Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 25 (1930)

Artikel: Influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques

Autor: Haldy, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967493

Influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques.

Par le Dr **M. Haldy**, Aigle.

Première partie.

Avant-propos.

Les variations du taux d'invalidité requièrent l'étude de plusieurs questions intéressantes dont les plus importantes nous paraissent être les suivantes:

1º Quelle est l'influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques?

2º Comment construire différentes tables d'invalidité conduisant aux mêmes réserves mathématiques qu'une table donnée?

3º Comment calculer les nouvelles primes à adopter pour rétablir une situation normale, après un changement durable de l'invalidité?

Nous avons abordé cette étude en consultant les travaux parus sur un sujet qui présente une certaine analogie avec le nôtre, celui de «l'influence des variations de la mortalité sur les réserves mathématiques de l'assurance mixte».

Le «Text Book» de l'Institut des actuaires de Londres [1]) contient quelques remarques sur ce sujet et donne un procédé qui permet de *construire différentes tables de mortalité conduisant aux mêmes réserves mathématiques.*

---

[1]) Chap. XVIII, nos 49 et suivants.

M. S. Dumas [1]), directeur du Bureau fédéral des assurances, a apporté une rectification à la théorie du «Text Book».

King [2]), Dormoy [3]) et Sprague [4]) ont effleuré la question.

M. Schaertlin [5]) a démontré la proposition suivante:

Les réserves d'une assurance mixte de durée n étant égales d'après deux tables de mortalité, *les réserves d'une assurance de durée plus courte, m, sont plus élevées si on les calcule d'après celle de ces deux tables qui donne les plus grandes probabilités de survie.*

On doit à M. Moser [6]), professeur, un théorème qu'il a dénommé «Zeichenwechselsatz» (théorème du changement de signe): *Soient deux tables de mortalité telles que l'une donne de plus grands taux que l'autre dans un certain intervalle* (θ, T), *et les mêmes taux en dehors de celui-ci. Si, d'après ces deux tables, on calcule la valeur de la réserve mathématique d'une assurance mixte dont la durée comprend l'intervalle* (θ, T), *la table qui donne la plus grande valeur à l'âge θ et aux âges inférieurs donne la plus petite à l'âge T et aux âges supérieurs.*

En résumé: la différence de ces valeurs de la réserve présente un changement de signe dans l'intervalle (θ, T).

---

[1]) Bulletin de l'Association suisse des actuaires, année 1928, p. 27.

[2]) Journal de l'Institut des actuaires de Londres, vol. XX, p. 268.

[3]) Théorie mathématique des assurances, vol. II, p. 7/8.

[4]) Journal de l'Institut des actuaires, vol. XXI, p. 78.

[5]) Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch Bd. XI, 1890: «Über die Reservenrechnung mit Bruttoprämien.»

[6]) Bulletin de l'Association suisse des actuaires, année 1914, p. 1.

M. Goldmann[1]), dans ses «Beiträge zur Theorie des Einflusses der Sterblichkeit auf die Reserven», donne d'abord une démonstration du théorème de M. Schaertlin, puis il étudie l'influence de la mortalité dans des cas trop particuliers pour avoir une grande portée pratique.

Enfin, M. Friedli[2]) a donné plusieurs théorèmes généraux obtenus après de savantes recherches. Il a trouvé les influences des constantes de Makeham:

Une augmentation de la valeur des paramètres c et s a pour conséquence une augmentation de la réserve mathématique de l'assurance sur la vie. Une augmentation de la valeur du paramètre g conduit à une diminution de cette réserve.

Ces auteurs nous révèlent l'influence des variations de la mortalité sur les réserves mathématiques. Par contre, l'influence des variations de l'invalidité est peu connue. Nous nous sommes proposé de l'étudier aussi généralement que possible.

Ce problème présente les mêmes difficultés que le précédent, mais il est encore plus compliqué, parce que, si les fonctions qu'on y rencontre sont de même nature, le nombre des données est plus grand.

Nous avons d'abord cherché — comme M. Goldmann, dans le premier problème — à tirer la solution de l'étude de cas particuliers simples. Deux écueils nous ont arrêté:

1° Si l'on adopte des hypothèses très simples, on s'éloigne tellement de la réalité que les conclusions n'ont plus de portée pratique.

---

[1]) Bulletin de l'Association suisse des actuaires, année 1915, p. 53.

[2]) Bulletin de l'Association suisse des actuaires, année 1918, p. 115.

2° Si l'on simplifie, tout en respectant les principales données de l'expérience, la complexité extraordinaire des formules devient un obstacle à l'application des méthodes habituelles.

Les savants procédés de M. Friedli ne peuvent, eux non plus, être employés. En effet, la fonction Γ d'Euler — dont il fait usage — peut toujours servir à exprimer la valeur d'une rente viagère; mais l'on doit, au contraire, se placer dans un cas particulier pour pouvoir l'utiliser à représenter la rente d'invalidité.

En conséquence, nous avons dû recourir au calcul numérique.

Sprague et M. Goldmann pensaient qu'il serait difficile de déterminer le nombre minimum des cas à traiter dans une étude de ce genre, celle de l'influence des variations de la mortalité sur les réserves mathématiques. Cette difficulté ne s'est pas présentée pour nous. L'analogie frappante des résultats obtenus dans les nombreux cas numériques examinés permet de croire à la justesse de nos conclusions et de les appliquer avec la sécurité voulue, dans toutes les circonstances qui peuvent se présenter.

Nous espérons que cette publication révèlera à l'actuaire les principaux dangers des variations du taux d'invalidité, ainsi que leur importance.

Il nous reste l'agréable devoir d'adresser à M. S. Dumas, professeur, l'expression de notre très vive reconnaissance pour ses précieux conseils et pour le bienveillant intérêt qu'il n'a cessé de nous témoigner.

Nous gardons le meilleur souvenir de l'aimable accueil trouvé au Bureau fédéral des assurances, dont la bibliothèque et les machines à calculer ont été très obligeamment mises à notre disposition.

Introduction.

§ 1. Symboles.

Les symboles généraux utilisés dans cette thèse sont ceux qui ont été adpotés par le deuxième congrès international d'actuaires, à Londres, en mai 1898.

La plupart des symboles relatifs à l'invalidité sont tirés de l'ouvrage «Contribution à la théorie mathématique de l'assurance-invalidité» de M. G. Schaertlin [1]). Voici les principaux d'entre eux:

q_x^a, probabilité pour un actif d'âge x de mourir pendant l'année suivante, soit comme actif, soit comme invalide.

$_{|t}q_x^a$, probabilité pour un actif d'âge x de mourir pendant les t années suivantes, soit comme actif, soit comme invalide.

$q_x^{\overline{aa}}$, probabilité pour un actif d'âge x de mourir pendant l'année suivante comme actif (c'est-à-dire sans être sorti préalablement du groupe des actifs).

$q_x^{\overline{ai}}$, probabilité pour un actif d'âge x de devenir invalide pendant l'année suivante et de mourir ensuite pendant la même année.

---

[1]) Publié en 1907 à l'occasion du 50e anniversaire de la fondation de la «Société suisse d'assurances générales sur la vie humaine» (voir aussi: Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1er cahier).

q_x^i , probabilité qu'un invalide d'âge x meure au cours de sa $(x+1)^e$ année.

$q_{[x]}^i$, probabilité pour qu'une personne devenue invalide à l'âge x meure au cours de sa $(x+1)^e$ année (probabilité de sélection).

i_x , probabilité qu'un actif d'âge x devienne invalide au cours de sa $(x+1)^e$ année.

$\mu_x^{\overline{aa}}$, taux instantané de mortalité des actifs d'âge x.

ν_x , taux instantané d'invalidité, pour les actifs d'âge x.

$p_x^{\overline{aa}}$, probabilité pour un actif d'âge x de vivre encore comme actif à la fin de l'année suivante.

$l_x^{\overline{aa}}$, nombre des actifs vivants à l'âge x (dans la table de survie comme actif).

$D_x^{\overline{aa}}$, nombre escompté des actifs vivants à l'âge x. $D_x^{\overline{aa}} = v^x\, l_x^{\overline{aa}}$.

a_x^a , valeur de la rente viagère de Fr. 1 payable prénumérando par un actif d'âge x, aussi longtemps qu'il vit, soit comme actif, soit comme invalide.

a_x^a , valeur de la rente viagère de Fr. 1 payable postnumérando à un actif d'âge x, aussi longtemps qu'il vit.

${}_{|t}\mathrm{a}_x^a$, valeur de la rente temporaire de Fr. 1 payable d'avance (prénumérando) par un actif d'âge x, pendant t années, pour autant qu'il vive, soit comme actif, soit comme invalide.

$\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}$, valeur de la rente de Fr. 1 payable prénumérando par un actif d'âge x, aussi longtemps qu'il reste actif.

$a_x^{\overline{aa}}$, valeur de la rente précédente, lorsqu'elle est payable postnumérando.

$_{|t}\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}$, valeur de la rente temporaire de Fr. 1 payable d'avance par un actif d'âge x, pendant t années, pour autant qu'il vive comme actif.

$a_x^{\overline{ai}}$, valeur de la rente de Fr. 1 d'un actif d'âge x, payable dès qu'il sera invalide et pendant toute la durée de l'invalidité; la première fois à la fin de l'année où il devient invalide.

$_{||t}a_x^{\overline{ai}}$, valeur de la rente temporaire de Fr. 1 d'un actif d'âge x, payable dès qu'il sera invalide, la première fois à la fin de l'année où il deviendra invalide et la dernière fois lorsqu'il atteindra l'âge $x + t$.

A_x^a, valeur de l'assurance d'un capital de Fr. 1 pour un actif d'âge x, payable à la fin de l'année où celui-ci meurt, soit comme actif, soit comme invalide.

$A_{x:\overline{t|}}^a$, valeur de l'assurance d'un capital de Fr. 1 pour un actif d'âge x, payable à la fin de l'année où il meurt ou, au plus tard, à la fin de la t^e année.

$A_x^{\overline{aa}}$, valeur de l'assurance d'un capital de Fr. 1, pour un actif d'âge x, payable à sa mort s'il ne devient pas invalide auparavant.

$A_{x:\overline{t|}}^{\overline{aa}}$, valeur de l'assurance d'un capital de Fr. 1, payable pour un actif d'âge x, à la fin de l'année où il quitte le groupe des actifs, ou, au plus tard, à la fin de la t^e année.

$(A_x^{\overline{ai}})$, valeur de l'assurance d'un capital de Fr. 1, payable pour un actif d'âge x, à la fin de l'année au cours de laquelle il devient invalide.

$P(a_{x_0}^{\overline{ai}})$, prime payable d'avance par un actif d'âge x_o, pendant la durée de son activité, pour s'assurer la rente dont la valeur est désignée par $a_x^{\overline{ai}}$.

${}_nV$, réserve mathématique afférente à l'assurance dont la valeur est représentée par le symbole qui suit, entre parenthèses, ${}_nV$. L'évaluation de cette réserve étant faite après n années d'assurance, avant le paiement de la $(n+1)^{\text{e}}$ prime, les primes étant payables d'avance pendant l'activité seulement si l'assurance est viagère, et pendant les t premières années d'activité si l'assurance est temporaire. *Exemple*: ${}_nV(A_{x:\overline{t|}}^{\overline{aa}})$ pour la réserve afférente à l'assurance $A_{x:\overline{t|}}^{\overline{aa}}$.

$${}_nV\,[A_x^{\overline{aa}} + (A_x^{\overline{ai}})]$$

valeur de la réserve mathématique d'une assurance d'un capital de Fr. 1 pour un actif d'âge x, capital payable à la fin de l'année où il quitte le groupe des actifs, les primes étant payables d'avance pendant toute l'activité, l'évaluation de la réserve étant faite après n années d'assurance, avant le payement de la $(n+1)^{\text{e}}$ prime.

x_o, âge de l'assuré lors de la conclusion de l'assurance.

