützen wir uns auf die *unabhängige* Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit  $'h_{z+t}^w$  (sie ist mit der abhängigen durch die Beziehung 12 verbunden) und auf die *unabhängige* Sterbewahrscheinlichkeit  $'q_{z+t}^w$  (nach Formel 13). Es ist:

$${}_3B_{z+t+1}^w = B_{z+t}^w (1 - 'q_{z+t}^w) (1 - 'h_{z+t}^w)$$

d) *Der Zerfall der Ledigen-Gesamtheit.* Eingangs haben wir bloss die ledig bleibenden Elemente betrachtet, nicht aber die sich inzwischen verheiratenden verfolgt. Wie bei der Witwer-Gesamtheit tritt auch hier die *unabhängige* Heiratswahrscheinlichkeit  $'h_{z+t}^l$  auf; sie ist an die abhängige gebunden durch die Beziehung:

$$h_{z+t}^l = 'h_{z+t}^l \left( 1 - \frac{'q_{z+t}^l}{2} \right)$$

Von den neugeschlossenen  $B_{z+t}^l \cdot h_{z+t}^l$  Ehen überdauern das Jahr:

$${}_1B_{z+t+1}^v = B_{z+t}^l \cdot h_{z+t}^l (1 - \frac{1}{2}q_{z+t}^v) (1 - \frac{1}{2}q_{y_{z+t}}^v)$$

Die Zahl der in demselben Jahr entstehenden und überlebenden Witwer ist:

$${}_1B_{z+t+1}^w = B_{z+t}^l \cdot h_{z+t}^l \cdot \frac{q_{y_{z+t}}^v}{2} (1 - \frac{1}{2}q_{z+t}^w)$$

Dazu kommt noch die entsprechende Zahl Witwen:

$$W_{y_{z+t+1}} = B_{z+t}^l \cdot h_{z+t}^l \cdot \frac{q_{z+t}^v}{2} (1 - \frac{1}{2}q_{y_{z+t}}^w)$$

Beim Zerfall der Witwer-Gesamtheit haben wir die Zahl der im gleichen Jahr heiratenden und wieder verwitwenden Elemente vernachlässigen können. Dies ist hier nicht der Fall. Zu Beginn der Entwicklung kommt die Hauptzahl der Heiraten von der Ledigen-Gesamtheit her, die Witwer-Gesamtheit spielt dabei eine relativ untergeordnete Rolle. Einzig in den höhern Altern wird die Beeinflussung aus der Witwer-Gesamtheit stärker, die Witwen- und Witwerzahlen sind aber so gross, dass die relativ kleinen Werte keinen Einfluss mehr ausüben.

Wir haben die Gesamtheiten der Ledigen, Verheirateten und Witwer in ihre Bestandteile zerfallen lassen. Um nun noch die Gesamtheiten als Ganzes für das nächst höhere Alter zu bestimmen, brauchen wir bloss die entsprechenden Untergesamtheiten zu addieren; es entsteht dabei das Schema:

$$B_{z+t}^v = {}_1B_{z+t}^v + {}_2B_{z+t}^v + {}_3B_{z+t}^v$$

$$B_{z+t}^w = {}_1B_{z+t}^w + {}_2B_{z+t}^w + {}_3B_{z+t}^w + {}_{3a}B_{z+t}^w$$

Ist diese Summation für den Zeitpunkt  $t$  ausgeführt, so kann durch die soeben entwickelten Formeln zu  $t + 1$  übergegangen werden; die Berechnung geschieht also, wie eingangs angegeben, durch Rekursion. Zur Durchführung dieser Rekursion müssen die noch nicht näher bestimmten Gesamtheiten

$$B_z^v \text{ und } B_z^w$$

als Ausgangspunkt dienen. — Die im Alter  $z$  Eintretenden waren nach ihrem Zivilstand durch die Wahrscheinlichkeiten  $m(z)$ ,  $n(z)$  und  $r(z)$  gekennzeichnet. Wir berücksichtigen demnach die anfängliche Zusammensetzung durch die Annahme:

$$B_z^v = Kn(z), \quad B_z^w = Kr(z)$$

Zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit kann z. B.  $K = 100\,000$  gesetzt werden.

Endlich haben wir noch auf die *Vorgangszahlen*  $y_z(t)$  zu schliessen. Da zu den Gesamtheiten der Verheirateten und Witwer alle drei Bestände (Ledige, Verheiratete und Witwer) beitragen und sich die Vorgangszahl immer auf ein zu Beginn vorhandenes Element bezieht, so gilt:

für Verheiratete:

$$y_z(t) = \frac{B_{z+t}^v}{K(m(z) + n(z) + r(z))} = \frac{1}{K} B_{z+t}^v$$

für Witwer:

$$y_z(t) = \frac{B_{z+t}^w}{K(m(z) + n(z) + r(z))} = \frac{1}{K} B_{z+t}^w$$

Damit ist die Zahl der Verheirateten und Witwer (herrührend vom Neuzugang) im Zeitpunkt  $t$  dargestellt durch:

Zahl der Verheirateten:

$$\frac{1}{K} \sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) B_{z+t-\tau}^v$$

Zahl der Witwer:

$$\frac{1}{K} \sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) B_{z+t-\tau}^w$$

Die Grössen  $B_{z+t}^v$  und  $B_{z+t}^w$  sind einmalig zu berechnen; dabei sind sie unabhängig von  $\varphi(\tau)$ , so dass die eingangs erstrebte Unabhängigkeit von der Vermehrungsart hergestellt ist.

In einem *Beispiel* haben wir 10 000 20-jährige Ledige durch ihr Leben hindurch verfolgt. Die Ausscheideverhältnisse seien durch die von *M. Ney* für die Periode 1901—1910 berechneten Sterbe- und Heiratswahrscheinlichkeiten <sup>18)</sup> gegeben, den Berechnungen lagen die von *W. Friedli* nach *King* ausgeglichenen Werte <sup>17a)</sup> zugrunde. *Tabelle 2* und *Darstellung 3* unterrichten über die Abnahme der Ledigen und über die Entstehung der Gesamtheiten der Verheirateten, Witwer und Witwen. (Altersunterschied der Ehegatten null.)

*e) Der Zerfall der Witwen-Gesamtheit.* Nachdem die Bestände der männlichen Bevölkerung bestimmt sind, muss noch die wichtigste Berechnung, die Grössenbestimmung des Witwenbestandes, zu Ende geführt

Tabelle 2.

Zerfall einer geschlossenen Gesamtheit Lediger.

Abgelaufene Zeit $t$	Nach Ablauf von $t$ Jahren sind von 10,000 20-jährigen Ledigen noch am Leben			Zahl der überlebenden Witwen nach $t$ Jahren
	als ledig	als verheiratet	als verwitwet	
0	10 000	0	0	0
5	7 637	2071	26	16
10	4 135	5231	93	81
15	2 446	6547	161	188
20	1 745	6805	234	344
25	1 387	6611	319	574
30	1 157	6132	440	892
35	971	5379	626	1301
40	795	4379	871	1744
45	612	3168	1135	2105
50	424	1918	1278	2186
55	249	894	1149	1848
60	114	288	712	1162
65	35	59	277	488
70	7	6	58	124

