Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 25 (1930)

Artikel: Sur les bases techniques de l'assurance collective

Autor: Urech, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967492

Sur les bases techniques de l'assurance collective.

Par Docteur ès sciences **Aug. Urech**, Berne.

Le choix de bases techniques dans l'assurance collective est assez délicat. Suivant que l'actuaire est optimiste ou pessimiste dans l'évaluation des risques, il donne la préférence à un système de bases techniques ou à un autre, ce qui peut le conduire à des résultats très différents.

S'il est trop optimiste, la caisse d'assurance aura plus tard de grosses difficultés, les primes et les réserves mathématiques seront insuffisantes. A moins que des mesures appropriées ne soient prises à temps, elle court à la ruine.

L'actuaire est-il au contraire trop pessimiste, les primes sont alors très élevées; la caisse ne pouvant soutenir la concurrence est entravée dans son développement.

Le gros danger de bases techniques insuffisantes réside dans le fait que les conséquences fâcheuses ne se ressentent en général qu'après un grand nombre d'années, alors qu'il est peut-être trop tard pour intervenir utilement.

Aujourd'hui les caisses de pensions sont fort nombreuses et quelques-unes déjà très anciennes. Malgré cela une étude systématique du jeu des bases techniques, c'est-à-dire des conséquences résultant d'une modification déterminée de ces bases, n'a pas encore été faite. Dans le présent travail nous abordons cette question en cherchant à établir l'influence de chaque élément composant les bases techniques. Les résultats obtenus en cours de route et la nécessité où se trouve l'actuaire de choisir des bases aussi simples que possible, nous ont en outre engagé à construire des tables de mortalité et d'invalidité pouvant convenir à des risques moyens. Nous les avons désignées par les lettres MM (mortalité masculine, Mortalität der Männer), MF (mortalité féminine, Mortalität der Frauen), IM (invalidité masculine, Invalidität der Männer) et IF (invalidité féminine, Invalidität der Frauen). Il va sans dire qu'on ne saurait les appliquer dans la pratique sans examiner auparavant si les risques assurés rentrent dans la catégorie moyenne envisagée ici. Mais les remarques et conclusions relatives à l'influence de chaque élément pourront sans doute guider l'actuaire à la recherche de bases techniques convenant à des circonstances déterminées.

De par sa nature même, le problème est assez complexe. Il faut tenir compte d'une foule de facteurs. Il s'agit en somme *d'un problème à plusieurs variables*, dont les paramètres sont: les tables de mortalité pour hommes et pour femmes, mariées ou veuves, pour les actifs, les invalides, les retraités, pour les orphelins; la table d'invalidité; le taux d'intérêt.

Considérons par exemple la prime pure P_x pour un homme d'âge x voulant bénéficier:

1º d'une pension de retraite à partir de 65 ans,
2º d'une rente en cas d'invalidité,
3º de l'assurance des veuves,
4º de l'assurance des orphelins.

Indépendamment du fait que cette prime varie avec l'âge x, elle dépend encore des bases techniques choisies pour la calculer:

1º de la table d'invalidité,
2º de la table de mortalité adoptée pour les actifs,

3° de la table de mortalité adoptée pour les invalides,
4° de la table de mortalité adoptée pour les retraités,
5° de la table de mortalité des femmes mariées,
6° de la table de mortalité des veuves,
7° des tables choisies pour les orphelins,
8° du taux d'intérêt.

Elle est une fonction de plusieurs paramètres, chacun d'eux pouvant varier à l'infini et s'étendre à toutes les tables qu'on a déjà construites ou qu'on pourrait construire pour un phénomène déterminé, par exemple pour la mortalité des invalides.

Nous considérons donc toute table représentant un certain phénomène de l'assurance comme une valeur possible que peut prendre le paramètre y relatif. Substituer une valeur du paramètre à une autre revient à passer d'une première table représentant le phénomène à une seconde. Et inversément le passage d'une première table d'un phénomène à une seconde est équivalent à un changement de valeur du paramètre considéré.

Après avoir ainsi précisé la nature du problème, nous pouvons espérer le résoudre en procédant comme on le fait en mathématiques pour les problèmes à plusieurs inconnues: en ne faisant varier qu'un seul paramètre à la fois.

Le principe est le suivant: Nous choisissons un système de bases techniques et calculons les primes et les réserves mathématiques auxquelles il conduit. Ensuite nous passons à un deuxième système en modifiant une seule des variables, par exemple, la table de mortalité des invalides. Il en résulte de nouvelles primes et de nouvelles réserves mathématiques. La comparaison des résultats nous permet alors de déterminer l'amplitude de la variation qu'un changement du paramètre considéré entraîne dans les primes et dans les réserves mathématiques.

Nous arrivons ainsi à connaître l'influence de chaque paramètre, par exemple l'influence des probabilités de décès des invalides, celle des probabilités de décès des actifs, etc. Le problème qui était complexe au début est ramené à une suite de problèmes plus simples. Il est clair que les primes et les réserves mathématiques ne sont pas également sensibles aux variations de tous les paramètres entrant en jeu. La méthode que nous proposons permet de savoir lesquels ont une influence prépondérante.

Il faudra choisir avec un soin extrême les paramètres dont l'influence sur les primes et sur les réserves mathématiques est relativement grande, mais il sera inutile de s'entourer d'autant de précautions lorsqu'il s'agira de paramètres ayant une influence d'ordre secondaire. Nous verrons par exemple que les taux d'invalidité doivent être choisis avec beaucoup de prudence, tandis que nous aurons une plus grande liberté pour ce qui concerne la table de mortalité des actifs.

Influence des probabilités d'invalidité.

Examinons d'abord quelle est l'influence d'une variation dans les probabilités d'invalidité i_x sur les primes annuelles et sur les réserves mathématiques d'une caisse d'assurance qui accorde une pension de retraite et une rente en cas d'invalidité.

A cet effet, nous choisissons un système de bases techniques raisonnables. Prenons par exemple:

(I)
- *a)* comme table d'invalidité: Zimmermann, Bureaubeamte 1882—1884 [1])
- *b)* comme table de mortalité des actifs: SM 1901—1910 [2])
- *c)* comme table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection [3])
- *d)* comme table de mortalité des vieillards: 0^{am} [4])
- *e)* comme taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

Nous calculons les primes annuelles et les réserves mathématiques correspondantes. Nous les avons reportées sur les graphiques 1 et 2 en traits faibles [5]).

Ensuite nous choisissons un deuxième système de bases techniques qui ne diffère du premier que par la table d'invalidité:

(II)
- *a)* table d'invalidité: Grieshaber (fonctionnaires et employés) [6])
- *b)* table de mortalité des actifs: SM 1901—1910
- *c)* table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection
- *d)* table de mortalité des vieillards: 0^{am}
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

---

[1]) Voir par exemple Assekuranz-Jahrbuch 1905, page 121.

[2]) Table de mortalité de la population masculine suisse 1901—1910, Rapport du Bureau fédéral des assurances sur l'exercice 1917, page 52*.

[3]) Voir Karup-Andrae: Neue Versicherungsformen der Gothaer Lebensversicherungsbank a. G., Gotha 1914; pages 33 et suivantes et tableau 54, page 169* et 171*.

[4]) British Offices Life Annuity Tables, 1893; table finale pour le sexe masculin.

[5]) Les graphiques se trouvent à la fin de la présente étude.

[6]) Probabilités d'invalidité adoptées en 1922 par M. Grieshaber pour les fonctionnaires et employés de la Caisse d'assurance des fonctionnaires employés et ouvriers fédéraux. Voir Dr H. Grieshaber, Rechnungsgrundlagen, tableau 1, page 38. (Leubin-Hofstetter jusqu'à 39 ans; Sucro depuis 40 ans.)

Nous arrivons aux primes et aux réserves mathématiques représentées sur les graphiques 1 et 2 par les traits forts.

Arrêtons-nous un instant à ces graphiques et considérons d'abord la *prime pour l'assurance-invalidité*. Nous l'avons calculée en supposant que tous les assurés devenant invalides avant l'âge de 65 ans reçoivent une rente annuelle d'invalidité de 1, payable jusqu'à leur décès, la première fois au moment à partir duquel l'invalidité est reconnue [1]). En utilisant les notations usuelles, la formule de la prime unique s'écrit:

$$\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x|}} = \frac{I_x\,\mathrm{a}^i_{x+½}\,v^{½} + I_{x+1}\,\mathrm{a}^i_{x+1+½}\,v^{1+½} + \ldots + I_{64}\,\mathrm{a}^i_{64+½}\,v^{64+½-x}}{l^{aa}_x}$$

où I_x, I_{x+1}, ..., I_{64} désignent le nombre d'invalides nouveaux provenant à chaque âge du groupe des l^{aa}_x actifs considérés. La prime annuelle s'obtient en divisant par la valeur actuelle de la rente temporaire d'activité:

$$P\,(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x|}}) = \frac{\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x|}}}{\mathrm{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}$$

La table de Zimmermann conduit à la courbe pointillée, trait faible, celle de M. Grieshaber à la courbe pointillée, trait fort. La différence entre les

---

[1]) On calcule souvent la prime pour l'assurance-invalidité en supposant que la rente d'invalidité cesse d'être servie à l'âge-terme pour être remplacée par une rente de vieillesse. Nous admettons au contraire que la rente d'invalidité court jusqu'au décès de l'assuré. Cela nous permet de tenir compte de la différence de mortalité qu'il y a entre les vieillards pensionnés avant l'âge-terme pour cause d'invalidité, et ceux qui l'ont été, atteints par la limite d'âge.

primes est considérable. Il faut augmenter la prime de Zimmermann de 48 % à 30 ans et de 62 % à 55 ans pour obtenir la prime basée sur la table de M. Grieshaber.

Prenons maintenant la *prime pour l'assurance-vieillesse*. Elle a été établie en supposant que tous les assurés valides à 65 ans ont droit à une pension de retraite, c'est-à-dire d'après la formule:

$$P\left({}_{65-x|}a_x^a\right) = \frac{1}{a^{aa}_{x:\overline{65-x|}}} \cdot \frac{l^{aa}_{65}\, a_{65}\, v^{65-x}}{l^{aa}_x}$$

On arrive au trait faible mixte du graphique avec la table de Zimmermann et au trait fort mixte avec celle de M. Grieshaber. On remarque immédiatement que la première prime est, cette fois, plus élevée que la seconde, contrairement à ce qui se passait pour l'assurance-invalidité. C'est évident; la table d'invalidité de M. Grieshaber conduit à un nombre d'invalides supérieur à celle de Zimmermann; il reste donc moins d'assurés valides à 65 ans pour toucher la pension de retraite. La différence entre les primes atteint 26 % à 30 ans et 19 % à 55 ans.

Considérons enfin la *prime totale* pour l'assurance-invalidité et pour l'assurance-vieillesse. Nous avons vu déjà que pour l'assurance-invalidité, la prime de Zimmermann est bien inférieure à celle de M. Grieshaber; pour l'assurance-vieillesse c'est le contraire qui se produit. Il y a donc une certaine compensation, mais elle est loin d'être parfaite. Il suffit, pour s'en convaincre, de revenir au graphique 1 (traits continus). A 30 ans, nous avons une différence de 18 %, à 45 ans une différence de 11 % et à 60 ans, où l'invalidité n'entre plus en jeu que pendant 5 ans, une différence de 7 % encore.

Le tableau suivant contient les primes auxquelles conduisent les calculs fondés sur les systèmes de bases techniques (I) et (II). L'augmentation ou la diminution provient uniquement du passage de la table d'invalidité de Zimmermann à celle de M. Grieshaber.

Influence des taux d'invalidité sur la prime.

Age d'entrée x	Prime annuelle pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques						Augmentation en passant du système (I) au système (II) (–Diminution)		
	(I)			(II)					
	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité	Vieillesse	Total
							%	%	%
30	0,073	0,051	0,124	0,108	0,038	0,146	48	–26	18
35	0,094	0,071	0,165	0,135	0,053	0,188	44	–25	14
40	0,121	0,100	0,221	0,174	0,076	0,250	44	–24	13
45	0,159	0,151	0,310	0,229	0,116	0,345	44	–23	11
50	0,211	0,247	0,458	0,314	0,194	0,508	49	–21	11
55	0,282	0,467	0,749	0,458	0,379	0,837	62	–19	12
60	0,425	1,231	1,656	0,698	1,066	1,764	64	–13	7

1) $P\,(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}})$ 2) $P\,({}_{65-x|}a^{a}_{x})$

Remarquons en passant que nous avons combiné des probabilités d'invalidité dépendantes avec des taux de mortalité ne reposant pas sur l'observation des décès de la même collectivité. Techniquement ce n'est pas correct; il aurait fallu passer aux probabilités indépendantes. Nous ne l'avons pas fait pour deux raisons: 1° l'erreur qui en résulte est pratiquement négligeable ici; 2° la table de M. Grieshaber que nous avons choisie intentionnellement parce qu'elle est bien connue chez nous, contient à la fois des probabilités dépendantes — jusqu'à 39 ans — et des probabilités indépendantes — depuis 40 ans —; dans ces conditions il était inutile d'introduire toutes les finesses dans les calculs.

On le voit, *il suffit de passer de la table de Zimmermann à celle de M. Grieshaber pour avoir une différence impor-*

tante dans les primes. Or, en choisissant ces deux tables pour notre démonstration, nous n'avons pas pris deux cas extrêmes; les tables ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre. Au lieu de la table de M. Grieshaber nous aurions pu adopter celle de Bentzien, ou bien une table d'ouvriers, et les différences dans les primes eussent été beaucoup plus accentuées encore. Nous en concluons *qu'il est absolument indispensable de choisir la table d'invalidité avec beaucoup de soin.* C'est indispensable lorsque la Caisse d'assurance accorde aussi bien des rentes de vieillesse que des rentes d'invalidité. Nous savons qu'il se produit alors une certaine compensation dans les primes. Mais c'est bien plus nécessaire encore si la caisse n'accorde qu'une espèce de rentes, par exemple des rentes en cas d'invalidité.

Jusqu'ici nous avons considéré les primes; les *réserves mathématiques* jouent un rôle non moins important. Peut-être le fait d'avoir des réserves mathématiques insuffisantes est-il même plus grave pour une caisse d'assurance que celui d'avoir des primes trop faibles, car on s'en aperçoit souvent trop tard. Le graphique 2 montre que les réserves mathématiques d'un actif pour l'assurance-invalidité et vieillesse à la fois ne diffèrent pas trop l'une de l'autre si l'on passe de la table de Zimmermann à celle de M. Grieshaber. Il se produit là aussi une compensation entre l'assurance-invalidité et l'assurance-vieillesse. Par contre les différences sont de nouveau considérables s'il s'agit de l'assurance-invalidité seulement ou de l'assurance-vieillesse. Dans l'assurance-invalidité, on arrive, suivant l'âge d'entrée, à des différences atteignant 40 à 70 % pour des actifs âgés de 40 à 60 ans. Le lecteur désireux d'avoir des renseignements plus précis voudra bien se reporter au tableau suivant:

Influence des taux d'invalidité sur la réserve mathématique pour un actif.

Age d'entrée x	Durée écoulée t	Réserve mathématique d'un actif, pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques (I) Invalidité [1]	(I) Vieillesse [2]	(I) Total	(II) Invalidité [1]	(II) Vieillesse [2]	(II) Total	Augmentation en passant du système (I) au système (II) (–Diminution) Invalidité	Vieillesse	Total
								%	%	%
30	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,330	0,293	0,623	0,404	0,220	0,624	22,4	–24,9	0,2
	10	0,652	0,664	1,316	0,867	0,499	1,366	33,0	–24,8	3,8
	15	0,999	1,148	2,147	1,353	0,869	2,222	35,4	–24,3	3,5
	20	1,293	1,826	3,119	1,844	1,393	3,237	42,6	–23,7	3,8
	25	1,446	2,880	4,326	2,284	2,225	4,509	58,0	–22,7	4,2
	30	1,412	4,729	6,141	2,251	3,922	6,173	59,4	–17,1	0,5
	32	1,124	6,038	7,162	1,858	5,257	7,115	65,3	–12,9	–0,7
	34	0,491	8,056	8,547	0,909	7,567	8,476	85,1	– 6,1	–0,8
	35	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,444	0,583	1,027	0,619	0,446	1,065	39,4	–23,5	3,7
	10	0,844	1,370	2,214	1,255	1,054	2,309	48,7	–23,1	4,3
	15	1,113	2,542	3,655	1,855	1,979	3,834	66,7	–22,1	4,9
	20	1,220	4,534	5,754	2,000	3,778	5,778	63,9	–16,7	0,4
	22	0,997	5,909	6,906	1,691	5,161	6,852	69,6	–12,7	–0,8
	24	0,443	8,008	8,451	0,843	7,530	8,373	90,3	– 6,0	–0,9
	25	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,487	1,527	2,014	0,941	1,212	2,153	93,2	–20,6	6,9
	10	0,857	3,946	4,803	1,466	3,330	4,796	71,1	–15,6	–0,1
	12	0,758	5,522	6,280	1,334	4,861	6,195	76,0	–12,0	–1,4
	14	0,353	7,861	8,214	0,703	7,412	8,115	99,2	– 5,7	–1,2
	15	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0

[1] $V\,(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}})$ [2] $V\,({}_{65-x|}a^{a}_{x})$

Remarquons encore que nous avons considéré la combinaison: assurance-vieillesse et assurance-invalidité dans laquelle la pension de retraite est égale à la rente d'invalidité. Si ces deux rentes ne sont pas égales, la compensation dont nous avons parlé à propos des primes et des réserves mathématiques ne s'effectuerait plus de la même manière.

