Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 25 (1930)

Artikel: Hauptgrössen der Witwenversicherung bei Einführung eines veränderlichen, exponentiellen Parameters für die Witwensterblichkeit

Autor: Jenzer, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967495

Hauptgrössen der Witwenversicherung bei Einführung eines veränderlichen, exponentiellen Parameters für die Witwensterblichkeit.

Von Dr. **Hans Jenzer**, Basel.

§ 1.

Problemstellung und Einführung eines exponentiellen Parameters.

Die vorstehende Arbeit, die auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Ch. Moser entstanden ist, befasst sich mit Personengesamtheiten, die zum Zwecke der Sozialversicherung, also zur gemeinsamen Tragung eines Risikos, gebildet worden sind.

Wir unterscheiden zwei Arten von Gesamtheiten, nämlich die geschlossene Gesamtheit und die offene Gesamtheit. In der geschlossenen Gesamtheit kommen Eintritte von neuen Mitgliedern oder Wiedereintritte von schon ausgeschiedenen nicht vor. Es wird sich daher nur um ausscheidende Elemente handeln, während bei einer offenen Gesamtheit stets neue Mitglieder eintreten können.

Für eine Sozialversicherungskasse ist es von weittragender Wichtigkeit, die Verhältnisse für eine offene sich stets erneuernde Gesamtheit und dann namentlich im Beharrungszustand zu kennen. Denn erst der Beharrungszustand ergibt uns einen Kompass, der zur

Beurteilung der Zukunft auf Grund gegebener Voraussetzungen dienen kann. Der Übergang von der geschlossenen zur offenen Gesamtheit kann mathematisch leicht vollzogen werden mit Hilfe der Integralgleichungen von Herrn Prof. Dr. Moser [1]).

Als Beispiel einer Personengesamtheit betrachten wir eine Gesamtheit von verheirateten Männern, die sich zur gemeinsamen Tragung eines Witwenrisikos gebildet hat. Es soll sich um eine sogenannte Witwenversicherungskasse handeln, die der Witwe eines verstorbenen Ehemannes eine Witwenrente entrichten muss.

Das Ausscheiden der Männer kann aus verschiedenen Gründen geschehen, wie Tod, Invalidwerden oder sonstiger Austritt. Bei den Frauen kommt als Ausscheidegrund namentlich der Tod und dann die Wiederverheiratung in Betracht. Ohne der Allgemeinheit unserer Betrachtungen Eintrag zu tun, soll als Ausscheidegrund aus der Gesamtheit lediglich das Absterben in Betracht gezogen werden. Bekanntlich hängt dann die Anzahl der Witwen sowohl von der Sterblichkeit der Männer als auch von der Sterblichkeit der Frauen ab. Aus den Beobachtungen, die an der schweizerischen Bevölkerung angestellt wurden, wie auch aus andern Absterbeordnungen geht hervor, dass die Sterblichkeit der Frauen gewöhnlich kleiner ist als die Sterblichkeit der gleichaltrigen Männer. Es wird deshalb interessant sein, die Sterblichkeit der Frauen zu variieren und zu untersuchen, welchen Einfluss sie auf das Witwenrisiko ausübt.

---

[1]) Vgl. Prof. Dr. Chr. Moser: Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, Bern 1926.)

Ähnliche Untersuchungen wurden schon von Herrn Dr. A. Alder [1]) vorgenommen und zwar unter der Voraussetzung, dass die Sterblichkeit der Frauen proportional der Sterblichkeit der Männer sei. Die folgenden Ausführungen sollen dazu eine Art Fortsetzung bilden, indem nun die beiden Sterblichkeiten nicht durch eine lineare, sondern durch eine Exponentialfunktion miteinander verbunden werden.

Von dieser Annahme ausgehend sollen nachstehend die Anzahl der Witwen, die Prämie und das Deckungskapital auf Grund der Variation der Sterblichkeit, die mit Hilfe eines Parameters λ vor sich gehen soll, untersucht werden, und zwar:

A. für eine geschlossene Gesamtheit,

B. für eine offene sich stets erneuernde Gesamtheit und

C. für den Beharrungszustand.

Damit die Auflösung der Integralgleichungen nicht mit zu grossen Schwierigkeiten verbunden werde, nehmen wir mit Herrn Dr. Alder als Ausscheideordnung der Männer und der Frauen das Dormoysche Gesetz mit den Parametern s und s_1 an. Dies empfiehlt sich auch aus dem Grunde, weil es bekanntlich auf eine konstante Intensitätsfunktion und damit auf eine konstante Erneuerungsfunktion führt.

Das Dormoysche Gesetz lautet:

für die Männer: $\quad l_x = k \cdot s^x \quad$ und

für die Frauen: $\quad l_y = k \cdot s_1^{\,y}$.

In der Dissertation Alder sind die beiden Grössen s und s_1 linear durch folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$s_1 = \lambda \cdot s\,.$$

[1]) Dr. A. Alder: Beiträge zur Kenntnis einiger Funktionen der Versicherungsmathematik. (Dissertation, Jahrbuch der philosophischen Fakultät II der Universität Bern. 1923.)

In unseren Untersuchungen soll nun der Parameter λ nicht ein Koeffizient, sondern ein Exponent sein. Es soll also gelten:

$$s_1 = s^\lambda$$

Mithin erhalten wir für jedes Alter x eine Konstante, nämlich:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{k \cdot s^{x+1}}{k \cdot s^x} = s$$

und für jedes Alter y ebenfalls eine Konstante, nämlich:

$$p_y = \frac{l_{y+1}}{l_y} = \frac{k \cdot s_1^{y+1}}{k \cdot s_1^y} = s_1 .$$

Nach Massgabe der Definition des Parameters λ folgt:

$$p_y = p_x^\lambda .$$

Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit der Frauen ist daher gleich einer Potenz der Überlebenswahrscheinlichkeit der Männer.

Wir können uns schon hier einigermassen ein Bild machen vom Einfluss des Parameters λ auf die Sterblichkeit. Ist nämlich $\lambda = 1$, so folgt $s_1 = s$, die Überlebenswahrscheinlichkeiten der Männer und der Frauen sind einander gleich, wir haben also nur eine einzige Ausscheideordnung.

Ist $\lambda < 1$, so folgt $s_1 > s$, da sowohl s als auch s_1 kleiner als 1 sind. Die Überlebenswahrscheinlichkeit der Frauen ist günstiger als die der Männer. In der Folge werden wir namentlich diesem Fall unsere besondere Aufmerksamkeit schenken, weil im allgemeinen, wie bemerkt, die Sterblichkeit der Frauen kleiner ist als die Sterblichkeit der Männer. Nimmt λ von 1 bis 0 ab, so wird die Sterblichkeit der Frauen stets kleiner, bis sie schliesslich bei $\lambda = 0$ zu null wird. Die Frauen würden alsdann stets das nächste Jahr überleben, und die Zahl der Frauen würde deshalb bei der geschlossenen Gesamtheit während der ganzen Dauer der Versicherung konstant bleiben.

Wird nun $\lambda > 1$, so wird $s_1 < s$, die Sterblichkeit der Frauen wird grösser als die Sterblichkeit der Männer. Die Überlebenswahrscheinlichkeit der Frauen wird für wachsende Werte von λ stets kleiner, bis sie schliesslich bei $\lambda = \infty$ zu null wird.

Was nun die negativen Werte von λ anbetrifft, so haben sie eigentlich nur theoretischen Wert, weil sie in der Praxis nicht vorkommen können. Dies folgt übrigens schon aus unserer Definitionsgleichung:

$$s_1 = s^\lambda ,$$

denn würde λ negativ werden, so hätte dies zur Folge, dass $s_1 > 1$ würde, was natürlich ausgeschlossen ist, da s_1 als Wahrscheinlichkeit nicht grösser als 1 sein kann.

A. Die geschlossene Gesamtheit.

§ 2.

Die Anzahl der Witwen.

Wir betrachten eine geschlossene Gesamtheit von H Männern. Nach der Zeit t wird die Anzahl der Männer infolge der durch den Tod ausgeschiedenen kleiner geworden sein; sie betrage alsdann noch $H \cdot p(t)$, wo $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Mann darstellt, nach der Zeit t der Gesamtheit noch anzugehören. Diese Wahrscheinlichkeit ist nach unserer Annahme über das Ausscheiden aus der Gesamtheit mit der t-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit identisch.

Sind aber die H Männer alle verheiratet, so werden im Anfang der Versicherung H Ehepaare vorhanden sein. Die Anzahl der Frauen wird zur Zeit t dann $H \cdot p_1(t)$ betragen, wo $p_1(t)$ die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der Frau ist. Analog wird die Anzahl der Witwen, die aus den ursprünglichen H Ehepaaren nach der Zeit t hervorgegangen sind und noch leben, $H \cdot \omega(t)$ betragen, wenn $\omega(t)$ die Wahrscheinlichkeit des versicherten Mannes darstellt, nach der Zeit t verstorben zu sein und eine noch lebende rentengenössige Witwe hinterlassen zu haben.

Mithin ist:

$$\omega(t) = (1 - p(t))\, p_1(t) = (1 - s^t)\, s_1^{\,t} = (1 - s^t)\, s^{\lambda t}.$$

Die Zahl der Witwen wird nun:

$$H \cdot \omega(t) = H \cdot (1 - s^t)\, s^{\lambda t}.$$

Im Anfang der Versicherung $(t = o)$ ist keine Witwe vorhanden, es wird $\omega(o) = o$. Im Laufe der Zeit tritt ein Maximum an Witwen auf. Später nimmt die Zahl der Witwen bis zu null ab. Das Maximum erhält man leicht nach bekannter Methode. Es tritt ein für die Zeit:

$$t = \frac{ln\ \lambda - ln\,(\lambda + 1)}{ln\ s}$$

In der folgenden Tabelle sind einige Werte von $100 \cdot \omega(t)$ zusammengestellt für $\lambda = 0$, $1/4$, $1/2$, 1 und $1\,1/2$ bei variablem t und bei $s = 0{,}97$. Die betreffenden Witwen gehen daher aus einer Gesamtheit von 100 ursprünglichen Ehepaaren nach der Zeit t hervor.

Tabelle I.

t	$100 \cdot \omega\,(t)$				$(s = 0{,}97)$
	$\lambda = 0$	$\lambda = {}^{1}/_{4}$	$\lambda = {}^{1}/_{2}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1^{1}/_{2}$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	14,12	13,70	13,09	12,13	11,24
10	26,26	24,33	22,55	16,36	16,63
15	36,67	32,72	29,18	23,22	18,48
20	45,62	40,39	33,64	24,81	18,29
25	53,30	44,06	36,42	24,89	17,01
30	59,90	47,67	37,93	24,02	15,21
35	65,56	50,22	38,47	22,58	13,25
40	70,43	51,94	38,30	20,83	11,32
45	74,60	52,75	37,60	18,95	9,55
50	78,19	52,43	36,51	17,05	7,97
60	83,92	53,14	33,65	13,50	5,41
80	91,26	49,62	26,99	7,98	2,36
100	95,24	44,48	20,77	4,53	0,99
∞	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aus der Tabelle I wie auch aus der graphischen Darstellung I entnehmen wir das folgende Resultat:

Mit zunehmendem Parameter λ nimmt die Zahl der Witwen ab. Über den Eintritt des Maximums und der entsprechenden Witwenzahl gibt uns die Tabelle II Aufschluss.