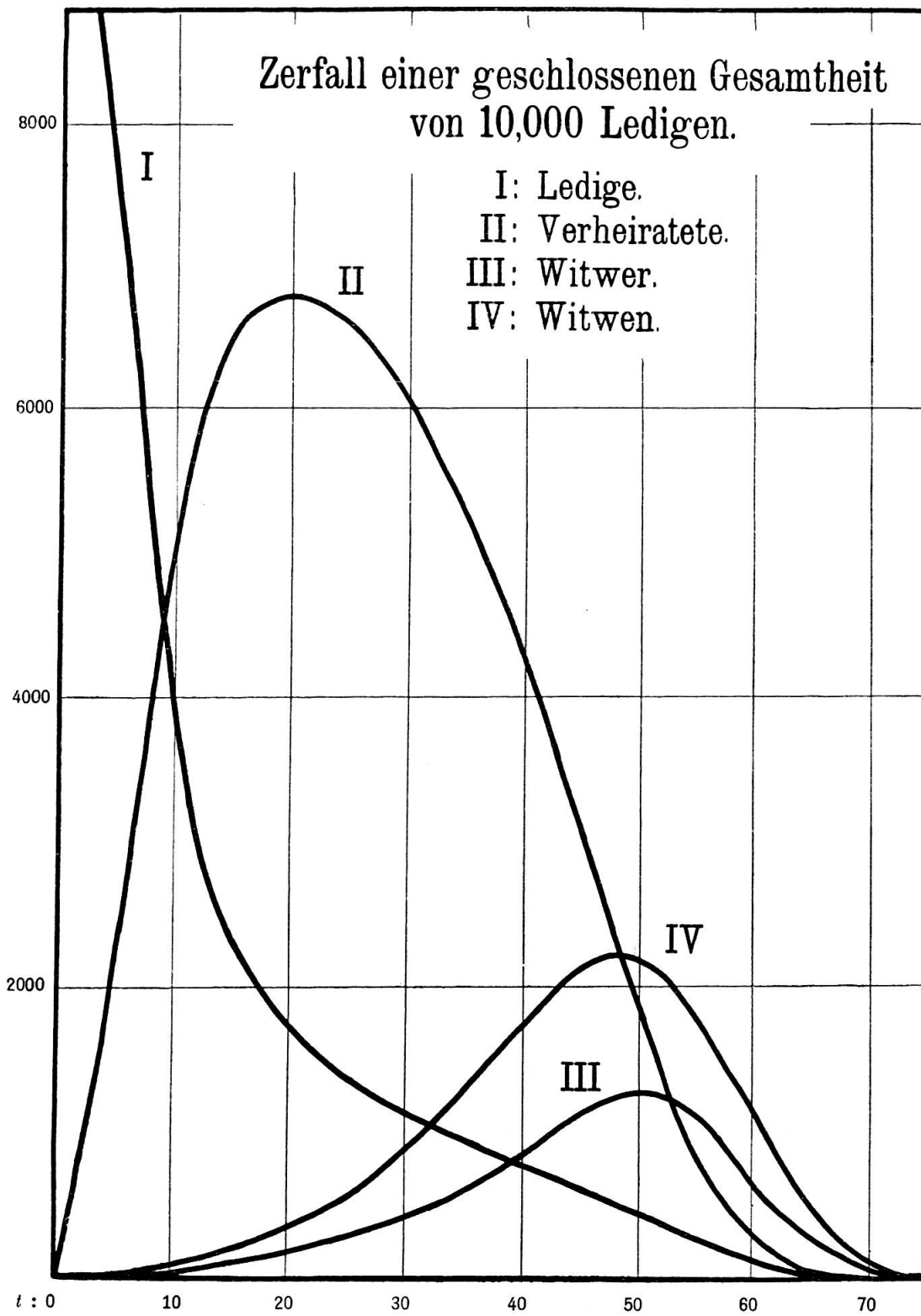
werden. Die Zahlen der jährlich neu entstehenden Witwen haben wir bereits erfasst.

Im Zeitpunkt  $t$  sind  $W_{y_2+t}$  Witwen vorhanden. Davon heiraten im Zeitmoment  $\tau$  bis  $\tau + d\tau$ :

$$W_{y_2+t+\tau} \cdot \nu_{y_2+t+\tau} \cdot d\tau$$

und innert Jahresfrist:

$$(14) \quad \int_0^1 W_{y_2+t+\tau} \cdot \nu_{y_2+t+\tau} \cdot d\tau = W_{y_2+t} \cdot q_{y_2+t}$$



wo uns  $q_{y_z+t}$  die *abhängige* Wiederverheiratungswahrscheinlichkeit darstellt. Diese Zahl wird bei den Abfindungen eine Rolle spielen.

Die Zahl der sich nicht verheiratenden und überlebenden Witwen wird wieder am besten durch die *unabhängigen* Wahrscheinlichkeiten dargestellt:

$${}_4W_{y_z+t+1} = W_{y_z+t} (1 - {}^wq_{y_z+t}) (1 - {}^wq_{y_z+t})$$

Damit kann  $W_{y_z+t}$  ebenfalls durch Rekursion bestimmt werden aus:

$$W_{y_z+t} = {}_1W_{y_z+t} + {}_2W_{y_z+t} + {}_3W_{y_z+t} + {}_4W_{y_z+t}$$

wobei die Ausgangsgrösse  $W_{y_z}$  noch zu bestimmen ist. — Setzt man fest, dass in die Versicherung nur solche Witwen eingeschlossen sind, die von Männern herkommen, die der Versicherungspflicht im Moment des Todes schon unterstanden, so ist  $W_{y_z} = 0$  anzusetzen. Praktisch würde bei Aufnahme aller Witwen  $W_{y_z}$  von 0 nur wenig verschieden sein, da ja  $y_z \leq z$  ist. Erfolgt z. B. der Eintritt mit 20 Jahren, so ist bei einer Altersdifferenz 0 die Zahl der 20-jährigen Witwen nur gering. Bei einer positiven Altersdifferenz darf daher  $W_{y_z} = 0$  angenommen werden.

Die Vorgangszahl  $y_z(t)$  selber nimmt dann die Form an:

$$y_z(t) = \frac{1}{K} W_{y_z+t} = w(t)$$

womit die Zahl der Witwen im Zeitpunkt  $t$  gegeben ist durch:

$$(15) \quad \sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)$$

Auch hier wieder ist  $w(t)$  eine zum vornherein berechenbare Grösse, die unabhängig von der Art der Vermehrung ist.

### b) Hilfswerte.

In unsern Bestimmungsformeln für die Erneuerungszahl tritt die Grösse  $l_x : l_z$  auf, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Alter  $z$  Eintretender das Alter  $x$  erreiche. In der Regel kann man diesen Wert einer allgemeinen Volkssterbetafel entnehmen, die aus der gleichen Beobachtungsperiode stammt wie die bisher angewendeten Sterbe- und Heiratswahrscheinlichkeiten auch. Er geht aber auch direkt aus unsern Ergebnissen hervor; meist werden aber die beiden Werte nicht genau übereinstimmen. Das kommt einmal daher, weil unsere abgeleiteten Formeln z. T. nur Näherungen sind und sein können, dann aber auch, weil die Heirats- und Sterbewahrscheinlichkeiten meist unabhängig von der allgemeinen Sterbetafel ausgeglichen werden.

Durch  $B_z^l + B_z^v + B_z^w = K (m(z) + n(z) + r(z))$  sind alle Lebenden im Eintrittsalter  $z$  erfasst. Die Zahl der Überlebenden im Alter  $x$  (also nach Ablauf von  $x - z$  Jahren) ist gegeben durch  $B_x^l + B_x^v + B_x^w$ . Damit ist die gesuchte Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\frac{l_x}{l_z} = \frac{1}{K} (B_x^l + B_x^v + B_x^w)$$

Ferner tritt in Formel (6 a) die Wahrscheinlichkeit  $p_z(t - \tau)$  auf, also die Wahrscheinlichkeit, dem Bestande nach  $t - \tau$  Jahren noch anzugehören. Wie oben ergibt sich:

$$p_z(t - \tau) = \frac{1}{K} (B_{z+t-\tau}^l + B_{z+t-\tau}^v + B_{z+t-\tau}^w)$$



Zur Berechnung der Erneuerungszahl nach der Formel (8) bedürfen wir speziell des Wertes:

$$\frac{d_{z+t-\tau}}{l_z} = p_z(t-\tau) - p_z(t+1-\tau) = \frac{1}{K} \left( -\Delta (B_{z+t-\tau}^l + B_{z+t-\tau}^v + B_{z+t-\tau}^w) \right)$$

Eine weitere, sich aus unsern bekannten Grössen bestimmende Funktion ist die *Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein*. Wir bezeichnen sie mit  $\theta_{z+t}$

$$(16) \quad \theta_{z+t} = \frac{B_{z+t}^v}{B_{z+t}^l + B_{z+t}^v + B_{z+t}^w}$$

Die letzte Grösse verwenden wir bei den Finanzsystemen.

### c) Abbau der Eröffnungs-Gesamtheiten.

Wir setzen voraus, dass im Eröffnungszeitpunkt  $t=0$  die vorhandenen Gesamtheiten ebenfalls nach Alter und Zivilstand getrennt aufgenommen sind.