Lors de la création d'une caisse de pensions, l'actuaire doit, avant tout, se renseigner sur la nature du personnel à assurer. Il ne doit rien négliger qui puisse l'éclairer sur ce point. Ensuite vient le choix de bases techniques convenant aux circonstances particulières qu'il a en vue. C'est l'opération délicate, de laquelle dépend en grande partie la bonne marche de la Caisse. Personne ne le conteste en principe, mais il n'est pas superflu d'insister, surtout pour ce qui concerne la table d'invalidité. Bien plus que les taux de mortalité, *les probabilités de devenir invalide varient avec la profession et le sexe,* et nous avons vu quelle influence considérable un changement dans les probabilités d'invalidité a sur les primes et sur les réserves mathématiques.

Parmi tous les facteurs qui entrent en jeu dans l'assurance collective, l'invalidité est peut-être celui qui nous réserve le plus de surprises; *elle dépend dans une certaine mesure de la volonté de l'assuré,* de l'employeur, de l'appréciation des médecins, de raisons psychologiques et économiques aussi bien que de raisons physiologiques. On l'a dit souvent déjà, mais on ne saurait trop le répéter: tant que les rentes sont faibles, les assurés ne cherchent pas trop à se faire passer prématurément pour invalides; il en est autrement lorsque les rentes d'invalidité sont élevées.

Un exemple frappant nous est donné par la Caisse de pensions et de secours des chemins de fer fédéraux. Le tableau suivant, tiré d'un rapport non publié concernant cette Caisse, met bien en évidence le caractère très spécial de l'invalidité, son instabilité si on la compare aux autres événements intéressant une caisse de pensions.

La Direction générale des chemins de fer fédéraux a bien voulu nous autoriser à le reproduire ici; nous lui en sommes très reconnaissant.

Comparaison entre le nombre présumé et le nombre réel de quelques événements intéressant la Caisse de pensions et de secours des chemins de fer fédéraux.

(Bases techniques: expériences de la Caisse de 1907 à 1914.)

Année	Nombre de nouveaux invalides			Nombre de nouvelles veuves d'actifs			Nombre de décès d'invalides			Nombre de sorties de veuves pensionnées (décès et remariages)		
	présumé	réel	%	présumé	réel	%	présumé	réel	%	présumé	réel	%
1915	323	482	149	140	103	74	170	162	95	119	106	89
1916	316	297	94	136	97	71	187	172	92	124	95	77
1917	333	240	72	137	102	74	195	179	92	129	101	78
1918	360	175	49	141	252	179	198	196	99	137	119	87
1919	393	174	44	142	107	75	197	180	91	144	130	90
1920	430	163	38	146	114	78	197	186	94	149	147	99
1921	725	953	131	219	139	63	250	240	96	178	156	88
1922	709	1571	222	214	136	64	271	252	93	192	169	88
1923	692	831	120	209	133	64	338	315	93	200	179	90
1924	691	895	130	210	137	65	364	336	92	209	190	91
1925	682	621	91	210	154	73	396	373	94	215	180	84
	5654	6402	113	1904	1474	77	2763	2591	94	1796	1572	88

Remarque: Sous la rubrique % nous indiquons le nombre réel des événements en pour-cents du nombre présumé.

Tandis que le rapport du nombre réel au nombre présumé des événements ne varie pas trop au cours des années lorsqu'on envisage les nouvelles veuves, les décès d'invalides, ou les sorties de veuves pensionnées, les fluctuations sont extrêmement grandes pour les nouveaux invalides. Pendant les années de guerre, alors que le prix de toutes les marchandises augmente de plus en plus, la proportion du nombre réel des cas d'invalidité au nombre présumé s'abaisse progressivement de 149 % en 1915 à 49 % en 1918. Les allocations accordées aux employés pour le renchérissement de la vie n'entrent pas en ligne de compte dans le calcul de la rente. La différence entre le gain annuel et la rente est grande. Il est certain que chacun fait un gros effort pour rester à son poste le plus longtemps possible.

La guerre passe; on commence à parler d'une revision des statuts, afin d'adapter les rentes aux nouvelles conditions économiques. La proportion des invalides nouveaux par rapport au nombre présumé continue à baisser. En 1920 elle n'est plus que de 38 %.

Mais le 31 août 1921 les statuts sont revisés; dès lors les allocations de renchérissement de la vie sont comprises dans le gain entrant en ligne de compte pour fixer les rentes. La raison de continuer le travail jusqu'aux limites extrêmes des forces disparaît. Du même coup le nombre réel des cas d'invalidité augmente et passe, en 1921 déjà, à 131 % du nombre présumé. En 1922 on arrive à 222 %, le sextuple environ de 1920! L'Administration n'a aucune raison d'enrayer ce mouvement qui lui permet de réduire son personnel, devenu trop nombreux par suite d'une crise des transports. Aussi suffit-il d'une période de deux ans pour passer du minimum au maximum.

Pour les autres événements rien de semblable ne se produit. On n'influence pas arbitrairement les cas de décès comme ceux d'invalidité. Même l'épidémie de grippe qui se fait cruellement sentir en 1918 ne cause pas dans les décès une telle perturbation. Il est vrai que le nombre des nouvelles veuves — ou ce qui revient au même, le nombre des décès d'actifs mariés — est, en 1918, de 179 % du nombre présumé; mais ce maximum n'atteint pas même le triple du minimum de 63 % observé en 1921. Abstraction faite de ce cas tout à fait exceptionnel, la régularité dans les décès d'actifs mariés est bonne.

Le nombre réel de décès d'invalides est plus stable encore et plus voisin des prévisions. Le minimum observé en 1919 est de 91 % et le maximum de 1918 atteint 99 %. Ici l'épidémie de grippe ne se fait presque pas sentir.

Les fluctuations sont un peu plus grandes dans le nombre de sorties de veuves pensionnées. Nous en avons 77 % du nombre présumé en 1916 et 99 % en 1920. A côté des cas de décès interviennent ici les remariages dont la fréquence est difficile à prévoir. Malgré cela l'amplitude des variations n'a rien de comparable avec celle que nous avons enregistrée dans le nombre des nouveaux invalides.

Les chiffres précédents nous montrent les difficultés auxquelles se heurte l'actuaire chargé de faire des prévisions touchant l'invalidité. On ne pourra jamais empêcher les facteurs d'ordre économique et psychologique d'influencer très fortement le nombre des cas d'invalidité. L'assuré, le chef d'entreprise, le médecin, le directeur d'une caisse de pensions, sont des êtres humains. Il est compréhensible qu'ils défendent leurs intérêts ou que, devant certaines détresses, ils se laissent parfois apitoyer, fût-ce au détriment de la caisse de pensions. L'actuaire peut regretter que ses prévisions en soient si souvent troublées. Il doit signaler le danger et les abus sans égard pour les simulateurs qui ne font pas défaut; mais jamais il ne pourra s'opposer absolument à toutes les influences dont nous avons parlé. Il n'a pas d'autre ressource que de choisir les taux d'invalidité en conséquence et de constituer des réserves suffisantes pour les temps de crise.

Le plus gros danger serait de croire que les difficultés ne se présenteront plus à l'avenir, qu'il sera possible de les éviter. Durant la guerre, c'était le renchérissement de la vie qui enrayait les mises à la retraite; puis, une modification de statuts, une crise des transports, les rendirent extrêmement fréquentes. Demain il y aura autre chose: peut-être sera-ce l'impossibilité pour notre génération de s'adapter à de futures méthodes de travail, ou bien le chômage. La modification qu'on attend dans la composition de la population par classes d'âges peut également provoquer des perturbations plus ou moins importantes.

Une autre cause d'incertitude réside dans le fait que l'introduction de rentes change peu à peu la mentalité d'un peuple. Autrefois on ne quittait guère son emploi avant d'y être obligé par l'âge ou les infirmités; aujourd'hui, grâce au développement de nombreuses caisses de pensions, on s'habitue de plus en plus à l'idée de se faire pensionner aussitôt que possible: vers 65, 60 ou même 55 ans, à quitter ensuite la ville où la vie est chère, pour vivre à la campagne et jouir de la retraite tout en s'occupant de diverses manières. L'évolution des idées est très intéressante à ce point de vue et elle n'est pas près d'être terminée. La différence de mentalité entre les personnes âgées, qui aimeraient travailler jusqu'à la limite de leurs forces, et les jeunes classes d'âge est significative. On pourrait nous objecter, il est vrai, que l'assuré doit produire un certificat médical avant d'être reconnu invalide, mais chacun sait combien cela est facile à partir d'un certain âge. La conclusion à tirer de ces faits est claire: la plus grande prudence s'impose dans le choix des probabilités d'invalidité, ainsi que dans le calcul des bénéfices d'invalidité à répartir aux assurés.

Tables d'invalidité masculine IM et féminine IF.

Comme nous l'avons dit, l'actuaire doit choisir la table d'invalidité suivant le milieu dans lequel se recrute le personnel à assurer. Il n'est pas possible d'indiquer des taux d'invalidité convenant à tous les cas. Cependant nous avons cherché à construire une table donnant l'invalidité pour les risques moyens, et comme nous nous en servirons dans la suite, nous allons dire d'abord comment elle a été établie.

Il fallait, bien entendu, se baser sur les observations qui ont été faites jusqu'ici. Nous avons donc examiné plusieurs tables d'invalidité; les taux sont reportés sur le graphique 3. Les courbes que nous obtenons ainsi s'écartent beaucoup les unes des autres; elles remplissent une grande surface du graphique. La courbe inférieure est celle de Zimmermann, Bureaubeamte 1882—1884 [1]); les courbes supérieures sont celles de Graf et celle de Leubin-Hofstetter, résultant des observations faites de 1907 à 1914 sur l'ensemble des employés des chemins de fer fédéraux [2]).

Toutes les tables représentées ici n'ont pas la même valeur. Quelques-unes sont déjà fort anciennes. La notion d'invalidité a varié au cours des années; on a même classé quelquefois parmi les invalides toutes les personnes qui étaient pensionnées, quelle qu'en fût la

---

[1]) Les 4 tables de Zimmermann et la table de Bentzien, que nous avons représentées sur le graphique, sont reproduites par Eggenberger dans l'Assekuranz-Jahrbuch n° 26 de 1905, pages 120 et suivantes, celle de Graf dans Dr H. Amtmann und E. Pfaffenberger: Zur Mathematik der Pensionsversicherung, page 163.

[2]) Voir Bulletin des Actuaires suisses n° 12, de 1917, page 22. Cette table a été adoptée par M. Grieshaber pour les ouvriers de la Caisse d'assurance des fonctionnaires, employés et ouvriers fédéraux.

raison. Pour apprécier la valeur d'une table et la possibilité de l'utiliser dans des circonstances déterminées, il faut se reporter aux sources; il faut examiner les conditions d'existence et de travail du personnel sur lequel on a fait les observations, la nature exacte du risque couvert, ainsi que les causes extraordinaires qui ont pu avoir une influence sur les statistiques. Malheureusement, des renseignements qui auraient leur importance font quelquefois défaut.

L'étude des diverses tables du graphique nous entraînerait trop loin. Nous nous contenterons de dire quelques mots de deux d'entre elles qui nous ont paru particulièrement intéressantes.

La première, représentée par le trait noir pointillé du graphique, a été établie par Karup pour la société d'assurances La Gotha. Elle découle d'observations faites de 1877 à 1889 sur le personnel administratif des chemins de fer allemands (Eisenbahnbeamte, Nichtfahrpersonal). Pour simplifier l'exposé nous la désignerons dans la suite sous le nom de «*table d'invalidité de La Gotha*». Karup y a consacré une étude dans sa «Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank» [1]). En 1914 elle fut adoptée par La Gotha pour servir de base à l'assurance-invalidité [2]), et dans la brochure commémorative [3]) que cette société a publiée

---

[1]) *Dr. Johannes Karup:* Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank a. G. Gustav Fischer, Jena 1903. Tome I, pages 61 et suivantes, Tome II, page 69*.

[2]) *Dr. Johannes Karup und Dr. Albert Andrae:* Neue Versicherungsformen der Gothaer Lebensversicherungsbank a. G., Gotha 1914, pages 24 et suivantes.

[3]) *Hundert Jahre Gothaer Lebensversicherungsbank 1827—1927.* Eine Festschrift, herausgegeben von Karl Samwer. Verlag der Engelhard-Reyherschen Hofbuchdruckerei, Gotha 1927, pages 121 et suivantes.

lors de son centenaire, en 1927, M. Andrae, le successeur de Karup, montre que les probabilités de la table répondent bien aux besoins de La Gotha, à condition toutefois de prélever des surprimes pour les risques élevés.

La deuxième table que nous envisageons spécialement est tirée d'observations plus récentes, faites de 1885 à 1908 au «Pensions-Institut der Zuckerindustrie», à Prague, sur les *fonctionnaires austro-hongrois de l'industrie du sucre* (voir Karup-Andrae, Neue Versicherungsformen, page 445*). Elle est représentée sur le graphique par le trait noir mixte.

L'allure générale de cette table répond bien, croyons-nous, aux conditions actuelles de la vie pour une foule de catégories d'individus. Elle donne au début des taux d'invalidité plutôt faibles, qui croissent assez rapidement avec l'âge. Or le phénomène observé dans plusieurs caisses de pensions, notamment à la Caisse d'assurance des fonctionnaires, employés et ouvriers fédéraux, c'est que les probabilités utilisées jusqu'ici sont trop élevées au début et trop faibles pour des hommes d'âge mûr. Il en résulte des bénéfices d'invalidité lorsque le personnel est relativement jeune, ce qui fait croire à une situation florissante de la Caisse; on oublie que, plus tard, le nombre des invalides sera beaucoup plus élevé qu'on ne le prévoyait, et que les réserves mathématiques ne suffiront pas.

Toutefois, si l'allure générale de la courbe pour les fonctionnaires austro-hongrois de l'industrie du sucre paraît satisfaisante, les taux d'invalidité sont trop faibles à tous les âges pour des risques moyens; ils varient entre 70 et 90 % des probabilités de La Gotha et conviendraient plutôt pour les risques légers.

Nous voulons au contraire adopter une table pour les risques moyens. De là à choisir des taux d'invalidité résultant d'une sorte d'ajustement général de toutes les tables examinées, il n'y a qu'un pas. Nous l'avons fait, tout en tenant compte des observations amassées au cours des années, à savoir que les taux d'invalidité ont une tendance très nette à augmenter pour les personnes d'âge mûr et pour les âges avancés, et que les anciennes tables donnent par contre des taux trop élevés pour les jeunes classes d'âges. Il en est résulté la table de la page 103, représentée sur le graphique 3 par le trait noir continu. Nous la désignerons dans la suite par les lettres IM (invalidité masculine; Invalidität der Männer).

L'allure de la courbe est la même que pour les fonctionnaires austro-hongrois, mais les taux d'invalidité se rapprochent de ceux de La Gotha. Ils s'expriment par une formule analytique très simple:

$$i_x = i_{15} \cdot \varrho^{x-15} \qquad \text{où} \begin{cases} i_{15} = 0{,}000\ 125 \\ \varrho = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$

A 20 ans la probabilité de devenir invalide est de $\frac{1}{4}\,{}^0/_{00}$; à 30 ans de $1\,{}^0/_{00}$. Ces taux d'invalidité i_x augmentent avec l'âge suivant une progression géométrique; ils doublent tous les 5 ans. Nous les considérerons dans la suite comme des probabilités indépendantes, au sens que M. Friedli a défini dans le Bulletin de l'Association des Actuaires suisses de 1926 [1]).

---

[1]) Dr. W. Friedli: Intensitätsfunktion und Zivilstand. (Beiträge zu einer Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen.)

A ce propos remarquons que les probabilités reportées sur le graphique 3 sont les unes dépendantes, les autres indépendantes, suivant les publications de leurs auteurs. Pour nos besoins il n'était pas indispensable de les réduire toutes à la même nature.

Il est intéressant de comparer la table IM avec les observations les plus récentes. Sur le graphique 4 nous avons reporté:

a) les probabilités de la table IM;

b) les probabilités d'invalidité déduites des observations que la Caisse d'assurance des fonctionnaires, employés et ouvriers fédéraux a faites dans les années 1925 à 1927 sur l'ensemble des fonctionnaires et des employés;

c) les probabilités que M. Grieshaber avait adoptées en 1922 pour les fonctionnaires et employés de ladite caisse (Leubin et Hofstetter jusqu'à 39 ans, ensuite Sucro).

On y voit que les probabilités de la table IM se rapprochent davantage des expériences de la Caisse que les probabilités de M. Grieshaber.

Enfin rapprochons encore les probabilités de la table IM de celles découlant des observations faites de 1902 à 1914 sur le *personnel des chemins de fer italiens* [1]). Le tableau suivant montre que nos taux d'invalidité sont inférieurs à ceux des deux tables italiennes pour le personnel administratif et pour le personnel de la traction, jusque vers l'âge de 33 ans; depuis 48 ans, ils sont compris entre les taux des tables italiennes.

---

[1]) Voir la communication de M. R. Ottaviani dans les actes du 8e Congrès international des actuaires, à Londres, 3e volume, pages 234 et 235.

Taux d'invalidité.