Tabelle II.

λ	$t_{max.}$	$\omega\,(t_{max.})$	λ	$t_{max.}$	$\omega\,(t_{max.})$
0	∞	1,0000	1	22,76	0,2500
${}^{1}/_{8}$	72,14	0,6754	$1^{1}/_{2}$	16,77	0,1849
${}^{1}/_{4}$	52,84	0,5350	2	13,31	0,1482
${}^{3}/_{8}$	42,66	0,4468	3	9,45	0,1055
${}^{1}/_{2}$	36,07	0,3849	5	5,99	0,0670
${}^{5}/_{8}$	31,30	0,3389	10	3,13	0,0350
${}^{3}/_{4}$	27,82	0,3027	∞	0,00	0,0000
${}^{7}/_{8}$	25,00	0,2738			

Aus vorstehender Gleichung für die Zahl der Witwen sowie aus obiger Tabelle erhalten wir das folgende Resultat:

Mit zunehmendem Parameter λ tritt das Maximum an Witwen früher ein und wird kleiner.

§ 3.

Die Kurve der Witwenmaxima.

Die Kurve der Witwenmaxima $M(t)$, also der geometrische Ort der Maxima der Witwenkurven, erhält man durch Elimination des Parameters λ aus:

$$\omega\,(t) = (1 - s^t)\, s^{\lambda t}$$

und der Abszisse des Maximums:

$$t = \frac{1}{\ln s}\Big(\ln \lambda - \ln(1 + \lambda)\Big)$$

Diese Elimination führt uns auf folgende Exponentialfunktion:

$$M\,(t) = (1 - s^t)\, s^{t\frac{s^t}{1-s^t}}$$

Hierin bedeutet t die Dauer der Versicherung. Wir wollen nun t ganz allgemein als Variable betrachten und den Verlauf obiger Kurve etwas näher studieren.

Für $t = 0$ wird $M(t) = 0$ und für $t = \infty$ ist $M(t) = +1$. Wächst daher t von 0 bis ∞, so nimmt $M(t)$ von 0 bis $+1$ zu. Für negative Werte von t wird $M(t)$ negativ. Für $t = -\infty$ wird dann $M(t) = -1$. Die beiden Maximaordinaten von $t = +\infty$ und $t = -\infty$ sind also gleich gross, aber entgegengesetzt. Dies gilt aber nicht nur für die Werte $t = +\infty$ und $t = -\infty$, sondern für alle Werte von t, wie die folgende Entwicklung zeigt:

$$M(t) = (1 - s^t)\, s^{t\frac{s^t}{1-s^t}} = \frac{s^{-t} - 1}{s^{-t}}\, s^{t\frac{1}{s^{-t}-1}} =$$

$$= -(1 - s^{-t})\, s^{-t\frac{s^{-t}}{1-s^{-t}}}$$

und hieraus folgt:

$$M(+t) = -M(-t)\,.$$

Zwei entgegengesetzte Werte von t ergeben entgegengesetzt gleiche Funktionswerte $M(t)$.

Die Ableitungen von $M(t)$ nach t ergeben:

$$\frac{dM}{dt} = s^{\frac{t}{1-s^t}} \left(\frac{t}{1-s^t}\right) ln^2 s$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = s^{\frac{t}{1-s^t}} \left[\frac{1 - s^t + ln\, s^t}{1 - s^t}\right] \left[\frac{1 - s^t + s^t\, ln\, s^t}{(1 - s^t)^2}\right] ln^2 s.$$

Die gleich null gesetzte zweite Ableitung ergibt für $t = 0$ einen Wendepunkt. Wir untersuchen nun noch näher den Einfluss der Grösse s auf die Maximakurve. s stellt bekanntlich eine Wahrscheinlichkeit dar. Deshalb wird sich s zwischen 0 und 1 bewegen können. Betrachten wir vorerst die beiden Grenzfälle $s = 1$ und $s = 0$.

1. $s = 1$. Um die Maximakurve für diesen Fall zu erhalten, machen wir folgenden Grenzübergang:

Wir setzen $s = 1 - h$, wo h gegen null konvergieren soll. Für $M(t)$ folgt dann:

$$M(t) = [1 - (1-h)^t]\,(1-h)^{t\frac{(1-h)^t}{1-(1-h)^t}}$$

Hierin können wir $(1-h)^t$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und die höheren Potenzen von h vernachlässigen. Es ist daher:

$$(1-h)^t = 1 - h \cdot t$$

$$M(t) = h \cdot t \cdot (1-h)^{\frac{1-ht}{h}}$$

$(1-h)^{\frac{1-ht}{h}}$ kann man wieder nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln:

$$(1-h)^{\frac{1-ht}{h}} = 1 - h\left(\frac{1-ht}{h}\right) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{1-ht}{h}\right)\left(\frac{1-ht}{h} - 1\right) -$$

$$- \frac{h^3}{3!}\left(\frac{1-ht}{h}\right)\left(\frac{1-ht}{h} - 1\right)\left(\frac{1-ht}{h} - 2\right) + \ldots$$

$$= h \cdot t + \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots\right] -$$

$$- h^2\, t\,[\ldots] + \ldots$$

Werden die höheren Potenzen von h vernachlässigt, so folgt für

$$M(t) = h \cdot t \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots\right] = \frac{h}{e} \cdot t.$$

Hieraus ergibt sich für $h = 0$ sofort $M(t) = 0$, d. h. für den Grenzfall $s = 1$ wird die Maximakurve durch die Abszissenachse dargestellt.

Obige Entwicklung wurde unter der Annahme, dass h sehr klein sei, durchgeführt, sie gilt aber auch, wenn t klein gewählt wird. Wir erhalten deshalb das folgende Resultat:

Die Maximakurve verläuft für s nahe 1 in der Umgebung des Wendepunktes ($t = 0$) annähernd linear. Die Kurve kann daher in der Umgebung von $t = 0$ durch die Gerade

$$M(t) = \frac{h}{e} \cdot t$$

ersetzt werden.

2. Der Grenzfall $s = 0$.

Für $0 < t \leqq \infty$ wird $M(t) = +1$,

für $-\infty \leqq t < 0$ wird $M(t) = -1$

und für $t = 0$ wird $M(t) = 0$.

Die betreffende Kurve wird daher im Intervall $0 < t < \infty$ durch die Gerade $M(t) = 1$ und im Intervall $-\infty < t < 0$ durch die Gerade $M(t) = -1$ dargestellt. Im Punkte $t = 0$ verläuft die Kurve unstetig, indem sie von -1 durch null nach $+1$ überspringt.

Über den Einfluss von s innerhalb dieser beiden Grenzfälle gibt uns die Tabelle III Aufschluss:

Die graphische Darstellung II gibt ein deutliches Bild vom Einfluss der Grösse s auf die Maximakurve. Liegt s im Intervall $0 < s < 1/2$, so steigen die Kurven sehr rasch an. Anderseits werden die Kurven stark beeinflusst durch eine Variation von s in der Umgebung von $s = 1$. Ferner sieht man aus der Tabelle III deutlich, wie die Funktion $M(t)$ für kleine Werte von t nahezu proportional der Zeit zunimmt. So verläuft $M(t)$ für $s = 0{,}99$ bis zu $t = 20$ gradlinig, wenn nur 4 Dezimalstellen berücksichtigt werden.

Tabelle III.

t	$M(t)$			
	$s = 0{,}5$	$s = 0{,}93$	$s = 0{,}97$	$s = 0{,}99$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2500	0,0267	0,0112	0,0037
3	0,6501	0,0799	0,0336	0,0111
5	0,8663	0,1328	0,0560	0,0185
10	0,9923	0,2613	0,1116	0,0370
15	0,9997	0,3817	0,1666	0,0554
20	1,0000	0,4912	0,2207	0,0738
30	1,0000	0,6712	0,3249	0,1105
40	1,0000	0,7986	0,4223	0,1469
50	1,0000	0,8817	0,5114	0,1820
80	1,0000	0,9797	0,7225	0,2880
100	1,0000	0,9942	0,8181	0,3549
150	1,0000	0,9998	0,9434	0,5070
200	1,0000	1,0000	0,9841	0,6346
∞	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

§ 4.

Die Prämie.

Wir nehmen an, die Prämie werde kontinuierlich berechnet, d. h. die Männer der geschlossenen Gesamtheit bezahlen die Prämie in jedem Zeitmoment dt. Ferner soll die Witwenversicherungskasse jeder Witwe in der Zeit 1 die Witwenrente 1 entrichten. Der Barwert sämtlicher Prämienleistungen (v = Diskontierungsfaktor) wird dann dargestellt durch:

$$H \cdot P \cdot \int_0^\infty v^t \, p\,(t)\, dt$$

und der Barwert sämtlicher Witwenrenten durch:

$$H \cdot \int_0^\infty v^t \, \omega\,(t)\, dt \, .$$

Da die beiden Barwerte einander gleich sein müssen, so folgt:

$$P = \frac{\int_0^\infty v^t \, \omega\,(t)\, dt}{\int_0^\infty v^t \, p\,(t)\, dt}$$

Durch Substitution der bekannten Werte $p\,(t)$ und $\omega\,(t)$ und Auswertung der Integrale erhält man nach einigen Umformungen folgenden Ausdruck für die Prämie:

$$P = \frac{(ln\, v + ln\, s)\, ln\, s}{(ln\, v + \lambda\, ln\, s)\,(ln\, v + ln\, s + \lambda\, ln\, s)}$$

Hierin wie auch in später vorkommenden Ausdrücken setzen wir zur Abkürzung:

$$a = ln \frac{1}{s}\text{, wo } a > 0 \text{ wird, da } s < 1 \text{ ist.}$$

Ferner ist $-\, ln\, v = \delta$, wo δ bekanntlich der logarithmische Diskont ist. Die Prämienformel geht dadurch über in:

$$P = \frac{a(\delta + a)}{(\delta + a\lambda)(\delta + a + a\lambda)}$$

Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass die Prämie eine Funktion der Sterblichkeit der Männer (s), des Parameters λ und des Zinsfusses ist.