ω, dernier âge auquel il y a des actifs.

Au chapitre IV, § 7, et au chapitre VI, § 3, les symboles utilisés par M. Goldmann [1]) ont dû être adoptés. Ils sont caractérisés par l'emploi:

1° de la lettre i pour représenter le temps qui s'écoule depuis la conclusion du contrat jusqu'à l'évaluation de la réserve mathématique;

2° de la lettre n placée à gauche en haut pour exprimer que la rente est payable à l'âge $x+n-1$ pour la dernière fois (prénumérando). Exemple:

${}^{n}\mathrm{a}_{x+i}^{\overline{aa}}$ représente la valeur de la rente temporaire d'activité payable prénumérando par un actif d'âge $x+i$, pendant $n-i$ années, le dernier payement ayant donc lieu à l'âge $x+n-1$.

Les lettres s, g et c désignent les constantes de Makeham lorsqu'on écrit sa loi sous la forme

$$l_x = k\, s^x\, g^{c^x}.$$

L'expression ci-dessus détermine la loi de mortalité qui s'exprime donc au moyen de caractères minuscules.

On a posé $$\sigma = s v.$$

La loi d'invalidité de M. Urech est écrite sous la forme

$$i_x = F\, G^x.$$

Les constantes en sont donc désignées par des lettres majuscules.

---

[1]) «Beiträge zur Theorie des Einflusses der Sterblichkeit auf die Reserven», Bulletin de l'Association suisse des actuaires, année 1915, p. 53.

§ 2. Réserve mathématique de la rente viagère d'invalidité.

Pour l'assurance d'une rente d'invalidité, à primes annuelles égales et payables prénumérando pendant l'activité seulement, la méthode prospective donne l'expression suivante pour la réserve mathématique après n années d'assurance:

$$(1) \quad {}_nV(a_x^{\overline{ai}}) = a_{x+n}^{\overline{ai}} - a_x^{\overline{ai}} \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}} &= 1 + a_{x+n}^{\overline{aa}} \\ \mathrm{a}_x^{\overline{aa}} &= 1 + a_x^{\overline{aa}} \end{aligned}$$

On sait que:

$$a_x^{\overline{ai}} = a_x^a - a_x^{\overline{aa}}$$

ce qu'on introduit dans l'égalité (1), qui devient:

$${}_n(Va_x^{\overline{ai}}) = a_{x+n}^a - a_{x+n}^{\overline{aa}} - (a_x^a - a_x^{\overline{aa}}) \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}}$$

$$= a_{x+n}^a - a_x^a \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}} - a_{x+n}^{\overline{aa}} + (1 + a_x^{\overline{aa}} - 1) \frac{1 + a_{x+n}^{\overline{aa}}}{1 + a_x^{\overline{aa}}}$$

$$= a_{x+n}^a - a_x^a \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}} - a_{x+n}^{\overline{aa}} + 1 + a_{x+n}^{\overline{aa}} - \frac{1 + a_{x+n}^{\overline{aa}}}{1 + a_x^{\overline{aa}}}$$

$$= (a_{x+n}^a + 1) - (a_x^a + 1) \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}}$$

$$(2) \qquad {}_nV(a_x^{\overline{ai}}) = \mathrm{a}_{x+n}^a - \mathrm{a}_x^a \frac{\mathrm{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}}$$

CHAPITRE I.

Quelques cas particuliers de l'influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques de la rente d'invalidité.

Dans l'hypothèse que les taux de mortalité q_x, $q_x^{\overline{aa}}$, q_x^a et ${}_tq_x^a$ sont indépendants des variations de l'invalidité, quelle est l'influence de ces dernières sur les réserves mathématiques?

Partons de l'équation (2):

$$_nV(a_{x_0}^{\overline{ai}}) = \mathrm{a}_{x_0+n}^a - \mathrm{a}_{x_0}^a \frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}$$

$\mathrm{a}_{x_0+n}^a$ et $\mathrm{a}_{x_0}^a$ sont indépendants de l'invalidité. Comment varie le quotient $\dfrac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}$?

Désignons le taux d'invalidité et la valeur de la rente d'activité respectivement par i_x et $\mathrm{a}_x^{\overline{aa}}$ avant toute variation de l'invalidité, et par i'_x et $\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_x$ après variation. Nous traiterons quelques cas simples:

1° si $i'_x \geqslant i_x$ lorsque $x < x_0 + n$
avec $i'_x > i_x$ au moins à l'un de ces âges x
et $i'_x = i_x$ lorsque $x \geqslant x_0 + n$.

On voit alors facilement que:

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x_0+n} = \mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}$$
$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x_0} < \mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}$$

($\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x_0}$ ne comprend qu'une partie des termes de $\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}$).

En conséquence:

$$\frac{\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x_0}} > \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}$$

En tenant compte de ceci et de l'égalité (2) nous pouvons énoncer:

Si l'invalidité augmente à des âges inférieurs à $x_0 + n$ *et reste la même aux autres âges, la réserve mathématique décroît à l'âge* $x_0 + n$.

2° si $i'_x = i_x$ lorsque $x < x_0 + n$
et $i'_x \geqslant i_x$ lorsque $x \geqslant x_0 + n$,
avec $i'_x > i_x$ au moins pour l'un de ces âges x,

on a:

$$(3) \qquad \frac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}} = \frac{1}{\dfrac{{}_{|n}a^{\overline{aa}}_{x_0}}{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}} + \dfrac{D^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{D^{\overline{aa}}_{x_0}}}$$

$$\begin{aligned} {}_{|n}a'^{\overline{aa}}_{x_0} &= {}_{|n}a^{\overline{aa}}_{x_0} \\ a'^{\overline{aa}}_{x_0+n} &< a^{\overline{aa}}_{x_0+n} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{{}_{|n}a'^{\overline{aa}}_{x_0}}{a'^{\overline{aa}}_{x_0+n}} > \frac{{}_{|n}a^{\overline{aa}}_{x_0}}{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}$$

$$\begin{aligned} D'^{\overline{aa}}_{x_0+n} &= D^{\overline{aa}}_{x_0+n} \\ D'^{\overline{aa}}_{x_0} &= D^{\overline{aa}}_{x_0} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{D'^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{D'^{\overline{aa}}_{x_0}} = \frac{D^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{D^{\overline{aa}}_{x_0}}$$

En conséquence:

$$\frac{1}{\dfrac{{}_{|n}a'^{\overline{aa}}_{x_0}}{a'^{\overline{aa}}_{x_0+n}} + \dfrac{D'^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{D'^{\overline{aa}}_{x_0}}} < \frac{1}{\dfrac{{}_{|n}a^{\overline{aa}}_{x_0}}{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}} + \dfrac{D^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{D^{\overline{aa}}_{x_0}}}$$

Et, en application de l'égalité (3)

$$\frac{a'^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a'^{\overline{aa}}_{x_0}} < \frac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}$$

En vertu de cette inégalité, la relation (2) permet d'énoncer:

Si l'invalidité augmente à l'âge $x_0 + n$ ou à des âges supérieurs, et reste la même aux autres âges, la réserve mathématique croît à l'âge $x_0 + n$.

3° En conséquence des deux premiers cas, *une augmentation de l'invalidité aux âges inférieurs à $x_0 + n$ et une diminution de l'invalidité à l'âge $x_0 + n$ et aux âges supérieurs* ont des répercussions de même sens sur la réserve mathématique à l'âge $x_0 + n$: elles *la font décroître.*

4° Autre conséquence:

Une augmentation de l'invalidité à des âges inférieurs à $x_0 + n$ a une répercussion contraire à celle d'une augmentation à l'âge $x_0 + n$ ou à des âges supérieurs. *Si l'invalidité augmente à tous les âges, il se peut que la réserve mathématique ne change pas, il est aussi possible qu'elle augmente ou qu'elle diminue.*

5° Supposons que *dans l'intervalle d'assurance* (θ, T) *le taux d'invalidité augmente, et qu'en dehors de cet intervalle il reste constant.*

D'après les théorèmes précédents, la réserve croît à l'âge θ et aux âges inférieurs, elle diminue à l'âge T et aux âges supérieurs.

En conséquence, *la différence entre l'ancienne et la nouvelle réserve change de signe au moins une fois dans l'intervalle* (θ, T).

Cette loi est analogue au «Zeichenwechselsatz», trouvé par M. Moser et mentionné dans notre avant-propos.

CHAPITRE II.

Tables conduisant à d'égales réserves mathématiques de la rente d'invalidité.

§ 1. **Généralités:** Le problème étudié dans ce chapitre peut être énoncé comme suit: Etant donné un système de tables fournissant les valeurs des fonctions $a_x^{\overline{aa}}$, $p_x^{\overline{aa}}$ et i_x, *construire d'autres tables conduisant aux mêmes réserves mathématiques de la rente d'invalidité,* dans l'hypothèse [1]) que les taux de mortalité q_x, q_x^a, $_{|t}q_x^a$ et $q_x^{\overline{aa}}$ ainsi que le taux d'intérêt restent constants.

En conséquence de l'hypothèse, la fonction a_x^a est indépendante de l'invalidité. L'égalité (2) nous permet d'énoncer:

Pour que deux tables d'invalidité conduisent toujours à d'égales réserves mathématiques de la rente d'invalidité, il faut et il suffit qu'elles donnent la même valeur pour le rapport $\frac{a_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{a_{x_0}^{\overline{aa}}}$, ceci quelles que soient les valeurs des lettres n et x_0.

Désignons par le signe «prime» les symboles relatifs à la deuxième table d'invalidité. La condition peut s'écrire:

$$\frac{a'^{\overline{aa}}_{x+n}}{a'^{\overline{aa}}_{x}} = \frac{a^{\overline{aa}}_{x+n}}{a^{\overline{aa}}_{x}}$$

Elle doit être satisfaite quel que soit n.

---

[1]) Nous reviendrons sur cette hypothèse au § 8, ce sera l'occasion d'en donner une interprétation et une critique.

On peut donc la mettre sous la forme

$$(4) \qquad \frac{\mathsf{a}_x^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_x'^{\overline{aa}}} = \frac{\mathsf{a}_{x+1}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x+1}'^{\overline{aa}}} = \frac{\mathsf{a}_{x+2}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x+2}'^{\overline{aa}}} = \dots = \frac{\mathsf{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x+n}'^{\overline{aa}}} = 1 + k'$$

où k' est une constante.

Désignons par ω le dernier âge de la table d'invalidité.

Si $$n = \omega - x,$$
on a $$\mathsf{a}_{x+n}^{\overline{aa}} = \mathsf{a}_\omega^{\overline{aa}} = 1,$$
et nous pouvons écrire aussi
$$\mathsf{a}_{x+n}'^{\overline{aa}} = \mathsf{a}_\omega'^{\overline{aa}} = 1,$$
parce que les deux tables doivent avoir le même âge final ω. En effet, aux âges où il y aurait encore des actifs d'après l'une de ces tables, tandis qu'il n'y en aurait plus d'après l'autre, les réserves ne seraient pas égales.

On a $$\frac{\mathsf{a}_\omega^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_\omega'^{\overline{aa}}} = 1.$$

Ce rapport ne peut satisfaire à la condition (4) que si k' est égal à zéro, c'est-à-dire si les tables sont identiques.

Dans notre hypothèse, il est donc impossible d'obtenir des tables d'invalidité différentes donnant les mêmes réserves à tous les âges. Nous devons faire une exception pour l'âge ω.

§ 2. **Détermination de** $\mathsf{a}_{x+n}'^{\overline{aa}}$.