Age	Chemins de fer italiens Observations de 1902 à 1914		IM
	Personnel administratif	Personnel de la traction	
25	0,00 144	0,00 175	0,00 050
30	0,00 141	0,00 179	0,00 100
35	0,00 172	0,00 212	0,00 200
40	0,00 227	0,00 351	0,00 400
45	0,00 310	0,00 712	0,00 800
50	0,00 665	0,01 696	0,01 600
55	0,01 770	0,03 950	0,03 200
60	0,05 320	0,11 782	0,06 400
65	0,09 900	—	0,12 800

Toutes les tables d'invalidité que nous avons considérées sont issues d'observations faites sur des hommes; la table IM ne peut donc être utilisée que pour du personnel masculin. Les statistiques ont montré depuis longtemps que les taux de mortalité sont différents pour les hommes et pour les femmes. Il en est de même des taux d'invalidité, mais ici les différences sont beaucoup plus accentuées. Malheureusement on a beaucoup de peine à se procurer des renseignements sur *l'invalidité chez les femmes*, et les caisses de pensions qui assurent du personnel féminin emploient souvent les mêmes taux d'invalidité que pour les hommes. C'est une grave erreur; si les conséquences n'en sont pas désastreuses, cela provient du fait que le nombre des femmes assurées contre l'invalidité est relativement faible.

Pour obtenir les probabilités d'invalidité des femmes, La Gotha multiplie les probabilités des hommes par un coefficient variant entre 1,25 et 2,50, suivant les professions. Ces coefficients sont plus ou moins arbitraires; ils ne reposent pas sur des observations précises. Nous avons pu nous procurer quelques renseignements sur ce qui se passe dans des caisses de pensions.

Il est hors de doute que *les probabilités d'invalidité des femmes sont beaucoup plus élevées que celles des hommes.* La différence est particulièrement grande dans les jeunes âges; ensuite elle s'atténue peu à peu et, pour les âges avancés, les probabilités sont sensiblement les mêmes chez les deux sexes.

A la caisse d'assurance des instituteurs et institutrices primaires du canton de Berne, on avait adopté, il y a quelques années, des probabilités d'invalidité 4 fois plus élevées pour les jeunes institutrices que pour les instituteurs de même âge. Peu à peu on a remarqué que ce facteur 4 était même encore trop faible. Cet exemple nous montre qu'on ne saurait être trop prudent dans le choix des probabilités d'invalidité des femmes.

Nous utiliserons dans la suite une table d'invalidité que nous déduisons de la table IM par la formule

$$
\begin{array}{ll}
i_y = K\, i_x & \text{pour } y = x, \\
\text{où } K = 4 - 0{,}05\,(x - 15) & \text{pour } 15 \leq x \leq 75 \\
\text{et } K = 1 & \text{pour } x > 75
\end{array}
$$

Nous croyons que cette table pourra servir de base raisonnable pour l'assurance-invalidité des femmes jusqu'au moment où l'on disposera d'observations suffisantes. Nous la désignerons pour abréger par les lettres IF (invalidité féminine; Invalidität der Frauen); elle est donnée dans le tableau 4, page 105.

Dans son «Motivenbericht betreffend die Versicherung der Arbeitnehmer für den Fall der Krankheit, der

Invalidität und des Alters in der Tschechoslovakischen Republik» de 1923, M. Schönbaum a utilisé des probabilités d'invalidité différentes pour les deux sexes. Il est intéressant de constater que le rapport des taux d'invalidité pour les hommes et pour les femmes de même âge suit une loi analogue à celle dont nous parlions plus haut. On a en effet

	Tables de M. Schönbaum			*Tables IM et IF*
Age	Hommes	Femmes	$\frac{i_y}{i_x}$	$\frac{i_y}{i_x}$
$x = y$	i_x	i_y		
35	0,0030	0,0058	1,93	3,00
40	0,0040	0,0075	1,88	2,75
45	0,0062	0,0103	1,66	2,50
50	0,0110	0,0166	1,51	2,25
55	0,0206	0,0309	1,50	2,00

La différence entre les deux sexes semble être moins accentuée en Tchécoslovaquie que chez nous, mais elle a le même caractère.

En Allemagne on arrive à des conclusions semblables. Suivant un article que M. H. Tramer vient de publier dans le nº 13 de la «Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen», du 26 mars 1930, au sujet des expériences faites par la «Reichsversicherungsanstalt für Angestellte» durant les années 1926 et 1927, la différence entre les deux sexes serait encore un peu plus marquée que nous ne l'avons admis.

Influence de la mortalité des actifs.

Nous venons d'examiner les taux d'invalidité; occupons-nous maintenant des probabilités de décès des actifs, q_x^a.

Nous considérerons, comme dans l'invalidité, des probabilités indépendantes, c'est-à-dire corrigées des perturbations amenées dans les observations par la sortie des invalides (voir le mémoire déjà cité de M. Friedli, 21e Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, pages 37 et 38). Les probabilités pour un actif d'âge x de mourir dans l'année à l'état d'activité — c'est-à-dire sans être sorti préalablement du groupe des actifs —, que M. Schaertlin définit dans son mémoire «Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung» (Bulletin nº 1, page 48) en utilisant la notation $q_x^{\overline{aa}}$, ne seraient pas autre chose que les probabilités dépendantes correspondantes. Ce ne sont pas celles-ci que nous considérons, mais les probabilités pour un actif d'âge x de mourir dans l'année suivante, soit comme actif, soit comme invalide, probabilités que M. Schaertlin désigne par le symbole q_x^a. Les deux probabilités sont liées par la relation

$$q_x^{\overline{aa}} = q_x^a \left(1 - \frac{i_x}{2}\right),$$

dans laquelle i_x désigne la probabilité indépendante d'invalidité. On a, en effet, en supposant que les cas de décès et d'invalidité sont les seules sorties du groupe l_x^{aa} des actifs observés:

$$q_x^{\overline{aa}} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}} \quad \text{et}$$

$$q_x^a = \frac{d_x^{aa} + d_x^{ai}}{l_x^{aa}},$$

d_x^{aa} et d_x^{ai} désignant respectivement le nombre d'actifs du groupe l_x^{aa} décédés durant l'année à l'état d'activité, et le nombre de ceux qui sont décédés après être devenus invalides.

Or, q_x^a peut s'écrire aussi, avec une approximation suffisante

$$q_x^a = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - l_x^{aa}\,\frac{i_x}{2}}$$

La relation ci-dessus en découle immédiatement.

Voyons d'abord quelle est l'influence d'une variation dans les probabilités q_x^a sur les primes et sur les réserves mathématiques de l'assurance-invalidité. Considérons un actif qui meurt sans avoir été invalide. Il a payé des primes, mais il ne touchera aucune prestation d'assurance. Ce qu'il a payé aidera la caisse à faire face à ses engagements envers les autres assurés. *Les primes pour l'assurance-invalidité seront donc d'autant plus basses que la mortalité des actifs sera plus élevée.* Cependant, l'influence d'une variation dans la mortalité des actifs sur les primes de l'assurance-invalidité et sur les réserves mathématiques est relativement faible. Pour le montrer, calculons d'abord les primes et les réserves mathématiques en utilisant le système suivant de bases techniques, dont nous avons déjà rencontré les différentes tables dans le chapitre précédent:

(III)
- *a)* table d'invalidité: IM
- *b)* table de mortalité des actifs: SM 1901—1910
- *c)* table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection
- *d)* table de mortalité des retraités: 0^{am}
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

Puis, selon notre méthode, nous choisissons un deuxième système de bases techniques, qui ne diffère du premier que par la table de mortalité des actifs. Prenons par exemple:

(IV)
- *a)* table d'invalidité: IM
- *b)* table de mortalité des actifs: SM 1876—1881 (table de M. Schaertlin)
- *c)* table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection
- *d)* table de mortalité des retraités: 0^{am}
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

Nous passons pour les actifs de la récente table SM 1901—1910 à une table suisse plus ancienne, celle de M. Schaertlin, reposant sur les observations de 1876 à 1881.

La différence dans les primes est de 3,1 % à l'âge de 30 ans; elle décroît très rapidement avec l'âge. Quant aux réserves mathématiques elles sont encore moins sensibles que les primes à une variation de la mortalité des actifs.

Le raisonnement serait exactement le même pour l'assurance-vieillesse. L'actif qui meurt avant l'âge-terme ne reçoit pas de pension de retraite; les primes qu'il a versées sont employées en faveur des autres assurés. *Les primes pour l'assurance-vieillesse sont d'autant plus basses que la mortalité des actifs est plus élevée.* Les calculs confirment notre raisonnement. L'influence d'une variation dans la mortalité des actifs sur les primes et sur les réserves mathématiques, tout en étant plus forte que dans l'assurance-invalidité, est cependant encore relativement faible.

Pour de plus amples renseignements le lecteur voudra bien consulter les tableaux ci-après (pages 57 et 58). Considérons, par exemple, la prime totale pour l'assurance d'une rente d'invalidité de 1 et d'une pension de retraite de 1, combinaison très usitée chez nous; nous arrivons,

Influence de la mortalité des actifs sur la prime.

Age d'entrée	Prime pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques (III)			(IV)			Diminution en passant du système (III) au système (IV)		
x	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité	Vieillesse	Total
							%	%	%
20	0,0668	0,0207	0,0875	0,0635	0,0189	0,0824	4,9	8,7	5,8
25	0,0861	0,0272	0,1133	0,0826	0,0251	0,1077	4,1	7,7	4,9
30	0,1122	0,0364	0,1486	0,1087	0,0340	0,1427	3,1	6,6	4,0
35	0,1482	0,0503	0,1985	0,1449	0,0475	0,1924	2,2	5,6	3,1
40	0,1983	0,0726	0,2709	0,1953	0,0693	0,2646	1,5	4,5	2,3
45	0,2692	0,1116	0,3808	0,2665	0,1075	0,3740	1,0	3,7	1,8
50	0,3698	0,1892	0,5590	0,3676	0,1839	0,5515	0,6	2,8	1,3
55	0,5120	0,3793	0,8913	0,5102	0,3717	0,8819	0,4	2,0	1,0
60	0,7063	1,0888	1,7951	0,7046	1,0753	1,7799	0,2	1,2	0,8

[1] $P\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}\right)$ [2] $P\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

en passant du système de bases techniques (III) au système (IV), à une diminution de 4,0 % à 30 ans, de 2,3 % à 40 ans et de 1,3 % à 50 ans.

Nous avons utilisé successivement deux tables de mortalité, SM 1901—1910 et SM 1876—1881, issues d'observations faites sur la population suisse à un intervalle moyen dépassant un quart de siècle. Durant ce laps de temps, la mortalité s'est sensiblement améliorée et le passage de la table SM 1901—1910 à SM 1876—1881 signifie une forte augmentation des taux de décès. Nous avons en effet:

Taux de mortalité en ‰, c'est-à-dire 1000 q_x:

1° d'après SM 1901—1910:

à 20	25	30	35	40	45	50	55	60	65 ans
5,16	5,56	6,20	7,54	9,83	13,08	17,88	24,85	35,43	50,42

Influence de la mortalité des actifs sur la réserve mathématique.

Age d'entrée	Durée écoulée	Réserve mathématique d'un actif pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques						Diminution en passant du système (III) au système (IV) (– Augmentation)		
		(III)			(IV)					
x	t	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité	Vieillesse	Total
								%	%	%
20	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,352	0,118	0,470	0,334	0,108	0,442	5,1	8,5	6,0
	10	0,758	0,262	1,020	0,727	0,242	0,969	4,1	7,6	5,0
	15	1,215	0,442	1,657	1,179	0,414	1,593	3,0	6,3	3,9
	20	1,708	0,674	2,382	1,672	0,639	2,311	2,1	5,2	3,0
	25	2,205	0,990	3,195	2,173	0,949	3,122	1,5	4,1	2,3
	30	2,629	1,462	4,091	2,604	1,413	4,017	1,0	3,3	1,8
	35	2,831	2,280	5,111	2,818	2,226	5,044	0,5	2,4	1,3
	40	2,426	4,051	6,477	2,419	3,987	6,406	0,3	1,6	1,1
	42	1,871	5,444	7,315	1,869	5,384	7,253	0,1	1,1	0,8
	44	0,829	7,740	8,569	0,831	7,711	8,542	– 0,2	0,4	0,3
	45	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,537	0,208	0,745	0,524	0,195	0,719	2,4	6,2	3,5
	10	1,119	0,470	1,589	1,098	0,448	1,546	1,9	4,7	2,7
	15	1,710	0,819	2,529	1,689	0,787	2,476	1,2	3,9	2,1
	20	2,235	1,326	3,561	2,217	1,284	3,501	0,8	3,2	1,7
	25	2,543	2,181	4,724	2,533	2,130	4,663	0,4	2,3	1,3
	30	2,253	3,992	6,245	2,249	3,930	6,179	0,2	1,6	1,1
	32	1,755	5,404	7,159	1,754	5,345	7,099	0,1	1,1	0,8
	34	0,784	7,725	8,509	0,786	7,696	8,482	– 0,2	0,4	0,3
	35	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,772	0,425	1,197	0,762	0,409	1,171	1,3	3,8	2,2
	10	1,488	1,012	2,500	1,475	0,982	2,457	0,9	3,0	1,7
	15	1,995	1,950	3,945	1,987	1,908	3,895	0,4	2,2	1,3
	20	1,927	3,855	5,782	1,922	3,796	5,718	0,2	1,5	1,1
	22	1,535	5,311	6,846	1,533	5,255	6,788	0,1	1,1	0,8
	24	0,698	7,688	8,386	0,700	7,661	8,361	– 0,3	0,4	0,3
	25	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,904	1,209	2,113	0,900	1,185	2,085	0,4	2,0	1,3
	10	1,276	3,412	4,688	1,272	3,364	4,636	0,3	1,4	1,1
	12	1,096	5,013	6,109	1,094	4,963	6,057	0,2	1,0	0,9
	14	0,526	7,572	8,098	0,527	7,546	8,073	– 0,2	0,3	0,3
	15	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0

1) $V\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right)$ 2) $V\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

2º d'après SM 1876—1881:

à 20	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65 ans**
7,20	8,41	9,73	11,04	13,12	15,55	20,86	26,82	37,93	54,57

soit une augmention de:

40% 51% 57% 46% 33% 19% 17% 8% 7% 8%,

mais l'influence de cette variation énorme des taux de décès sur les primes et sur les réserves mathématiques est d'ordre secondaire. Le graphique 11 représente la mortalité d'après les tables que nous utilisons dans ce chapitre et facilite les comparaisons.

Dans son rapport sur l'exercice 1928, page 22*, le Bureau fédéral des assurances, à Berne, attire l'attention sur le fait que la charge résultant pour une caisse de pensions des rentes à servir aux invalides augmente déjà par le seul fait de la diminution de la mortalité, indépendamment de la variation des taux d'invalidité au cours des années. Durant le demi-siècle écoulé, la durée moyenne d'invalidité a, en effet, augmenté beaucoup plus rapidement que la durée moyenne d'activité; les dépenses de la caisse croissent plus vite que les recettes. Un calcul approximatif basé sur les données des graphiques du Bureau fédéral des assurances (pages 23* et 24*) montrerait l'importance de l'excédent des dépenses.

Au premier abord il peut sembler que nos conclusions ci-dessus sont en contradiction avec celles du Bureau fédéral des assurances. Cependant il n'en est rien. Nous avons étudié l'influence d'une variation dans les probabilités de décès des actifs; à cet effet nous avons choisi deux systèmes de bases techniques ne différant que par la table de mortalité des actifs.

Le Bureau fédéral des assurances se place à un autre point de vue. Il suppose que la mortalité de tous les membres de la caisse — actifs, invalides, vieillards — change, et passe de la table de M. Schaertlin à SM 1920/21.

Dans les chapitres suivants nous étudierons l'influence d'une variation de la mortalité des invalides et des retraités sur les primes et sur les réserves mathématiques, mais auparavant nous aimerions préciser encore le rôle que joue la mortalité des actifs pour une caisse de pensions.

A cet effet, passons d'abord *du système de bases techniques (III) à un système (V)* qui ne diffère de (III) que par la table de mortalité des actifs: SM 1901—1910 étant remplacé par SM 1920/21. A une forte diminution des taux de mortalité correspond une augmentation relativement faible des primes. On a:

Diminution des taux de mortalité en % de SM 1901—1910:

à 20	25	30	35	40	45	50	55	60 ans
25%	22%	19%	19%	21%	20%	19%	16%	13%

Augmentation des primes annuelles pour une rente d'invalidité de 1 et une rente de vieillesse de 1:

à 20	25	30	35	40	45	50	55	60 ans
5,5%	4,9%	4,4%	3,8%	3,2%	2,7%	2,1%	1,6%	1,0%

On peut être surpris de trouver ici une augmentation des primes supérieure à la diminution constatée plus haut, en passant du système (III) au système (IV) (tableau, page 57). Cela tient à ce que la variation de la mortalité est plus importante à partir de 45 ans. Or les primes sont d'autant plus sensibles à une augmentation de la mortalité (ou à une diminution) que celle-ci se produit plus longtemps après la conclusion de l'assurance — du moins dans l'assurance-vieillesse —, le surcroît de décès atteignant alors des actifs ayant versé de nombreuses primes. En faisant varier arbitrairement la mortalité à des âges déterminés, par exemple une première fois entre 20 et 30 ans seulement, puis entre 35 et 45 ans et enfin entre 50 et 60 ans, on verrait comment la surmortalité agit différemment suivant le moment auquel elle se manifeste; mais cela nous entraînerait trop loin.