Für $\lambda = 0$ erhält man die folgende Prämie:

$$P_0 = \frac{a}{\delta}$$

und für $\lambda = 1$ wird: $\quad P_1 = \dfrac{a}{2a + \delta}$

Bezeichnen wir mit P_0 die Prämie bei $\lambda = 0$ und mit P_1 die Prämie bei $\lambda = 1$ und bilden den Quotienten $\dfrac{P_0}{P_1}$, so folgt:

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{a(2a + \delta)}{a\,\delta} = 1 + 2\frac{a}{\delta} > 1\text{; folglich ist } P_0 > P_1.$$

Die erste Ableitung von P in Bezug auf λ ergibt für $\lambda = -\,{}^1\!/_2 - \dfrac{\delta}{a}$ den einzigen Extremwert. Wir kommen deshalb zu folgendem Resultat:

Mit zunehmendem Parameter λ wird die Prämie verkleinert.

Setzen wir speziell $\delta = a$, so ist:

$$P_0 = 1 \quad \text{und} \quad P_1 = {}^1\!/_3\,.$$

In Worten:

Würden während der ganzen Dauer der Versicherung keine Frauen sterben und wäre die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit der Männer gleich dem Diskontierungsfaktor v, so würde die Prämie gleich gross sein wie die zu entrichtende Witwenrente.

Sind aber Männer und Frauen demselben Dormoyschen Sterbegesetz unterworfen und ist dabei die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit gleich v, so ist die Prämie gleich dem dritten Teil der Versicherungsleistung.

Über den Einfluss des Zinsfusses auf die Prämie kann folgendes gesagt werden:

Ist die Verzinsung null, so wird $P_0 = \infty$ und $P_1 = 1/2$.

Bei gleicher Sterblichkeit der Männer und der Frauen ist daher die Prämie gleich der Hälfte der Versicherungsleistung, wenn die Verzinsung null ist.

Durch Erhöhung des Zinsfusses wird sowohl P_0 als auch P_1 verkleinert. Die erste Ableitung von P nach δ liefert uns für:

$$\delta = a\left(-1 \pm \sqrt{\lambda(1-\lambda)}\right)$$

zwei Extrema. Die beiden Extremwerte werden aber für unsere getroffenen Annahmen über λ imaginär; deshalb schliessen wir:

Durch Erhöhung des Zinsfusses wird die Prämie erniedrigt.

Analoge Verhältnisse haben wir beim Einfluss der Sterblichkeit der Männer auf die Prämie.

Ist $s' > s$, so wird $\frac{1}{s'} < \frac{1}{s}$, also

$ln \frac{1}{s'} < ln \frac{1}{s}$ oder $a' < a$; daher wird:

$$P_0' < P_0 \quad \text{und} \quad P_1' < P_1.$$

Auch hier besitzt P in Bezug auf a keinen Extremwert zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$; denn:

$$a = \frac{-\delta}{1 \pm \lambda}$$

ergibt uns für $0 < \lambda < 1$ ein unmögliches Resultat. Wir schliessen daher:

Eine günstigere Überlebenswahrscheinlichkeit der Männer hat eine Erniedrigung der Prämie zur Folge.

Die obigen Ausführungen über die Prämie werden durch Tabelle IV und Tabelle V sowie durch die graphische Darstellung III bestätigt.

Tabelle IV.

$100 \cdot i$	$100 \cdot P \quad (s = 0{,}966)$				
	$\lambda = 0$	$\lambda = {}^1/_4$	$\lambda = {}^1/_2$	$\lambda = {}^3/_4$	$\lambda = 1$
0	∞	320,00	133,33	76,19	50,00
1	347,64	155,75	91,45	60,90	43,71
2	174,68	104,91	70,75	51,24	38,96
3	117,02	79,78	58,15	44,35	35,03
3,5	100,56	71,40	53,50	41,68	33,39
4	88,19	64,68	49,58	39,28	31,91
5	70,90	54,56	43,35	35,32	29,32
6	59,36	47,29	38,59	32,11	27,14
10	36,29	31,20	27,11	23,78	21,03
∞	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabelle V.

$10 \cdot s$	$10 \cdot P$ $(i = 0{,}035)$				
	$\lambda = 0$	$\lambda = {}^1/_4$	$\lambda = {}^1/_2$	$\lambda = {}^3/_4$	$\lambda = 1$
0	∞	32,000	13,333	7,619	5,000
1	669,31	30,285	13,010	7,518	4,963
2	467,83	29,602	12,876	7,474	4,947
3	349,99	28,879	12,732	7,428	4,930
4	266,35	28,023	12,554	7,370	4,908
5	201,49	26,948	12,324	7,292	4,879
6	148,49	25,532	12,003	7,186	4,837
7	103,68	23,026	11,515	7,015	4,770
8	64,86	20,336	10,666	6,703	4,642
9	30,63	14,595	8,787	5,934	4,298
10	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000

Aus der graphischen Darstellung III erkennen wir weiter, dass eine gegebene Prämie durch einen höheren Zinsfuss und entsprechender Abnahme von λ kompensiert werden kann.

Berücksichtigen wir in der Prämienformel für λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so können wir über den Verlauf der Prämienfunktion innerhalb dieser Grenzen das Folgende bemerken:

Die Prämie wird durch eine Kurve dritter Ordnung dargestellt, die bei $\lambda = -\frac{\delta}{a}$ und $\lambda = -1 - \frac{\delta}{a}$ zwei Unstetigkeiten aufweist. Ist $-\left(1 + \frac{\delta}{a}\right) < \lambda < -\frac{\delta}{a}$, so wird die Prämie negativ. Ein Maximum an negativen Werten wird erreicht bei $\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{a}$. Für $\lambda > -\frac{\delta}{a}$

und $\lambda < -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{a}$ wird die Prämie positiv und bei $\lambda = \pm \infty$ wird $P = 0$. Die Prämienkurve schneidet die Abszissenachse im unendlich fernen Punkt.

§ 5.

Das Deckungskapital.

Nach der prospektiven Methode ist das Deckungskapital $H \cdot z(t)$ gleich dem Barwert der künftigen Kassenleistungen weniger dem Barwert der künftigen Prämienleistungen. Wird nun jeder Witwe die Rente 1 ausbezahlt, so beträgt der Barwert sämtlicher Kassenleistungen zur Zeit t bei kontinuierlicher Berechnung:

$$K = H \cdot \int_t^\infty v^{\tau - t} \, \omega(\tau) \, d\tau$$

und der Barwert sämtlicher Prämienleistungen:

$$\Pi = H \cdot P \cdot \int_t^\infty v^{\tau - t} \, p(\tau) \, d\tau \, .$$

Folglich wird das Deckungskapital:

$$H \cdot z(t) = H \cdot \int_t^\infty v^{\tau - t} \, \omega(\tau) \, d\tau - H \cdot P \cdot \int_t^\infty v^{\tau} \, p(\tau) \, d\tau$$

und auf die Einheit von H bezogen:

$$z(t) = \int_t^\infty v^{\tau - t} \, \omega(\tau) \, d\tau - P \cdot \int_t^\infty v^{\tau - t} \, p(\tau) \, d\tau \, .$$

Durch Substitution der bekannten Werte $\omega(\tau)$, $p(\tau)$, P und Ausrechnung der Integrale erhält man für das Deckungskapital folgenden Ausdruck:

$$z(t) = \frac{(\delta + a + a\lambda)\, s^{t\lambda} - (\delta + a\lambda)\, s^{(\lambda+1)t} - a\, s^t}{(\delta + a\lambda)(\delta + a + a\lambda)}$$

Das Deckungskapital der geschlossenen Gesamtheit ist demnach abhängig von der Sterblichkeit der Männer s, dem Parameter λ, dem Zinsfusse und der Versicherungsdauer t.

Wir untersuchen vorerst wieder die beiden Spezialfälle $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$.
Für $\lambda = 0$ erhält man:

$$z(t) = \frac{1}{\delta}(1 - s^t)\,.$$

Das Deckungskapital ist am Anfang der Versicherung null. Ist $t = \infty$, so wird:

$$z(\infty) = \frac{1}{\delta}$$

$z(\infty)$ kann nicht null werden, weil für $\lambda = 0$ die Sterblichkeit der Frauen null ist und daher die Zahl der Witwen für $t = \infty$ immer H beträgt; denn für $\lambda = 0$ ist:

$$\omega(t) = 1 - s^t \quad \text{und} \quad \omega(\infty) = 1\,.$$

Mithin: $$H \cdot \omega(\infty) = H\,.$$

Wir können das Deckungskapital im Falle $\lambda = 0$ auch durch die Zahl der Witwen ausdrücken:

$$z(t) = \frac{1}{\delta}\,\omega(t)\,.$$

Würde daher die Sterblichkeit der Frauen null sein, so würde das Deckungskapital bei konstantem Zinsfusse proportional der betreffenden Witwenzahl zunehmen.

Für $\lambda = 1$ wird das Deckungskapital:

$$z(t) = \frac{(1 - s^t)\, s^t}{\delta + 2a}$$

Ist $t = 0$, so wird $z(t) = 0$; ebenso ist $z(\infty) = 0$. Zwischen diesen beiden Werten nimmt $z(t)$ einen Maximalwert an bei

$$t = \frac{ln\, 2}{a}$$

Die Maximumabszisse ist nur abhängig von der Sterblichkeit der Männer. Ist $s = 0{,}966$, so tritt das Maximum bei $t = 20{,}033$ ein.

Bezeichnen wir mit z_0 das Deckungskapital bei $\lambda = 0$ und mit z_1 dasjenige bei $\lambda = 1$, so ist:

$$\frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{\delta}\, \frac{(1 - s^t)(\delta + 2a)}{s^t(1 - s^t)} = \frac{1}{s^t}\left(1 + 2\,\frac{a}{\delta}\right)$$

Es ist aber $$\frac{1}{s^t}\left(1 + 2\,\frac{a}{\delta}\right) > 1\,,$$

da a und $\delta > 0$ und $s^{-t} > 1$ ist; folglich:

$$z_0 > z_1\,.$$

Mit zunehmendem Parameter λ wird das Deckungskapital der geschlossenen Gesamtheit verkleinert.

Die hier gefundenen Resultate werden durch die Tabelle VI bestätigt.

Tabelle VI.

t	$z(t)$ $(s = 0{,}966$ $i = 0{,}035)$		
	$\lambda = 0$	$\lambda = {}^1/_2$	$\lambda = 1$
0	0,000	0,000	0,000
1	0,988	0,454	0,371
3	2,865	1,282	0,858
5	4,612	2,278	1,290
10	8,501	3,887	1,998
15	11,767	4,987	2,326
20	14,520	5,699	2,414
30	18,771	6,323	2,208
40	21,783	6,143	1,813
50	23,913	5,905	1,409
80	27,243	4,179	0,568
100	28,155	3,122	0,294
200	29,041	0,600	0,010
∞	29,069	0,000	0,000

§ 6.

Die Flächen.

Wir verstehen im folgenden unter der Fläche der Funktion $f(t)$ den Flächeninhalt F_f, der gegeben ist durch:

$$F_f = \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

F_f ist somit das Flächenstück, welches einerseits durch die Funktion $f(t)$ und anderseits durch die beiden Koordinatenaxen begrenzt wird. Dabei wird vorausgesetzt, dass für grosse t die Funktion $f(t)$, wie es nachstehend im allgemeinen der Fall sein wird, der Null zustrebt.