De l'égalité (4) on tire

$$\mathsf{a}_{x+n}' = \frac{\mathsf{a}_{x+n}^{\overline{aa}}}{1 + k'}$$

Cette équation permet le calcul des valeurs de $\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x+n}$ excepté pour $n = \omega - x$, cas auquel:

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{\omega} = 1. \tag{5}$$

§ 3. Détermination de $p'^{\overline{aa}}_x$.

Partons de l'équation bien connue

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_x = 1 + v\, p'^{\overline{aa}}_x\, \mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x+1}$$

En vertu de l'égalité (4) cette relation devient:

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_x = 1 + v\, p'^{\overline{aa}}_x \left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x+1}}{1+k'} \right)$$

puis

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_x = 1 + v\, p'^{\overline{aa}}_x \frac{a^{\overline{aa}}_x}{v\, p^{\overline{aa}}_x\,(1+k')}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_x}{1+k'} = 1 + \frac{p'^{\overline{aa}}_x}{p^{\overline{aa}}_x} \cdot \frac{a^{\overline{aa}}_x}{1+k'}$$

De là

$$p'^{\overline{aa}}_x = p^{\overline{aa}}_x \cdot \frac{a^{\overline{aa}}_x - k'}{a^{\overline{aa}}_x}$$

ou

$$p'^{\overline{aa}}_x = p^{\overline{aa}}_x \left(1 - \frac{k'}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_x - 1} \right) \tag{6}$$

Cette relation permet le calcul de $p'^{\overline{aa}}_x$, et par conséquent la construction des tables de survie comme actif. Elle ne peut pas exprimer $p'^{\overline{aa}}_{\omega-1}$, car elle est basée sur la relation $\dfrac{\mathrm{a}_{x+1}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{x+1}} = 1 + k'$, et cette dernière n'est pas valable pour $x = \omega - 1$ [conséquence de l'égalité (5)].

Mais on a

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{\omega-1} = 1 + v\, p'^{\overline{aa}}_{\omega-1}$$

et de la relation (4) on peut tirer

$$\mathrm{a}'^{\overline{aa}}_{\omega-1} = \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{\omega-1}}{1 + k'}$$

donc

$$1 + v\, p'^{\overline{aa}}_{\omega-1} = \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{\omega-1}}{1 + k'}$$

$$p'^{\overline{aa}}_{\omega-1} = \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{\omega-1} - (1 + k')}{v\,(1 + k')}$$

$$p'^{\overline{aa}}_{\omega-1} = \frac{v\, p^{\overline{aa}}_{\omega-1} - k'}{v\,(1 + k')} \tag{7}$$

Au dernier âge de la table:

$$p^{\overline{aa}}_{\omega} = 0.$$

De même nous posons, afin que les tables finissent au même âge,

$$p'^{\overline{aa}}_{\omega} = 0. \tag{8}$$

Si l'on a deux groupes de taux de survie comme actif, satisfaisant tous deux à l'égalité (6), et que l'on désigne les symboles du premier groupe par l'indice « prime » et ceux du second groupe par l'indice «seconde»:

$$p_x^{'\overline{aa}} = p_x^{\overline{aa}}\left(1 - \frac{k'}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} - 1}\right) \tag{6}$$

$$p_x^{''\overline{aa}} = p_x^{\overline{aa}}\left(1 - \frac{k''}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} - 1}\right)$$

d'où

$$\frac{p_x^{'\overline{aa}} - p_x^{\overline{aa}}}{p_x^{''\overline{aa}} - p_x^{\overline{aa}}} = \frac{k'}{k''} \tag{9}$$

Cette égalité n'est pas valable pour $p'^{\overline{aa}}_{\omega-1}$, $p''^{\overline{aa}}_{\omega-1}$ et $p^{\overline{aa}}_{\omega-1}$, mais on démontre facilement que:

$$\frac{(1+k')\, p'^{\overline{aa}}_{\omega-1} - p^{\overline{aa}}_{\omega-1}}{(1+k'')\, p''^{\overline{aa}}_{\omega-1} - p^{\overline{aa}}_{\omega-1}} = \frac{k'}{k''} \tag{10}$$

Si l'on connaît deux tables conduisant aux mêmes réserves, ces deux relations (9) et (10) permettent la construction d'une troisième table jouissant de la même propriété.

§ 4. Détermination de i'_x.

On sait que:

$$p_x^{\overline{aa}} = 1 - q_x^{\overline{aa}} - i_x, \tag{11}$$

de même

$$p_x^{'\overline{aa}} = 1 - q_x^{'\overline{aa}} - i'_x.$$

On l'introduit dans

$$p_x^{'\overline{aa}} = p_x^{\overline{aa}}\left(1 - \frac{k'}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} - 1}\right) \tag{6}$$

qui devient:

$$1 - q_x'^{\overline{aa}} - i_x' = (1 - q_x^{\overline{aa}} - i_x)\left(1 - \frac{k'}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} - 1}\right)$$

d'où (à cause de l'hypothèse $q_x'^{\overline{aa}} = q_x^{\overline{aa}}$)

$$(12) \qquad i_x' = i_x + p_x^{\overline{aa}} \frac{k'}{\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} - 1}$$

L'égalité (6) n'étant pas valable pour $x = \omega - 1$, il en est de même pour (12). Mais on tire de (11):

$$i_{\omega-1}' + p_{\omega-1}'^{\overline{aa}} + q_{\omega-1}'^{\overline{aa}} = 1$$

de (7) $$p_{\omega-1}'^{\overline{aa}} = \frac{v\, p_{\omega-1}^{\overline{aa}} - k'}{v\,(1 + k')}$$

et de la donnée

$$q_{\omega-1}'^{\overline{aa}} = q_{\omega-1}^{\overline{aa}}$$

Ce système de 3 équations nous donne, en tenant compte de l'équation (11):

$$i_{\omega-1}' = 1 - q_{\omega-1}^{\overline{aa}} - \frac{v\,(1 + k')\, p_{\omega-1}^{\overline{aa}} - v\, k' p_{\omega-1}^{\overline{aa}} - k'}{v\,(1 + k')}$$

$$= i_{\omega-1} + k' \frac{v\, p_{\omega-1}^{\overline{aa}} + 1}{v\,(1 + k')}$$

$$(13) \qquad i_{\omega-1}' = i_{\omega-1} + k' \frac{\mathrm{a}_{\omega-1}^{\overline{aa}}}{v\,(1 + k')}$$

Des égalités (11) et (8) nous tirons

$$(14) \qquad i_\omega' = 1 - q_\omega^{\overline{aa}} = i_\omega .$$

Si l'on a deux tables d'invalidité satisfaisant aux égalités (12) et (13), et que l'on désigne les symboles de l'une par l'indice «prime» et les symboles de l'autre par l'indice «seconde»:

$$i'_x - i_x = p_x^{\overline{aa}} \frac{k'}{a_x^{\overline{aa}}}$$

$$i''_x - i_x = p_x^{\overline{aa}} \frac{k''}{a_x^{\overline{aa}}}$$

d'où

$$\frac{i'_x - i_x}{i''_x - i_x} = \frac{k'}{k''} \tag{15}$$

Cette relation n'est pas valable aux âges ω et $\omega - 1$, auxquels on a:

$$\frac{i'_{\omega-1} - i_{\omega-1}}{i''_{\omega-1} - i_{\omega-1}} = \frac{k'}{k''} \cdot \frac{1+k''}{1+k'} \tag{16}$$

et de (14) on tire:

$$i''_\omega = 1 - q_\omega^{\overline{aa}} = i'_\omega = i_\omega . \tag{17}$$

Si l'on connaît deux tables d'invalidité conduisant à des réserves mathématiques égales, les relations (15), (16) et (17) permettent de construire facilement une troisième table jouissant de la même propriété.

§ 5. **Réserves mathématiques à l'âge ω.**

De la formule (2), on tire:

$$_{\omega-x_0}V(a_{x_0}^{\overline{ai}}) = \mathrm{a}_\omega^a - \mathrm{a}_{x_0}^a \cdot \frac{1}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}$$

et

$$_{\omega-x_0}V(a_{x_0}^{\prime\overline{ai}}) = \mathrm{a}_\omega^a - \mathrm{a}_{x_0}^a \frac{1}{\mathrm{a}_{x_0}^{\prime\overline{aa}}} \tag{18}$$

En vertu de l'égalité (4), la relation (18) peut s'écrire:

$$ {}_{\omega-x_0}V(a'^{\overline{ai}}_{x_0}) = \mathsf{a}^{a}_{\omega} - \mathsf{a}^{a}_{x_0}\,\frac{1+k'}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}} $$

La différence des réserves ${}_{\omega-x_0}V(a'^{\overline{ai}}_{x_0})$ et ${}_{\omega-x_0}V(a^{\overline{ai}}_{x_0})$ est donc:

$$ \mathsf{a}^{a}_{x_0}\left(\frac{1}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}} - \frac{1+k'}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right) = -\,k'\,\frac{\mathsf{a}^{a}_{x_0}}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}} $$

$$ (19) \qquad {}_{\omega-x_0}V\,(a'^{\overline{ai}}_{x_0}) - {}_{\omega-x_0}V\,(a^{\overline{ai}}_{x_0}) = -\,k'\,\frac{\mathsf{a}^{a}_{x_0}}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}} $$

Cette différence est sensible sans être très grande. D'après les tables en usage, sa valeur absolue est comprise entre $|k'|$ et $3.|k'|$ si l'âge x_0 de l'assuré lors de la conclusion de l'assurance ne dépasse pas 60 ans. En outre, cette différence se rapporte à une réserve qui, à l'âge ω, est forte, puisqu'elle doit permettre de payer une rente de plusieurs termes, après encaissement d'une seule prime. On peut admettre que $3\,|\,k'\,|$ est fractionnaire, tandis que la réserve mathématique à l'âge ω a une valeur supérieure à l'unité. Nous reviendrons sur cette question dans la suite.

En général, la différence (19) sera négligeable relativement au total des réserves mathématiques d'une caisse d'invalidité et de retraite, car le nombre des assurés encore actifs à l'âge ω est très faible.

§ 6. **Remarques sur les valeurs de la constante k'.**

En pratique la valeur absolue de k' doit être très petite. Nous le voyons clairement à partir de l'égalité

$$(12) \qquad i'_x = i_x + p_x^{\overline{aa}} \frac{k'}{a_x^{\overline{aa}}} = i_x \left(1 + k' \frac{\frac{p_x^{\overline{aa}}}{a_x^{\overline{aa}}}}{i_x}\right)$$

A titre d'exemple, nous avons calculé quelques valeurs du rapport $\frac{p_x^{\overline{aa}}/a_x^{\overline{aa}}}{i_x}$ sur la base des tables de Karup-Andrae [1]), voici nos résultats:

x	$\frac{\frac{p_x^{\overline{aa}}}{a_x^{\overline{aa}}}}{i_x}$
20	119,4
30	51,6
40	14,9
50	6,58
60	2,78
70	1,54

La constante k' doit être une petite fraction pour que le taux d'invalidité ne soit pas modifié dans une proportion inadmissible. D'après le tableau ci-dessus, si $k' = 0{,}01$, le taux i'_{20} est 2,19 fois plus grand que le taux i_{20}.

De même

$$i'_{50} = 1{,}066 \; i_{50}.$$

Si $k' = 0{,}1$ on a $i'_{20} = 12{,}9 \; i_{20}$.

$$i'_{50} = 1{,}658 \; i_{50}.$$
$$i'_{70} = 1{,}154 \; i_{70}.$$

[1]) Neue Versicherungsformen, unveränderte Invalidität, Seite 166* und 192* (Gotha 1914).

C'est ce qui nous a permis de dire au paragraphe 5 que $3.|k'|$ est une fraction qui est faible relativement à la valeur de la réserve à l'âge ω.

§ 7. Nature des variations de l'invalidité qui ne modifient pas les réserves mathématiques.