Wir bezeichnen mit  $L_{x,l}^{(0)}$  die Zahl der Ledigen des Alters  $x$ ; mit  $L_{x,v}^{(0)}$  die entsprechende Zahl der Verheirateten und mit  $L_{x,w}^{(0)}$  die Zahl der Witwer. Endlich bezeichne  $W_y^{(0)}$  die Zahl der Witwen im Alter  $y$ . Mit  $L_x^{(0)}$  benennen wir die Zahl der  $x$ -Jährigen aller Zivilstände, also:

$$L_x^{(0)} = L_{x,l}^{(0)} + L_{x,v}^{(0)} + L_{x,w}^{(0)}$$

Zum Abbau dieser Gesamtheiten setzen wir die gleichen Ausscheideverhältnisse fest wie beim Neuzugang. Dem Alter  $x$  des Mannes sei im Falle einer Heirat immer das Alter  $y$  der Frau zugeordnet. In vollständiger Übereinstimmung zu vorher würde z. B. der Bestand der Verheirateten zerfallen in eine Untergesamtheit überdauernder Ehen, in einen Bestand Witwer und Witwen, die das Jahr überleben. Durch Indexe links unten

kennzeichnen wir diese Untergesamtheiten. Wir können unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungsweise die Beziehungen sofort angeben.

a) *Zerfall des Ledigen-Bestandes.* Der Jahrgang  $L_{x,l}^{(0)}$  zerfällt im Laufe des nächsten Jahres in eine Gruppe  $L_{x+1,l}^{(1)}$  ledig überlebender Elemente gemäss:

$$L_{x+1,l}^{(1)} = L_{x,l}^{(0)} (1 - {}^l q_x) (1 - {}^l h_x)$$

Von den inzwischen Verheirateten bestehen in der Ehe noch:

$${}_1L_{x+1,v}^{(1)} = L_{x,l}^{(0)} \cdot {}^l h_x (1 - \frac{1}{2} {}^v q_x) (1 - \frac{1}{2} {}^v q_y)$$

Von den neugeschlossenen Ehen wird eine bestimmte Anzahl durch Tod der Frau in demselben Jahr wieder gelöst, der Mann aber überlebt als Witwer:

$${}_1L_{x+1,w}^{(1)} = L_{x,l}^{(0)} \cdot {}^l h_x \cdot \frac{{}^v q_y}{2} (1 - \frac{1}{2} {}^w q_x)$$

Analog ist die Zahl der überlebenden Witwen:

$${}_1W_{y+1}^{(1)} = L_{x,l}^{(0)} \cdot {}^l h_x \cdot \frac{{}^v q_x}{2} (1 - \frac{1}{2} {}^w q_y)$$

b) *Zerfall des Verheirateten-Bestandes.* Von den  $L_{x,v}^{(0)}$  bestehenden Ehen sind nach Jahresfrist noch ungelöst:

$${}_2L_{x+1,v}^{(1)} = L_{x,v}^{(0)} \cdot {}^v p_x \cdot {}^v p_y$$

Von den gelösten Ehen her haben wir die Witwer:

$${}_2L_{x+1,w}^{(1)} = L_{x,v}^{(0)} \cdot {}^v q_y \cdot {}^w p_x$$

und Witwen:

$${}_2W_{y+1}^{(1)} = L_{x,v}^{(0)} \cdot {}^v q_x \cdot {}^w p_y$$

c) *Zerfall des Witwer-Bestandes.* Von den  $L_{x,w}^{(0)}$  vorhandenen Witwer überleben das Jahr unverheiratet:

$${}_3L_{x+1,w}^{(1)} = L_{x,w}^{(0)} (1 - {}'q_x^w) (1 - {}'h_x^w)$$

Von den neugeschlossenen Ehen bestehen am Jahresende noch:

$${}_3L_{x+1,v}^{(1)} = L_{x,w}^{(0)} \cdot h_x^w (1 - \frac{1}{2}q_x^v) (1 - \frac{1}{2}q_y^v)$$

Eine analoge Formel bekäme man für die im gleichen Jahre wieder verwitwenden Frauen und Männer.

d) *Zerfall des Witwen-Bestandes.* Für unsern Fall bedarf man nur der unverheiratet Überlebenden gemäss:

$${}_4W_{y+1}^{(1)} = W_y^{(0)} (1 - {}'q_y^w) (1 - {}'q_y)$$

und der Zahl der sich wieder verheiratenden Witwen

$$W_y^{(0)} \cdot q_y$$

Die Zahlen der Ledigen, Verheirateten und Witwer im nächsten Jahr und des nächst höhern Alters ergeben sich durch entsprechende Summation der Untergesamtheiten.

$$\text{z. B.} \quad L_{x+1,v}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 {}_iL_{x+1,v}^{(1)} \quad \text{usw.}$$

$$W_{y+1}^{(1)} = \sum_{i=1}^4 {}_iW_{y+1}^{(1)}$$

Um nun noch alle Ledigen usw. zu erfassen, braucht man nur über alle  $x$  resp.  $y$  zu summieren. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens von Jahr zu Jahr schreitet man fort bis zum vollständigen Aussterben der Anfangsgenerationen.

Es kann der Fall eintreten, dass bei Eröffnung die männliche Bevölkerung nicht nach Zivilständen aufgenommen ist, dass also nur die Zahlen  $L_x^{(0)}$  bekannt sind. Um gleichwohl die Witwenzahlen zu berechnen, gehen wir wie folgt vor.

Von den  $L_x^{(0)}$  sterben durchschnittlich in der Jahresmitte  $L_x^{(0)} \cdot q_x$ . Von diesen sind aber  $L_x^{(0)} \cdot q_x \cdot \theta_{x+\frac{1}{2}}$  verheiratet. Die Zahl der das Jahr überlebenden Witwen ist daher:

$$L_x^{(0)} \cdot q_x \cdot \theta_{x+\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2} q_y^w)$$

Dazu kommen noch die Witwen, die zu Beginn des Jahres vorhanden waren und unverheiratet überleben:

$$W_y^{(0)} (1 - q_y^w) (1 - q_y)$$

Die Summe der beiden Ausdrücke gibt demnach die Zahl der Witwen im Zeitpunkt 1 und vom Alter  $y + 1$ . Dehnt man das Verfahren über alle Alter  $y$  aus, so führt es zu einem analogen Ergebnis wie die andere Methode.

#### **d) Die relative Altersstruktur.**

Wir haben nun noch die beiden Bestände, die einmal aus den bei der Eröffnung schon vorhandenen Jahrgängen hervorgingen und die das andere Mal vom Neuzugang herrühren, zu vereinigen. Wenn wir noch bedenken, dass nach Ablauf von  $t$  Jahren die jüngsten Jahrgänge aus der Eröffnungsgesamtheit das Alter  $z + t$  aufweisen, so ist z. B. der Bestand der Verheirateten gegeben durch:

$$\sum_{z+t}^{\omega} L_{x,v}^{(t)} + \frac{1}{K} \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) B_{z+t-\tau}^v$$

Zur Messung der relativen Altersstruktur müssen wir noch die Stärke der einzelnen Jahrgänge kennen. Da

die heute mehr als  $z+t$ -Jährigen aus dem Anfangsbestand herrühren, die weniger als  $z+t$ -Jährigen aber aus dem Neuzugang, müssen zwei getrennte Formeln erstellt werden. Im ersten Fall ist z. B. die Zahl der  $x$ -jährigen Verheirateten ohne weiteres gegeben durch

$$L_{x,v}^{(t)}$$

Im zweiten Fall sind die  $x$ -Jährigen hervorgegangen aus den vor  $x-z$  Jahren Eingetretenen. Die gesuchte Zahl der  $x$ -jährigen Verheirateten ist demnach:

$$\frac{1}{K} B(t-x+z) \varphi(t-x+z) B_x^v \quad (x < z+t)$$

Da die relative Altersstruktur als Quotient dieser Grössen und des gesamten Bestandes gemessen wird, sind zu dieser Berechnung alle notwendigen Werte vorhanden.