Wir wollen nun der Reihe nach die Flächen der 3 Funktionen $p(t)$, $\omega(t)$ und $z(t)$, die wir in den vorhergehenden Paragraphen bestimmt haben, berechnen.

1. Die Fläche der Funktion $p(t)$.

$p(t)$ stellt bekanntlich die Wahrscheinlichkeit für einen Mann dar, der Gesamtheit nach der Zeit t noch anzugehören. $H \cdot p(t)$ ist daher die Zahl der Männer, die der Gesamtheit nach t Jahren noch angehören. Es ist daher:

$$F_p = \frac{1}{H} \int_0^\infty H \cdot p(t)\, dt = \int_0^\infty s^t\, dt = \frac{1}{a}$$

die mittlere Dauer der Zugehörigkeit eines Mannes zur geschlossenen Gesamtheit. Da das Ausscheiden aus der Gesamtheit lediglich durch den Tod erfolgt, so ist die Fläche F_p auch gleich der mittleren vollen Lebensdauer.

2. Die Fläche der Funktion $\omega(t)$.

Die entsprechende Fläche, die wir mit F_ω bezeichnen, wird:

$$F_\omega = \int_0^\infty \omega(t)\, dt = \int_0^\infty (1 - s^t)\, s^{\lambda t}\, dt = \frac{1}{a \lambda (1 + \lambda)}$$

Die Fläche F_ω ist die sogenannte Witwenfläche. Sie ist sowohl abhängig von der Sterblichkeit der Frauen als auch von der Sterblichkeit der Männer.

3. Die Fläche der Funktion $z(t)$, die wir die Deckungskapitalfläche nennen, wird:

$$F_z = \int_0^\infty z(t)\, dt = \frac{\delta - a(\lambda^2 - \lambda - 1)}{a \lambda (1 + \lambda)(\delta + a \lambda)(\delta + a + a \lambda)}$$

Die Deckungskapitalfläche ist ausser von s und λ auch vom Zinsfusse abhängig.

Zwischen diesen drei Flächen F_p, F_ω und F_z besteht eine Relation [1]). Multiplizieren wir in der Tat die Fläche F_p mit der Prämie P und die Deckungskapitalfläche mit dem logarithmischen Diskont δ und addieren die beiden Produkte, so erhält man die Witwenfläche F_ω.

Es ist nämlich:

$$F_p \cdot P + F_z \cdot \delta = \frac{1}{a\,\lambda\,(1+\lambda)}$$

was man leicht nach einigen Umformungen erhält. Es besteht daher zwischen den drei Flächen die folgende Relation:

$$F_p \cdot P + F_z \cdot \delta = F_\omega .$$

Die Dreiflächenrelation soll noch an zwei numerischen Beispielen geprüft werden.

1. $\lambda = 0{,}6, \quad s = 0{,}966, \quad i = 0{,}035.$

$$F_p = 28{,}9084, \; F_z = 470{,}21, \; F_\omega = 30{,}1125,$$
$$P = 0{,}48212, \quad \delta = 0{,}034401.$$

Es muss daher sein:

$$F_p \cdot P + F_z \cdot \delta = 30{,}1125.$$

In der Tat ist:

$$\begin{aligned} F_p \cdot P + F_z \cdot \delta &= 0{,}48212 \cdot 28{,}9084 + 470{,}21 \cdot 0{,}034401 \\ &= 13{,}9369 + 16{,}1757 = 30{,}1126\,. \end{aligned}$$

---

[1]) Siehe Prof. Dr. Moser: Vorlesung über Erneuerung und Beharrungszustand von Gesamtheiten. S.-S. 1926.

2. $\lambda = 1, \quad s = 0{,}966, \quad i = 0{,}035.$

$$F_p = 28{,}9084, \; F_z = 139{,}54, \; F_\omega = 14{,}4542.$$

$P = 0{,}33396$, $\delta = 0{,}034401$. Es muss daher sein:

$$F_p \cdot P + F_z \cdot \delta = 14{,}4542.$$

In der Tat erhalten wir:

$$\begin{aligned} F_p \cdot P + F_z \cdot \delta &= 28{,}9084 \cdot 0{,}33396 + 139{,}54 \cdot 0{,}034401 \\ &= 9{,}6541 + 4{,}8003 = 14{,}4544. \end{aligned}$$

Wie aus diesen Beispielen hervorgeht, stimmen die aus der Flächenrelation berechneten mit den direkt berechneten Werten bis auf die dritte Dezimalstelle überein.

Wir haben die Dreiflächenrelation aus den Funktionen $p(t)$, $\omega(t)$ und $z(t)$ der geschlossenen Gesamtheit abgeleitet. Die Relation gilt also für eine geschlossene Gesamtheit. Wir werden aber später sehen, dass sie auch abgeleitet werden kann aus den Grössen, die sich im Beharrungszustand einer offenen, sich stets erneuernden Gesamtheit ergeben.

B. Die offene, sich stets erneuernde Gesamtheit.

§ 7.

Die Integralgleichungen [1]).

Die offene Gesamtheit ist dadurch charakterisiert, dass immer neue Elemente in die Gesamtheit eintreten. Die Erneuerung der Elemente soll nun aber so vor sich

---

[1]) Siehe Prof. Dr. Moser: Vorlesung über Erneuerung und Beharrungszustand von Gesamtheiten. S.-S. 1926.

gehen, dass die ausscheidenden stets wieder durch neue ersetzt werden. Die Zahl der Elemente wird also während der ganzen Dauer der Versicherung konstant sein und H betragen.

Wird nun die Erneuerung im Momente zur Zeit τ dargestellt durch $H \cdot \varphi(\tau)\, d\tau$ Elemente, die in ihrem Aufbau genau der Anfangsgeneration entsprechen, so gilt unabhängig von der Zahl H die folgende Integralgleichung:

$$1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau. \qquad \text{I.}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Erneuerungsfunktion $\varphi(\tau)$ bestimmen.

Bindet sich an die geschlossene Gesamtheit irgendein Vorgang $H \cdot y(t)$, so kann dieser Vorgang auf die offene, sich stets erneuernde Gesamtheit übertragen werden. Ist der Vorgang für die offene Gesamtheit $H \cdot Y(t)$, so lässt sich $Y(t)$ aus folgender Integralgleichung bestimmen:

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau. \qquad \text{II.}$$

Betrachten wir als Vorgang die Entstehung von Witwen durch Wegsterben des Mannes, so können wir die Anzahl der Witwen $H \cdot \Omega(t)$ der offenen Gesamtheit aus folgender Integralgleichung bestimmen:

$$\Omega(t) = \omega(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, \omega(t-\tau)\, d\tau. \qquad \text{III.}$$

Analog kann das Deckungskapital $\mathrm{H} \cdot Z(t)$ der offenen, sich stets erneuernden Gesamtheit berechnet werden, wenn als Vorgang die Bildung und der Verbrauch des Deckungskapitals angenommen wird. Es ist dann:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau. \qquad \text{IV.}$$

§ 8.

Die Zahl der Witwen.

Die Zahl der Witwen $H \cdot \Omega(t)$ der offenen, sich stets erneuernden Gesamtheit berechnet sich aus der Integralgleichung III:

$$\Omega(t) = \omega(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, \omega(t-\tau)\, d\tau.$$

Hieraus lässt sich $\Omega(t)$ ohne weiteres bestimmen; denn die Funktion $\omega(t)$ ist uns aus § 2 bekannt. Was die Erneuerungsfunktion $\varphi(\tau)$ anbetrifft, so wurde schon früher hervorgehoben, dass $\varphi(\tau)$ für unsere angenommene Ausscheideordnung (Dormoysches Gesetz) konstant wird. Löst man die Integralgleichung I nach $\varphi(\tau)$ auf, so findet man:

$$\varphi(\tau) = ln \frac{1}{s} = a = \text{konst.}$$

Deshalb geht die Integralgleichung über in:

$$\Omega(t) = (1 - s^t)\, s^{\lambda t} + a \int_0^t (1 - s^{t-\tau})\, s^{(t-\tau)\lambda}\, d\tau.$$

Durch Auswertung des Integrals und nach vorgenommener Umformung findet man:

$$\Omega(t) = \frac{1 + [\lambda^2 (1 - s^t) - 1]\, s^{\lambda t}}{\lambda (1 + \lambda)}$$

Mithin beträgt die Zahl der Witwen der offenen Gesamtheit zur Zeit t:

$$H \cdot \Omega(t) = H \cdot \frac{1 + [\lambda^2 (1 - s^t) - 1]\, s^{\lambda t}}{\lambda (1 + \lambda)}$$

Im Anfang der Versicherung (zur Zeit $t = 0$) sind keine Witwen vorhanden, es ist auch $\Omega(0) = 0$. Ist $\lambda > 1$, so tritt bei

$$t = \frac{1}{a}\left(\ln \lambda - \ln (1 - \lambda) \right)$$

ein Maximum auf.

Da aber in der Praxis nur die Werte $0 < \lambda \leqq 1$ vorkommen, so werden die Witwenkurven stets ansteigen und erst bei $t = \infty$ den höchsten Wert erreichen; denn es wird dann:

$$\Omega(\infty) = \frac{1}{\lambda (1 + \lambda)}$$

Wir betrachten wieder die beiden Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$. Für $\lambda = 0$ folgt: $\Omega(t) = \frac{0}{0}$ = unbestimmt. Es wird deshalb Zähler und Nenner nach λ differenziert, und man erhält:

$$\Omega(t) = a \cdot t.$$

Würde daher die Sterblichkeit der Frauen null sein, so würde die Zahl der Witwen der offenen Gesamtheit proportional der Zeit t zunehmen. Die betreffende Witwenkurve würde in diesem Falle durch eine Gerade dargestellt. Für $t = \infty$ (Beharrungszustand) wächst die Witwenzahl ins Unendliche.

Ist $\lambda = 1$, so wird:

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}(1 - s^{2t}).$$

Analog wie bei der geschlossenen Gesamtheit nimmt auch die Witwenzahl der offenen Gesamtheit mit wachsendem Parameter λ ab. Dieses Resultat wird durch die Tabelle VII sowie durch die graphische Darstellung V bestätigt. Die Tabelle VII enthält die Zahl der Witwen, die während der Zeit t aus der Gesamtheit von 100 Ehepaaren hervorgegangen sind und noch leben.

Tabelle VII.

t	$100 \cdot \Omega(t)$ $(s = 0{,}97)$		
	$\lambda = 0$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1$
0	0,00	0,00	0,00
5	15,23	14,14	13,13
10	30,46	26,35	22,81
15	45,69	36,96	29,95
20	60,92	46,22	35,21
25	76,15	54,36	39,10
30	91,38	61,54	41,96
35	106,61	67,91	44,07
40	121,84	73,59	45,63
45	137,07	78,67	46,78
50	152,30	83,24	47,62
60	182,76	91,08	48,70
70	213,22	97,54	49,30
80	243,67	102,90	49,62
∞	∞	133,33	50,00

§ 9.