Si l'on veut comparer l'effet produit par le passage du système de bases techniques (III) au système (IV) à celui découlant du passage du système (III) au système (V), il ne faut pas non plus perdre de vue que la première variation est une augmentation exprimée en pour-cents de la mortalité SM 1901—1910, et la seconde une diminution rapportée également à SM 1901—1910; et qu'une diminution de 20 % en passant de (III) à (V) correspondrait à une augmentation de 25 % en passant de (V) à (III).

Examinons enfin le cas où l'on passerait *du système (III) à un système (VI)* identique à (III), sauf en ce qui concerne la table de mortalité des actifs. Nous remplaçons SM 1901—1910 par une table théorique dont les taux de décès seraient, à tous les âges, de 30 % inférieurs à ceux de SM 1901—1910 (ce qui correspondrait à une augmentation de la mortalité de 43 % en passant de (VI) à (III). Il s'agit là d'une différence de mortalité extrêmement importante, qui est de l'ordre de grandeur de celle qu'on rencontre dans les première et seconde années de la sélection provenant d'un examen médical; mais elle persiste ici jusqu'à la fin de l'activité (voir le graphique 11). Les tableaux ci-dessous (pages 62 et 63) montrent que la variation correspondante des primes et des réserves mathématiques est loin d'avoir la même ampleur.

Il est clair que si la diminution de la mortalité ne se faisait sentir que pendant un certain nombre d'années, par exemple à la suite d'une sélection, la variation dans

Influence de la mortalité des actifs sur la prime.

Age d'entrée x	Prime pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques (III) Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	(VI) Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Augmentation en passant du système (III) au système (VI) Invalidité	Vieillesse	Total
							%	%	%
30	0,112	0,036	0,148	0,118	0,043	0,161	5,6	17,8	8,6
35	0,148	0,050	0,198	0,155	0,059	0,214	4,7	16,7	7,7
40	0,198	0,073	0,271	0,206	0,083	0,289	3,8	14,9	6,8
45	0,269	0,112	0,381	0,277	0,126	0,403	3,0	13,0	5,9
50	0,370	0,189	0,559	0,378	0,209	0,587	2,1	10,7	5,0
55	0,512	0,379	0,891	0,519	0,409	0,928	1,4	7,8	4,1
60	0,706	1,089	1,795	0,712	1,137	1,849	0,9	4,4	3,0

[1] $P\left(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right)$ [2] $P\left({}_{65-x|}\mathrm{a}^{a}_{x}\right)$

les primes serait beaucoup plus faible encore; d'où nous pouvons conclure que *l'emploi d'une table de sélection pour la mortalité des actifs n'est pas indispensable,* au moins dans le calcul des primes; une table agrégée suffit.

Disons en passant que dans *l'assurance des veuves,* l'influence d'une variation dans les taux de mortalité des actifs se fait sentir dans le sens opposé. En effet, si la mortalité des actifs augmente, le nombre des veuves augmente aussi, tandis que la rente d'actif diminue; les primes augmentent avec la mortalité des actifs. Dans une caisse d'assurance accordant des rentes d'invalidité, de vieillesse et de veuves, il s'établit donc une certaine compensation.

En résumé, *l'influence d'une variation dans la mortalité des actifs est relativement faible, de sorte que nous conservons une certaine liberté dans le choix des probabilités de décès des actifs.* L'emploi d'une table de sélection n'est pas indispensable; une table agrégée suffit. Si la

Influence de la mortalité des actifs sur la réserve mathématique.

Age d'entrée x	Durée écoulée t	Réserve mathématique d'un actif pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques (III) Invalidité [1]	(III) Vieillesse [2]	(III) Total	(VI) Invalidité [1]	(VI) Vieillesse [2]	(VI) Total	Augmentation en passant du système (III) au système (VI) (– Diminution) Invalidité	Vieillesse	Total
								%	%	%
20	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,352	0,118	0,470	0,377	0,139	0,516	7,1	17,8	9,8
	10	0,758	0,262	1,020	0,810	0,310	1,120	6,8	18,3	9,8
	15	1,215	0,442	1,657	1,294	0,522	1,816	6,5	18,1	9,6
	20	1,708	0,674	2,382	1,813	0,789	2,602	6,1	17,1	9,2
	25	2,205	0,990	3,195	2,329	1,146	3,475	5,6	15,8	8,8
	30	2,629	1,462	4,091	2,758	1,662	4,420	4,9	13,7	8,0
	35	2,831	2,280	5,111	2,940	2,522	5,462	3,8	10,6	6,9
	40	2,426	4,051	6,477	2,480	4,303	6,783	2,2	6,2	4,7
	42	1,871	5,444	7,315	1,896	5,661	7,557	1,3	4,0	3,3
	44	0,829	7,740	8,569	0,831	7,850	8,681	0,2	1,4	1,3
	45	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,537	0,208	0,745	0,567	0,244	0,811	5,6	17,3	8,8
	10	1,119	0,470	1,589	1,180	0,547	1,727	5,4	16,4	8,7
	15	1,710	0,819	2,529	1,798	0,943	2,741	5,1	15,1	8,4
	20	2,235	1,326	3,561	2,336	1,501	3,837	4,5	13,2	7,8
	25	2,543	2,181	4,724	2,632	2,404	5,036	3,5	10,2	6,6
	30	2,253	3,992	6,245	2,299	4,234	6,533	2,0	6,1	4,6
	32	1,755	5,404	7,159	1,775	5,615	7,390	1,1	3,9	3,2
	34	0,784	7,725	8,509	0,784	7,832	8,616	0,0	1,4	1,2
	35	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,772	0,425	1,197	0,807	0,484	1,291	4,5	13,9	7,8
	10	1,488	1,012	2,500	1,548	1,136	2,684	4,0	12,2	7,4
	15	1,995	1,950	3,945	2,058	2,138	4,196	3,1	9,6	6,4
	20	1,927	3,855	5,782	1,960	4,077	6,037	1,7	5,7	4,4
	22	1,535	5,311	6,846	1,548	5,510	7,058	0,8	3,7	3,1
	24	0,698	7,688	8,386	0,697	7,792	8,489	–0,1	1,3	1,2
	25	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,904	1,209	2,113	0,930	1,310	2,240	2,9	8,3	6,0
	10	1,276	3,412	4,688	1,295	3,589	4,884	1,5	5,2	4,2
	12	1,096	5,013	6,109	1,104	5,184	6,288	0,7	3,4	2,9
	14	0,526	7,572	8,098	0,525	7,665	8,190	–0,2	1,2	1,1
	15	0	9,483	9,483	0	9,483	9,483	—	0	0

1) $V\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right)$ 2) $V\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

caisse d'assurance accorde des pensions de veuves, il est prudent de choisir des probabilités q_x^a plutôt trop fortes que trop faibles, afin d'éviter des surprises désagréables.

Influence de la mortalité des invalides.

Etudions maintenant l'influence d'une variation des probabilités de décès des invalides, q_x^i, sur les primes et sur les réserves mathématiques de l'assurance-invalidité.

D'une manière générale, nous pouvons dire que si nous choisissons des q_x^i relativement faibles, les invalides vivront longtemps; les rentes d'invalidité devront être servies pendant de nombreuses années; les primes seront élevées. Il ne faut donc pas craindre de prendre des probabilités de décès des invalides relativement faibles.

Peut-on choisir une *table agrégée* pour les q_x^i, comme nous l'avons proposé pour les probabilités de décès des actifs, ou bien doit-on se baser sur une *table de sélection?* La question est assez délicate parce qu'il y a une différence énorme entre une table agrégée et une table de sélection pour la mortalité des invalides, même lorsque les deux tables sont tirées d'observations faites sur la même collectivité. On s'en rendra compte en examinant le *graphique* 5, sur lequel on a reporté les probabilités de décès des invalides utilisées par La Gotha: table agrégée, table de sélection et table finale.

Ces tables ont été établies par Karup d'après les observations faites de 1877 à 1889 sur les pensionnaires des chemins de fer allemands — Eisenbahnbeamte, Invalide aus dem Nichtfahrpersonal —. La durée de sélection est de 11 ans. A partir de 71 ans Karup a légèrement modifié les taux primitifs pour se rapprocher des observations de Pietsch. Depuis 75 ans la table agrégée se confond pratiquement avec la table finale à laquelle nous l'avons raccordée. On trouvera des renseignements détaillés sur les trois tables en question dans l'ouvrage déjà cité de Karup-Andrae: «Neue Versicherungsformen.» Pour faciliter les comparaisons nous donnons les taux de mortalité de 10 en 10 ans.

Mortalité des invalides; tables de La Gotha.

Age x	Table agrégée $100 \cdot q_x$	Table finale $100\, q_{[x-11]+11}$
20	15,122	0,866
30	9,218	0,987
40	6,174	1,276
50	4,626	1,966
60	4,862	3,603
70	7,690	7,413
80	14,94	14,94
90	29,38	29,38
100	68,94	68,94

Age d'entrée x	*Table de sélection* $100 \cdot q_{[x]+t}$. Nombre d'années t écoulées depuis le début de l'invalidité						
	0	1	2	3	....	10	11 Table finale
20	22,533	9,467	3,853	2,511	....	1,042	1,006
30	17,574	7,865	3,656	2,487	....	1,325	1,322
40	13,712	6,630	3,545	2,615	....	2,006	2,074
50	10,514	5,731	3,715	3,152	....	3,630	3,856
60	8,315	5,736	4,848	4,822	....	7,426	7,975
70	9,344	8,576	8,694	9,261	....	14,942	15,99
80	15,851	16,214	17,105	18,281	....	29,380	31,67
90	29,865	31,786	34,251	37,120	....	68,940	76,01

Rappelons avant tout les principes qui servent de base à la construction des trois tables.

Pour obtenir la table de sélection, on considère tous les invalides d'âge x qui viennent d'être déclarés invalides et on les suit jusqu'à extinction complète. Pour avoir la table agrégée, au contraire, on part de tous les invalides d'âge x, qu'ils aient été reconnus invalides il y a un jour, ou bien il y a une année, ou deux ans, ou plus. On peut aussi considérer la table finale; on part alors de tous les invalides d'âge x qui sont invalides depuis 11 ans ou plus.

La table de sélection est celle qui correspond à la réalité. La table agrégée ainsi que la table finale donnent pour q_x^i des moyennes. Signalons tout de suite un gros défaut de la table agrégée; ses taux de décès dépendent de la composition selon les classes d'âges du personnel observé. Si les âges inférieurs à 40 ans, par exemple, sont faiblement représentés, presque tous les invalides de 40 ans se trouvent dans leur première année d'invalidité; le taux de décès de la table agrégée q_{40}^i est voisin du taux de sélection. La différence serait par contre très sensible si le personnel jeune était en majorité. Théoriquement, on devrait toujours utiliser la table de sélection; malheureusement elle conduit à de longs calculs. Ce serait un gros avantage de pouvoir la remplacer par la table agrégée ou par la table finale.

Examinons le graphique 5. Si l'âge atteint x est inférieur à 40 ans, la mortalité de la table de sélection ne dépasse celle de la table agrégée que dans la première année d'invalidité; ensuite elle est sensiblement plus faible. Dans les âges avancés, au contraire, la mortalité de la table de sélection reste pendant près de deux ans supérieure à celle de la table agrégée; ensuite elle est plus faible, mais la différence est petite.

Ceci se traduit sur le graphique 6 représentant l'ordre de survie des invalides. Prenons le groupe des personnes déclarées invalides à l'âge de 30 ans. La courbe des vivants l_x^i selon la table agrégée est d'abord située au-dessus de celle de la table de sélection, mais elle la coupe vers l'âge de 34 ans déjà et s'en écarte ensuite beaucoup. La valeur actuelle de la rente, qui est donnée par l'expression

$$a_{30}^i = \frac{l_{30}^i + l_{31}^i\, v + l_{32}^i\, v^2 + \ldots\ldots\ldots}{l_{30}^i}$$

sera certainement trop faible si on la calcule d'après la table agrégée.

Prenons par contre le groupe des personnes reconnues invalides à l'âge de 60 ans. La courbe des vivants selon la table agrégée reste longtemps au-dessus de la courbe correspondant à la table de sélection. Elle la coupe au bout de quelques années, mais ne s'en écarte presque pas dans la suite. La valeur actuelle a_{60}^i calculée d'après la table agrégée sera trop grande.

En effectuant les calculs on obtient le tableau suivant:

Valeur actuelle a_x^i d'une rente d'invalidité de 1.

(Taux d'intérêt $3\frac{1}{2}\%$.)

Age x	D'après la table agrégée a_x	D'après la table finale $\mathrm{a}_{[x-11]+11}$
30	9,852	18,550
35	10,810	17,468
40	11,512	16,241
45	11,721	14,874
50	11,417	13,389
55	10,710	11,815
60	9,668	10,202

Age d'entrée x	D'après la table de sélection $a^i_{[x]+t}$ Nombre d'années t écoulées depuis le début de l'invalidité								
	0	1	2	3	4	5	....	10	11 Table finale a_{x+11}
30	13,997	16,320	17,210	17,415	17,422	17,320	....	16,236	15,980
35	13,668	15,523	16,199	16,316	16,263	16,113	....	14,867	14,585
40	13,157	14,582	15,056	15,082	14,968	14,772	....	13,384	13,079
45	12,475	13,502	13,784	13,721	13,546	13,309	....	11,811	11,494
50	11,633	12,296	12,403	12,257	12,030	11,759	....	10,199	9,880
55	10,635	10,984	10,940	10,724	10,459	10,167	....	8,611	8,304
60	9,498	9,593	9,436	9,176	8,891	8,595	....	7,120	6,844

Mieux encore que ces chiffres le graphique 7 des valeurs actuelles a^i_x montre quelle erreur on commettrait en utilisant la table agrégée au lieu de la table de sélection. Or les a^i_x nous serviront:

1° à fixer les réserves mathématiques des invalides;

2° à calculer les primes $P\,(a^{ai}_{x:\overline{65-x}|})$ qu'un actif doit verser annuellement pour avoir droit à une rente en cas d'invalidité.

En ce qui concerne le premier point, c'est-à-dire le calcul de la *réserve mathématique pour une rente d'invalide en cours,* le graphique montre qu'on ne saurait utiliser la table agrégée; elle conduit à des réserves beaucoup trop faibles. Supposons par exemple que l'invalidité soit déclarée à 30 ans. Après 5 ans, la réserve mathématique d'après la table de sélection est de 17,320, tandis qu'elle ne s'élèverait qu'à 10,810 d'après la table agrégée; la réserve de la table agrégée devrait être augmentée de 60,2 % pour atteindre la réserve nécessaire. Les invalides de cet âge sont sans doute assez rares; il n'en reste pas moins vrai que les réserves mathématiques portées pour eux au bilan seraient beaucoup trop faibles si on les calculait d'après la table agrégée.

Le graphique fait voir encore qu'*on peut éviter les longs calculs qu'entraîne l'emploi de la table de sélection en utilisant à la place de celle-ci la table finale.* L'erreur n'est appréciable que dans les 2 ou 3 premières années d'invalidité. On pourrait également se servir de toute table ne s'écartant pas trop de la table finale. A l'aide de SM 1901—1910 par exemple, on arriverait pour a_x^i à des montants assez voisins de ceux résultant de la table finale de La Gotha. La différence serait:

	à 30	40	50	60 ans
de	3,9 %	2,9 %	0,8 %	— 0,3 %

On obtiendrait ainsi une approximation assez bonne, en tout cas bien meilleure qu'en se basant sur la table agrégée.

Nous avons dit que les valeurs a_x^i de la rente d'invalide interviennent également dans le calcul de la *prime* $P\,(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}})$ *qu'un actif doit verser annuellement pour avoir droit à une rente en cas d'invalidité.* En effet, considérons un groupe de l_x^{aa} actifs et suivons-les jusqu'à l'âge-terme que nous supposons être 65 ans. Ceux qui deviennent invalides avant 65 ans ont droit à la rente annuelle de 1 payable jusqu'à leur décès. Supposons que la rente soit versée pour la première fois au moment où l'invalidité est reconnue et admettons que les cas d'invalidité se répartissent uniformément sur l'année entière. On a alors la prime unique:

$$a^{ai}_{x:\overline{65-x|}} = \frac{I_x\, a^i_{x+\frac{1}{2}}\, v^{\frac{1}{2}} + I_{x+1}\, a^i_{x+1+\frac{1}{2}}\, v^{1+\frac{1}{2}} + \ldots + I_{64}\, a^i_{64+\frac{1}{2}}\, v^{64+\frac{1}{2}-x}}{l_x^{aa}}$$

où I_x, I_{x+1}, ..., I_{64} désignent le nombre d'invalides nouveaux à chaque âge.

La prime annuelle s'obtient en divisant la prime unique par la valeur de la rente temporaire d'un actif, laquelle ne dépend pas de la table de mortalité des invalides.

$$P\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}\right) = \frac{a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}}{a^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}$$

Dans l'expression de $a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}$ il faut introduire les valeurs a^{i}_{x} découlant de la table de sélection, en prenant par exemple pour $a^{i}_{x+\frac{1}{2}}$ la valeur approchée $\frac{1}{2}(a^{i}_{[x]} + + a^{i}_{[x+1]})$ — valeurs qui sont représentées sur le graphique par la courbe tracée en traits faibles pointillés —, mais les calculs sont fort longs. La question qui se pose est celle de savoir si l'on obtient une approximation suffisante en utilisant la table agrégée ou éventuellement la table finale au lieu de la table de sélection.