Als *Beispiel* der Bevölkerungszusammensetzung nach Zivilständen wollen wir die Verhältnisse in der schweizerischen Bevölkerung im Jahre 1920 und im Beharrungszustand nehmen. Die Alterszusammensetzung 1920 können wir den Volkszählungsergebnissen direkt entnehmen <sup>19)</sup>. Für den Beharrungszustand legen wir die schon einmal zitierten Sterbe- und Heiratswahrscheinlichkeiten von *Ney* für die Periode 1901—1910 und ausgeglichen von *Friedli* nach *King* zugrunde. Schematisch setzen wir den Altersunterschied der Ehegatten gleich null an. Die Ergebnisse sind in der folgenden *Tabelle 3* und in der *Darstellung 4* zusammengefasst \*).

---

\*) Sowohl in *Tabelle 1* und *3* ist für die männliche Bevölkerung der Schweiz die Alterszusammensetzung im Beharrungszustand berechnet. Die beiden Wertereihen stimmen aber nicht überein, weil bei den Berechnungen des Bundesamtes für Sozialversicherung

Tabelle 3.

Alterszusammensetzung nach Zivilständen.

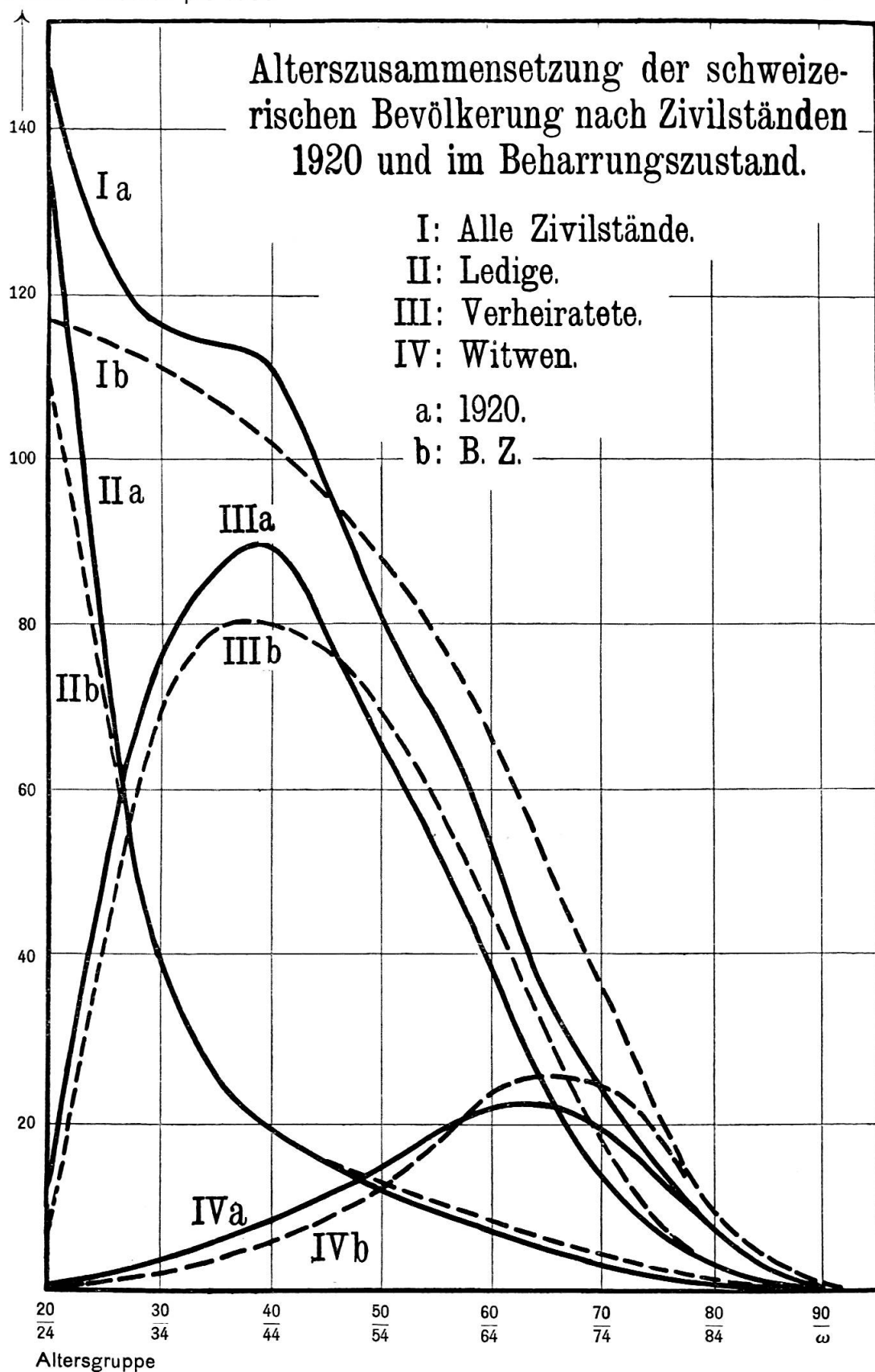
Alters- gruppe	Auf 1000 erwachsene Männer aller Zivilstände <sup>1)</sup> kommen in der betreffenden Altersgruppe									
	Schweiz 1920					Im Beharrungszustand der Bevölkerung				
	Ledi- ge	Ver- heira- tete	Wit- wer	Total	Wit- wen	Ledi- ge	Ver- heira- tete	Wit- wer	Total	Wit- wen
20—24	135	12		147		110	7		117	
25—29	75	50	1	126	2	72	41	1	114	
30—34	40	75	1	116	3	40	70	1	111	1
35—39	26	86	2	114	5	25	79	2	106	3
40—44	19	89	3	111	8	19	80	3	102	5
45—49	15	79	4	98	11	15	77	4	96	8
50—54	11	65	5	81	14	13	69	6	88	12
55—59	9	54	6	69	19	10	59	9	78	17
60—64	7	39	7	53	22	8	46	12	66	23
65—69	4	24	8	36	22	6	32	14	52	26
70—74	3	14	8	25	20	4	18	15	37	25
75—79	1	7	7	15	14	2	7	12	21	19
80—84	1	2	4	7	7	1	2	6	9	10
85—89		1	1	2	2		1	2	3	4
	346	597	57	1000	149	325	588	87	1000	153
	1000					1000				

<sup>1)</sup> Geschiedene ausgeschlossen.

Aus unserer Zusammenstellung gehen die folgenden *Ergebnisse* hervor:

1. Die Bestände der Ledigen, Verheirateten und Witwer zeigen alle die Tendenz zur Veraltung.

die Tafel S. M. 1920/21 verwendet wurde, unsern eigenen aber die Ergebnisse 1901—1910 zugrunde liegen. Wir mussten auf diese Grundzahlen zurückgreifen, weil keine neuern vorhanden sind.



2. In den hohen Altern zeigt auch der Witwenbestand eine zunehmende Veraltung. Es fällt aber auf, dass für 1920 die Jahrgänge 40—60 stark besetzt sind, so dass die Zunahme der Witwen, bezogen auf die männliche Bevölkerung, nur ganz gering ist (von 149 auf 153 pro Tausend). Diese starke Besetzung rührt zum grossen Teil von der Grippeepidemie in den Jahren vor 1920 her.

3. Das Verhältnis der Verheirateten zu der gesamten männlichen Bevölkerung fällt von 59,7 % im Jahre 1920 auf 58,8 % im Beharrungszustand. Obschon diese Verhältniszahl nahezu konstant bleibt, darf nicht geschlossen werden, dass die Alterszusammensetzung unverändert geblieben ist. Ebenso falsch wäre gleiche Belastungen durch Witwenrenten vorauszusetzen.

## **V. Die Finanzsysteme.**

Es liegt hauptsächlich im Ziele unserer Untersuchung, den Zusammenhängen zwischen der Bevölkerungsvermehrung und den Finanzsystemen nachzugehen. Wir müssen uns aber bescheiden, nur die Grundzüge zu entwickeln; es konnte dies um so leichter geschehen, als sich alle Erweiterungen in sinnfälliger Weise ergeben. — Die Zahlung der Renten und Beiträge erfolgt jährlich, im Falle einer Wiederverheiratung erhält die Witwe eine Abfindung. In Rentengenuss treten alle Witwen, die unterhalb eines bestimmten Alters liegen, an die Stelle der Witwenrente tritt nachher die allgemeine Altersrente. Es würde nicht schwer halten, die Formeln auch auf die Fälle auszudehnen, wo z. B. die Rente nur eine bestimmte Zeit nach der Verwitwung läuft, oder wo nur Witwen in höhern Altern (z. B. von 50 bis 64 Jahren) eingeschlossen sind.