Das Deckungskapital.

Das Deckungskapital $H \cdot Z(t)$ der offenen Gesamtheit ergibt sich aus der Integralgleichung:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau$$

Durch Substitution der bekannten Werte $\varphi(\tau)$ und $z(\tau)$ erhält man:

$$Z(t) = \frac{(\lambda^2 - 1)(\delta + a + a\lambda)\, s^{\lambda t} - \lambda^2 (\delta + a\lambda)\, s^{(\lambda+1)t} + \delta - a(\lambda^2 - \lambda - 1)}{\lambda(1+\lambda)(\delta + a\lambda)(\delta + a + a\lambda)}$$

Das Deckungskapital $H \cdot Z(t)$ der offenen Gesamtheit ist eine Funktion der Sterblichkeit der Männer s, des Parameters λ, des Zinsfusses und der Versicherungsdauer t.

Im Anfang der Versicherung ist $Z(t) = 0$ und für $t = \infty$ (Beharrungszustand):

$$Z(\infty) = \frac{\delta - a(\lambda^2 - \lambda - 1)}{\lambda(1+\lambda)(\delta + a\lambda)(\delta + a + a\lambda)}$$

Zwischen den beiden Werten $t = 0$ und $t = \infty$ nimmt das Deckungskapital ein Maximum an bei:

$$t = \frac{1}{a}\, ln\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{a}\, ln\, \frac{\delta + a + a\lambda}{\delta + a\lambda}$$

Dieser Wert von t wird aber für die Werte $0 < \lambda < 1$ imaginär, deshalb wird das Deckungskapital für die Fälle, die in der Praxis vorkommen, kein Extremum aufweisen.

Ist $\lambda = 0$, so wird $Z(t) = \frac{0}{0} =$ unbestimmt. Wir differenzieren Zähler und Nenner nach λ und erhalten dann für $\lambda = 0$:

$$Z(t) = \frac{a}{\delta} \cdot t\,.$$

Unter der Annahme, dass während der ganzen Dauer der Versicherung keine Witwen sterben, würde auch das Deckungskapital, analog wie die Witwenzahl, proportional der Zeit t zunehmen.

Für $t = \infty$ wird $Z(t) = \infty$.

Dies muss schon deshalb eintreten, weil die Witwenzahl auch unendlich gross würde.

Das Deckungskapital der offenen Gesamtheit lässt sich analog wie bei der geschlossenen Gesamtheit für $\lambda = 0$ durch die Funktion $\Omega(t)$ ausdrücken:

$$Z(t) = \frac{1}{\delta}\,\Omega(t)$$

Für $\lambda = 1$ wird:

$$Z(t) = \frac{1 - s^{2t}}{2(\delta + 2a)}$$

Bezeichnen wir mit $H \cdot Z_0$ das Deckungskapital bei $\lambda = 0$ und mit $H \cdot Z_1$ das Deckungskapital bei $\lambda = 1$ und bilden den Quotienten $\frac{H \cdot Z_0}{H \cdot Z_1}$, so folgt:

$$\frac{Z_0}{Z_1} = 2 \cdot \frac{a\,t\,(\delta + 2a)}{\delta\,(1 - s^{2t})} = \left(1 + 2\;\frac{a}{\delta}\right) \frac{2\,a\,t}{1 - s^{2t}}$$

Hierin kann s^{2t} nach der Exponentialreihe entwickelt werden:

$$s^{2t} = e^{2t \ln s} = e^{-2at} = \frac{1}{e^{2at}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2at + 2a^2t^2 + \frac{4}{3}a^3t^3 + \ldots}$$

und
$$1 - s^{2t} = 1 - \frac{1}{e^{2at}} =$$

$$= \frac{2at(1 + at + \frac{2}{3}a^2t^2 + \ldots)}{1 + 2at + 2a^2t^2 + \ldots}$$

Dieser Wert wird oben eingesetzt und man erhält:

$$\frac{Z_0}{Z_1} = \left(1 + 2\frac{a}{\delta}\right) \frac{1 + 2at + 2a^2t^2 + \ldots}{1 + at + \frac{2}{3}a^2t^2 + \ldots}$$

Nun ist aber:

$$1 + 2at + 2a^2t^2 + \ldots > 1 + at + \frac{2}{3}a^2t^2 + \ldots$$

somit:

$$Z_0 > Z_1.$$

Das Deckungskapital nimmt in Analogie mit der geschlossenen Gesamtheit auch bei der offenen, sich erneuernden Gesamtheit mit wachsendem Parameter λ ab.

Die Tabelle VIII sowie die graphische Darstellung VI zeigen uns deutlich den Verlauf der Deckungskapitalkurven für 3 verschiedene Werte von λ ($v = s = 0{,}96618$).

Tabelle VIII.

t	$Z(t)$		
	$\lambda = 0$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1$
0	0	0,000	0,000
5	5	2,478	0,766
10	10	4,625	1,410
15	15	6,498	1,953
20	20	8,136	2,410
25	25	9,582	2,795
30	30	10,861	3,119
35	35	12,004	3,391
40	40	12,992	3,621
45	45	13,938	3,814
50	50	14,761	3,977
60	60	16,175	4,190
70	70	17,337	4,409
80	80	18,298	4,536
100	100	19,763	4,689
200	200	22,962	4,839
∞	∞	23,255	4,845

C. Der Beharrungszustand.

§ 10.

Zusammenstellung der Resultate für den Beharrungszustand.

1. Die Zahl der Witwen.

In § 8 haben wir für $\Omega(t = \infty)$ folgenden Ausdruck gefunden:

$$\Omega(t = \infty) = \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)}$$

Mithin beträgt die Zahl der Witwen im Beharrungszustand, wenn wir $\Omega(\infty) = \beta$ setzen,

$$H \cdot \beta = \frac{H}{\lambda(1+\lambda)}$$

Die Witwenzahl im Beharrungszustand ist demnach im wesentlichen nur abhängig vom Parameter λ.

Ist $\lambda = 1$, so wird $\beta = 1/2$.

Sind Männer und Frauen demselben Dormoyschen Sterbegesetz unterworfen, so ist die Zahl der Witwen im Beharrungszustand gleich der Hälfte der vorhandenen Ehepaare.

Für die Werte, die in der Praxis vorkommen $0 < \lambda \leqq 1$ wird $\infty > \beta \geqq 1/2$. β wird daher auch den Wert 1 annehmen können, und dies tritt ein, wenn:

$$\lambda(1+\lambda) = 1$$

ist. Hieraus folgt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}).$$

Für unsere Untersuchungen kommt aber nur λ_1 in Betracht; denn λ_2 wird negativ. Wir haben deshalb den Satz:

Ist $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, *so ist die Witwenzahl im Beharrungszustand gleich der Anzahl der vorhandenen Ehepaare.*

Lassen wir für λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu und betrachten wir allgemein λ als unabhängige und β als abhängige Variable, so stellt die Gleichung:

$$\beta\lambda(1+\lambda) - 1 = 0$$

geometrisch eine Kurve dritter Ordnung dar. Ist $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$, so wird $\beta = \pm \infty$. Die Kurve verläuft in diesen beiden Punkten unstetig, indem sie von $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt. Ferner weist β für $\lambda = -\frac{1}{2}$ ein Maximum auf, das sich im Negativen befindet; denn für $\lambda = -\frac{1}{2}$ folgt: $\beta = -4$. Die Kurve verläuft daher zwischen den beiden Polen ganz im Negativen. Diese Kurve hat mit der im § 4 besprochenen Prämienkurve grosse Ähnlichkeit.

Über den weiteren Verlauf der Kurve β gibt uns die Tabelle IX Aufschluss.

Tabelle IX.

λ	$100 \cdot \beta$	λ	$100 \cdot \beta$	λ	$100 \cdot \beta$
$-\infty$	0,00	$-1{,}25$	$+320{,}00$	$+\ 0{,}25$	$+320{,}00$
-11	0,91	$-1{,}00$	$\pm\infty$	$+\ 0{,}50$	133,33
$-\ 5$	5,00	$-0{,}75$	$-533{,}33$	$+\ 1{,}00$	50,00
$-\ 4$	8,33	$-0{,}50$	$-400{,}00$	$+\ 3{,}00$	8,33
$-\ 2$	50,00	$-0{,}25$	$-533{,}33$	$+10{,}00$	0,91
$-\ 1{,}5$	133,33	0,00	$\mp\infty$	$+\infty$	0,00

2. Das Deckungskapital.

Das Deckungskapital im Beharrungszustand beträgt nach § 9 bezogen auf die Einheit von H:

$$Z(\infty) = \gamma = \frac{\delta - a(\lambda^2 - \lambda - 1)}{\lambda(1+\lambda)(\delta + a\lambda)(\delta + a + a\lambda)}$$

Ist $\lambda = 0$, so wird das Deckungskapital selbstverständlich unendlich gross.

Ist $\lambda = 1$, so folgt:

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta + 2a}$$

Aus der Deckungskapitalformel für den Beharrungszustand geht ferner hervor, dass das Deckungskapital $H \cdot \gamma$, ausser vom Parameter λ, auch vom Zinsfuss und von der Überlebenswahrscheinlichkeit s der Männer abhängt.

Ist $\delta = 0$, so wird:

$$\gamma = \frac{1 + \lambda - \lambda^2}{a\,\lambda^2\,(1 + \lambda)^2}$$

während für $\delta = \infty$ stets $\gamma = 0$ wird.

Die erste Ableitung von γ nach δ liefert uns die beiden Extremwerte:

$$\delta = a\left(\lambda^2 - \lambda - 1 \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}\right).$$

Ist $0 < \lambda < 1$, so werden die obigen Werte von δ imaginär und γ besitzt daher zwischen $0 < \lambda < 1$ keinen Extremwert.

Mit zunehmendem Zinsfusse wird das Deckungskapital verkleinert.

Die Tabelle X enthält einige numerische Werte des Deckungskapitals γ bei variablem Zinsfusse. Die betreffenden Deckungskapitalkurven sind in der graphischen Darstellung VII a dargestellt.

Tabelle X.

i	γ $(s = 0{,}966)$					
	$\lambda=0{,}2$	$\lambda=0{,}4$	$\lambda=0{,}5$	$\lambda=0{,}6$	$\lambda=0{,}8$	$\lambda=1$
0,00	582,20	114,30	64,24	38,90	16,17	7,23
0,01	240,40	67,95	42,09	27,46	12,80	6,32
0,02	152,43	48,78	31,60	21,43	10,68	5,62
0,03	112,00	38,23	25,43	17,67	9,23	5,06
0,035	99,00	34,54	23,21	16,27	8,62	4,83
0,04	88,76	31,53	21,35	15,08	8,12	4,61
0,05	73,65	26,89	18,44	13,19	7,27	4,24
0,06	63,03	23,48	16,26	11,74	6,60	3,92
0,10	40,35	15,73	11,14	8,23	4,85	3,04
∞	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

In § 6 wurde bemerkt, dass die Dreiflächenrelation auch aus den Grössen, die sich im Beharrungszustand einer offenen, sich stets erneuernden Gesamtheit ergeben, abgeleitet werden kann. Dies soll nun gezeigt werden.