Pour la résoudre nous choisissons un système de bases techniques

(VII)
- *a)* table d'invalidité: IM
- *b)* table de mortalité des actifs: SM 1901—1910
- *c)* table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection
- *d)* table de mortalité des retraités: n'intervient pas ici
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

et nous passons successivement aux systèmes (VIII) et (IX), qui ne diffèrent de (VII) que par la table de mortalité des invalides: (VIII) étant caractérisé par la table agrégée de La Gotha et (IX) par la table finale.

Comme il ressort du graphique 7, la table agrégée conduit pour a^{i}_{x} à des valeurs tantôt beaucoup trop faibles, tantôt un peu trop fortes. Dans la première région, les cas d'invalidité sont rares. Il se peut très bien qu'une compensation se produise, mais on ne peut rien dire a priori. Il faut faire les calculs. Par contre, la table finale conduit à tous les âges à des valeurs a_x^i trop élevées; on peut être certain que la prime unique $a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}$ sera plus grande que d'après la table de sélection.

En effectuant les calculs, on arrive aux primes suivantes:

Prime unique $a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}$

Age d'entrée x	D'après le système de bases techniques (VII) (table de sélection)	(VIII) (table agrégée)	(IX) (table finale)	(X) (SM 1901-1910)	Augmentation (Diminution −) en passant du système (VII) à (VIII)	(IX)	(X)
					%	%	%
20	1,305	1,244	1,495	1,509	−4,7	14,6	15,6
25	1,568	1,505	1,790	1,806	−4,0	14,2	15,2
30	1,872	1,813	2,127	2,143	−3,2	14,0	14,5
35	2,212	2,164	2,496	2,511	−2,2	12,8	13,5
40	2,576	2,549	2,881	2,894	−1,0	11,8	12,3
45	2,933	2,934	3,246	3,253	0,0	11,0	10,9
50	3,209	3,239	3,504	3,504	0,9	9,2	9,2
55	3,256	3,308	3,501	3,492	1,6	7,5	7,2
60	2,679	2,731	2,835	2,820	1,9	5,8	5,3

Le graphique 8 représentant les résultats obtenus, nous aidera à conclure:

Les primes basées sur la table agrégée sont tantôt trop faibles, tantôt trop fortes, mais les différences avec celles de la table de sélection sont petites; après 30 ans, elles ne dépassent guère 2 ou 3 %. *Il est donc parfaitement admissible ici de substituer la table agrégée à la table de sélection.*

La table finale donne des primes qui s'écartent notablement plus de celles provenant de la table de sélection; la différence est de 8 à 14 %.

A titre de renseignement nous avons également indiqué les primes qu'on obtiendrait en utilisant un système de bases techniques (X), ne différant de (VII), (VIII) et (IX) que par la table de mortalité des invalides, SM 1901—1910 remplaçant les tables de La Gotha. Elles sont très voisines des primes résultant de la table finale.

Il reste à examiner si l'on peut également substituer la table agrégée à la table de sélection dans le calcul de la *réserve mathématique pour un actif.* Celle-ci est égale à

$$ {}_tV\left(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right) = \mathrm{a}^{ai}_{x+t:\overline{65-(x+t)}|} - P\left(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right) \mathrm{a}^{aa}_{x+t:\overline{65-(x+t)}|} $$

En effectuant les calculs, on arrive au graphique 9, qui montre que les réserves de la table agrégée sont un peu trop fortes, de 1 à 3 ou 4 %. Nous en concluons qu'*on peut utiliser la table agrégée au lieu de la table de sélection* pour la mortalité des invalides.

Les systèmes de bases techniques (IX) et (X) conduisent à des réserves mathématiques à peu près identiques. Comparées aux réserves agrégées elles sont: un peu plus élevées pour les assurés admis à 30 ans, sensiblement les mêmes lorsque l'âge d'entrée est de 40 ans, et légèrement plus faibles pour $x = 50$. Il n'y a donc pas non plus d'inconvénient à adopter pour la mortalité des invalides la table finale de La Gotha, ou bien SM 1901—1910, dans le calcul des réserves mathématiques d'un actif. Le tableau suivant permettra au lecteur de suivre de plus près l'influence de la mortalité des invalides sur les réserves mathématiques.

Réserve mathématique ${}_tV\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}\right)$ d'un actif pour une rente en cas d'invalidité de 1.

Age d'entrée x	Durée écoulée t	D'après le système de bases techniques (VII) (table de sélection)	(VIII) (table agrégée)	(IX) (table finale)	(X) (SM 1901-1910)	Augmentation (Diminution –) en passant du système (VII) à (VIII)	(IX)	(X)
						%	%	%
20	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,352	0,345	0,395	0,398	–2,0	12,2	13,1
	10	0,758	0,750	0,849	0,854	–1,1	12,0	12,7
	15	1,215	1,213	1,353	1,357	–0,2	11,4	11,7
	20	1,708	1,722	1,886	1,890	0,8	10,4	10,7
	25	2,205	2,240	2,411	2,411	1,6	9,3	9,3
	30	2,629	2,686	2,839	2,833	2,2	8,0	7,8
	35	2,831	2,903	3,014	3,000	2,5	6,5	6,0
	40	2,426	2,489	2,544	2,527	2,6	4,9	4,2
	42	1,871	1,920	1,952	1,935	2,6	4,3	3,4
	44	0,829	0,851	0,861	0,853	2,7	3,9	2,9
	45	0	0	0	0	—	—	—
30	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,537	0,541	0,593	0,593	0,7	10,4	10,4
	10	1,119	1,137	1,225	1,225	1,6	9,4	9,4
	15	1,710	1,749	1,857	1,853	2,3	8,6	8,4
	20	2,235	2,296	2,398	2,389	2,7	7,3	6,9
	25	2,543	2,617	2,690	2,675	2,9	5,8	5,2
	30	2,253	2,319	2,351	2,333	2,9	4,3	3,6
	32	1,755	1,805	1,822	1,804	2,8	3,8	2,8
	34	0,784	0,806	0,810	0,801	2,8	3,3	2,2
	35	0	0	0	0	—	—	—
40	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,772	0,795	0,829	0,825	3,0	7,4	6,9
	10	1,488	1,536	1,579	1,571	3,2	6,1	5,6
	15	1,995	2,060	2,091	2,075	3,3	4,8	4,0
	20	1,927	1,986	1,994	1,975	3,1	3,5	2,5
	22	1,535	1,581	1,581	1,563	3,0	3,0	1,8
	24	0,698	0,719	0,716	0,707	3,0	2,6	1,3
	25	0	0	0	0	—	—	—
50	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,904	0,935	0,933	0,924	3,4	3,2	2,2
	10	1,276	1,315	1,303	1,288	3,1	2,1	1,0
	12	1,096	1,129	1,115	1,100	3,0	1,7	0,4
	14	0,526	0,542	0,534	0,526	3,0	1,5	0,0
	15	0	0	0	0	—	—	—

Influence de la mortalité des retraités.

Choisissons comme premier système de bases techniques:

$$(\text{XI})\left\{\begin{array}{ll} a) & \text{table d'invalidité: IM} \\ b) & \text{table de mortalité des actifs: SM 1901—1910} \\ c) & \text{table de mortalité des retraités: } 0^{am} \\ d) & \text{taux d'intérêt: } 3\tfrac{1}{2}\ \% \end{array}\right.$$

et comme deuxième:

$$(\text{XII})\left\{\begin{array}{ll} a) & \text{table d'invalidité: IM} \\ b) & \text{table de mortalité des actifs: SM 1901—1910} \\ c) & \text{table de mortalité des ıetraités:} \\ & \quad a\,(m)\text{, table finale [1]} \\ d) & \text{taux d'intérêt: } 3\tfrac{1}{2}\ \% \end{array}\right.$$

La mortalité des invalides n'intervient pas ici.

Selon nos conventions, tous les assurés valides à 65 ans ont droit à une pension de retraite de 1, payable à partir du moment où ils atteignent l'âge de 65 ans. La prime unique s'exprime donc par la formule

$$_{65-x|}\mathfrak{a}_x^a = \frac{l_{65}^{aa}\,\mathfrak{a}_{65}\cdot v^{65-x}}{l_x^{aa}}$$

où $\mathfrak{a}_{65}$ est la valeur actuelle donnée par la table de mortalité adoptée pour les retraités.

La prime annuelle sera:

$$P\left(_{65-x|}\mathfrak{a}_x^a\right) = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x:\overline{65-x|}}^{aa}}\;\frac{l_{65}^{aa}\,\mathfrak{a}_{65}\,v^{65-x}}{l_x^{aa}}$$

---

[1]) The Mortality of Annuitants, 1900—1920, by W. Palin Elderton and H. J. P. Oakley, published on behalf of The Institute of Actuaries and The Faculty of Actuaries in Scotland by Charles and Edwin Layton, London 1924.

et la réserve mathématique d'un actif:

$$
{}_tV_x = {}_{65-(x+t)|}\mathrm{a}^a_{x+t} - P\left({}_{65-x|}\mathrm{a}^a_x\right) \cdot \mathrm{a}^{aa}_{x+t:\overline{65-(x+t)|}} =
$$

$$
= \frac{l^{aa}_{65}}{l^{aa}_x}\,\mathrm{a}_{65} \cdot v^{65-x}\left[v^{-t} - \frac{\mathrm{a}^{aa}_{x+t:\overline{65-(x+t)|}}}{\mathrm{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}\right]
$$

Les systèmes de bases techniques ne différant que par la table de mortalité des retraités, les rapports: *a)* entre les deux primes uniques, *b)* entre les deux primes annuelles, *c)* entre les deux réserves mathématiques sont tous trois égaux au rapport $\frac{\mathrm{a}_{65}(0^{am})}{\mathrm{a}_{65}(a(m))}$ des valeurs actuelles des deux tables de mortalité adoptées pour les retraités.

$$
\mathrm{a}_{65}\,(0^{am}) = 9{,}483 \text{ et } \mathrm{a}_{65}\,(a\,(m)) = 10{,}564.
$$

Ainsi les primes uniques et annuelles et les réserves mathématiques d'un actif augmentent à tous les âges de 11,4 % lorsqu'on passe du système (XI) au système (XII).

On verrait de même que le passage de la table de la population suisse SM 1901—1910 à la table de rentiers 0^{am} entraîne à tous les âges une augmentation des primes uniques et annuelles et des réserves mathématiques pour les actifs de 11,2 %.

Pour les *réserves mathématiques des rentes en cours,* on arrive à des différences encore un peu plus élevées, soit de 11 % à 15 ou 16 %, suivant l'âge du rentier.

Augmentation de la réserve mathématique a_x

1º en passant de la table 0^{am} à $a\,(m)$:

à 65	70	75	80	85	90 ans
11,4 %	12,0 %	11,4 %	11,8 %	13,7 %	15,7 %

2° en passant de la table SM 1901—1910 à 0^{am}:

à 65	70	75	80	85	90 ans
11,2 %	12,8 %	15,1 %	16,3 %	13,8 %	8,6 %

On voit quelle grande influence une variation de la mortalité des retraités a sur les primes et sur les réserves mathématiques. Le graphique 10 fait ressortir la différence dans les valeurs actuelles a_x données par les tables SM 1901—1910, 0^{am} avec et sans sélection, $a\,(m)$ avec et sans sélection, et voici pour fixer les idées la diminution des taux de décès:

1° en passant de la table 0^{am} à $a\,(m)$

à 65	70	75	80	85	90 ans
25,2 %	24,7 %	21,4 %	15,5 %	16,3 %	17,2 %

2° en passant de la table SM 1901—1910 à 0^{am}:

à 65	70	75	80	85	90 ans
19,3 %	19,8 %	19,9 %	22,7 %	18,2 %	13,2 %

En particulier si l'on passe d'une table démographique à une table de rentiers, les primes et les réserves mathématiques de l'assurance-vieillesse augmentent dans de très fortes proportions: 11 % et plus en remplaçant la table SM 1901—1910 par 0^{am}; 25 % et plus en passant de SM 1901—1910 à la table anglaise $a\,(m)$, observations de 1900—1920, c'est-à-dire à peu près de la même époque. Et nous n'avons cependant considéré que les tables finales 0^{am} et $a\,(m)$ et non pas les tables de sélection. La question se pose donc de savoir si les retraités d'une caisse de pensions doivent être assimilés, ou non, en ce qui concerne la mortalité, à des rentiers, s'il faut employer une table de sélection ou si une table finale suffit.

Dans l'assurance collective, il n'y a pas de sélection à craindre lorsque l'assurance-vieillesse est conclue en même temps que l'assurance-invalidité. Pendant le différé on peut utiliser une table d'assurés en cas de décès. Par contre l'usage d'une table de rentiers nous paraît justifiée à partir de l'âge-terme, par le fait que les personnes touchant des rentes adoptent souvent un autre genre de vie, et arrivent pour cela à un âge plus avancé. Nous ne pensons pas qu'une table de sélection soit nécessaire; une table finale suffit sans doute.

Il n'en serait pas forcément ainsi pour des groupements ne s'intéressant qu'à l'assurance-vieillesse. Ceux-ci peuvent très bien avoir un caractère spécial en ce qui concerne la mortalité, et nous devons craindre alors une sélection. Suivant les circonstances il sera nécessaire d'employer une table de sélection soit pour le calcul des primes, soit pour celui des réserves mathématiques.

Table de mortalité masculine MM.

Nous avons analysé plus haut le rôle que joue la mortalité des différentes catégories: actifs, invalides, retraités. Rappelons brièvement nos conclusions:

1° Une variation de la mortalité des actifs n'a qu'une importance secondaire; il n'est pas nécessaire d'utiliser une table de sélection. Eu égard à l'assurance des veuves, il est indiqué de choisir des taux de décès relativement élevés pour les actifs.

2° En ce qui concerne la mortalité des invalides, on peut remplacer la table de sélection par la table agrégée dans le calcul des primes et des réserves mathématiques des actifs. On pourrait aussi, à la rigueur, utiliser la table finale ou une table voisine, mais les différences sont déjà sensibles. Pour les réserves mathématiques des rentes d'invalidité en cours, on peut adopter la table finale au lieu de la table de sélection, mais non pas la table agrégée.

3° L'emploi d'une table de rentiers pour le calcul des pensions de retraite et des réserves mathématiques y afférentes paraît indiqué. Dans certains cas spéciaux, il sera même nécessaire d'avoir recours à une table de sélection.

Tout actuaire sait combien il est désirable d'utiliser des bases techniques simples. C'est une complication d'adopter des tables de mortalité différentes pour les actifs, pour les invalides et pour les retraités, et s'il est possible de faire autrement on n'hésitera pas. Or, les tables que nous possédons ne sauraient convenir à la fois pour les actifs et pour les invalides, pour les jeunes et pour les vieux. C'est pourquoi, en nous fondant sur les remarques et conclusions des paragraphes précédents, nous avons essayé de construire une table spéciale qu'on pourrait adopter pour toutes les catégories.

Dans une pareille tentative, il faut renoncer d'emblée à vouloir représenter tous les faits avec une grande précision; c'est une impossibilité, la mortalité des invalides par exemple, étant nettement différente de celle des actifs. Mais il en est presque toujours ainsi dans la pratique actuarielle. Lorsqu'on est en présence d'un problème déterminé, on a en général le choix entre plusieurs tables différant sensiblement l'une de l'autre, sans que l'une s'impose plutôt que l'autre. On ne renonce pas pour cela à aller de l'avant.

Dans l'assurance collective on se trouve souvent même placé dans des conditions relativement favorables en ce qui concerne la mortalité. Si la caisse accorde des prestations de différentes natures — rentes en cas d'invalidité, pensions de vieillesse, de veuves, d'orphelins, capitaux en cas de vie et de décès —, une certaine compensation des risques se produit, l'événement assuré pouvant intervenir à la suite d'un décès, en cas de vie à l'âge-terme, ou bien pour cause d'invalidité. L'usage d'une table unique de mortalité est admissible. L'essentiel est de la choisir en tenant compte de l'influence diverse des éléments entrant en jeu: mortalité des actifs, des invalides, des retraités. Par contre si la caisse restreint ses prestations à une seule espèce — pensions de vieillesse par exemple —, il faut veiller à ce que les prévisions soient assez prudentes pour ne pas être dépassées par la réalité dans le sens qui produirait un déficit.

Pour la période normale d'activité, de 20 à 60 ans, nous avons choisi une mortalité qui se rapproche beaucoup de celle de la table SM 1901—1910. Elle est sans doute un peu trop forte pour les actifs, un peu trop faible pour les invalides. Mais nous avons vu que l'influence de la mortalité des actifs sur les primes et les réserves mathématiques est d'ordre un peu secondaire. Quant à la mortalité des invalides, la prudence la plus élémentaire nous engage à la choisir relativement faible, à cause des progrès de l'hygiène et de la médecine d'abord, mais aussi parce qu'on aura de plus en plus la tendance à classer comme invalides des personnes qui, autrefois, n'auraient pas quitté leur emploi (les tables de La Gotha, dont nous avons parlé, reposent sur les observations des années 1877 à 1889!).