Calculons l'accroissement relatif du taux d'invalidité, nous le tirons de l'équation (12):

$$\frac{i'_x - i_x}{i_x} = k' \frac{\frac{p_x^{\overline{aa}}}{a_x^{\overline{aa}}}}{i_x} \tag{20}$$

Le coefficient $\frac{p_x^{\overline{aa}}/a_x^{\overline{aa}}}{i_x}$ étant positif, la valeur absolue de l'accroissement relatif du taux d'invalidité est proportionnelle à ce coefficient. Nous avons déjà donné un exemple des valeurs de ce dernier, elles décroissent lorsque l'âge augmente, excepté aux derniers âges, auxquels on a

$$\frac{i'_{\omega-1} - i_{\omega-1}}{i_{\omega-1}} = k' \frac{\mathrm{a}_{\omega-1}^{\overline{aa}}}{v\,(1+k')\,i_{\omega-1}} \tag{21}$$

et

$$\frac{i'_{\omega} - i_{\omega}}{i_{\omega}} = 0. \tag{22}$$

D'après la table de Grieshaber

$$\omega = 86$$

et pour $k' = 0{,}1252$, on a le tableau suivant:

Age	Augmentation relative du taux d'invalidité:
86	0
85	0,224
84	0,198
83	0,199
82	0,200

D'après la table de Riedel (Trieste 1914)

$\omega = 90$ Si $k' = 0{,}1022$

on a:

Age	Augmentation relative du taux d'invalidité:
90	0
89	0,333
88	0,230
87	0,216
86	0,200

L'étude faite dans le présent paragraphe peut paraître superflue, elle a néanmoins une grande importance, car elle nous permettra de trouver intuitivement l'influence d'un changement du taux d'invalidité sur les réserves mathématiques, dans le cas où ce taux est multiplié par le même facteur à tous les âges.

§ 8. Interprétation et critique de l'hypothèse de l'invariabilité des mortalités q_x, q_x^a, ${}_{|t}q_x^a$ et $q_x^{\overline{aa}}$.

Admettre que les mortalités q_x, q_x^a, ${}_{|t}q_x^a$ et $q_x^{\overline{aa}}$ sont indépendantes de l'invalidité, revient à supposer que les variations de cette dernière proviennent d'un fait n'ayant pas d'influence sur la santé des assurés, mais qui fait passer au groupe des invalides un certain nombre de sujets actifs qui restent soumis à la mortalité des actifs. Inversément, ces sujets peuvent revenir au groupe des actifs, dont ils ont la mortalité, cela ne change ni la mortalité générale q_x, ni les mortalités des actifs q_x^a et $q_x^{\overline{aa}}$ (par contre q_x^i, $q_x^{\overline{ai}}$ et $q_{[x]}^i$ changent).

Quels sont les faits qui pourraient être cause de ces variations de l'invalidité?

a) Une modification des prescriptions administratives, dans ce sens que l'on accorderait désormais des pensions d'invalidité à des personnes qui peuvent vivre aussi longtemps que les actifs, mais qui sont gênées, dans l'exercice de leurs fonctions, par des maladies telles que la cataracte, la cécité, la surdité, le daltonisme, etc.

b) Une plus grande indulgence des médecins, qui délivreraient désormais davantage de certificats d'invalidité à la suite d'accidents. Il y a une catégorie d'accidentés qui présentent une forte mortalité pendant leur traitement mais qui sont ensuite soumis à la mortalité des actifs. Si le médecin leur faisait des certificats d'invalidité à la fin de leur convalescence, la mortalité générale et la mortalité des actifs n'en seraient pas sensiblement modifiées. Par contre, le taux d'invalidité augmenterait.

L'hypothèse étudiée dans ce paragraphe nous éloigne-t-elle beaucoup de la réalité? Nous ne le croyons pas, car:

1° Les variations de l'invalidité n'ont probablement pas une forte influence sur la mortalité générale et sur les mortalités q_x^a et q_x^{aa} des actifs.

2° La solution donnée aux paragraphes 1 à 5 du présent chapitre ne comporte que des accroissements de même sens, lorsqu'on passe d'une table d'invalidité à une autre table conduisant aux mêmes réserves mathématiques. Il semble que si l'invalidité varie à tous les âges dans le même sens, l'influence de cette variation sur la mortalité doit être aussi de même sens à tous les âges. Une telle variation de la mortalité pourrait bien être sans influence sensible sur les réserves de la rente d'invalidité, tout comme elle peut être sans influence sur celles de l'assurance mixte (Text-Book, Chap. XVIII, n° 49 et suiv.).

Nous n'approfondirons pas ici cette supposition.

3° Nous montrerons au troisième chapitre que les variations de la mortalité paraissent jouer un rôle très faible dans ces questions.

4° Nous voudrions utiliser une loi analytique exprimant l'influence des variations de l'invalidité sur la mortalité; malheureusement celle-ci n'est pas encore trouvée. D'ailleurs, il n'est pas difficile d'imaginer des exemples dont les uns montreraient une augmentation de la mortalité lorsque l'invalidité augmente, tandis que les autres présenteraient l'influence contraire. Parmi les premiers, on peut ranger l'augmentation des risques d'accidents et de maladies dans une industrie, par suite d'une rénovation des méthodes employées. Parmi les seconds figure l'indulgence plus grande des médecins chargés de faire les déclarations d'invalidité.

§ 9. Remarques sur la solution de notre problème et son utilisation.

La solution donnée aux paragraphes 2 à 5 de ce chapitre fournit le moyen de construire des tables telles que le passage de l'une à l'autre d'entre elles n'entraîne pas de modification dans la situation financière d'une caisse de pension d'invalidité (et de retraite) *à la condition d'encaisser, dès le changement, des primes calculées sur la base des nouveaux taux.*

On peut utiliser ce chapitre pour construire des tables d'invalidité servant d'auxiliaires dans l'application des théorèmes du premier chapitre:

Supposons qu'on veuille savoir a priori si les réserves basées sur une table d'invalidité A sont plus grandes ou plus petites que celles qu'on calculerait d'après une table B, pour le même âge $x_0 + n$. On pourrait construire partiellement une table conduisant aux mêmes réserves mathématiques que la table A et donnant à l'âge $x_0 + n$ le même taux d'invalidité que la table B. On appliquerait ensuite les théorèmes du chapitre 1 à cette nouvelle table et à la table B.

Comme application de cette méthode, nous nous proposons l'étude suivante:

§ 10. Influence d'un changement du taux d'invalidité sur les réserves mathématiques dans le cas où le taux est multiplié par le même facteur à tous les âges.

Soient i_x le taux d'après la table I,
$(1 + k)\, i_x$ le taux d'après la table II,
x_1 un âge arbitrairement choisi.

Envisageons le cas où k est positif.

On peut représenter graphiquement ces éléments comme suit:

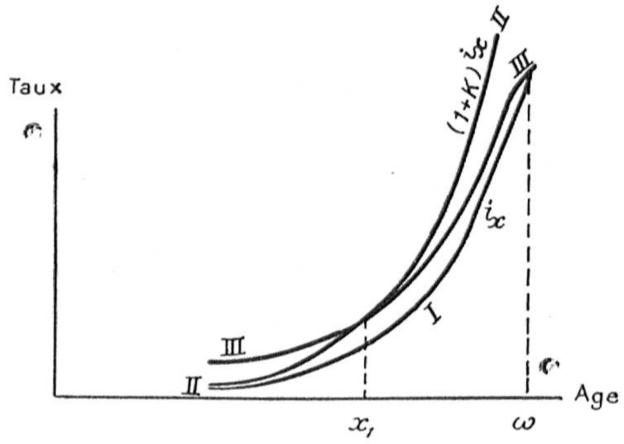

Fig. 1.

Les réserves calculées à l'âge x_1 d'après la table II sont-elles plus grandes ou plus petites que d'après la table I?

En application du paragraphe 4, on peut trouver une table d'invalidité donnant le taux $(1 + k)\, i_{x_1}$ à l'âge x_1 et conduisant aux mêmes réserves mathématiques que la table I. Nous l'appellerons table III et nous désignerons son taux d'invalidité par le symbole i'_x. En tenant compte de l'égalité (12), on a:

$$i'_{x_1} = (1 + k)\, i_{x_1} = i_{x_1} + p^{a\overline{a}}_{x_1} \frac{k'}{a^{a\overline{a}}_{x_1}}$$

d'où

$$k' = \frac{k\, i_{x_1} \cdot a^{a\overline{a}}_{x_1}}{p^{a\overline{a}}_{x_1}} \tag{23}$$

Connaissant la valeur de la constante k', on peut calculer les valeurs du taux i'_x au moyen des relations (12), (13) et (14).

Partant du paragraphe 7, on voit que les valeurs de i'_x peuvent être obtenues en multipliant les valeurs correspondantes de i_x par des facteurs qui décroissent d'abord lorsque l'âge croît, puis augmentent dans les derniers âges, pour retomber brusquement à 1 à l'âge ω.

Cette remarque donne l'allure de la courbe III, qui représente l'invalidité de la table III.

Si l'âge x_1 n'est pas très grand, la courbe III sera au-dessus de la courbe II jusqu'à l'âge x_1, puis ensuite, au-dessous (fig. 1). En appliquant le théorème énoncé au chiffre 3 du premier chapitre, nous trouvons que, à l'âge x_1, la table II donne des réserves plus grandes que la table III, c'est-à-dire aussi que la table I.

Ce que nous venons de dire pour l'âge x_1 se répète pour tous les premiers âges. Par contre, il en est autrement aux derniers âges de la table, pour lesquels la courbe III se présente comme ci-dessous:

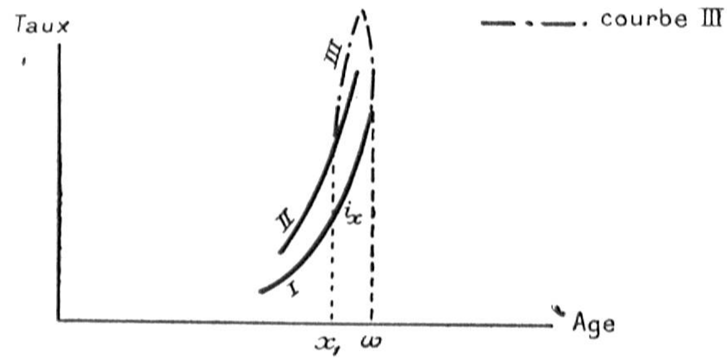

Fig. 2.

D'après le théorème énoncé au chiffre 3 du chapitre I, il semble que la réserve à l'âge x_1 doit être plus petite d'après la table II que d'après les tables III et I. La réserve d'après la table II serait donc plus grande dans les premiers âges et plus petite dans les derniers, nous aurons l'occasion de le prouver au chapitre III.

CHAPITRE III.

Etude générale de l'influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques de la rente viagère d'invalidité.

Emploi des lois de Makeham et de M. Urech.

§ 1. **Bases:** Dans ce chapitre, nous admettrons les bases suivantes (sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe 12):

1° Le taux instantané de mortalité des actifs $\mu_x^{\overline{aa}}$ n'est pas influencé par les variations de l'invalidité, il s'exprime par la loi de Makeham:

$$\mu_x^{\overline{aa}} = \alpha + \beta\, c^x. \tag{24}$$

2° Le taux de mortalité de l'ensemble des actifs d'âge x, q_x^a, est, lui aussi, indépendant des variations de l'invalidité.

3° Le taux d'invalidité est donné par une exponentielle [1]):

$$\nu_x = F \cdot G^x \quad \text{(Loi de M. Urech).} \tag{25}$$

[1]) Dans un travail présenté à l'assemblée annuelle de l'Association suisse des actuaires, à Berthoud, le 3 novembre 1929, M. Urech, expert au Bureau fédéral des assurances, a donné cette loi sous la forme $i_x = i_{15}\, \varrho^{x-15}$. Elle avait aussi été donnée par Behm sous la forme $u_x = u_{20} \cdot 2^{\frac{x-20}{5}}$.