Im Beharrungszustand muss offenbar das Deckungskapital gleich dem Barwert der künftigen Kassenleistungen weniger dem Barwert der künftigen Prämien sein. Der Barwert der künftigen Kassenleistungen beträgt:

$$H \cdot \int_0^\infty \beta\, v^\sigma\, d\sigma$$

und der Barwert der künftigen Prämien:

$$H \cdot P \int_0^\infty v^\sigma\, d\sigma,$$

somit ist:

$$H \cdot \gamma = H \cdot \int_0^\infty \beta\, v^\sigma\, d\sigma - H \cdot P \cdot \int_0^\infty v^\sigma\, d\sigma.$$

Hieraus folgt: $\quad P + \gamma \cdot \delta = \beta,$

und diese Beziehung ist nichts anderes als die Dreiflächenrelation in etwas anderer Form.

Mit Hilfe dieser Beziehung soll nun noch der Einfluss der Überlebenswahrscheinlichkeit s der Männer auf das Deckungskapital im Beharrungszustand untersucht werden.

Es ist: $$\gamma = \frac{1}{\delta}(\beta - P).$$

β ist bekanntlich unabhängig von s, deshalb wird für das Verhalten des Deckungskapitals bei variablem s einzig die Prämie P massgebend sein.

Ist $s = 0$, so wird $P = \beta$ somit $\gamma = 0$.

Für $s = 1$ wird $P = 0$ und daher $\gamma = \frac{\beta}{\delta}$. In § 3 haben wir gesehen, dass die Prämie P mit zunehmendem s verkleinert wird. Hier nehmen wir wahr, dass das Deckungskapital sich mit zunehmendem s vergrössert.

Die Tabelle XI sowie die graphische Darstellung VII b geben uns hierüber noch näheren Aufschluss.

Tabelle XI.

s	γ $(i = 0{,}035)$				
	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 1$
0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,500	23,31	5,10	1,81	0,77	0,35
0,800	51,17	12,95	4,92	2,19	1,04
0,825	55,52	14,41	5,55	2,50	1,19
0,850	60,51	16,18	6,33	2,88	1,39
0,875	66,32	18,37	7,33	3,39	1,66
0,900	73,15	21,17	8,68	4,09	2,04
0,925	81,32	24,86	10,57	5,13	2,63
0,950	91,30	30,00	13,45	6,82	3,65
0,975	103,93	37,78	18,45	10,13	5,88
1,000	121,12	51,91	30,28	20,19	14,53

Endlich mögen noch einige allgemeine Betrachtungen über das Deckungskapital gemacht werden, wenn λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Betrachtet man nämlich in der Deckungskapitalformel λ als unabhängige und y als abhängige Variable, so wird das Deckungskapital im Beharrungszustand durch eine Kurve fünfter Ordnung dargestellt. Die Kurve besitzt vier Nullstellen, nämlich bei:

$$\lambda_1 = -\infty, \lambda_2 = +\infty, \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5 + 4\frac{\delta}{a}}\right)$$

und vier Pole:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -\frac{\delta}{a}, \quad \lambda_4 = -1 - \frac{\delta}{a}$$

Die Pole der Witwenfunktion $\left(\beta = \dfrac{1}{\lambda\,(1+\lambda)}\right)$ und der

Prämienfunktion $\left(\mathrm{P} = \dfrac{a\,(\delta + a)}{(\delta + a\,\lambda)\,(\delta + a + a\,\lambda)}\right)$ sind

zugleich auch Pole des Deckungskapitals. Die Kurve weist ein Maximum und zwei Minima auf. Die betreffenden Abszissen sind die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades. Sie sind mit Hilfe von Näherungsformeln zu bestimmen.

Schlussbemerkung.

Wir hatten uns, wie eingangs erläutert wurde, vorgenommen, den Einfluss und die Rückwirkungen zu erörtern, die die Variation der Sterblichkeit, unter Annahme eines exponentiellen Parameters, auf das Witwenrisiko und die wesentlichen davon abhängigen Grössen ausübt. Wir kamen dabei öfters zu Resultaten, die wohl wissenschaftliches Interesse haben, aber für die Praxis weniger von Belang sind. Aber solche umfassende und ins Einzelne gehende Untersuchungen sind nicht zu umgehen, denn nur aus der Beherrschung der Theorie lassen sich für die Versicherungspraxis die wegleitenden Schlüsse ziehen.

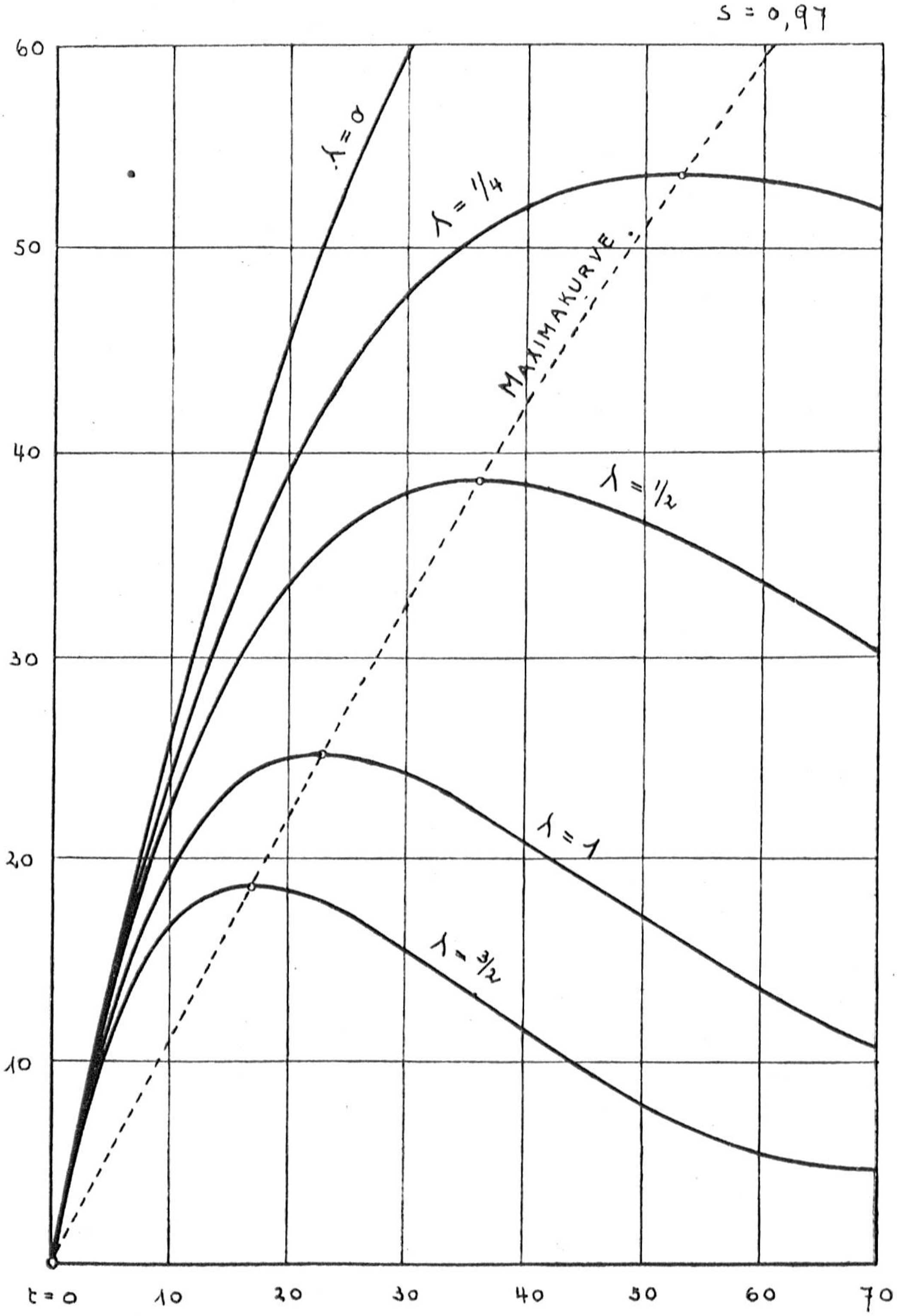
Bern, den 24. Mai 1929.

Mathematisch-versicherungswissenschaftliches
Seminar der Universität Bern.

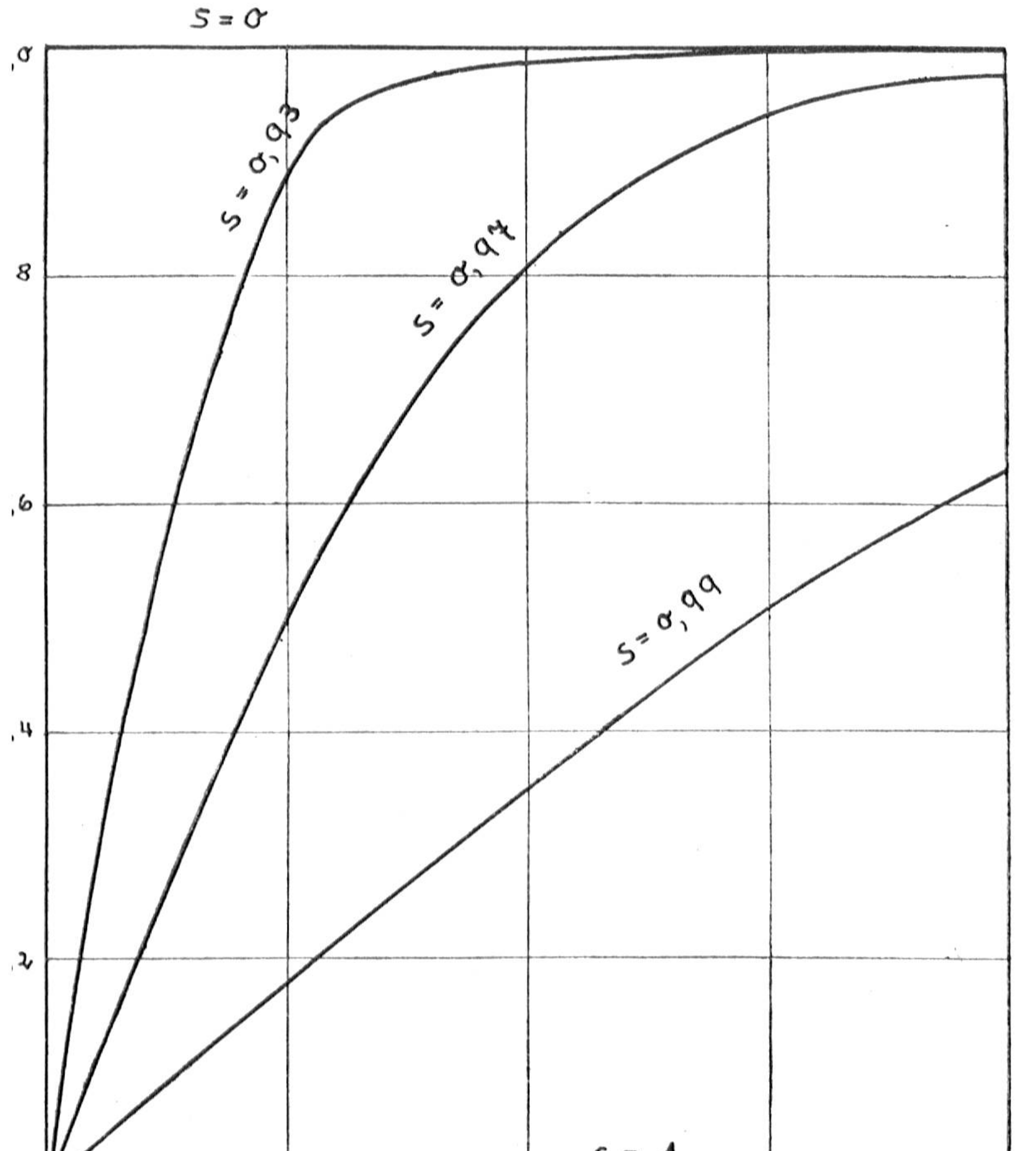
Graphische Darstellungen.