A partir de 55 ou 60 ans, la table spéciale en question, que nous désignerons dans la suite par les lettres MM (mortalité masculine; Mortalität der Männer), s'éloigne de SM 1901—1910 pour se rapprocher de plus en plus de la table anglaise 0^{am}, table finale. C'est la région dans laquelle on l'utilisera pour les rentes de vieillesse. Les taux de décès sont peut-être légèrement faibles pour les invalides, mais plutôt trop élevés pour les retraités. Bien que 0^{am} soit une table de rentiers, elle est dépassée aujourd'hui, non seulement par la nouvelle table anglaise

$a\,(m)$, 1900—1920, mais encore par un grand nombre de tables démographiques; celles d'Angleterre, du Danemark, de la Hollande, de Norvège, de Suède, des Etats-Unis (voir le tableau 42, pages 212 et 213 du Bulletin de l'Association des Actuaires suisses de 1926, Dr. H. Grieshaber, Die Personenversicherung in den Vereinigten Staaten von Nordamerika). Il est vrai que la mortalité aux âges avancés est encore assez élevée en Suisse; elle est supérieure à celle de presque tous les Etats européens. Mais ce seul fait prouve qu'elle est susceptible de s'abaisser sensiblement au cours des années.

D'autre part, bien que les membres de caisses de pensions ne subissent en général pas d'examen médical, ils représentent tout de même une collectivité plus ou moins sélectionnée, les malades n'étant pas admis dans l'assurance. La mortalité des retraités et des invalides doit s'en ressentir.

Toutes ces considérations nous ont guidé dans le choix de la table de mortalité MM. Il est inutile d'indiquer ici la marche suivie pour l'établir. Nous nous contenterons de dire qu'elle suit la loi de Makeham, $l_x = ks^x g^{c^x}$, à partir de 20 ans, les constantes étant les suivantes:

$c = 1{,}0792$	$\log c = 0{,}033\,101\,94$
$g = 0{,}9960$	$\log g = \bar{1}{,}998\,259\,34$
$s = 0{,}9967$	$\log s = \bar{1}{,}998\,564$

La table a été prolongée au-dessous de 20 ans, en la raccordant à SM 1920/21, afin qu'elle puisse servir aussi à l'assurance des orphelins. Elle est reproduite dans le tableau 1, page 95. Les graphiques 11 et 12 facilitent la comparaison avec des tables connues.

La courbe $a\,(m)$ montre que nous sommes loin d'avoir choisi une mortalité aussi faible que celle des rentiers anglais des années 1900 à 1920, et les tables américaine[1]) et suédoise[2]) rappellent jusqu'à quel point la mortalité de l'ensemble de la population s'est déjà abaissée dans certains pays. La Norvège se caractérise même par des taux de décès inférieurs à ceux des rentiers anglais — table finale $a\,(m)$ 1900—1920 — pour les hommes âgés de 55 à 85 ans. Les petits cercles indiquent la mortalité de sélection de la table $a\,(m)$ et les courbes de raccordement celle de la table de sélection 0^{am}.

On remarquera que nous nous sommes appuyé sur la table SM 1901—1910 plutôt que sur SM 1920/21. Cette dernière ayant été fortement influencée par l'épidémie de grippe de 1918 nous a paru moins propre à représenter les événements normaux de notre pays. Si l'on compare les tables de mortalité démographiques de la période 1911—1920 à celles de 1901—1910, on s'aperçoit que dans plusieurs pays les taux de décès des jeunes classes d'âge ont augmenté. Par contre, les tables basées sur les observations des années postérieures à 1918 marquent, en général, une diminution de la mortalité par rapport à 1901—1910. Il faut attendre les résultats d'expériences plus récentes pour savoir si le recul de la mortalité s'est accentué au cours du dernier quart de siècle, ou si les privations de la guerre ont amoindri la résistance de la nouvelle génération. Quoiqu'il en soit, les taux de décès de la table MM seraient certainement un peu trop élevés à tous les âges pour des caisses exigeant un examen médical de leurs candidats.

L'assureur désireux d'utiliser une table unique, telle que MM, doit naturellement examiner avant tout si elle convient aux circonstances spéciales dans lesquelles il se trouve. Les éléments qui entrent en jeu:

---

[1]) United States Abridged Life Tables 1919/20, Washington 1923.

[2]) Dödligkets-och Livslängdstabeller 1911—1920, Stockholm 1928.

mortalité des actifs, des invalides, des retraités sont trop différents et trop complexes pour admettre sans contrôle une table devant les représenter tous. Il faut comparer les primes et les réserves mathématiques auxquelles conduit la table unique à celles qu'on obtient en choisissant pour chaque catégorie d'individus une table de mortalité se rapprochant le plus possible de la réalité. Suppose-t-on que la mortalité réelle sera voisine: (Suite page 84.)

Prime pure $3\frac{1}{2}$ % pour une rente d'invalidité de $\frac{1}{2}$ et une pension de retraite de 1.

Age d'entrée x	D'après le système de bases techniques (XIII) Invalidité 1)	(XIII) Vieillesse 2)	(XIII) Total	(XIV) Invalidité 1)	(XIV) Vieillesse 2)	(XIV) Total	Augmentation en passant du système (XIII) au système (XIV) (— Diminution) Invalidité	Vieillesse	Total
							%	%	%
20	0,0402	0,0202	0,0604	0,0348	0,0234	0,0582	−13,4	15,9	−3,6
25	0,0516	0,0264	0,0780	0,0446	0,0306	0,0752	−13,6	15,9	−3,6
30	0,0670	0,0354	0,1024	0,0579	0,0407	0,0986	−13,6	15,0	−3,7
35	0,0879	0,0490	0,1369	0,0760	0,0558	0,1318	−13,5	13,9	−3,7
40	0,1168	0,0706	0,1874	0,1012	0,0798	0,1810	−13,4	13,0	−3,4
45	0,1570	0,1084	0,2654	0,1366	0,1214	0,2580	−13,0	12,0	−2,8
50	0,2133	0,1835	0,3968	0,1868	0,2036	0,3904	−12,4	11,0	−1,6
55	0,2920	0,3667	0,6587	0,2575	0,4027	0,6602	−11,8	9,8	+ 0,2
60	0,3989	1,0470	1,4459	0,3543	1,1399	1,4942	−11,2	8,9	+ 3,3

1) $\frac{1}{2} P\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}\right)$ 2) $P\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

Les systèmes de bases techniques (XIII) et (XIV) sont:

(XIII)
- *a)* table d'invalidité: IM
- *b)* table de mortalité des actifs: MM
- *c)* table de mortalité des invalides: MM
- *d)* table de mortalité des retraités: MM
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

(XIV)
- *a)* table d'invalidité: IM
- *b)* table de mortalité des actifs: SM 1920/21
- *c)* table de mortalité des invalides: Gotha, table de sélection 1877—1889
- *d)* table de mortalité des retraités: Table de la population masculine américaine
- *e)* taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ %

Réserve mathématique $3\frac{1}{2}$ % d'un actif pour une rente d'invalidité de $\frac{1}{2}$ et une pension de retraite de 1.

Age d'entrée x	Durée écoulée t	D'après le système de bases techniques (XIII) Invalidité [1]	(XIII) Vieillesse [2]	(XIII) Total	(XIV) Invalidité [1]	(XIV) Vieillesse [2]	(XIV) Total	Augmentation en passant du système (XIII) au système (XIV) (–Diminution) Invalidité	Vieillesse	Total
								%	%	%
20	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,207	0,113	0,320	0,183	0,134	0,317	-11,6	18,6	-0,9
	10	0,446	0,253	0,699	0,393	0,295	0,688	-11,9	16,6	-1,6
	15	0,712	0,429	1,141	0,629	0,495	1,124	-11,6	15,4	-1,5
	20	0,996	0,655	1,651	0,883	0,750	1,633	-11,3	14,5	-1,1
	25	1,275	0,964	2,239	1,135	1,092	2,227	-11,0	13,3	-0,5
	30	1,508	1,423	2,931	1,305	1,595	2,900	-13,5	12,1	-1,1
	35	1,608	2,213	3,821	1,438	2,448	3,886	-10,6	10,6	+ 1,7
	40	1,365	3,909	5,274	1,222	4,269	5,491	-10,5	9,2	4,1
	42	1,049	5,232	6,281	0,938	5,687	6,625	-10,6	8,7	5,5
	44	0,457	7,404	7,861	0,414	8,020	8,434	- 9,4	8,3	7,3
	45	0	9,046	9,046	0	9,785	9,785	—	8,2	8,2
30	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,312	0,203	0,515	0,277	0,230	0,507	-11,2	13,3	-1,6
	10	0,647	0,457	1,104	0,576	0,520	1,096	-11,0	13,8	-0,7
	15	0,983	0,798	1,781	0,878	0,900	1,778	-10,7	12,8	-0,2
	20	1,274	1,290	2,564	1,141	1,442	2,583	-10,4	11,8	+ 0,7
	25	1,437	2,116	3,553	1,289	2,336	3,625	-10,3	10,4	2,2
	30	1,263	3,851	5,114	1,134	4,202	5,336	-10,2	9,1	4,3
	32	0,980	5,193	6,173	0,879	5,643	6,522	-10,3	8,7	5,7
	34	0,431	7,389	7,820	0,391	8,002	8,393	- 9,3	8,4	7,3
	35	0	9,046	9,046	0	9,785	9,785	—	8,2	8,2
40	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,439	0,414	0,853	0,395	0,464	0,859	-10,0	12,1	0,7
	10	0,841	0,984	1,825	0,758	1,096	1,854	- 9,9	11,4	1,6
	15	1,119	1,891	3,010	1,009	2,084	3,093	- 9,8	10,2	2,8
	20	1,074	3,717	4,791	0,968	4,053	5,021	- 9,9	9,0	4,8
	22	0,853	5,103	5,956	0,768	5,542	6,310	-10,0	8,6	5,9
	24	0,381	7,353	7,734	0,348	7,963	8,311	- 8,7	8,3	7,5
	25	0	9,046	9,046	0	9,785	9,785	—	8,2	8,2
50	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,502	1,170	1,672	0,457	1,285	1,742	- 9,0	9,8	4,2
	10	0,706	3,287	3,993	0,641	3,580	4,221	- 9,2	8,9	5,7
	12	0,605	4,814	5,419	0,548	5,214	5,762	- 9,4	8,3	6,3
	14	0,284	7,240	7,524	0,262	7,839	8,101	- 7,7	8,3	7,7
	15	0	9,046	9,046	0	9,785	9,785	—	8,2	8,2

[1] $V(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x}|})$ [2] $V({}_{65-x|}\mathrm{a}^{a}_{x})$

a) pour les actifs: de celle de la population suisse SM 1920/21,

b) pour les invalides: de celle que donne la table Gotha, sélection, 1877—1889,

c) pour les retraités: de celle de la population masculine américaine 1919/20,

les primes pures et les réserves mathématiques nécessaires pour une rente d'invalidité de $\frac{1}{2}$ et une pension de retraite de 1 s'écarteraient alors de celles qui découlent de la table unique MM des pour-cents figurant dans les trois dernières colonnes des tableaux ci-dessus (pages 82 et 83).

On voit qu'il s'agit de différences assez importantes dès que la caisse n'accorde qu'une espèce de rentes.

Si la mortalité réelle des invalides est inférieure à celle de La Gotha 1877—1889, si les retraités suisses meurent plus rapidement que les vieillards américains, les écarts sont plus faibles; les tableaux des paragraphes précédents permettraient d'établir d'autres comparaisons.

Mais revenons aux tableaux ci-dessus; la dernière colonne montre que les résultats fournis par la table MM sont très satisfaisants dès que la caisse assure en même temps contre les conséquences de l'invalidité et de la vieillesse. Elle pourrait du reste aussi être utilisée pour l'assurance de capitaux en cas de décès ou en cas de vie.

Influence d'une variation du taux d'intérêt.

Jusqu'ici nous avons toujours admis le taux d'intérêt de $3\frac{1}{2}$ %. Il s'agit de fixer maintenant la répercussion qu'une variation du taux a sur les primes et sur les réserves mathématiques.

La valeur actuelle d'une rente diminue lorsque le taux augmente; la rente différée surtout est très sensible à la variation. Il faut donc s'attendre à ce qu'une augmentation même légère du taux technique entraîne une diminution importante des primes, principalement des primes de l'assurance-vieillesse où le différé est le plus grand.

Nous passons du système de bases techniques

(XV) { a) table d'invalidité: IM
b) table de mortalité pour les actifs, les invalides et les retraités: MM
c) taux d'intérêt: $3\frac{1}{2}$ % }

au système

(XVI) { a) table d'invalidité: IM
b) table de mortalité pour les actifs, les invalides et les retraités: MM
c) taux d'intérêt: 4 % }

Voici les primes et les réserves mathématiques qu'on obtient:

Influence d'une variation du taux d'intérêt sur la prime.

Age d'entrée x	Prime annuelle pour une rente de 1 d'après le système de bases techniques (XV) (taux $3\frac{1}{2}$ %) Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	(XVI) (taux 4 %) Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Diminution en passant du système (XV) au système (XVI) Invalidité	Vieillesse	Total
							%	%	%
20	0,0805	0,0202	0,1007	0,0710	0,0168	0,0878	11,8	16,8	12,8
25	0,1033	0,0264	0,1297	0,0926	0,0225	0,1151	10,4	14,8	11,3
30	0,1341	0,0354	0,1695	0,1219	0,0306	0,1525	9,1	13,6	10,0
35	0,1759	0,0490	0,2249	0,1622	0,0431	0,2053	7,8	12,1	8,7
40	0,2336	0,0706	0,3042	0,2180	0,0632	0,2812	6,7	10,6	7,6
45	0,3140	0,1084	0,4224	0,2962	0,0987	0,3949	5,7	9,0	6,5
50	0,4266	0,1835	0,6101	0,4062	0,1699	0,5761	4,8	7,4	5,6
55	0,5840	0,3667	0,9507	0,5602	0,3449	0,9051	4,1	5,9	4,8
60	0,7978	1,0470	1,8448	0,7696	1,0002	1,7698	3,5	4,5	4,1

[1] $P\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right)$ [2] $P\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

Influence d'une variation du taux d'intérêt sur la réserve mathématique d'un actif.

Age d'entrée	Durée écoulée	Réserve mathématique d'un actif pour une rente de 1, d'après le système de bases techniques (XV) (taux $3\frac{1}{2}$ %)			(XVI) (taux 4 %)			Diminution en passant du système (XV) au système (XVI)		
x	t	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité [1]	Vieillesse [2]	Total	Invalidité	Vieillesse	Total
								%	%	%
20	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,415	0,113	0,528	0,371	0,097	0,468	10,6	14,2	11,4
	10	0,893	0,253	1,146	0,805	0,219	1,024	9,8	13,4	10,6
	15	1,424	0,429	1,853	1,300	0,375	1,675	8,7	12,6	9,6
	20	1,992	0,655	2,647	1,838	0,580	2,418	7,7	11,4	8,6
	25	2,551	0,964	3,515	2,382	0,866	3,248	6,6	10,2	7,6
	30	3,016	1,423	4,439	2,849	1,301	4,150	5,5	8,6	6,5
	35	3,216	2,213	5,429	3,072	2,060	5,132	4,5	6,9	5,5
	40	2,731	3,909	6,640	2,638	3,714	6,352	3,4	5,0	4,3
	42	2,098	5,232	7,330	2,037	5,012	7,049	2,9	4,2	3,8
	44	0,915	7,404	8,319	0,904	7,155	8,059	1,2	3,4	3,1
	45	0	9,046	9,046	0	8,780	8,780	—	2,9	2,9
30	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,624	0,203	0,827	0,574	0,178	0,752	8,0	12,3	9,1
	10	1,294	0,457	1,751	1,202	0,407	1,609	7,1	10,9	8,1
	15	1,966	0,798	2,764	1,844	0,720	2,564	6,2	9,8	7,2
	20	2,549	1,290	3,839	2,417	1,184	3,601	5,2	8,2	6,2
	25	2,874	2,116	4,990	2,752	1,974	4,726	4,2	6,7	5,3
	30	2,526	3,851	6,377	2,446	3,661	6,107	3,2	4,9	4,2
	32	1,960	5,193	7,153	1,907	4,977	6,884	2,7	4,2	3,8
	34	0,862	7,389	8,251	0,853	7,141	7,994	1,0	3,4	3,1
	35	0	9,046	9,046	0	8,780	8,780	—	2,9	2,9
40	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	0,878	0,414	1,292	0,827	0,375	1,202	5,8	9,4	7,0
	10	1,682	0,984	2,666	1,600	0,907	2,507	4,9	7,8	6,0
	15	2,238	1,891	4,129	2,149	1,769	3,918	4,0	6,4	5,1
	20	2,148	3,717	5,865	2,083	3,538	5,621	3,0	4,8	4,2
	22	1,706	5,103	6,809	1,662	4,894	6,556	2,6	4,1	3,7
	24	0,762	7,353	8,115	0,757	7,109	7,866	0,7	3,3	3,1
	25	0	9,046	9,046	0	8,780	8,780	—	2,9	2,9
50	0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
	5	1,005	1,170	2,175	0,967	1,099	2,066	3,8	6,1	5,0
	10	1,413	3,287	4,700	1,372	3,135	4,507	2,9	4,6	4,1
	12	1,211	4,814	6,025	1,182	4,622	5,804	2,4	4,0	3,7
	14	0,569	7,240	7,809	0,569	7,002	7,571	0	3,3	3,1
	15	0	9,046	9,046	0	8,780	8,780	—	2,9	2,9

[1] $V\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}\right)$ [2] $V\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$

Comme on pouvait le prévoir, une augmentation de $\frac{1}{2}$ % entraîne une forte diminution des primes et des réserves mathématiques, surtout dans les jeunes âges, alors que la durée probable de l'assurance est grande; d'où la nécessité de bien peser les raisons qui militent en faveur d'un taux technique plus ou moins élevé. Or, contrairement à ce qui se passait pour les autres paramètres, *l'influence de la variation du taux se fait sentir dans le même sens pour toutes les catégories d'assurances.* Si la mortalité des actifs a été choisie un peu trop élevée, le nombre réel des retraités est supérieur au nombre présumé; la caisse est en déficit. Mais alors le nombre réel des veuves est inférieur au nombre présumé; on a une compensation.