Als Finanzsysteme betrachten wir das *reine Umlageverfahren* und die *Umlage der neuen Rentenkapitalien (Kapitaldeckungsverfahren)*. Vom Verfahren der *Anwartschaftsdeckung durch Prämien* (reines Deckungsverfahren) sehen wir ab, da diese Methode ja einen vom Altersaufbau unabhängigen Beitrag ergibt.

### **a) Das reine Umlageverfahren.**

Als *Umlagebeitrag* ist definiert der Quotient aus dem auf Jahresanfang vorhandenen Witwenbestand und dem Bestand der Beitragspflichtigen. Wir setzen voraus, dass die Beitragspflicht mit Eintritt in die Versicherung im Alter  $z$  beginnt und während  $n$  Jahren andauert, im Alter  $z + n$  also letztmalig ein Beitrag entrichtet wird. Analog stehe die Witwe vom Alter  $y_z$  bis zum Alter  $y_z + m$  in Rentengenuss. Da der Beginn der Rente auf das dem Sterbejahr des Mannes folgende Jahr festgesetzt ist, weist die jüngste Witwe mithin das Alter  $y_z + 1$  auf.

Wir berechnen den Umlagebeitrag vorerst ohne Einschluss der Abfindung im Falle der Wiederverheiratung und für einen Zeitpunkt  $t < m$ ,  $t < n$  (wo die Anfangsgesamtheit also noch in Frage kommt). Vom Neuzugang her haben wir nach Formel (15)

$$\sum_{\tau=1}^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)$$

unterstützungspflichtige Witwen. Vom Anfangsbestand kommen noch die hinzu, deren Alter  $y$  die obere Grenze  $y_z + m$  noch nicht überschritten hat; die jüngsten der Witwen sind inzwischen  $y_z + t$ -jährig geworden. Die *gesamte Belastung* beläuft sich daher auf:

$$\sum_{y_z+t}^{y_z+m} W_y^{(t)} + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)$$

Zur Berechnung der *Entlastung* bedenken wir, dass von den im Zeitpunkt  $\tau$  eingetretenen Elementen  $B(\tau)\varphi(\tau)$  heute noch  $B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$  unter Beitragspflicht stehen. Der Neuzugang entlastet daher durch die Grösse:

$$\sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Dazu kommen nun noch die Überlebenden aus der Anfangsgeneration, welche das Grenzalter  $z+n$  noch nicht überschritten haben. Die gesamte *Entlastung* ist daher:

$$\sum_{z+t}^{z+n} L_x^{(t)} + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Bezeichnet noch  $U_t$  den Umlagebeitrag (ohne Einfluss der Abfindung), so wird:

$$U_t = \frac{\sum_{y_z+t}^{y_z+m} W_y^{(t)} + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)}{\sum_{z+t}^{z+n} L_x^{(t)} + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)}$$

Die Grössen  $w(t)$  und  $p_z(t)$  sind in Tabellenform ein für allemal vorhanden, ebenso ist die Eröffnungs-Gesamtheit abgebaut worden, so dass sich die Berechnung des Umlagebeitrages für die verschiedenen Vermehrungsarten einfach gestaltet.

Wir haben unsere Formel nun noch auf die Zeit  $t > m$ ,  $t > n$  auszudehnen. Da die jüngste Witwe im Anfangsbestand das Alter  $y_z$  aufwies, heute also  $y_z + t > y_z + m$ -jährig ist, fällt die Eröffnungs-Gesamtheit ausser Betracht. Alle Witwen stammen vom Neuzugang her. Der jüngste Beitragspflichtige ist soeben eingetreten, der älteste vor  $n$  Jahren. Der Bestand der Beitragspflichtigen ist daher dargestellt durch:

$$\sum_{\tau=t-n}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Bei der Berechnung des Witwenbestandes müssen wir darauf achten, dass die älteste Witwe das Alter  $y_z + m$  aufweist. Der ihr koordinierte Mann (wäre er noch am Leben), müsste das Alter  $y_z + \Delta + m$  haben, er wäre damit vor  $m$  Jahren in die Versicherung eingetreten. Die Zahl der rentengenössigen Witwen ist daher gegeben durch:

$$\sum_{\tau=t-m}^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)$$

Der Umlagebeitrag wird als Quotient der beiden Ausdrücke:

$$U_t = \frac{\sum_{\tau=t-m}^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau)}{\sum_{\tau=t-n}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)} \quad \begin{array}{l} t > m \\ t > n \end{array}$$

Es bleibt noch anzudeuten, dass wir auch eine Formel aufzustellen hätten für  $m < t < n$ . Bei der Berechnung des Witwenbestandes fällt die Anfangs-Gesamtheit

ausser Betracht, es sind aber noch Elemente vorhanden, die der Beitragspflicht unterstehen. Da es leicht fällt, die entsprechende Beziehung aufzuschreiben, verzichten wir des Raumes halber.

In der Regel treten nun neben die eigentlichen Witwenrenten noch die Abfindungen, die im Falle einer Wiederverheiratung sofort ausbezahlt werden sollen. Es betrage diese Abfindung das  $k$ -fache der Witwenrente. Wenn wir noch bedenken, dass  $B(\tau) \varphi(\tau) w(t - \tau)$  nichts anderes darstellt als die Zahl der  $y_z + t - \tau$ -jährigen Witwen im Zeitpunkt  $t$ , so heiraten im folgenden Jahr davon (nach Formel 14):

$$B(\tau) \varphi(\tau) w(t - \tau) \varrho_{y_z+t-\tau}$$

Diese Heiraten finden durchschnittlich in der Jahresmitte statt, so dass sich der Barwert der Abfindungen auf Jahresbeginn beläuft auf:

$$kv^{\frac{1}{2}} \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t - \tau) \varrho_{y_z+t-\tau}$$

In ganz gleicher Weise für den Anfangsbestand:

$$kv^{\frac{1}{2}} \sum_{y_z+t}^{y_z+m} W_y^{(t)} \cdot \varrho_y$$

Bezeichnet noch  $U_t^{(a)}$  den Umlagebeitrag unter Einschluss der Abfindung, so wird:

$$U_t^{(a)} = \frac{\sum_{y_z+t}^{y_z+m} W_y^{(t)} (1 + kv^{\frac{1}{2}} \cdot \varrho_y) + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t - \tau) (1 + kv^{\frac{1}{2}} \cdot \varrho_{y_z+t-\tau})}{\sum_{z+t}^{z+n} L_x^{(t)} + \sum_1^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t - \tau)}$$

Nach dem Aussterben der Anfangsgesamtheit reduziert sich diese Gleichung wie vorher zu:

$$U_t^{(a)} = \frac{\sum_{\tau=t-m}^t B(\tau) \varphi(\tau) w(t-\tau) (1 + kv^{\frac{1}{2}} \cdot q_{y_z+t-\tau})}{\sum_{\tau=t-n}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)} \quad \begin{array}{l} t > m \\ t > n \end{array}$$

Unsern Berechnungen lag stillschweigend die Annahme zugrunde, dass die Abfindungen innerhalb der gleichen Zeit ausgerichtet werden, wo die Witwe in Rentengenuss steht. — Aus unsern Voraussetzungen geht ebenfalls hervor, dass wir von der *temporären* Versicherung zu der *lebenslänglichen* übergehen durch  $y_z + m = \omega$ .

### b) Das Kapitaldeckungsverfahren.

Als *Kapitaldeckungsverfahren* definieren wir die Umlage der jährlich fällig werdenden Barwerte an Renten und Abfindungen auf den Bestand der Beitragspflichtigen. Die Ableitungen sollen vorerst einmal ohne und dann später mit Einschluss der Abfindungen vorgenommen werden.