I. Die Zahl der Witwen der geschlossenen Gesamtheit.
II. Die Maximakurven $M(t)$.
III. Die Prämie.
IV. Die drei Flächen.
V. Die Zahl der Witwen der offenen Gesamtheit.
VI. Das Deckungskapital der offenen Gesamtheit.
VII. Das Deckungskapital im Beharrungszustand:
   a. bei konstanter Sterblichkeit der Männer (i und λ variabel);
   b. bei konstantem Zinsfusse i (s und λ variabel).

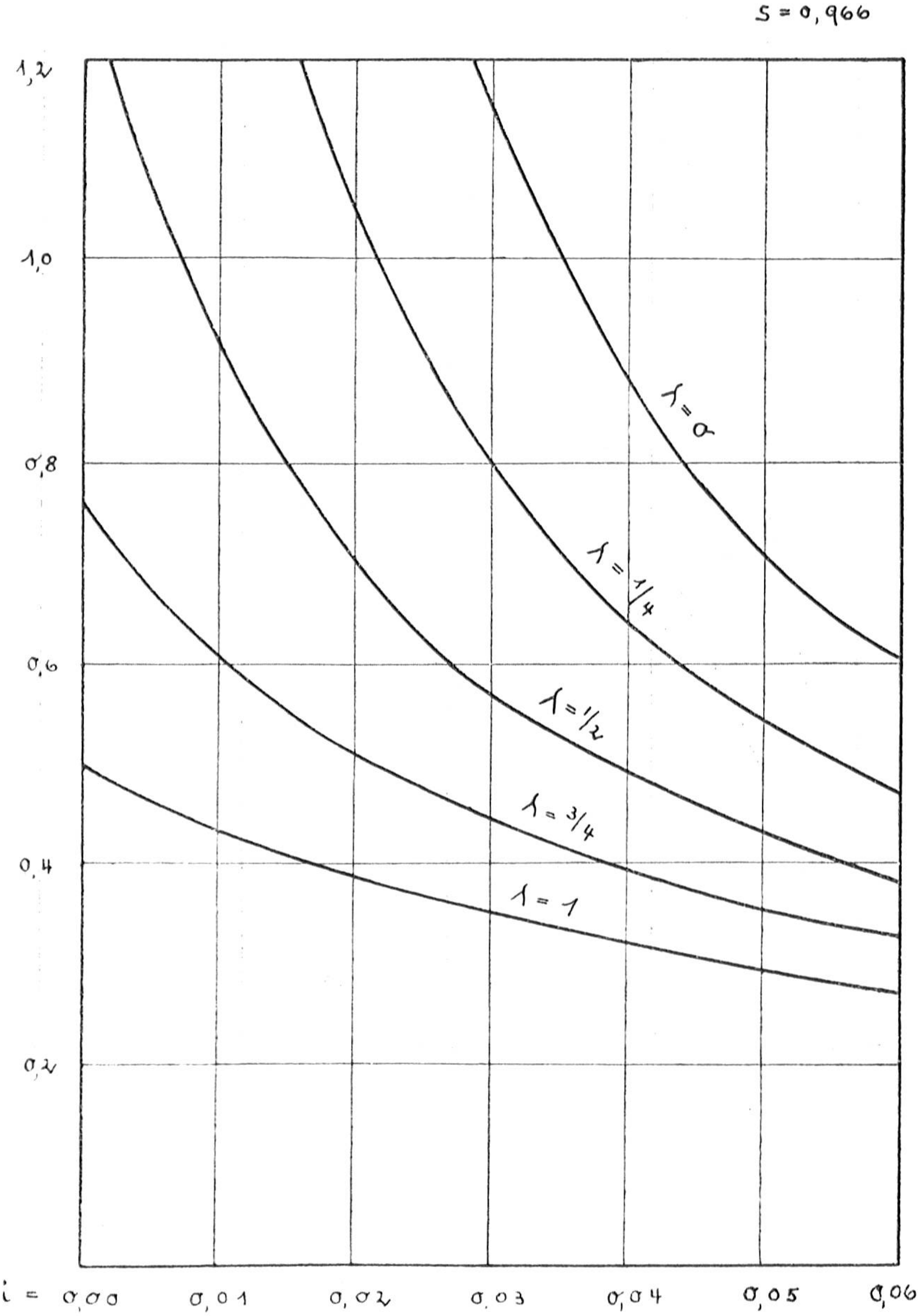
I. Die Anzahl der Witwen der geschlossenen Gesamtheit.



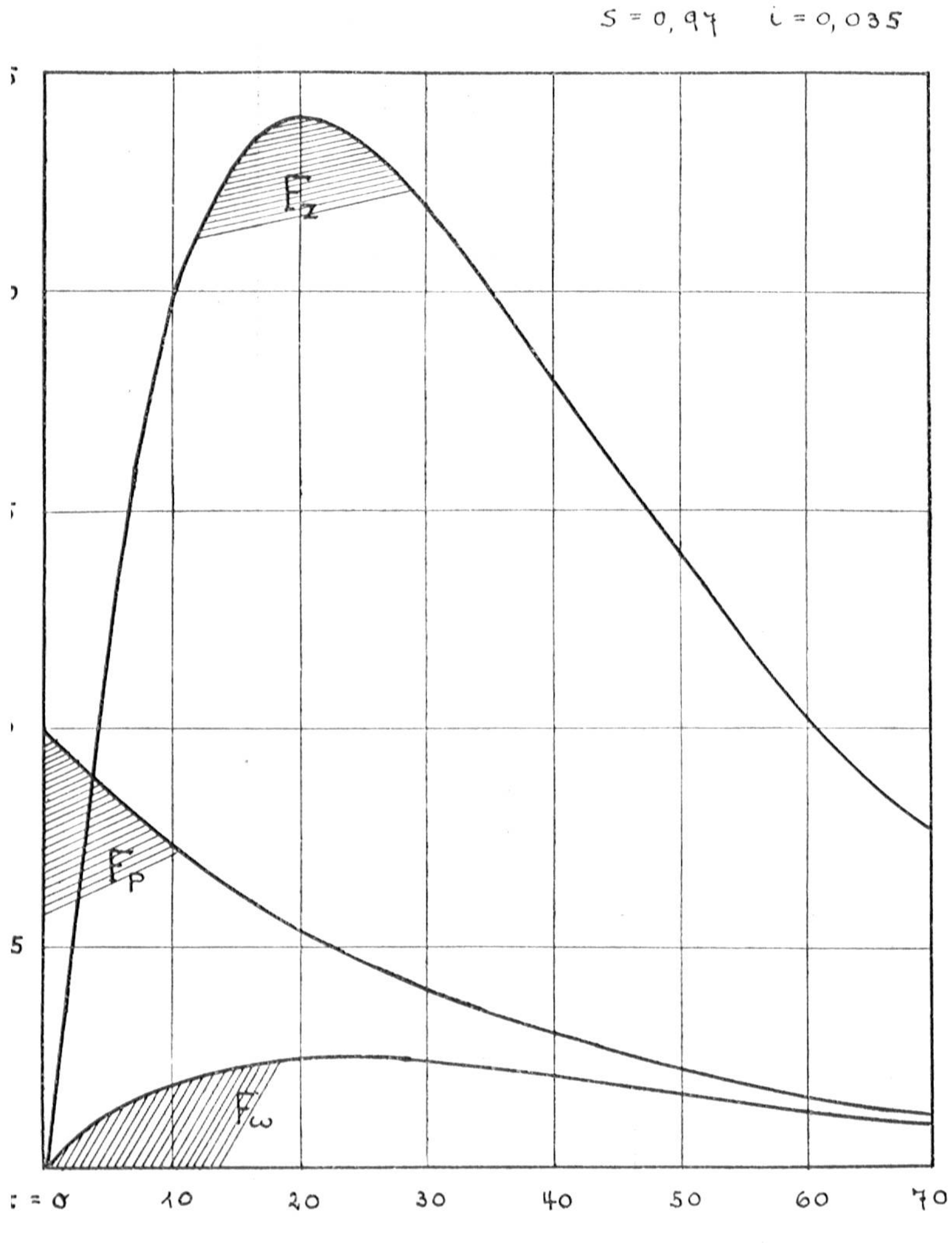
II. Maximakurven $M(t)$.