Rien de pareil si l'on se trompe en fixant le taux technique. Il n'y a pas ici de compensation. C'est ce qui rend le choix du taux d'intérêt plus délicat encore que celui des tables de mortalité. Dès que le rendement des titres en portefeuille tombe en dessous du taux technique, les recettes n'atteignent pas les prévisions, tandis que les dépenses restent les mêmes. La caisse est en déficit. Aussi n'a-t-on pas le droit d'adopter, en assurance, un taux moyen, autour duquel le taux réel oscillerait, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Il faut choisir un taux en dessous duquel le rendement des titres en portefeuille ne descendra pas, selon toutes probabilités.

Il est malaisé de faire des prévisions en ce qui concerne le développement futur du taux d'intérêt. Pendant la période de guerre et d'après-guerre, nous avons été habitués à le voir assez élevé. Mais il a déjà sensiblement baissé et ce mouvement semble devoir s'accentuer. Il y a 4 ou 5 ans, la Confédération empruntait encore à 5 %. Aujourd'hui, les obligations $4\frac{1}{2}$% de la Confédération, de villes et de cantons sont au voisinage du pair, souvent au-dessus.

Si nous jetons enfin un coup d'œil sur le passé, nous voyons que le taux d'intérêt moyen réalisé par les compagnies d'assurances sur la vie était d'environ $4\frac{3}{4}$ % en 1865. Ensuite il a diminué progressivement pour tomber au-dessous de 4 % à la fin du siècle passé. Puis il a recommencé à croître [1]). On constate des fluctuations analogues chez les compagnies françaises, allemandes, anglaises et américaines opérant en Suisse.

Les engagements provenant de rentes de vieillesse, d'invalidité et de survivants liant les caisses d'assurances pour des durées atteignant couramment 50 à 60 ans et plus, on comprendra que le taux technique ne peut en tout cas pas dépasser les taux de rendement enregistrés au cours du demi-siècle écoulé sur les valeurs susceptibles d'être placées en portefeuille. En outre il est nécessaire d'avoir une petite marge de sécurité de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ % pour compenser des bases techniques qui, par ailleurs, seraient trop optimistes. C'est pourquoi, à moins de circonstances exceptionnelles, nous verrions de sérieux inconvénients à choisir un taux technique supérieur à $3\frac{1}{2}$ %.

L'assurance des veuves.

Nous avons parlé avec quelque détail de l'assurance-invalidité et de l'assurance-vieillesse des hommes, en cherchant à mettre en évidence la répercussion qu'un changement dans les bases techniques a sur les primes et sur les réserves mathématiques. De la même manière on pourrait étudier l'assurance des femmes.

---

[1]) S. Dumas. Le taux de l'intérêt dans l'assurance sur la vie en Suisse. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses nº 8, et Rapports du Bureau fédéral des assurances des années 1910, page LXXII et 1918,, page 28*.

Nous avons vu que l'invalidité a un caractère très spécial, encore mal connu et nous avons essayé de la fixer au moyen de la table IF.

La mortalité des femmes est assez voisine de celle des hommes pour que nos conclusions restent valables. Le caractère de rentières qu'il faut attribuer aux femmes touchant des pensions est peut-être plus accentué encore que chez les hommes, les femmes s'adaptant en général mieux à une vie sédentaire.

Il resterait à traiter le cas de l'assurance des veuves qui est particulièrement intéressant parce que plus complexe. Ici interviennent des tables de mortalité pour hommes et pour femmes, et encore faut-il distinguer entre femmes mariées et veuves touchant des pensions. Les probabilités de remariage jouent également un rôle dont on peut fixer l'importance.

Si l'on voulait faire une étude très minutieuse, on devrait ranger les veuves en deux catégories: veuves d'actifs et veuves d'invalides. La composition des veuves suivant ces catégories varie avec les taux d'invalidité. Si ces derniers augmentent, le nombre des invalides croît et avec lui le nombre des veuves d'invalides; les actifs diminuent et les veuves d'actifs aussi. Les probabilités de décès des invalides étant en réalité un peu plus élevées que celles des actifs, on a un plus grand nombre de veuves.

On pourrait mettre en évidence cette influence du changement de la table d'invalidité, mais elle ne peut pas être très importante, la surmortalité des invalides n'agissant que sur la différence entre les deux nombres présumés d'invalides.

Une question qui se pose également est celle de savoir s'il est admissible de remplacer la table de sélection pour la mortalité des invalides par une autre table, comme nous l'avons fait dans l'assurance-invalidité et vieillesse. Bien que le nombre des nouveaux invalides soit relativement faible jusque vers 40 ou 45 ans, on doit s'attendre à des différences appréciables dans les primes et dans les réserves mathématiques, la mortalité d'après une table de sélection étant, au début de l'invalidité, dix et vingt fois supérieure à celle d'une table ordinaire. Si l'assurance des veuves est conclue parallèlement à l'assurance-invalidité, la rente de veuve vient se substituer à la rente d'invalidité. Il n'y a pas de danger à utiliser une table de mortalité ordinaire pour les invalides. Par contre la question devrait être examinée plus attentivement si le risque d'invalidité n'était pas couvert par le contrat.

Une étude complète de l'assurance des veuves nous entraînerait trop loin et du reste le principe à appliquer est exactement le même que ci-dessus: Faire varier un seul paramètre à la fois, examiner l'importance des variations correspondantes dans les primes et les réserves mathématiques et en déduire des conclusions pour le choix de tables appropriées. Nous nous contenterons de reproduire les deux graphiques 13 et 14, représentant la prime unique pure permettant d'assurer une rente de veuve de 1, payable annuellement jusqu'au décès; la femme est supposée 2 ans plus jeune que son mari.

Dans le premier, on a utilisé la même table de mortalité pour les femmes mariées et pour les veuves et l'on a fait varier tantôt la table de mortalité des hommes, tantôt celle des femmes. La rente de veuve est considérée comme une rente de survie; elle est payable pour la première fois au début de l'année d'assurance qui suit le décès du mari. La prime s'obtient par la formule

$$\mathfrak{a}_{x|y} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy} \qquad \text{où } y = x - 2.$$

Dans le deuxième graphique, la table de mortalité des veuves est différente de la table des femmes mariées. On a passé successivement du système de bases techniques (XVII) aux systèmes (XVIII), (XIX), (XX) et (XXI), en faisant varier:

1º la table de mortalité des hommes,
2º la table de mortalité des femmes mariées,
3º la table de mortalité des veuves,
4º le taux d'intérêt.

Table de mortalité.

	Hommes	Femmes mariées	Veuves	Taux d'intérêt
(XVII)	SM 1901–1910	SF 1901—1910	O^{af} [1]	$3\frac{1}{2}$ %
(XVIII)	SM 1920/21	SF 1901—1910	O^{af} [1]	$3\frac{1}{2}$ %
(XIX)	SM 1920/21	SF 1920/21	O^{af} [1]	$3\frac{1}{2}$ %
(XX)	SM 1920/21	SF 1920/21	$a\,(f)$ [1]	$3\frac{1}{2}$ %
(XXI)	SM 1920/21	SF 1920/21	$a\,(f)$ [1]	4 %

La table de mortalité des veuves étant différente de celle des femmes mariées, on ne peut pas utiliser la formule de la rente de survie. La prime a été calculée d'après la formule:

$$\mathrm{a}^{w}_{x|y} = \frac{1}{D_{xy}} \sum l_x\, q_x\, l_{y+\frac{1}{2}}\, \mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}\, v^{x+\frac{1}{2}} \quad \text{où } y = x - 2.$$

La rente est payable annuellement, la première fois le jour du décès de l'époux, c'est-à-dire en moyenne au milieu de l'année d'assurance. Il s'en suit que les primes des deux graphiques ne peuvent pas être comparées immédiatement entre elles, mais il suffirait de

---

[1]) Table finale.

calculer un terme correctif pour tenir compte de la différence dans l'échéance des rentes.

Nous passons immédiatement aux conclusions:

a) La mortalité des hommes a une grande influence sur les primes et sur les réserves mathématiques. Tout accroissement des taux de décès entraîne une augmentation des primes d'autant plus forte que la surmortalité atteint de plus jeunes classes d'âges. En effet, les cas de décès parmi les époux sont alors plus fréquents, le nombre des veuves augmente, tandis que la rente d'activité diminue; deux causes qui appellent une augmentation des primes annuelles.

b) L'influence d'une variation dans la mortalité des femmes mariées est très faible, bien plus faible que celle d'une variation de la mortalité des hommes; elle est de sens opposé.

En effet, s'il meurt moins de femmes chaque année, il y a plus de veuves; mais chaque femme qui est sauvée ne donne pas une veuve de plus; elle évite la dissolution d'un couple, à moins que le mari ne meure.

Considérons un couple dont le mari est âgé de x et la femme de y, et soient q_x et q_y les taux de décès. La probabilité pour la femme d'être veuve à la fin de l'année est

$$q_x (1 - q_y),$$

à la condition toutefois que les probabilités q_x et q_y soient indépendantes. Supposons d'abord que la mortalité des hommes augmente de λ %, tandis que celle des femmes reste invariable. La probabilité envisagée ci-dessus est alors

$$\left(1 + \frac{\lambda}{100}\right) q_x (1 - q_y).$$

Le nombre des nouvelles veuves d'âge y augmente de

$$q_x (1 - q_y) \cdot \lambda \,\%.$$

Par contre si la mortalité des femmes diminue de $\lambda \,\%$, tandis que celle des hommes reste invariable, la probabilité pour la femme d'être veuve à la fin de l'année devient :

$$q_x \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{100} \right) q_x \right] ;$$

elle augmente de $q_x q_y \cdot \lambda \,\%$, bien moins que la première fois, q_y étant en général petit et $(1 - q_y)$ voisin de l'unité.

c) La mortalité des veuves joue un rôle important, surtout à partir de 50 ou 60 ans. Dès ce moment, il y a beaucoup de veuves; si elles vivent longtemps, les rentes doivent être servies pendant de nombreuses années et les primes de même que les réserves mathématiques sont élevées.

d) L'influence du taux d'intérêt est très grande, d'autant plus que le couple est plus jeune; elle s'atténue à mesure que l'âge d'entrée augmente, la durée probable de l'assurance devenant de plus en plus petite.

Table de mortalité féminine MF.

L'emploi de tables de mortalité spéciales pour les diverses catégories complique beaucoup l'assurance des femmes en général et l'assurance des veuves. Aussi avons-nous cherché à construire une table de mortalité féminine pouvant être substituée, lorsqu'il s'agit de conditions normales, aux diverses tables spéciales qu'on devrait utiliser. Les conclusions des paragraphes précédents nous ont guidé dans le choix des taux de décès.

De 20 à 50 ans la table MF, comme nous l'appellerons (abréviation de mortalité féminine et de «Mortalität der Frauen»), diffère peu de SF 1901—1910; pour les âges avancés elle se rapproche de 0^{af}. Elle suit la loi de Makeham $l_y = ks^y g^{c^y}$ à partir de 20 ans, les coefficients étant:

$$c = 1{,}0925 \qquad \log c = 0{,}038\,421\,45$$
$$g = 0{,}9990 \qquad \log g = \bar{1}{,}999\,565\,49$$
$$s = 0{,}9948 \qquad \log s = \bar{1}{,}997\,736$$

Au-dessous de 20 ans nous l'avons raccordée à la table SF 1920/21. Les taux de décès et le nombre de vivants figurent dans le tableau 2, page 99, et les graphiques 15 et 16 permettent la comparaison avec d'autres tables.

L'usage de la table MF demande les mêmes précautions que celui de la table MM. Les taux de décès seraient trop élevés à tous les âges pour un personnel sélectionné ou pour l'assurance-vieillesse seule. Par contre on pourra l'utiliser dans l'assurance des veuves et, si les conditions sont normales, s'il n'y a pas de sélection à craindre, dans l'assurance des femmes en général.

Deux collègues m'ont secondé dans le présent travail: M^lle Leuba a effectué une grande partie des calculs; M. Zaugg a dessiné les graphiques. Je tiens à les en remercier très sincèrement.

Table de mortalité masculine MM.

Tableau 1.

x	l_x	q_x	μ_x	$\mathring{e}_x$	a_x
0	100 000	0,09 051	6,43 495	53,09	22,052
1	90 949	0,01 593	0,04 537	57,33	23,957
2	89 500	0,00 656	0,00 996	57,25	24,145
3	88 913	543	533	56,62	24,113
4	88 430	399	465	55,93	24,053
5	88 077	0,00 376	0,00 381	55,15	23,955
6	87 746	313	346	54,36	23,848
7	87 471	276	291	53,53	23,722
8	87 230	257	265	52,67	23,583
9	87 006	236	246	51,81	23,433
10	86 801	0,00 218	0,00 226	50,93	23,273
11	86 612	213	214	50,04	23,103
12	86 428	210	210	49,14	22,925
13	86 247	214	210	48,25	22,740
14	86 062	238	224	47,35	22,550
15	85 857	0,00 274	0,00 254	46,46	22,357
16	85 622	327	299	45,59	22,165
17	85 342	380	354	44,74	21,978
18	85 018	430	408	43,90	21,795
19	84 652	460	449	43,09	21,615
20	84 263	0,00 475	0,00 471	42,29	21,436
21	83 863	487	482	41,49	21,252
22	83 455	499	494	40,69	21,063
23	83 039	513	507	39,89	20,869
24	82 613	527	521	39,09	20,671
25	82 178	0,00 543	0,00 536	38,30	20,467
26	81 732	559	552	37,50	20,258
27	81 275	577	570	36,71	20,045
28	80 806	597	589	35,92	19,825
29	80 324	618	609	35,13	19,601

Tableau 1 (suite).

x	l_x	q_x	μ_x	$\mathring{e}_x$	a_x
30	79 828	0,00 641	0,00 631	34,35	19,372
31	79 316	665	655	33,57	19,138
32	78 789	692	681	32,79	18,898
33	78 244	721	708	32,01	18,654
34	77 680	751	738	31,24	18,404
35	77 097	0,00 785	0,00 771	30,47	18,149
36	76 492	821	806	29,71	17,890
37	75 864	859	843	28,95	17,626
38	75 212	901	884	28,20	17,357
39	74 534	946	928	27,45	17,084
40	73 829	0,00 995	0,00 975	26,71	16,805
41	73 094	1 048	1 026	25,97	16,523
42	72 328	1 104	1 081	25,24	16,237
43	71 529	1 165	1 140	24,52	15,946
44	70 696	1 231	1 204	23,80	15,652
45	69 826	0,01 302	0,01 274	23,09	15,353
46	68 917	1 379	1 348	22,39	15,052
47	67 967	1 461	1 429	21,70	14,746
48	66 974	1 550	1 516	21,01	14,439
49	65 936	1 646	1 610	20,33	14,128
50	64 851	0,01 750	0,01 711	19,67	13,815
51	63 716	1 861	1 821	19,01	13,499
52	62 530	1 982	1 939	18,36	13,182
53	61 291	2 111	2 066	17,72	12,863
54	59 997	2 251	2 203	17,09	12,544
55	58 646	0,02 401	0,02 352	16,47	12,223
56	57 238	2 564	2 512	15,87	11,901
57	55 770	2 738	2 685	15,27	11,580
58	54 243	2 927	2 871	14,69	11,258
59	52 655	3 129	3 072	14,11	10,937

Tableau 1 (suite).

x	l_x	q_x	μ_x	$\mathring{e}_x$	a_x
60	51 007	0,03 348	0,03 289	13,55	10,618
61	49 299	3 583	3 524	13,01	10,300
62	47 533	3 836	3 777	12,47	9,983
63	45 710	4 108	4 050	11,95	9,667
64	43 832	4 401	4 344	11,44	9,355
65	41 903	0,04 716	0,04 662	10,94	9,045
66	39 927	5 055	5 005	10,46	8,740
67	37 909	5 420	5 375	9,99	8,437
68	35 854	5 812	5 775	9,53	8,138
69	33 770	6 233	6 206	9,09	7,844
70	31 665	0,06 685	0,06 671	8,66	7,554
71	29 548	7 171	7 173	8,25	7,270
72	27 429	7 692	7 715	7,84	6,991
73	25 319	8 251	8 300	7,46	6,717
74	23 230	8 851	8 931	7,08	6,449
75	21 174	0,09 494	0,09 613	6,72	6,187
76	19 164	10 183	10 348	6,37	5,932
77	17 213	10 920	11 141	6,04	5,683
78	15 333	11 709	11 997	5,72	5,441
79	13 538	12 553	12 921	5,41	5,206
80	11 839	0,13 454	0,13 918	5,11	4,979
81	10 246	14 417	14 995	4,83	4,757
82	8 769	15 443	16 156	4,56	4,544
83	7 415	16 538	17 409	4,30	4,338
84	6 189	17 702	18 762	4,06	4,140
85	5 093	0,18 941	0,20 222	3,82	3,949
86	4 128	20 257	21 797	3,60	3,765
87	3 292	21 654	23 497	3,39	3,589
88	2 579	23 133	25 332	3,19	3,420
89	1 982	24 699	27 312	2,99	3,258

Tableau 1 (suite).

x	l_x	q_x	μ_x	$\mathring{e}_x$	a_x
90	1 492	0,26 352	0,29 449	2,81	3,104
91	1 099	28 096	31 755	2,64	2,957
92	790	29 932	34 244	2,48	2,816
93	554	31 860	36 930	2,32	2,683
94	377	33 882	39 829	2,17	2,556
95	249	0,35 997	0,42 957	2,03	2,436
96	159	38 203	46 334	1,90	2,323
97	98	40 499	49 977	1,78	2,215
98	58	42 881	53 909	1,66	2,114
99	33	45 345	58 152	1,53	2,019
100	18	0,47 885	0,62 732	1,39	1,929
101	9	50 494	67 674	—	1,845
102	4	53 163	73 007	—	1,766
103	2	55 882	78 764	—	1,692
104	1	58 640	84 975	—	1,623

Remarque :

Jusqu'à 84 ans la valeur actuelle a_x a été calculée par la formule

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

De 85 à 103 ans, on a utilisé la formule de récurrence

$$a_x = 1 + vp_x\, a_{x+1},$$

et la valeur a_{104} a été déterminée par la relation

$$a_{104} = e^{\lambda} \sum_{\tau=0}^{\infty} e^{-(\tau h + \lambda c^{\tau})}$$

$$\text{où} \begin{cases} h = -\operatorname{Log}(vs) = 0{,}037\,7060 \\ \lambda = -c^{104} \operatorname{Log} g = 11{,}1053 \\ s, g, c, \text{ sont les constantes de Makeham.} \end{cases}$$

(Dr W. Friedli, Bulletin de l'Association des Actuaires suisses nº 13, page 172.)