In erster Linie bedürfen wir der Barwerte einer Witwenrente, zahlbar jährlich voraus bis zum Tode oder der Wiederverheiratung, höchstens aber bis zum Alter  $y_z + m$  letztmalig. Man darf sich auch hier vorstellen, dass dann die Witwenrente in die allgemeine Altersrente übergeht. Bei der Berechnung dieses Barwertes stützen wir uns auf die Untersuchung: «Grundlagen zur Sozialversicherung» von W. Friedli<sup>17 d)</sup>.

a) *Barwert der Witwenrente.* Beim Tode des Mannes hat die Frau allgemein das Alter  $[y]$ . Im nächsten Jahr erfolgen nach Gesetz keine Wiederverheiratungen. Es werde nun eine geschlossene Gesamtheit  $l_{[y]}^{ww}$  neuentstandener Witwen beobachtet, jedes Jahr wird den unverheiratet überlebenden die Summe 1 ausbezahlt. Wie früher bezeichne  ${}^wq_y$  die unabhängige Sterbewahrscheinlichkeit und  ${}^wq_y$  die unabhängige Wiederverheiratuingswahrscheinlichkeit. In vollständiger Analogie zum gewöhnlichen Rentenbarwert  $a$  entstehen die diskontierten Zahlungen:

1. Jahr  $D_{[y]}^{ww} = v^y \cdot l_{[y]}^{ww}$
2. Jahr  $D_{[y]+1}^{ww} = v^{y+1} \cdot l_{[y]+1}^{ww} = v^{y+1} \cdot l_{[y]}^{ww} (1 - {}^wq_y)$
3. Jahr  $D_{[y]+2}^{ww} = v^{y+2} \cdot l_{[y]+2}^{ww} = v^{y+2} \cdot l_{[y]+1}^{ww} (1 - {}^wq_{y+1}) (1 - {}^wq_{y+1})$

usw.

Für die  $n$  Jahre laufende Witwenrente erhalten wir somit:

$${}_na_{[y]}^{ww} = \frac{N_{[y]}^{ww} - N_{[y]+n}^{ww}}{D_{[y]}^{ww}}$$

b) *Barwert der Abfindung.* Die Abfindung betrage 1, zahlbar im Falle der Wiederverheiratung, durchschnittlich also in der Jahresmitte. Aus dem Stamme  $l_{[y]}^{ww}$  der neuentstandenen Witwen kommen daher die folgenden diskontierten Beträge zur Auszahlung:

1. Jahr: keine Wiederverheiratungen möglich.
2. Jahr  $D_{[y]+1}^{wh} = v^{y+1+\frac{1}{2}} \cdot l_{[y]+1}^{ww} \cdot {}^wq_{y+1}$
3. Jahr  $D_{[y]+2}^{wh} = v^{y+2+\frac{1}{2}} \cdot l_{[y]+2}^{ww} \cdot {}^wq_{y+2}$

usw.

Dabei ist festzuhalten, dass diesmal die abhängigen Wahrscheinlichkeiten auftreten. Der Barwert der temporären Abfindung 1 beträgt demnach:

$${}_nA_{[y]}^{wh} = \frac{N_{[y]+1}^{wh} - N_{[y]+n}^{wh}}{D_{[y]}^{wo}}$$

Zur Berechnung der jährlich fällig werdenden Rentenkapitalien lassen wir die Abfindung vorerst beiseite, die Eröffnungsgesamtheit soll aber noch in Betracht kommen. Greifen wir auf Formel (7) zurück, wobei uns ja diese Beziehung zur Berechnung der Erneuerungszahl diene, so erkennen wir, dass die beiden Summen uns die durch Tod aus der Anfangsgesamtheit und vom Neuzugang ausscheidenden Elemente darstellen. Schematisch konnten diese beiden Summen in der folgenden Formel (8) in eine einzige vereinigt werden. Es stellt uns also

$$\frac{1}{l_z} \sum_{\tau=-w+z}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

die Zahl der aus dem Gesamtbestand ausscheidenden Mitglieder dar. Andererseits ist die Grösse des Gesamtbestandes gegeben durch (6 a):

$$\sum_{\tau=-w+z}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Der Vorteil dieser Darstellungsart liegt darin, dass die Formeln auch noch unverändert gelten, wenn der Anfangsbestand ausgestorben ist.

Ferner stellt uns

$$\frac{1}{l_z} B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

die Anzahl der im Alter  $z + t - \tau$  sterbenden Mitglieder dar. Vorausgesetzt, dass der Tod durchschnittlich in der Jahresmitte eintrete, sind darunter

$$\frac{1}{l_z} B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau} \cdot \theta_{z+t-\tau+\frac{1}{2}}$$

Verheiratete. Die koordinierte Witwe besitzt dabei das Alter

$$y_z + t - \tau + \frac{1}{2}$$

Diese Witwen treten nun in den Genuss einer Witwenrente, durchschnittlich in der Mitte des Jahres. Die jüngste weist dabei das Alter  $y_z + \frac{1}{2}$  auf, die älteste  $y_z + m - \frac{1}{2}$ . Bei der Summation variiert also  $\tau$  von  $\tau = t$  bis  $\tau = t - m + 1$ . Damit ist die Summe der neuentstandenen und rentengenössigen Witwen dargestellt durch:

$$\frac{1}{l_z} \sum_{\tau=t-m+1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau} \cdot \theta_{z+t-\tau+\frac{1}{2}}$$

Die  $y_z + t - \tau + \frac{1}{2}$ -jährige Witwe zieht ihre Rente bis zum Alter  $y_z + m$  (inklusive), die Rente läuft demnach noch  $m - t + \tau + \frac{1}{2}$  Jahre. Nach der entsprechenden Formel ist der Barwert dieser Rente aber:

$$|_{m-t+\tau+\frac{1}{2}} a_{[y_z+t-\tau+\frac{1}{2}]}^{vw} = a^{vw}(t - \tau)$$

Der Kapitalwert für den ganzen entstehenden Bestand ist demnach:



$$\frac{v^{\frac{1}{2}}}{l_z} \sum_{\tau=t-m+1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau} \cdot \theta_{z+t-\tau+\frac{1}{2}} \cdot a^{ww}(t-\tau)$$

Mit  $P_t$  bezeichnen wir den Beitrag nach dem Kapitaldeckungsverfahren ohne Einschluss der Abfindung. Wir finden damit:

$$P_t = \frac{v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=t-m+1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau} \cdot \theta_{z+t-\tau+\frac{1}{2}} \cdot a^{ww}(t-\tau)}{l_z \sum_{\tau=t-n}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)}$$

Wir können nun sofort auch die Abfindung einschliessen. An die  $y_z + t - \tau + \frac{1}{2}$ -jährige Witwe bindet sich der Barwert der Abfindung 1:

$$|_{m-t+\tau+\frac{1}{2}} A_{[y_z+t-\tau+\frac{1}{2}]}^{wh} = A^{wh}(t-\tau)$$

Die Abfindung betrage wieder das  $k$ -fache der Rente. Damit ist der Beitrag unter Einschluss der Abfindung  $P_t^{(a)}$  gegeben durch:

$$P_t^{(a)} = \frac{v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=t-m+1}^t B(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau} \cdot \theta_{z+t-\tau+\frac{1}{2}} (a^{ww}(t-\tau) + kA^{wh}(t-\tau))}{l_z \sum_{\tau=t-n}^t B(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)}$$

### c) Praktische Beispiele.

Anhand der praktischen Beispiele haben wir uns nun auch über die absoluten Grössenverhältnisse zu orientieren. Dabei ist speziell die Frage zu untersuchen,

welcher Art der Einfluss der wechselnden Vermehrung in der Witwenversicherung ist. In der Altersrentenversicherung haben wir bereits eine Erhöhung der Beiträge erkennen müssen.

Grundsätzlich haben wir bei dieser Untersuchung zwei Fälle zu unterscheiden: der Anfangsbestand der Witwen wird in die Versicherung aufgenommen, oder aber man beschränkt sich darauf, die neuentstehenden Witwen zu versichern. Es versteht sich, dass im letzten Falle die Beiträge nur zu einer Zeit betrachtet werden dürfen, wo alle Jahrgänge besetzt sind.