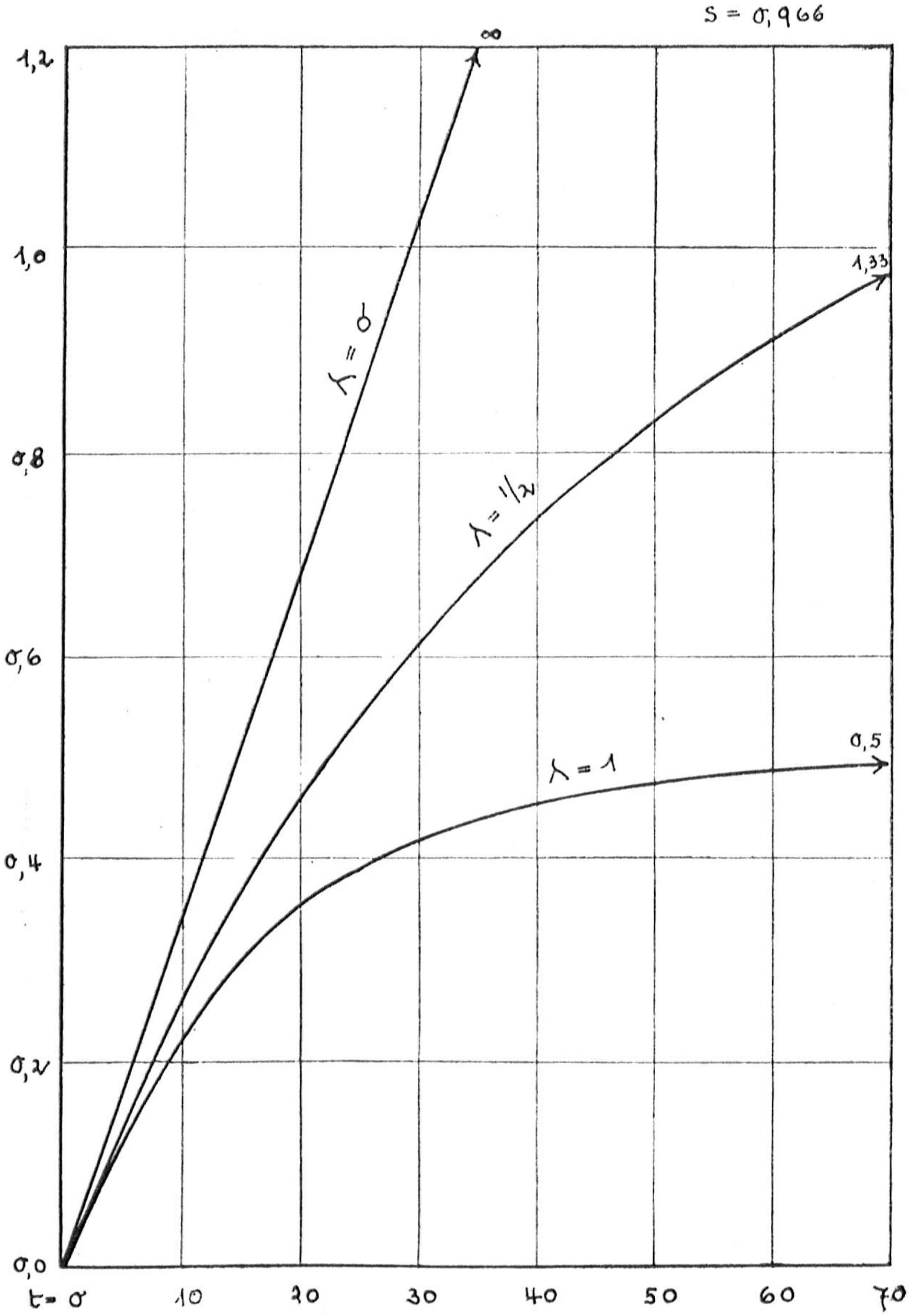
III. Die Prämie.



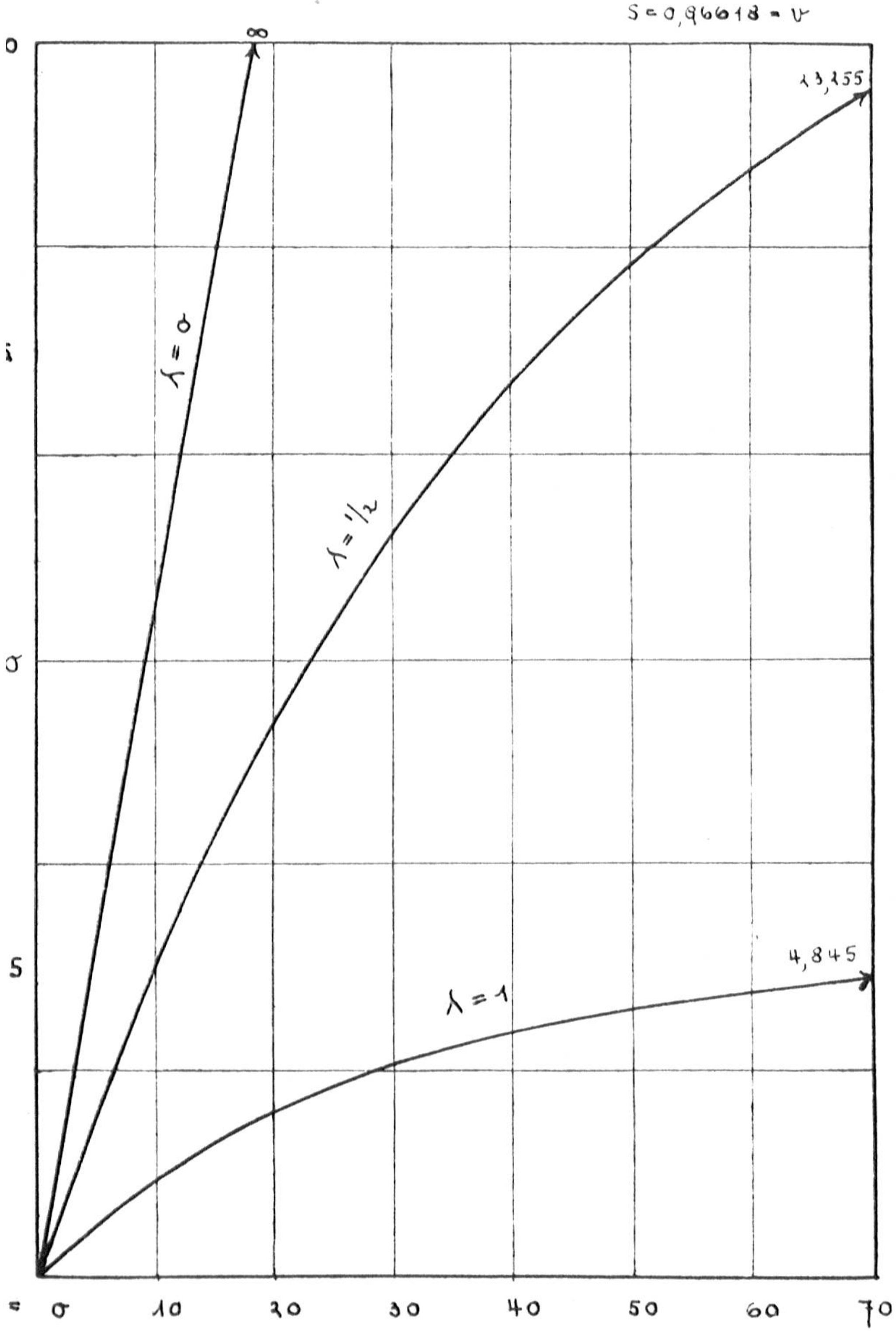
IV. Die drei Flächen.



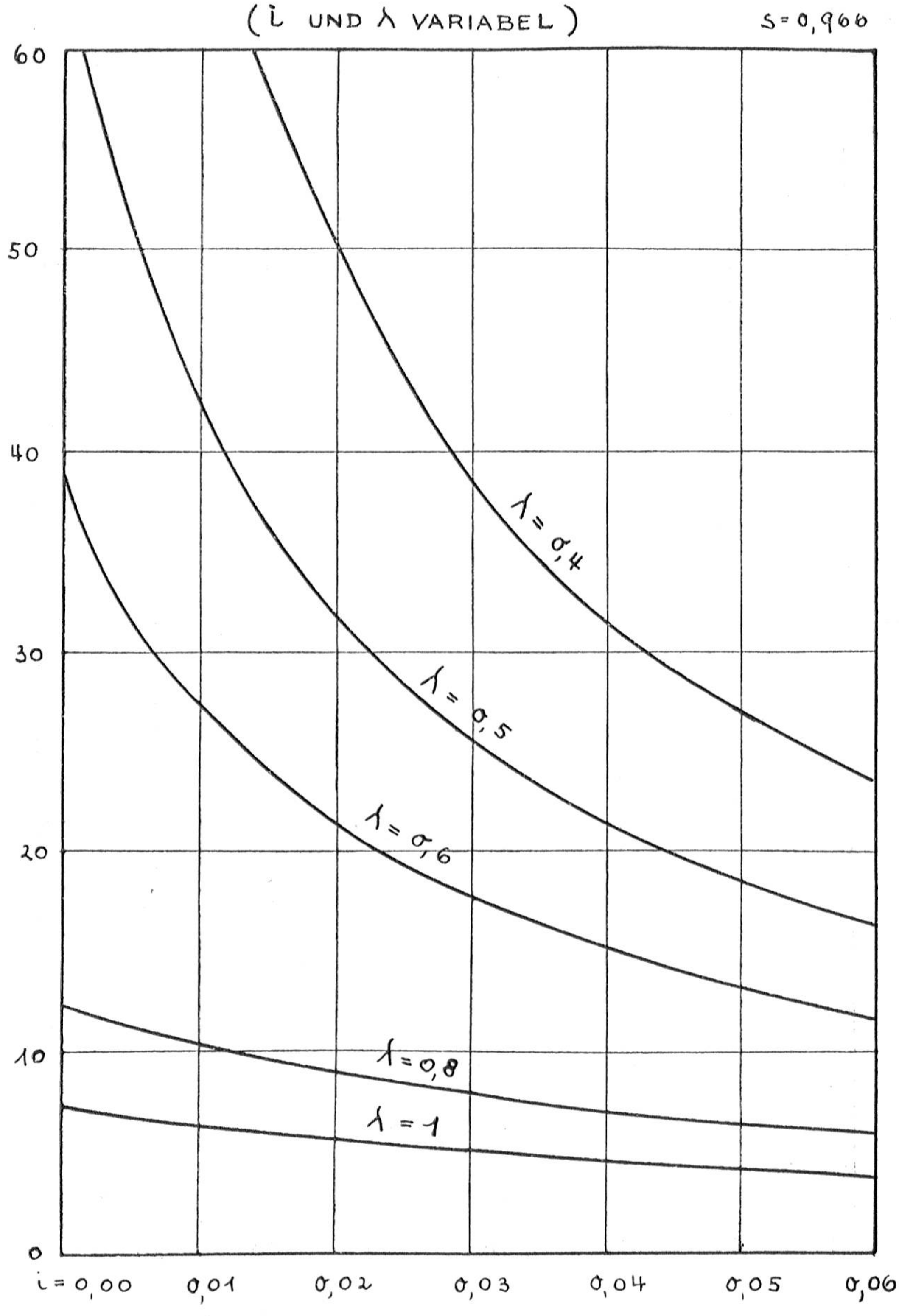
V. Die Zahl der Witwen der offenen Gesamtheit.



VI. Das Deckungskapital der offenen Gesamtheit.



VII a. Das Deckungskapital im Beharrungszustand bei konstantem s.



VII b. Das Deckungskapital im Beharrungszustand bei konstantem Zinsfusse.