(Voir dans «Théorie mathématique des assurances», par Richard et Petit, p. 339.)

§ 2. **Nombre des survivants actifs:**

Partons de l'égalité [1]):

$$\text{(26)} \qquad \frac{d\, l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = -(\mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x)\, d\,x.$$

En tenant compte des égalités (24) et (25), nous obtenons:

$$\frac{d\, l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = -(\alpha + \beta\, c^x + F\, G^x)\, d\,x,$$

d'où

$$\operatorname{Log} l_x^{\overline{aa}} = -\int (\alpha + \beta\, c^x + F\, G^x)\, d\,x = -\alpha\, x - $$
$$- \frac{\beta\, c^x}{\operatorname{Log} c} - \frac{F\, G^x}{\operatorname{Log} G} + \operatorname{Log} k,$$

en posant

$$-\alpha = \operatorname{Log} s \qquad \frac{-\beta}{\operatorname{Log} c} = \operatorname{Log} g \qquad \frac{-F}{\operatorname{Log} G} = T \operatorname{Log} g,$$

on a

$$\operatorname{Log} l_x^{\overline{aa}} = x \operatorname{Log} s + c^x \operatorname{Log} g + G^x \cdot T \cdot \operatorname{Log} g + \operatorname{Log} k$$

et

$$\text{(27)} \qquad l_x^{\overline{aa}} = k\, s^x\, g^{c^x + T\, G^x}$$ où les constantes

g, c et s sont celles de Makeham; la constante T est donnée par l'égalité

---

[1]) «Contribution à la théorie mathématique de l'assurance invalidité», par M. G. Schaertlin, p. 8 et 9, égalités (20) et (23).

(28) $$T = \frac{-F}{\operatorname{Log} G \cdot \operatorname{Log} g}$$ où les constantes

F et G sont celles de la loi de M. Urech. La constante k dépend du nombre d'actifs à l'entrée de la table. Les logarithmes sont népériens.

§ 3. **Valeurs des constantes** c, g, s, F **et** G:

Les constantes de Makeham ont été calculées pour de nombreuses tables de mortalité [1]).

(29)	La valeur de la constante c est comprise entre	1,06 et 1,112
	La valeur de la constante g est comprise entre	0,991 et 0,9998
	La valeur de la constante s est comprise entre	0,991 et 0,9991

Nous avons calculé sommairement les constantes F et G de la loi de M. Urech, en ne tenant compte que des taux d'invalidité à deux âges éloignés tels que 20 et 65 ans ou bien 30 et 65 ans.

Voici nos résultats [2]):

---

[1]) Blatschke les a publiées dans les «Mitteilungen des Österreichisch-Ungarischen Verbandes der Privatversicherungs-Anstalten». Neue Folge, 9. Band, 1. Heft (Seite 33).

[2]) Nous avons laissé de côté quelques tables peu usitées, s'écartant par trop de la loi de M. Urech, et nous avons pris en considération les tables les plus importantes.

Valeurs des constantes F et G.

Table	Valeurs utilisées pour le calcul		Valeurs trouvées pour les constantes F	G	i_{65} obtenu par la formule de Behm
Zimmermann: Gesamtpersonal (1886—1888)	$i_{20} = 0{,}00021$	$i_{65} = 0{,}10002$	0,000014	1,147	0,11
Zimmermann, Bureaubeamte (1886)	$i_{20} = 0{,}00020$	$i_{65} = 0{,}07630$	0,000014	1,141	0,10
Zimmermann, Zugsbeamte (1886).	$i_{20} = 0{,}00031$	$i_{65} = 0{,}12207$	0,000022	1,142	0,16
Bentzien, Gesamtpersonal	$i_{20} = 0{,}00014$	$i_{65} = 0{,}11741$	0,000007	1,161	0,072
Küttner, Steinkohlenbergleute . .	$i_{20} = 0{,}0031$	$i_{65} = 0{,}3950$	0,00036	1,114	1,6
Behm, Gesamtes Personal (1868 bis 1873) ($i_{20} = 0{,}00022$)	$i_{35} = 0{,}00212$	$i_{65} = 0{,}06763$	0,000037	1,122	0,11
Riedel, Bureaubeamte (1882—1889) ($i_{20} = 0{,}00021$)	$i_{35} = 0{,}0022$	$i_{65} = 0{,}09752$	0,000026	1,135	0,11
Zuckerindustrie (1885—1908) Österreich-Ungarn (Karup-Andrae p. 445).	$i_{20} = 0{,}00021$	$i_{65} = 0{,}1075$	0,000013	1,149	0,11
Grieshaber, ouvriers.	$i_{20} = 0{,}000942$	$i_{65} = 0{,}219999$	0,000083	1,129	0,48

Dans les considérations suivantes, nous admettrons que

$$(30)\qquad \begin{cases} 0{,}000007 \leqq F \leqq 0{,}0001 \quad \text{et} \\ \quad 1{,}1 \leqq G < 1{,}2. \end{cases}$$

Nous ne prenons plus la table de Küttner en considération, parce qu'elle s'éloigne par trop de la loi de M. Urech.

§ 4. **Rente discontinue d'activité:**

On sait que:

$$\mathrm{a}_x^{\overline{aa}} = \frac{\sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} v^\tau \, l_{x+\tau}^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}}$$

En appliquant la formule (27), et en remplaçant

$$(31)\qquad s\,v \quad \text{par} \quad \sigma,$$

puis en simplifiant, on obtient

$$(32)\qquad \mathrm{a}_x^{\overline{aa}} = \frac{\sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau \, g^{c^{x+\tau}+T\,G^{x+\tau}}}{g^{c^x+T\,G^x}}$$

§ 5. **Variations des réserves mathématiques** de l'assurance d'une rente discontinue d'invalidité:

Dans l'introduction, formule (2), nous avons donné l'égalité

$${}_nV(a_{x_0}^{\overline{ai}}) = \mathrm{a}_{x_0+n}^{a} - \mathrm{a}_{x_0}^{a} \, \frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}$$

Dans son second membre, seul le quotient $\dfrac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}}$ dépend de l'invalidité.

La valeur de la rente viagère $\mathrm{a}^{a}_{x_0}$ étant positive, *le sens des variations de la réserve* ${}_nV(a^{\overline{ai}}_{x_0})$ *est contraire à celui des variations du quotient* $\dfrac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}}$

§ 6. **Etude des variations de l'expression** $\dfrac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}}$ **par rapport au paramètre** F:

En appliquant la formule (32), on trouve:

$$(33)\quad \frac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}} = \frac{g^{c^{x_0}-c^{x_0+n}}+T\left(G^{x_0}-G^{x_0+n}\right)\cdot\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty}\sigma^{\tau}g^{c^{x_0+n+\tau}}+T\,G^{x_0+n+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty}\sigma^{\tau}g^{c^{x_0+\tau}}+T\,G^{x_0+\tau}}$$

Dans cette expression, la constante F n'entre qu'implicitement sous la forme du paramètre T, car nous considérons les constantes c, g, σ, F et G comme indépendantes les unes des autres.

En conséquence:

$$(34)\qquad \frac{d}{d\,F}\left(\frac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial\,T}\left(\frac{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{a\overline{a}}_{x_0}}\right)\cdot\frac{d\,T}{d\,F}$$

De la formule (28) on peut tirer:

$$(35)\qquad \frac{d\,T}{d\,F} = \frac{-1}{\operatorname{Log} G\cdot\operatorname{Log} g}$$

Cette dernière expression est toujours positive, car $\text{Log}\, G > 0$ et $\text{Log}\, g < 0$. Il s'ensuit que *le signe du second membre de l'égalité (34) est toujours celui de l'expression* $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$

La dérivée $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$ se calcule à partir du second membre de (33), elle peut être mise sous la forme:

$$(36)\qquad \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}\right) = \frac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}} \cdot$$

$$\cdot \text{Log}\, g \left\{ \left(\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+n+\tau}} + T\, G^{x_0+n+\tau}\, G^{x_0+n+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+n+\tau}} + T\, G^{x_0+n+\tau}} - G^{x_0+n} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}} + T\, G^{x_0+\tau}\, G^{x_0+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}} + T\, G^{x_0+\tau}} - G^{x_0} \right) \right\}$$

Signe de la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$:

Excepté $\text{Log}\, g$, les facteurs de l'expression qui précède l'accolade sont positifs. Cette expression est donc négative, par conséquent la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{a^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{a^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$ *et la différence entre accolades* sont des signes contraires.

Quel est le signe de cette différence? Les moyens habituels ne nous ont pas permis de le déterminer. Nous avons été obligés de recourir au calcul numérique. Pour simplifier ce dernier, nous avons remplacé les limites supérieures des sommes respectivement par $\tau = 64 - x_0 - n$ et par $\tau = 64 - x_0$, ce qui revient à admettre que les actifs sont classés d'office parmi les invalides à l'âge de 65 ans. Ce procédé ne nous éloigne pas beaucoup de la réalité, le taux d'invalidité étant très grand à cet âge-là, et les assurés alors actifs ne restant que peu de temps encore en activité. Il est en outre conforme aux statuts de certaines caisses d'invalidité et de retraite qui accordent d'office la retraite aux assurés âgés de 65 ans.

L'étude faite au chapitre IV pour les assurances temporaires montrera en quoi les résultats différeraient si les sommations étaient prolongées jusqu'à l'âge auquel il n'y a plus que des invalides.

Les deux termes de la différence entre accolades sont deux valeurs d'une même fonction, en deux points différents, x_0 et $x_0 + n$. Cette fonction est:

$$(37) \qquad \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x+\tau}+TG^{x+\tau}} \cdot G^{x+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x+\tau}+TG^{x+\tau}}} - G^x .$$

En tenant compte des tableaux des constantes de Makeham et de M. Urech (voir paragraphe 3), nous avons choisi 28 cas qui nous ont paru représenter les principales combinaisons de constantes pouvant se rencontrer:

Cas dans lesquels les valeurs de l'expression (37) **ont été calculées.**

Combinaisons de constantes	G	F	σ	c	g	Age du maximum
I	1,1	0,0001	0,94	1,112	0,9998	51 ans
II	1,1	0,0001	0,94	1,1	0,9992	51 »
III	1,1	0,0001	0,97	1,112	0,9992	50 »
IV	1,1	0,000007	0,94	1,112	0,9998	51 »
V	1,1	0,000007	0,94	1,1	0,9998	51 »
VI	1,1	0,000007	0,94	1,08	0,996	51 »
VII	1,1	0,000007	0,97	1,112	0,9998	49 »
VIII	1,1	0,000007	0,97	1,06	0,996	49 »
IX	1,1	0,000007	0,97	1,08	0,9992	49 »
X	1,1	0,000007	0,97	1,06	0,991	49 »
XI	1,13	0,0001	0,955	1,10	0,9992	54½ »
XII	1,13	0,00005	0,955	1,112	0,9992	54 »
XIII	1,13	0,00005	0,955	1,1	0,9992	54 »
XIV	1,13	0,00005	0,955	1,06	0,996	53 »
XV	1,13	0,00005	0,97	1,1	0,9998	53 »
XVI	1,13	0,00005	0,97	1,08	0,991	54 »
XVII	1,13	0,000007	0,955	1,10	0,9992	53 »
XVIII	1,2	0,0001	0,94	1,112	0,9998	45 »
XIX	1,2	0,0001	0,94	1,08	0,9998	45 »
XX	1,2	0,0001	0,94	1,06	0,991	45 »
XXI	1,2	0,0001	0,955	1,08	0,996	45 »
XXII	1,2	0,0001	0,97	1,112	0,9998	45 »
XXIII	1,2	0,0001	0,97	1,08	0,9992	45 »
XXIV	1,2	0,00005	0,94	1,08	0,9998	49 »
XXV	1,2	0,000007	0,94	1,112	0,9998	58 »
XXVI	1,2	0,000007	0,955	1,1	0,9998	58 »
XXVII	1,2	0,000007	0,955	1,06	0,991	58 »
XXVIII	1,2	0,000007	0,97	1,112	0,9992	58 »

Les valeurs que l'expression (37) prend dans ces divers cas ont été portées sur les tables des pages suivantes. Elles ont été calculées en partie à la machine et en partie par logarithmes. Les calculs ne présentent aucun intérêt justifiant leur publication.