Wir wollen den zweiten Fall als verhältnismässig einfacher vorwegnehmen. In unsern Formeln wurde stillschweigend eine konstante Sterblichkeit vorausgesetzt. Bei gleicher Alterszusammensetzung wäre also stets eine gleiche Anzahl entstehender Witwen zu erwarten. Nun ändert sich unsere Altersstruktur im Sinne einer Veraltung, die Jahrgänge mit grösserer Sterbewahrscheinlichkeit und auch grösserer Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein, nehmen relativ zu. Es ist also anzunehmen, dass sich im Laufe der Jahre eine relativ grössere Zahl von rentenberechtigten Witwen einstellt, die auch nach einer *Zunahme* des Beitrages verlangt.

Der schweizerische Entwurf für die Alters- und Hinterlassenenversicherung sieht vor, dass allen in den Altern 50 bis 64 entstehenden Witwen bis zum Genuss der allgemeinen Altersrente eine Witwenrente zukommt. Die heute vorhandenen Witwen werden in die Versicherung nicht aufgenommen, ebenso erhalten die unter 50 Jahren verwitwenden Frauen eine einmalige Abfindung. Berechnet man in diesem Falle den Umlagebeitrag (reines Umlageverfahren), so haben wir die Verhältnisse beim soeben besprochenen Typus. Die Grundzahlen zu dieser Berechnung wurden uns in freundlicher

Weise durch das *Bundesamt für Sozialversicherung in Bern* zur Verfügung gestellt. In *Tabelle 4* stellen wir die Beiträge für die Rente 100 dar, gleichzeitig vergleichen wir mit dem Umlagebeitrag für eine gleichgrosse Altersrente, die vom Alter 65 hinweg bezogen wird. Die Prämienpflicht beginnt beim Alter 20. *Darstellung 5* erläutert den Funktionsverlauf und gibt auch die relative Zunahme wieder.

*Tabelle 4.* Entwicklung des Umlagebeitrages.

Jahr (Beginn)	Witwen- versicherung	Altersrenten- versicherung
1950	3. 24	13. 30
1955	3. 34	13. 38
1960	3. 49	13. 48
1965	3. 67	14. 32
1970	3. 80	15. 64
1975	3. 83	16. 25
1980	3. 81	16. 31
1985	3. 77	16. 10
1990	3. 74	15. 85
1995	3. 72	15. 68
2000	3. 71	15. 61
∞	3. 77	15. 89

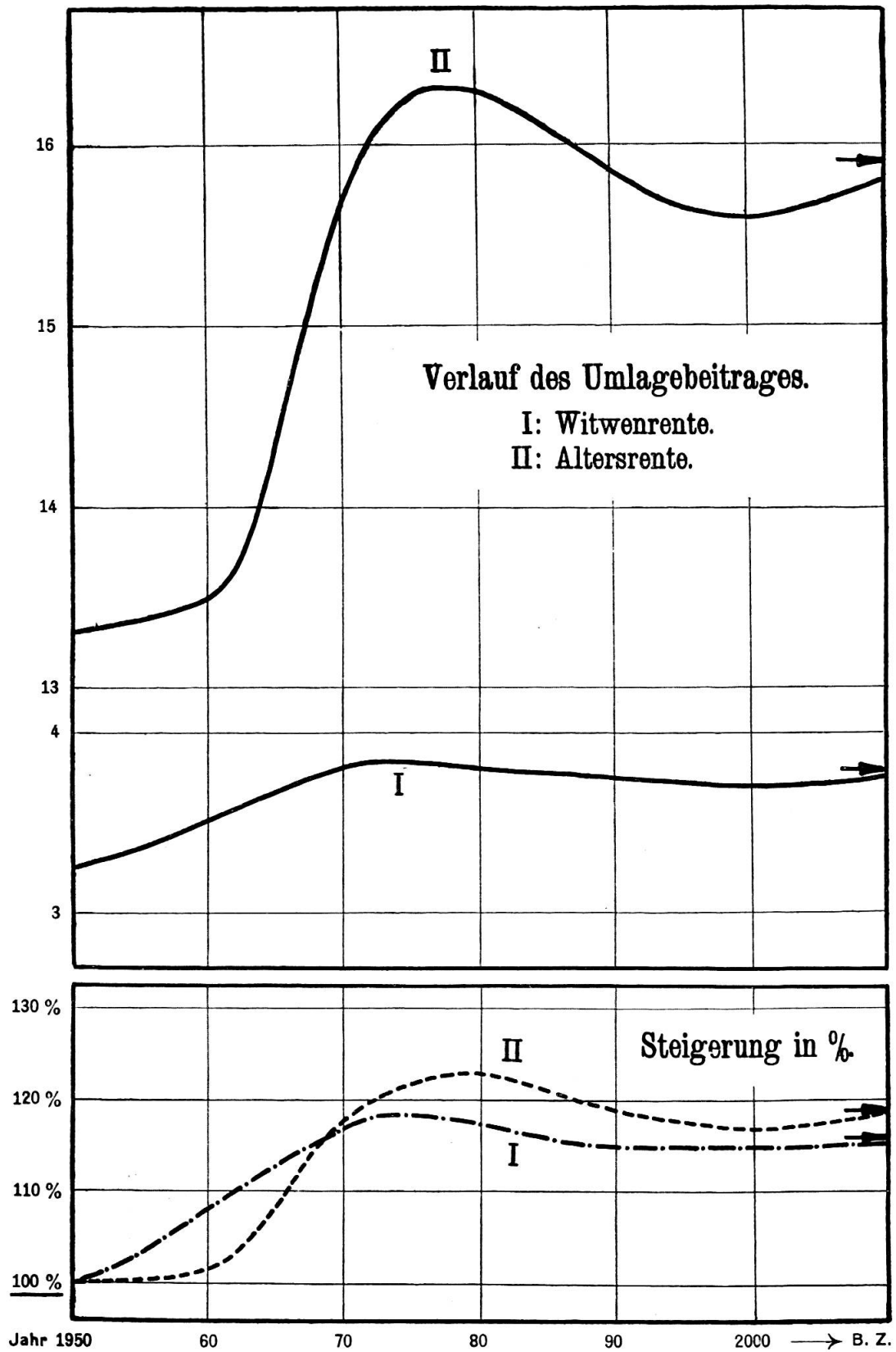
Beide Werte nehmen zu, der Beitrag für die Altersrente verhältnismässig etwas stärker als der für die Witwenrente. Der Unterschied in der Beitragssteigerung wäre noch ausgeprägter, wenn auch jüngere Witwen in die Versicherung eingeschlossen wären; der starken Zunahme in der Altersrentenversicherung stünde die bedeutend *kleinere* in der Witwenversicherung gegenüber.

Besonderes Interesse erweckt nun aber der erste Fall, wo die bei der Eröffnung vorhandenen Witwen in unmittelbaren Rentengenuss treten. Wir führen sofort ein Beispiel an. Der Umlagebeitrag für die Rente 100 ist einmal berechnet für die schweizerische Bevölkerung nach dem Stande 1920, sodann für den Beharrungszustand, wobei hier die gleichen Voraussetzungen getroffen wurden wie schon früher. Um den Einfluss der Altersgruppierung besser zu erkennen, führen wir 3 Varianten durch: die Witwenrente läuft einmal zwischen den Altern 20 und 59, dann zwischen 20 und 64 und endlich vom Alter 20 an lebenslänglich. In der folgenden *Tabelle 5* stellen wir die Ergebnisse zusammen und vergleichen gleichzeitig mit der Altersrentenversicherung.

*Tabelle 5.* Umlagebeiträge.

Witwenversicherung				
Rentengenuss zwischen den Altern	Prämien- pflicht in den Altern	Umlagebeitrag für die Rente 100		Steigerung %
		1920	∞	
20—59	20—59	7.24	5.91	— 18,4
20—64	20—64	9.26	8.03	— 13,3
20—∞	20—64	16.47	17.50	+ 6,3
Altersrentenversicherung				
Rentengenuss zwischen den Altern	Prämien- pflicht in den Altern	Umlagebeitrag für die Rente 100		Steigerung %
		1920	∞	
60—∞	20—59	16.07	23.16	+ 44,1
65—∞	20—64	9.34	13.86	+ 48,4

Darstellung 5.