Ces tables nous montrent que les valeurs de l'expression (37) croissent d'abord avec l'âge, présentent un maximum, puis décroissent. Cette loi est vraie non seulement pour les vingt-huit cas déjà mentionnés; des calculs nous ont montré qu'elle l'est aussi pour

	c	g	σ	F	G	Age du max.
1°	1,154	0,996	0,961	0	1,5	57
2°	1,154	0,996	0,961	0	1,13	41
3°	1,154	0,996	0,961	0,00005	1,13	40
4°	1,060	0,991	0,94	0,00005	1,16	57
5°	1,060	0,991	0,94	0,0001	1,16	55
6°	1,060	0,991	0,94	0,0001	1,15	57
7°	1,060	0,991	0,94	0,0001	1,14	56
8°	1,112	0,9998	0,94	0,0001	1,12	52½
9°	1,06	0,996	0,961	0,00039	1,10	47

La connaissance des valeurs de l'expression (37) permet de déterminer le signe de la différence qui figure, entre accolades, au second membre de l'égalité (36) et, en conséquence, le signe de la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$$

Tableau des valeurs de la fonction (37)

	$G = 1,1$										
	$F = 0,0001$			$F = 0,000\,007$							
Ages	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Ages
20	31,6	30,1	45,6	35,4	36	31,7	59,9	60	61	56	20
21	33,1	31,6	47,1	37,2	38	33,3	61,8	62	63	58	21
22	34,8	33,2	48,7	39,1	40	35,0	63,8	64	65	60	22
23	36,5	34,9	50,3	41,0	42	36,7	65,8	66	67	62	23
24	38,3	36,6	52,0	43,0	44	38,6	67,9	68	69,1	64	24
25	40,2	38,4	53,7	45,1	46	40,5	69,9	70	71,3	66	25
26	42,1	40,2	55,4	47,3	48	42,4	72,1	72	73,4	68	26
27	44,1	42,1	57,2	49,5	51	44,5	74,3	75	75,7	70	27
28	46,2	44,1	59,0	51,8	53	46,6	76,5	77	77,9	72	28
29	48,3	46,1	60,8	54,1	55	48,8	78,7	79	80,2	75	29
30	50,5	48,2	62,7	56,5	58	51,0	81,0	81	82,5	77	30
31	52,7	50,4	64,6	59,0	60	53,3	83,3	84	84,8	79	31
32	55,0	52,6	66,6	61,5	63	55,7	85,6	86	87,2	81	32
33	57,4	54,9	68,5	64,1	66	58,1	87,9	88	89,6	84	33
34	59,8	57,2	70,5	66,8	68	60,6	90,2	91	91,9	86	34
35	62,2	59,6	72,5	69,4	71	63,1	92,5	93	94,3	89	35
36	64,7	61,9	74,5	72,1	74	65,7	94,8	96	96,6	91	36
37	67,2	64,4	76,5	74,8	77	68,3	97,1	98	98,9	93	37
38	69,7	66,8	78,5	77,5	79	70,9	99,3	100	101,2	95	38
39	72,2	69,3	80,4	80,2	82	73,5	101	102	103	98	39
40	74,7	71,7	82,3	82,9	85	76,1	104	104	105	100	40
41	77,2	74,1	84,2	85,5	87	78,7	105	106	107	102	41
42	79,6	76,5	86,0	88,0	90	81,2	107	108	109	104	42
43	81,9	78,8	87,7	90,5	92	83,6	109	110	111	106	43
44	84,2	81,0	89,3	92,8	95	85,9	111	112	113	107	44
45	86,3	83,1	90,7	94,9	97	88,1	112	113	114	109	45
46	88,2	85,0	92,0	96,8	99	90,2	113	114	115	110	46
47	90,0	86,8	93,1	98,5	100	92,0	114	114,9	116	111	47
48	91,4	88,3	93,9	99,8	102	93,5	114	115,3	116	112	48
49	92,6	89,6	94,5	100,8	103	94,7	**114,2**	**115,4**	**116**	**112**	49
50	93,4	90,4	**94,7**	101,4	103	95,5	114	114,9	116	112	50
51	**93,8**	**90,90**	94,5	**101,5**	**103**	**95,9**	113	114	115	111	51
52	93,6	90,87	93,9	101,0	103	95,7	111	112	113	109	52
53	92,8	90,3	92,6	99,8	101	94,9	109	110	111	107	53
54	91,3	88,9	90,8	97,8	99	93,4	106	107	107	105	54
55	89,0	86,8	88,2	94,9	96	90,9	102	103	103	101	55
56	85,7	83,8	84,6	91,0	92	87,5	97	98	98	96	56
57	81,3	79,6	80,0	85,9	87	82,9	91	92	92	90	57
58	75,6	74,1	74,3	79,4	80	77,0	83	84	84	83	58
59	68,3	67,2	67,2	71,4	72	69,5	74	75	75	74	59
60	59,3	58,4	58,3	61,7	62	60,2	64	64	64	64	60
61	48,3	47,7	47,5	50	50	49	51	52	52	51	61
62	35	34,6	34,5	36	36	35	37	37	37	37	62
63	19	18,9	18,8	19	20	19	20	20	20	20	63
64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64

Valeurs de l'expression (37)

$G = 1{,}13$								
	$F = 0{,}0001$	$F = 0{,}000\,05$					$F = 0{,}000007$	
Ages	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	Ages
20		126	138	145	197	137		20
21		132	145	153	205	143		21
22		139	152	160	213	149		22
23		146	159	168	221	156		23
24		153	167	176	230	163		24
25		160	176	185	239	170		25
26		168	184	194	248	177		26
27		177	193	204	258	185		27
28		185	203	213	268	193		28
29		194	212	224	279	201		29
30		204	223	235	290	210		30
31		213	233	246	301	219		31
32		224	244	257	312	229		32
33		234	256	269	325	239		33
34		245	268	282	337	249		34
35		257	280	295	350	260		35
36		268	293	308	363	271		36
37		281	306	322	376	282		37
38		293	319	336	390	294		38
39		306	333	351	404	306		39
40		319	347	365	418	318		40
41		332	362	380	432	331		41
42		346	376	395	446	344		42
43		360	391	411	460	357		43
44		373	405	426	474	370		44
45		387	420	441	486	383	517	45
46		401	434	455	499	396	533	46
47		414	448	469	511	408	547	47
48		426	461	482	523	421	561	48
49		438	472	494	533	432	573	49
50		449	483	505	541	442	583	50
51		458	492	514	548	451	591	51
52		465	499	520	551	459	595	52
53	416	470	503	**523,6**	**552**	464	**596**	53
54	**418**	**472**	**504**	523,4	549	**466**	593	54
55	418	470	500	519	541	464	583	55
56	414	463	491	508	528	458	568	56
57	405	450	475	491	508	445	544	57
58	389	429	452	465	479	426	511	58
59	365	399	418	429	440	396	468	59
60	329	357	372	381	389	355	411	60
61	280	300	311	317	323	299	339	61
62	212	225	232	235	238	224	248	62
63	121	127	129	131	132	126	137	63
64	0	0	0	0	0	0	0	64

Valeurs de l'expression (37)

$G = 1{,}2$												
	$F = 0{,}0001$						$F = 0{,}00005$	$F = 0{,}000007$				
Ages	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	Ages
20	271	272	263	305	365	365		1374	1874	1710 [1])	2132	20
21	290	291	282	324	385	385		1470	1983	1810	2236	21
22	310	312	302	344	406	406		1574	2099	1920	2347	22
23	332	334	324	366	428	428		1685	2223	2040	2465	23
24	355	357	347	389	451	451		1804	2356	2170	2590	24
25	380	382	371	414	476	476		1933	2497	2300	2723	25
26	406	408	397	439	502	502		2070	2647	2440	2864	26
27	433	436	424	467	530	530		2218	2808	2600	3015	27
28	462	465	453	495	558	559		2376	2979	2760	3175	28
29	493	495	483	525	588	589		2547	3161	2940	3345	29
30	524	527	515	556	619	620		2729	3356	3120	3526	30
31	558	560	548	589	652	652		2925	3564	3320	3719	31
32	592	595	582	622	685	685		3134	3785	3540	3924	32
33	627	630	617	657	719	719		3359	4021	3760	4143	33
34	663	667	653	692	753	754		3599	4272	4010	4375	34
35	700	703	690	728	788	789		3855	4539	4276	4621	35
36	737	740	726	763	822	823		4129	4823	4540	4883	36
37	773	777	763	798	856	857		4422	5125	4840	5161	37
38	809	812	798	832	889	890		4733	5444	5150	5455	38
39	843	847	832	865	920	922		5063	5783	5480	5766	39
40	874	878	864	895	949	950		5414	6141	5830	6094	40
41	903	907	893	922	974	975		5785	6517	6200	6439	41
42	927	931	917	945	994	996		6176	6914	6590	6802	42
43	946	950	937	962	1010	1012		6587	7329	7000	7182	43
44	958	963	949	973	1018	1020		7019	7760 [1])	7420	7589	44
45	**963**	**968**	**955**	**976**	**1018**	**1021**	1820 [1])	7470 [1])	8210	7870	7990 [1])	45
46	958	963	950	969	1009	1013	1870	7930	8680	8330	8420	46
47	943	947	935	952	989	994	1900	8420	9160	8810	8850	47
48	915	919	908	923	957	964	1930	8910	9650	9290	9300	48
49	874	878	868	880	912	921	**1934**	9410	10140	9790	9750	49
50	820[1])	820[1])	813	820[1])	852	861	1920	9910	10640	10300 [2])	10200	50
51	750	750	744	750	780[1])	780[1])	1890	10410	11120	10800	10640	51
52	670	670	661	670	690	690	1830	10900	11590	11200	11070	52
53	570	570	560[1])	570	590	590	1740	11360	12040	11700	11470	53
54	470	470	450	470	480	480	1620	11780	12440	12100	11840	54
55	360	360	350	360	370	370	1480	12160	12790	12500	12150	55
56	260	260	260	260	270	270	1310	12450	13060	12700	12390	56
57	170	170	170	170	180	180	1120	12640	13210	12900	12530	57
58	100		100	100	100	100	900	**12690**	**13210**	**12900**	**12530**	58
59	50		40	50	50	50	690	12520	12990	12700	12320	59
60	20			20		20	480	12030	12437	12200	11820	60
61				10		10	300 [2])	11050	11370	11200	10840	61
62							200	9220	9440	9300	9050	62
63							100	5900	6030	5900	5830	63
64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64

[1]) Ce nombre et les suivants ont été arrondis aux dizaines.
[2]) A partir de ce nombre, arrondis aux centaines.

Signe de la dérivée $\dfrac{d}{d\,F}\left(\dfrac{\mathsf{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$:

Dans les égalités (33) à (37), les symboles x_0 et $x_0 + n$ représentent respectivement l'âge de l'assuré lors de la conclusion de l'assurance et son âge à l'inventaire.

Deux cas peuvent se présenter:

1° En général, *l'âge* x_0 *est faible*, il est plus petit que l'âge X auquel la fonction (37) atteint son maximum.

Dans les premières années après l'âge x_0, les valeurs de cette fonction augmentent. Ensuite, jusqu'à un certain âge χ, elles diminuent tout en restant plus grandes que la valeur à l'âge x_0.

L'expression (36) est alors négative et *le signe de la dérivée* $\dfrac{d}{d\,F}\left(\dfrac{\mathsf{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$ *est négatif* [conséquence de la remarque suivant l'égalité (35)].

Après l'âge χ, les valeurs de l'expression (37) diminuent encore, elles sont toutes plus petites que la valeur à l'âge x_0. L'expression (36) est alors positive et *la dérivée*

$$\frac{d}{d\,F}\left(\frac{\mathsf{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right) \quad \textit{est aussi positive.}$$

L'âge χ auquel cette dernière change ainsi de signe est généralement tardif.

2° *L'âge à la conclusion* de l'assurance *est plus grand ou égal à l'âge* X.

L'expression (36) est *positive* ainsi que la dérivée

$$\frac{d}{d\,F}\left(\frac{\mathsf{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$$

§ 7. Age X auquel la fonction (37) atteint son maximum.

L'examen des tables du paragraphe 6 montre nettement que les variations des paramètres c et g n'ont pas d'influence sensible sur l'âge auquel la fonction (37) est maximum.

Si le paramètre σ croît, cet âge décroît faiblement (de moins de 2 ans si l'on ne sort pas des cas pratiques).

Ces remarques ont une très grande importance. Elles expriment que les variations de la mortalité exercent ici une influence presque insensible, ce qui nous autorise à négliger les variations de mortalité dues aux changements du taux d'invalidité.

M. Urech [1] a aussi remarqué que la mortalité paraît exercer une très petite influence dans ces questions.

Lorsque la constante G a une faible valeur, les variations du paramètre F paraissent n'avoir qu'une petite répercussion sur l'âge X.

$\sigma = 0{,}94$

G	$F = 0{,}0001$	$F = 0{,}00005$	$F = 0{,}000007$
1,10	51	51	51
1,11	52	52	52
1,12	53	53	52 ½
1,13	54 ½	54	53 ½
1,14	56	55	54
1,15	57	56	54 ½
1,16	55	57	55 ½
1,20	45	49	58

[1]) Travail présenté le 3 novembre 1929 à l'assemblée annuelle de l'«Association des actuaires suisses», à Berthoud.

$\sigma = 0,97$

G	$F = 0,0001$	$F = 0,00005$	$F = 0,000007$
1,10	50	49	49
1,11	51	50 ½	50
1,12	52 ½	52	51 ½
1,13	54	53	52 ½
1,14	55 ½	54	53 ½
1,15	57	55	54
1,16	55	56	55
1,20	45	49	58

§ 8. **Influence des variations de la constante F sur les réserves mathématiques.**

En appliquant notre conclusion du paragraphe 5 aux résultats du paragraphe 6, nous pouvons énoncer:

1º Si l'âge x_0 est plus petit que l'âge X [auquel la fonction (37) présente son maximum], la réserve varie dans le même sens que le paramètre F pendant les premières années, puis en sens contraire pendant les dernières années d'activité.

2º Si l'âge x_0 est plus grand ou égal à l'âge X, la réserve et le paramètre F varient en sens inverses.

§ 9. **Dérivée du quotient $\dfrac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}$ par rapport au paramètre G.**

En vertu de l'indépendance des constantes c, g, σ, F et G on a:

$$(38)\quad \frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)\frac{dT}{dG} + \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$$

La dérivée $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\mathrm{a}^{\overline{a}\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$ est donnée par l'égalité (36) dont nous simplifierons désormais l'écriture en remplaçant l'expression entre accolades par la lettre φ:

$$(39)\quad \varphi = \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+n+\tau}+TG^{x_0+n+\tau}} \cdot G^{x_0+n+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+n+\tau}+TG^{x_0+n+\tau}}} - G^{x_0+n} -$$

$$- \left(\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}+TG^{x_0+\tau}} \cdot G^{x_0+\tau}}{\sum\limits_{0}^{\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}+TG^{x_0+\tau}}} - G^{x_0} \right)$$

De l'égalité (28) nous tirons:

$$(40)\qquad \frac{d\,T}{d\,G} = \frac{F}{G\,(\mathrm{Log}\,G)^{\,2}\ \mathrm{Log}\,g}$$

et de l'égalité (33):

$$\frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right) = \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n} \cdot T \cdot \mathrm{Log}\,g}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}} \Bigg\{ x_0\, G^{x_0-1} - (x_0+n)\, G^{x_0+n+1}$$

$$\frac{g^{c^{x_0+n+\tau}+TG^{x_0+n+\tau}} (x_0+n+\tau)\, G^{x_0+n+\tau-1}}{g^{c^{x_0+n+\tau}+TG^{x_0+n+\tau}}} - \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}+TG^{x_0+\tau}} (x_0+\tau) G^{x_0+\tau-1}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^\tau g^{c^{x_0+\tau}+TG^{x_0+\tau}}} \Bigg\}$$

Désignons par la lettre ψ l'expression entre accolades multipliée par G. Nous écrirons:

$$(42)\quad \psi = \left[\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x_0+n+\tau}} + T\, G^{x_0+n+\tau} (x_0+n+\tau)\, G^{x_0+n+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x_0+n+\tau}} + T\, G^{x_0+n+\tau}} - (x_0+n)\, G^{x_0+n}\right]$$

$$- \left[\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x_0+\tau}} + T\, G^{x_0+\tau} (x_0+\tau)\, G^{x_0+\tau}}{\sum\limits_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x_0+\tau}} + T\, G^{x_0+\tau}} - x_0\, G^{x_0}\right]$$

En vertu des égalités (36) et (39) à (42), l'expression (38) peut s'écrire après simplification:

$$(43)\quad \frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right) = \frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}\cdot G}\left\{\frac{F}{(\mathrm{Log}\, G)^2}\cdot\varphi + T\cdot \mathrm{Log}\, g\cdot\psi\right\}$$

Signe de la dérivée du quotient $\dfrac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}$ *par rapport au paramètre* G:

Dans (43), tous les facteurs précédant l'accolade sont positifs, la dérivée étudiée a donc le signe de l'expression entre accolades. Cherchons ce signe:

A cause de l'égalité (28):

$$(44)\quad \frac{F}{(\mathrm{Log}\, G)^2}\,\varphi + T\,\mathrm{Log}\, g\cdot\psi = \frac{F}{\mathrm{Log}\, G}\left(\frac{\varphi}{\mathrm{Log}\, G} - \psi\right)$$

Les expressions F et $\operatorname{Log} G$ sont toujours positives.

Le signe du quotient $\dfrac{F}{\operatorname{Log} G}$ est donc positif. Le signe de l'expression entre parenthèses dépend de la valeur de ψ.

Le second membre de l'égalité (42) exprime que le symbole ψ représente la différence des valeurs d'une même fonction aux points x_0 et $x_0 + n$. Cette fonction est:

$$(45) \qquad \frac{\sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x+\tau}+T G^{x+\tau}} (x+\tau)\, G^{x+\tau}}{\sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} \sigma^{\tau} g^{c^{x+\tau}+T G^{x+\tau}}} - x\, G^{x}.$$

L'expression (37) est une moyenne pondérée des valeurs de G^x, diminuée de la plus petite des valeurs entrant dans la moyenne.

L'expression (45) lui est semblable, les poids sont les mêmes, mais les opérations sont effectuées sur $x\,G^x$ au lieu de l'être sur G^x.

Comparant encore ces deux expressions nous trouvons que, si l'on passe de la première, (37), à la seconde, (45):

1° La somme qui figure au numérateur est multipliée par un facteur supérieur à x. Le dénominateur ne changeant pas, la fraction est multipliée par ce facteur.

Quotient des valeurs des fonctions (45) et (37), au même âge, pour la combinaison de constantes II.

Ages	Quotient	Ages	Quotient	Ages	Quotient
20	50,4	35	57,3	50	65,7
21	50,9	36	57,8	51	66,3
22	51,3	37	58,4	52	66,9
23	51,7	38	58,9	53	67,6
24	52,1	39	59,4	54	68,2
25	52,6	40	60,0	55	68,8
26	53,0	41	60,5	56	69,4
27	53,4	42	61,1	57	70,1
28	53,9	43	61,6	58	70,7
29	54,4	44	62,2	59	71,4
30	54,8	45	62,7	60	72,0
31	55,3	46	63,3	61	72,7
32	55,8	47	63,9	62	73,4
33	56,3	48	64,5	63	73,9
34	56,8	49	65,1		

Le terme soustractif G^x n'est multiplié que par x. En conséquence, l'expression (37) est multipliée par un nombre plus grand que x.

Des calculs — faits pour 25 combinaisons de constantes choisies parmi celles qui ont servi à l'étude de l'expression (37), et dans lesquels nous avons de nouveau laissé de côté les survivants valides à l'âge de 65 ans — prouvent que le multiplicateur n'est jamais inférieur à 25 et qu'il croît progressivement avec l'âge x.

Nous ne publions ci-dessus qu'un exemple des valeurs de ce multiplicateur, celui tiré du second cas des combinaisons de constantes (voir p. 144). Les autres cas donnent des valeurs croissant tout aussi régulièrement avec l'âge.

2° La nature de l'expression change peu, l'allure reste la même, l'âge auquel le maximum a lieu est parfois reculé d'un ou deux ans. La table de la page suivante donne les valeurs de l'expression (45) dans le voisinage de son maximum, les valeurs suivantes décroissent très rapidement.

Etudiant l'expression (36), nous avons trouvé le signe de φ. Ce qui a été fait pour φ se répète identiquement pour ψ. On peut maintenant poursuivre l'étude du signe de la dérivée $\frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right)$

a) Cas où l'âge x_0 est plus petit que l'âge X', auquel l'expression (45) présente son maximum:

φ étant la différence des valeurs de l'expression (37) aux points x_0 et x_0+n, ψ est la différence des valeurs correspondantes de l'expression (45).

Valeurs de la fonction. (45)

Combinaisons de constant.	50 ans	51 ans	52 ans	53 ans	54 ans	55 ans
I	6150	6230	6270	**6280**	6230	6130
II	5940	6030	6080	**6100**	6070	5980
III	6230	6270	**6290**	6260	6190	6070
IV	6690	6760	**6780**	6760	6680	6540
V	6820	6880	**6900**	6870	6790	6640
VI	6290	6370	**6420**	**6420**	6370	6260

Combinaisons de constant.	48 ans	49 ans	50 ans	51 ans	52 ans	53 ans
VII	7440	7500	7530	**7530**	7490	7400
VIII	7520	7590	**7620**	7610	7570	7480
IX	7570	7630	**7660**	7650	7600	7510
X	7270	7340	7390	**7400**	7370	7290

Combinaisons de constant.	52 ans	53 ans	54 ans	55 ans	56 ans	57 ans
XII	30000	30600	31100	**31200**	31100	30500
XIII	32300	32900	33200	**33300**	33000	32200
XIV	33700	34200	**34500**	**34500**	34100	33300
XV	35800	36100	**36300**	36100	35500	34400
XVI	29600	30200	30600	**30800**	30700	30200

Combinaisons de constant.	43 ans	44 ans	45 ans	46 ans	47 ans	48 ans
XVIII	47800	49100	50200	**50700**	**50700**	50000
XIX	48000	49400	50400	**50900**	**50900**	50200
XX	47300	48700	49700	**50300**	**50300**	49600
XXI	48600	49900	50800	**51300**	51200	50400
XXII	51000	52300	53100	**53400**	53200	52300
XXIII	51200	52400	53200	**53600**	53500	52700

Combinaisons de constant.	56 ans	57 ans	58 ans	59 ans	60 ans	61 ans
XXV	794000	815000	**828000**	826000	803000	746000
XXVI	833000	852000	**862000**	857000	830000	768000
XXVII	813000	833000	**844000**	841000	816000	756000
XXVIII	789000	807000	**817000**	813000	789000	732000

Les valeurs portées sur ce tableau ont été calculées avec 3 chiffres exacts.