*Ergebnis:* Die Veränderung des Beitrages verhält sich verschieden, ob die Rente nur temporär oder lebenslänglich ausbezahlt wird. Im letzten Fall erhalten wir gegen den Beharrungszustand hin ebenfalls eine *Zunahme* des Umlagebeitrages, bei temporärer Zahlungsweise dagegen eine *Abnahme*. Diese auf den ersten Blick sonderbare Tatsache lässt sich wie folgt erklären. Wir haben bereits bei der Besprechung der Tabelle 3 darauf hingewiesen, dass für 1920 die Jahrgänge 40—60 als Folge der Grippeepidemie sehr stark besetzt sind. Die Veraltung der Bevölkerung hat in diesen Jahrgängen die übermässige Besetzung nicht zu kompensieren vermocht, so dass der Umlagebeitrag abnehmen muss. Betrachtet man hingegen alle Witwen über 20, so hat die zunehmende Alterung diese ungewöhnliche Struktur auszugleichen vermocht, so dass der Beitrag zunimmt.

### **Zusammenfassung.**

Am Schlusse unserer Untersuchung angelangt, wollen wir die hauptsächlichsten Ergebnisse zusammenfassen.

1. Die Voraussetzung, dass die Geburtsverhältnisse auf dem heutigen Stand bleiben oder sich weiterhin verschlechtern, zieht eine Veraltung der Bevölkerung nach sich.

2. Die Steigerung der Beiträge ist in der Altersrentenversicherung ausgeprägter als in der Witwenversicherung, insofern im Eröffnungszeitpunkt nicht aussergewöhnliche Verhältnisse herrschen.

3. Sollen in der Praxis die Umlagesysteme zur Durchführung kommen, so bildet die stete Steigerung der Beiträge für das ganze Versicherungswerk eine ernstliche Gefahr. Man wird deshalb das Umlageverfahren nicht

rein anwenden, sondern in einer Kombination mit dem Deckungsverfahren. Auch der schweizerische Entwurf für die Alters- und Hinterlassenenversicherung berücksichtigt diese Verhältnisse, indem er feste, von der Zeit unabhängige Beiträge festsetzt <sup>20)</sup> <sup>21)</sup> <sup>22)</sup>. Zur restlichen Deckung wird ein Fonds angesammelt und Abgaben auf Tabak und gebrannten Wassern erhoben.

### **Schluss.**

Die Sozialversicherung hat zwei bis heute nur lose verbundene Wissenschaften unlösbar miteinander verknüpft: die Bevölkerungsstatistik und Versicherungstechnik. Ohne Kenntnis der statischen und dynamischen Faktoren in der Bevölkerung können die grundlegenden versicherungstechnischen Fragen nicht gelöst werden; die Untersuchung der Bevölkerungsbewegung wiederum sieht in der Sozialversicherung ihre Ergebnisse praktisch verwendet. Es ist vorauszusehen, dass auch die neue schweizerische Volkszählung vom 1. Dezember 1930 in dieser Richtung hin befruchtend wirkt und zum Studium weiterer Fragen Anlass bietet.

*Bern, 22. Dezember 1930.*

---

### Literaturnachweis.

(Abkürzung: M. V. S. V. = Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.)

- 1) *W. Friedli*: Intensitätsfunktion und Zivilstand.  
M. V. S. V., Heft 21, 1926.
- 2) *P. Stein*: Die Übervölkerung der Schweiz.  
Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft,  
64. Jahrgang, Heft 1, 1928.
- 3) Näheres über die Verhulstsche Vermehrungsformel (Literatur  
usw.) siehe z. B. in:  
*E. Zwinggi*: Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen.  
M. V. S. V., Heft 24, 1929.
- 4) *W. Friedli*: Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters-  
und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz. Bern 1928.
- 5) *Jar. Stránský — Jar. Bulina*: The development of population  
in the Czechoslovak Republic.  
Aktuárské Vědy, Ročník I, Číslo 1, Prag 1929.
- 6) *Statistisches Reichsamt*: Beiträge zum deutschen Bevölkerungs-  
problem.  
Sonderhefte zu Wirtschaft und Statistik, Nr. 5, Berlin 1929.
- 7) *Statistisches Reichsamt*: Die Bewegung der Bevölkerung in den  
Jahren 1922 und 1923.  
Statistik des Deutschen Reiches, Band 316, Berlin 1926.
- 8) *A. J. Lotka*: The progressive adjustment of age distribution to  
fecundity.  
Journal of the Washington Academy of Sciences, Vol. 16,  
Nr. 19, 1926.
- 9) *E. J. Gumbel*: Ein Versuch eines mathematischen «Gesetzes» der  
Bevölkerungszunahme.  
Deutsches statistisches Zentralblatt 1921.
- 10) *H. Wyss*: Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eid-  
genössischen Versicherungskasse.  
M. V. S. V., Heft 24, 1929.



- <sup>11)</sup> Der streng mathematische Beweis für  $B(t) = \text{konstant}$  ist gegeben in:  
*E. Zwinggi*: Zum Problem der Erneuerung.  
Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, Heft 1, Berlin 1931.
- <sup>12)</sup> Wir verweisen hier ausser auf die bereits angegebene Untersuchung von *H. Wyss* über die Schwingungen im Vorgangsverlauf noch auf:  
*W. Friedli*: Über die Stabilität der gegenseitigen Hilfskassen.  
Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, 63. Jahrgang, Heft 3, 1927.
- <sup>13)</sup> *A. J. Lotka*: Biometric functions in a population growing in accordance with a prescribed law.  
Proceedings of the Nat. Academy of Sciences, Vol. 15, Nr. 10, 1929.
- <sup>14)</sup> *Ch. Moser*: Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes in einer sich erneuernden Gesamtheit.  
M. V. S. V., Heft 21, 1926.
- <sup>15)</sup> *G. Schärtlin*: Die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten.  
Zeitschrift für schweizerische Statistik, Bern 1889.
- <sup>16)</sup> *J. Riethmann*: Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben.  
M. V. S. V., Heft 3, 1908.
- <sup>17 a-d)</sup> *W. Friedli*: Grundlagen zur Sozialversicherung.  
Heft 1: Zivilstand und Ausscheidewahrscheinlichkeit der schweizerischen Bevölkerung nach den Beobachtungen 1901—1910. — Bern, 9. I. 1925.  
Heft 2: Die Ausscheideintensitäten der schweizerischen Bevölkerung nach den Beobachtungen 1901 bis 1910. — Bern, 29. V. 1925.  
Heft 3: Die technischen Grundlagen für die allgemeine Alters- und Invalidenversicherung der Männer. — Bern, 10. VI. 1925.  
Heft 4: Technische Grundlagen der Witwenversicherung. — Bern, 1. IX. 1925.  
Die Hefte sind nur als Manuskript vorhanden.
- <sup>18)</sup> *M. Ney*: Détermination de la probabilité de mariage, de divorce et de décès d'après les classes d'état civil de la population suisse pour la période 1901 à 1910.  
M. V. S. V., Heft 12, 1917.

- <sup>19)</sup> *Eidgenössisches Statistisches Bureau*: Eidgenössische Volkszählung vom 1. Dezember 1920.  
Schweizerische Statistische Mitteilungen, VII. Jahrgang 1925, 6. Heft.
- <sup>20)</sup> *W. Friedli*: Das Finanzsystem der eidgenössischen Alters- und Hinterlassenenversicherung.  
M. V. S. V., Heft 25, 1930.
- <sup>21)</sup> *W. Friedli*: Das Finanzsystem der schweizerischen Alters- und Hinterlassenenversicherung.  
Le assicurazioni sociali, Jahrgang VI, Nr. 2, Rom 1930.
- <sup>22)</sup> *W. Friedli*: Eine schweizerische Volksversicherung.  
Das Versicherungsarchiv, Nr. 5, 1. Jahrgang, Wien 1930.
- <sup>23)</sup> *K. Goldziher*: Methodische Untersuchungen zu den bevölkerungsstatistischen Grundlagen der schweizerischen Alters- und Hinterlassenenversicherung.  
Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft 66. Jahrgang, Heft 4, 1930.
-