Ces dernières valeurs sont obtenues en multipliant les premières par deux facteurs plus grands que 20, le plus petit multipliant la valeur soustractive. Il s'en suit, lorsque $\varphi > 0$ (c'est-à-dire *pour les petites valeurs de* n):

$$\psi > 20\,\varphi\,. \tag{46}$$

Des inégalités (30) nous tirons:

$$\operatorname{Log} G \geqslant \operatorname{Log} 1{,}1 = 0{,}0953$$

$$\frac{1}{\operatorname{Log} G} < 10{,}5.$$

On a donc:

$$\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} < 10{,}5\,\varphi < 20\,\varphi < \psi; \tag{47}$$

il en résulte que l'expression (44) est négative et que *la dérivée* $\dfrac{d}{d\,G}\left(\dfrac{\mathrm{a}^{\overline{a}\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{a}\overline{a}}_{x_0}}\right)$ *est aussi négative.*

Pour les plus grandes valeurs de n, lorsque $\varphi < 0$, l'expression ψ peut rester d'abord positive, cela résulte du raisonnement qui nous a conduit à l'égalité (46). On a alors

$$\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} < 0 \quad \text{et} \quad -\psi < 0,$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi < 0$$

et, à cause de (43) et (44),

$$\frac{d}{d\,G}\left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{a}\overline{a}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{a}\overline{a}}_{x_0}}\right) < 0.$$

Ensuite l'expression ψ devient négative et décroît très rapidement, ce qui est une conséquence de la très rapide décroissance de l'expression (45). Elle ne tarde pas à l'emporter sur $\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G}$, car la diminution de l'expression ψ est, en valeur absolue, plus de 50 fois plus forte que la diminution de φ.

On a alors

$$\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi > 0$$

et, à cause de (43) et de (44), *la dérivée* $\frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$ est *positive.*

Souvent, ceci a lieu déjà pour le premier âge, X'', où l'expression ψ est négative. Cet âge est très tardif si x_0 est faible. Pour une assurance contractée avant l'âge de 26 ans, il dépasse 59 ans, excepté pour de très fortes invalidités qui ne se présentent pas dans la pratique. (Cas où $F = 0{,}0001$, $G = 1{,}2$.)

b) Cas où l'âge x_0 égale ou dépasse X' [auquel l'expression (45) est maximum].

$$\varphi < 0 \quad \text{et} \quad \psi < 0.$$

Pour le même motif que précédemment, ψ ne tarde pas à l'emporter sur $\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G}$ et l'on a

$$\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi > 0$$

et

la dérivée $\frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathrm{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$ est *positive.*

§ 10. **Influence des variations du paramètre G sur les réserves mathématiques.**

En appliquant notre conclusion du paragraphe 5 aux résultats du paragraphe 9, nous pouvons énoncer:

a) Si l'âge x_0 est plus petit que l'âge X', auquel l'expression (45) présente son maximum, la réserve varie dans le même sens que le paramètre G pendant les premières années d'activité, puis en sens contraire pendant les dernières.

b) Si l'âge x_0 est plus grand ou égal à l'âge X', les variations de la réserve sont de sens contraire à celles du paramètre G.

Remarque: Les résultats que nous venons d'énoncer sont semblables à ceux que nous avons obtenus pour l'influence des variations du paramètre F sur les réserves mathématiques. (La différence entre les âges X et X' ne dépasse pas deux ans.)

§ 11. **Différentielle totale de la réserve mathématique. Variations simultanées des paramètres F et G.**

Pour abréger, nous remplacerons ${}_nV(a_{x_0}^{\overline{ai}})$ par ${}_nV_{x_0}$.

En tenant compte de l'invariabilité de a_x^a et de $\mathrm{a}_{x_0+n}^a$, c'est-à-dire en admettant que les paramètres F et G seuls varient, la formule (2) donne:

$$d\,({}_nV_{x_0}) = -\,\mathrm{a}_{x_0}^a \cdot d\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right) =$$

$$= -\,\mathrm{a}_{x_0}^a \left\{ \frac{d}{dF}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right) dF + \frac{d}{dG}\left(\frac{\mathrm{a}_{x_0+n}^{\overline{aa}}}{\mathrm{a}_{x_0}^{\overline{aa}}}\right) dG \right\}$$

En vertu des égalités (34), (35), (36), (39) et (43), cette différentielle est exprimée par:

$$(48)\quad \frac{\mathsf{a}^{a}_{x_0}\cdot \mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}\cdot \operatorname{Log} G}\left\{\varphi\, d\, F - \frac{F}{G}\left(\frac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi\right) d\, G\right\}$$

Signe de la différentielle totale. L'expression qui précède l'accolade est toujours positive. *Le signe de $d\,({}_nV_{x_0})$ est donc donné par l'expression entre accolades,* il dépend des valeurs de $d\,F$ et $d\,G$, et nécessite une étude particulière dans chaque cas. On peut cependant faire quelques considérations générales.

1° *Cas où $d\,F$ et $d\,G$ sont de même signe:* Lors de la recherche du signe de la dérivée $\dfrac{d}{d\,G}\left(\dfrac{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0+n}}{\mathsf{a}^{\overline{aa}}_{x_0}}\right)$, on a étudié le signe de l'expression $\dfrac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi$. Il résulte de cette étude que $\varphi \cdot d\,F$ et $\dfrac{-F}{G}\left(\dfrac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi\right) d\,G$ sont de même signe, excepté éventuellement pour quelques valeurs de $x_0 + n$ (quatre au plus) autour de l'âge X''. L'expression entre accolades [égalité (48)] est donc du signe commun à $\varphi \cdot d\,F$ et $-\dfrac{F}{G}\left(\dfrac{\varphi}{\operatorname{Log} G} - \psi\right) d\,G$. Nous retrouvons ainsi la «remarque» du paragraphe 10, que nous mettons sous la forme: *les influences des accroissements $d\,F$ et $d\,G$ sont de même sens, elles s'ajoutent.*

2° *Cas où $d\,F$ et $d\,G$ sont de signes contraires:* l'expression entre accolades, au second membre de l'égalité (48), peut être écrite sous la forme:

$$(49)\qquad \varphi\left(d\,F - \frac{F}{G \operatorname{Log} G} d\,G\right) + \frac{F}{G}\,\psi\, d\,G.$$

Des inégalités (30), nous tirons:

$$\left|\frac{F}{G}\psi\right| < \left|0{,}0001\ \psi\right| \tag{50}$$

$d\,F$ et $-\dfrac{F}{G \operatorname{Log} G}\,d\,G$ sont de même signe, on a donc:

$$\left|\varphi\left(dF - \frac{F}{G \operatorname{Log} G}\,dG\right)\right| > \left|\varphi\,d\,F\right| \tag{51}$$

En plus, *les deux expressions dont on prend ici la valeur absolue sont de même signe.*

Des tables des valeurs des expressions (37) et (45), on tire, dans le cas où l'âge x_0 est inférieur à 30 ans,

$$|\psi| < |80\ \varphi| \tag{52}$$

pour toutes les valeurs de $x_0 + n$ prises en dehors de l'intervalle $(X - 1,\ X'' - 1)$, où X'' représente le premier âge auquel l'expression ψ est négative. Cette inégalité à été confirmée par plus de 70 «sondages» effectués dans les cas qui paraissaient les plus douteux, cas répartis sur les 25 combinaisons de constantes pour lesquelles les valeurs de l'expression (45) ont été calculées. Un seul cas, où l'invalidité était très faible et sortait des limites pratiques ($F = 0{,}000007$, $G = 1{,}1$), a fait exception.

En vertu des inégalités (52) et (50), on obtient:

$$0{,}0001\left|80\ \varphi\right|\cdot\left|dG\right| > 0{,}000\,1\left|\psi\right|\cdot\left|d\,G\right| > \left|\frac{F}{G}\psi\,d\,G\right|$$

ou

$$0{,}008\left|\varphi\,d\,G\right| > \left|\frac{F}{G}\psi\,d\,G\right|$$

En conséquence, si:

$$(53) \qquad |\varphi\, dF| > 0{,}008 \cdot |\varphi\, dG|$$

on a, à cause de (51)

$$\left|\varphi\left(dF - \frac{F}{G \operatorname{Log} G}\, dG\right)\right| > \left|\frac{F}{G}\, \psi\, dG\right|$$

Il s'ensuit que l'expression (49) a le même signe que $\varphi\, dF$.

La condition (53) peut être écrite:

$$(53') \qquad |dF| > 0{,}008 \cdot |dG|$$

Lorsque $x_0 + n$ est compris dans l'intervalle $(X - 1, X'' - 1)$, il peut arriver que les expressions φ et ψ soient de signes contraires; l'expression (49) est alors une somme de deux termes de même signe, elle a le signe commun qui est aussi celui de $\varphi\, dF$. Les autres cas doivent être examinés séparément.

Résumé: Si x_0 est plus petit que 30 et si la condition (53′) est satisfaite, la différentielle totale a le signe de l'expression $\varphi\, dF$ pour les valeurs de $x_0 + n$ prises en dehors de l'intervalle $(X - 1,\ X'' - 1)$. En conséquence, la réserve varie dans le même sens que si les variations étaient dues à l'influence du paramètre F seulement.

Il est évident que si la condition (53′) n'est pas satisfaite, il peut arriver que l'influence des variations du paramètre G l'emporte. Il se peut aussi que l'influence de la variation du paramètre F soit prédominante pendant les premières années d'assurance seulement. Chaque cas doit être étudié séparément.

Il est difficile de dire quelles sont les variations les plus courantes de l'invalidité. Quelques expériences semblent montrer que l'invalidité diminue aux âges inférieurs à 40 ou 45 ans et augmente aux âges supérieurs. (Diminution de la valeur de la constante F et augmentation de G.) Cela peut être considéré comme une conséquence des progrès de l'hygiène, de la médecine et des mesures préventives contre les accidents et la maladie.

§ 12. Hypothèses à la base de ce chapitre.

Nous avons admis:

I^re^ hypothèse: La mortalité suit la loi de Makeham. Cette loi est si souvent utilisée par les actuaires qu'il semble inutile d'en justifier l'emploi.

II^e^ hypothèse: Le taux de mortalité des actifs n'est pas influencé par les variations de l'invalidité.

Au paragraphe 8 du chapitre II, nous avons dit comment on peut interpréter cette hypothèse et en avons donné la justification. Il reste encore à montrer que l'adopter n'est pas une grande erreur.

Pour déterminer le sens de variations de la réserve, nous avons dû considérer l'allure des fonctions (37) et (45), ainsi que les âges auxquels leur valeur est maximum. Nous avons alors remarqué que la mortalité paraît jouer un rôle presque insensible dans ces questions.

En conséquence, une influence des variations de l'invalidité sur la mortalité ne doit rien changer à nos conclusions, d'autant plus qu'une variation de l'invalidité ne saurait avoir une grande influence sur la mortalité des actifs.

III^e^ hypothèse: Le taux instantané d'invalidité est donné par une exponentielle: $\nu_x = F\,G^x$.

Cherchant à exprimer analytiquement l'invalidité moyenne, M. Urech a pris en considération toutes les principales tables d'invalidité et est arrivé à cette loi qu'il a donnée sous la forme

$$i_x = i_{15}\, \varrho^{x-15}.$$

Cette expression ne représente pas exactement chaque table d'invalidité, mais elle exprime une loi moyenne de l'invalidité.

Nous aurons peut-être l'occasion d'approfondir cette question dans un autre travail.