Table de mortalité féminine MF.

Tableau 2.

y	l_y	q_y	μ_y	$\mathring{e}_y$	a_y
0	100 000	0,07 016	5,16 378	56,48	22,682
1	92 984	0,01 455	0,03 611	59,70	24,134
2	91 631	0,00 711	0,01 002	59,58	24,297
3	90 980	495	0,00 548	59,00	24,285
4	90 530	411	439	58,29	24,220
5	90 158	0,00 367	0,00 387	57,53	24,132
6	89 827	319	343	56,74	24,030
7	89 540	283	300	55,92	23,912
8	89 287	249	265	55,07	23,781
9	89 065	226	235	54,21	23,637
10	88 864	0,00 220	0,00 221	53,33	23,483
11	88 668	224	221	52,45	23,321
12	88 469	240	230	51,57	23,154
13	88 257	275	255	50,69	22,985
14	88 014	324	298	49,83	22,817
15	87 729	0,00 381	0,00 352	48,99	22,654
16	87 395	435	409	48,17	22,497
17	87 015	485	462	47,38	22,347
18	86 593	530	511	46,61	22,202
19	86 134	560	549	45,85	22,061
20	85 652	0,00 574	0,00 573	45,11	21,921
21	85 160	579	578	44,37	21,778
22	84 667	584	583	43,62	21,630
23	84 173	590	589	42,88	21,477
24	83 676	597	595	42,13	21,320
25	83 176	0,00 604	0,00 602	41,38	21,158
26	82 674	612	610	40,63	20,990
27	82 168	620	618	39,87	20,818
28	81 659	630	627	39,12	20,639
29	81 145	640	636	38,36	20,455

Tableau 2 (suite).

y	l_y	q_y	μ_y	$\mathring{e}_y$	a_y
30	80 626	0,00 651	0,00 647	37,61	20,266
31	80 101	663	659	36,85	20,071
32	79 570	676	671	36,09	19,870
33	79 032	690	685	35,34	19,663
34	78 487	706	701	34,58	19,450
35	77 933	0,00 723	0,00 717	33,82	19,232
36	77 370	742	735	33,06	19,008
37	76 796	763	755	32,31	18,777
38	76 210	785	777	31,55	18,541
39	75 612	810	800	30,80	18,298
40	75 000	0,00 836	0,00 826	30,04	18,049
41	74 373	866	854	29,29	17,795
42	73 729	897	885	28,54	17,534
43	73 068	932	919	27,80	17,268
44	72 387	970	955	27,05	16,997
45	71 685	0,01 012	0,00 996	26,31	16,717
46	70 960	1 057	1 039	25,58	16,434
47	70 210	1 107	1 087	24,85	16,145
48	69 433	1 161	1 140	24,12	15,850
49	68 627	1 220	1 197	23,40	15,551
50	67 790	0,01 285	0,01 259	22,68	15,246
51	66 919	1 355	1 328	21,97	14,937
42	66 012	1 432	1 402	21,26	14,622
53	65 067	1 516	1 484	20,56	14,304
54	64 081	1 608	1 573	19,87	13,982
55	63 051	0,01 708	0,01 670	19,19	13,655
56	61 974	1 817	1 776	18,51	13,326
57	60 848	1 936	1 892	17,85	12,994
58	59 670	2 066	2 019	17,19	12,658
59	58 437	2 207	2 158	16,54	12,321

Tableau 2 (suite).

y	l_y	q_y	μ_y	$\mathring{e}_y$	a_y
60	57 147	0,02 362	0,02 309	15,90	11,982
61	55 797	2 531	2 474	15,28	11,641
62	54 385	2 715	2 655	14,66	11,300
63	52 908	2 915	2 852	14,05	10,958
64	51 366	3 134	3 068	13,46	10,615
65	49 756	0,03 372	0,03 304	12,88	10,274
66	48 078	3 632	3 561	12,31	9,934
67	46 332	3 915	3 842	11,76	9,595
68	44 518	4 223	4 149	11,22	9,258
69	42 638	4 558	4 485	10,69	8,924
70	40 695	0,04 924	0,04 852	10,18	8,593
71	38 691	5 321	5 252	9,68	8,266
72	36 632	5 753	5 690	9,19	7,943
73	34 525	6 223	6 168	8,72	7,625
74	32 377	6 734	6 690	8,27	7,311
75	30 197	0,07 288	0,07 261	7,83	7,003
76	27 996	7 891	7 884	7,41	6,702
77	25 787	8 544	8 565	7,00	6,407
78	23 584	9 253	9 309	6,60	6,119
79	21 402	0,10 021	0,10 122	6,23	5,838
80	19 257	0,10 853	0,11 010	5,87	5,566
81	17 167	11 752	11 980	5,52	5,300
82	15 150	12 725	13 040	5,19	5,044
83	13 222	13 775	14 198	4,87	4,795
84	11 401	14 908	15 463	4,57	4,556
85	9 701	0,16 129	0,16 845	4,28	4,325
86	8 136	17 443	18 355	4,01	4,103
87	6 717	18 855	20 005	3,75	3,891
88	5 451	20 369	21 807	3,50	3,687
89	4 341	21 992	23 776	3,27	3,492

Tableau 2 (suite).

y	l_y	q_y	μ_y	$\mathring{e}_y$	a_y
90	3 386	0,23 727	0,25 927	3,05	3,307
91	2 583	25 578	28 278	2,84	3,130
92	1 922	27 549	30 845	2,65	2,963
93	1 393	29 643	33 650	2,47	2,804
94	980	31 862	36 714	2,30	2,654
95	668	0,34 206	0,40 062	2,13	2,512
96	440	36 674	43 720	1,98	2,379
97	279	39 265	47 716	1,84	2,253
98	169	41 975	52 081	1,71	2,136
99	98	44 798	56 850	1,58	2,026
100	54	0,47 724	0,62 061	1,46	1,923
101	28	50 745	67 753	—	1,827
102	14	53 846	73 972	—	1,739
103	6	57 011	80 766	—	1,657
104	3	60 221	88 189	—	1,581
105	1	0,63 455	0,96 298	—	1,511

Remarque :

Jusqu'à 84 ans la valeur actuelle a_y a été calculée par la formule

$$a_y = \frac{N_y}{D_y}.$$

De 85 à 104 ans, on a utilisé la formule de récurrence

$$a_y = 1 + v p_y \, a_{y+1},$$

et la valeur a_{105} a été déterminée par la relation

$$a_{105} = e^{\lambda} \sum_{\tau=0}^{\infty} e^{-(\tau h + \lambda c^{\tau})}$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} h = -\operatorname{Log}(vs) = 0{,}039\,6144 \\ \lambda = -c^{105} \operatorname{Log} g = 9{,}909\,38 \\ s, g, c \text{ sont les constantes de Makeham.} \end{array} \right.$$

(Dr W. Friedli, Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, n° 13, page 172.)

Table d'invalidité masculine IM.

Tableau 3.

x	Probabilités indépendantes i_x	Ordre simple[1] $l_x^{(i)}$	Ordre des actifs $l_x^{aa} = l_x \cdot \frac{l_x^{(i)}}{85857}$	Ordre des invalides l_x^{ii}
15	0,00 0125	85 857	85 857	0
16	14	85 846	85 611	11
17	16	85 834	85 319	23
18	19	85 820	84 981	37
19	22	85 804	84 600	52
20	0,00 025	85 785	84 192	71
21	29	85 764	83 772	91
22	33	85 739	83 341	114
23	38	85 711	82 898	141
24	44	85 678	82 441	172
25	0,00 050	85 640	81 970	208
26	57	85 597	81 484	248
27	66	85 548	80 982	293
28	76	85 492	80 463	343
29	87	85 427	79 922	402
30	0,00 100	85 353	79 359	469
31	115	85 268	78 772	544
32	132	85 170	78 159	630
33	152	85 058	77 516	728
34	174	84 929	76 840	840
35	0,00 200	84 781	76 131	966
36	230	84 611	75 382	1 110
37	264	84 416	74 591	1 273
38	303	84 193	73 754	1 458
39	348	83 938	72 868	1 666
40	0,00 400	83 646	71 928	1 901
41	459	83 311	70 927	2 167
42	528	82 929	69 862	2 466
43	606	82 491	68 725	2 804
44	696	81 991	67 513	3 183
45	0,00 800	81 420	66 217	3 609
46	919	80 769	64 833	4 084
47	0,01 056	80 027	63 352	4 615
48	1 213	79 182	61 767	5 207
49	1 393	78 222	60 072	5 864

[1]) Obtenu en considérant l'invalidité comme seule cause de sortie.

Tableau 3 (suite).

x	Probabilités indépendantes $\dot{i}_x$	Ordre simple $l_x^{(i)}$	Ordre des actifs $l_x^{aa} = l_x \cdot \frac{l_x^{(i)}}{85857}$	Ordre des invalides l_x^{ii}
50	0,01 600	77 132	58 261	6 590
51	1 838	75 898	56 325	7 391
52	2 111	74 503	54 261	8 269
53	2 425	72 930	52 063	9 228
54	2 786	71 161	49 727	10 270
55	0,03 200	69 178	47 253	11 393
56	3 676	66 964	44 643	12 595
57	4 222	64 502	41 898	13 872
58	4 850	61 779	39 031	15 212
59	5 572	58 783	36 051	16 604
60	0,06 400	55 508	32 977	18 030
61	7 352	51 955	29 832	19 467
62	8 445	48 135	26 649	20 884
63	9 701	44 070	23 463	22 247
64	0,11 143	39 795	20 316	23 516
65	0,12 800	35 361	17 258	24 645
66	14 703	30 835	14 339	25 588
67	16 890	26 301	11 613	26 296
68	19 401	21 859	9 128	26 726
69	22 286	17 618	6 930	26 840
70	0,25 600	13 692	5 050	26 615
71	29 407	10 187	3 506	26 042
72	33 779	7 191	2 297	25 132
73	38 802	4 762	1 404	23 915
74	44 572	2 914	788	22 442
75	0,51 200	1 615	398	20 776
76	58 813	788	176	18 988
77	67 559	325	65	17 148
78	77 605	105	19	15 314
79	89 144	24	4	13 534
80	1	3	0	11 839

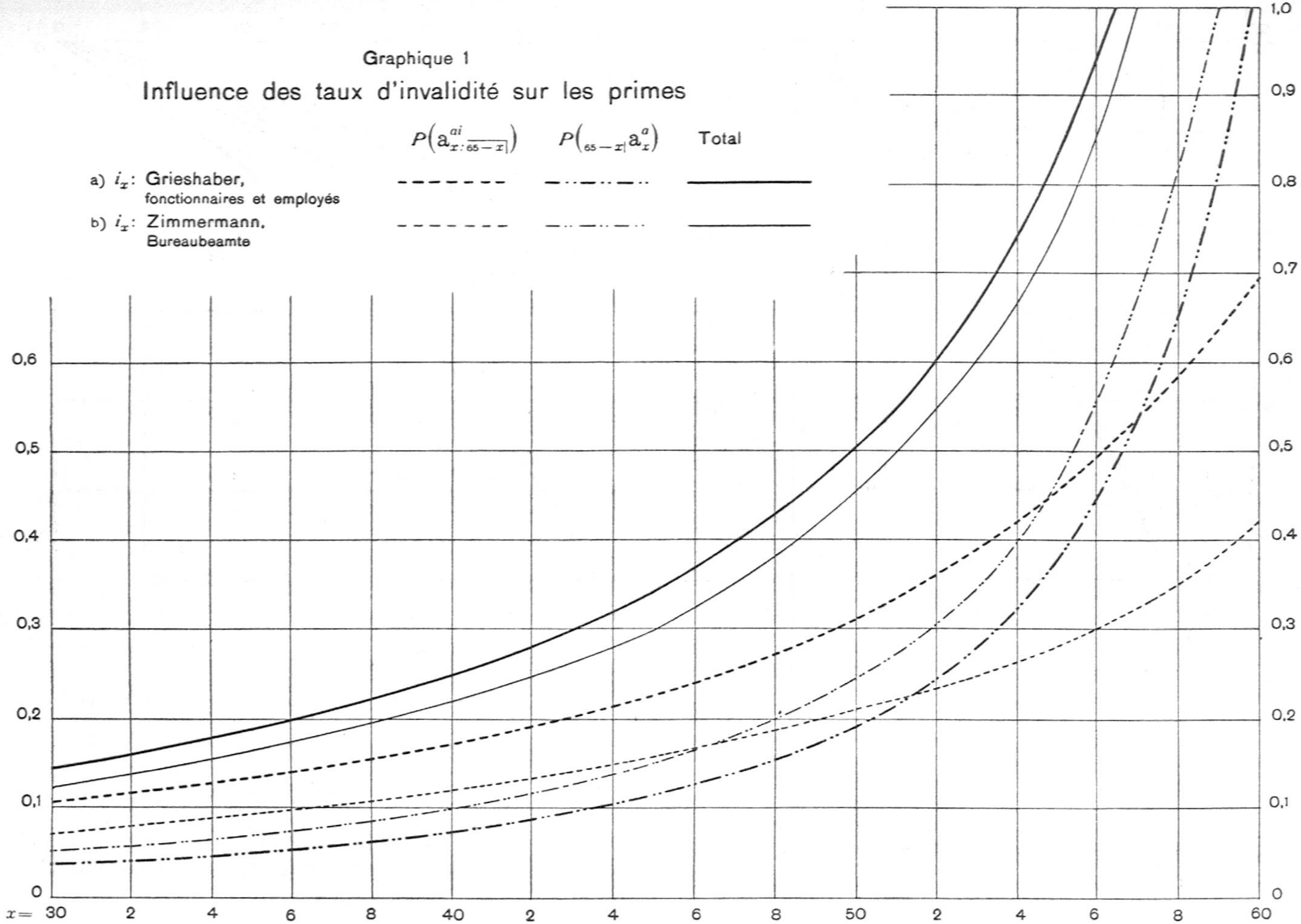
Table d'invalidité féminine IF. *Tableau 4.*

y	Probabilités indépendantes i_y	Ordre simple[1] $l_y^{(i)}$	Ordre des actifs $l_y^{aa} = l_y \cdot \frac{l_y^{(i)}}{87729}$	Ordre des invalides l_y^{ii}
15	0,00 050	87 729	87 729	0
16	55	87 685	87 351	44
17	62	87 637	86 924	91
18	73	87 583	86 449	144
19	84	87 519	85 928	206
20	0,00 094	87 445	85 374	278
21	107	87 363	84 805	355
22	120	87 270	84 224	443
23	137	87 165	83 632	541
24	156	87 046	83 024	652
25	0,00 175	86 910	82 399	777
26	197	86 758	81 759	915
27	224	86 587	81 098	1 070
28	255	86 393	80 415	1 244
29	287	86 173	79 705	1 440
30	0,00 325	85 926	78 969	1 657
31	368	85 647	78 200	1 901
32	416	85 332	77 396	2 174
33	471	84 977	76 553	2 479
34	531	84 577	75 667	2 820
35	0,00 600	84 128	74 734	3 199
36	679	83 623	73 749	3 621
37	766	83 055	72 704	4 092
38	864	82 419	71 597	4 613
39	974	81 707	70 422	5 190
40	0,01 100	80 911	69 171	5 829
41	1 239	80 021	67 839	6 534
42	1 399	79 030	66 418	7 311
43	1 576	77 924	64 902	8 166
44	1 775	76 696	63 284	9 103
45	0,02 000	75 335	61 557	10 128
46	2 252	73 828	59 716	11 244
47	2 534	72 165	57 754	12 456
48	2 851	70 336	55 667	13 766
49	3 204	68 331	53 453	15 174

[1]) Obtenu en considérant l'invalidité comme seule cause de sortie.

Tableau 4 (suite).

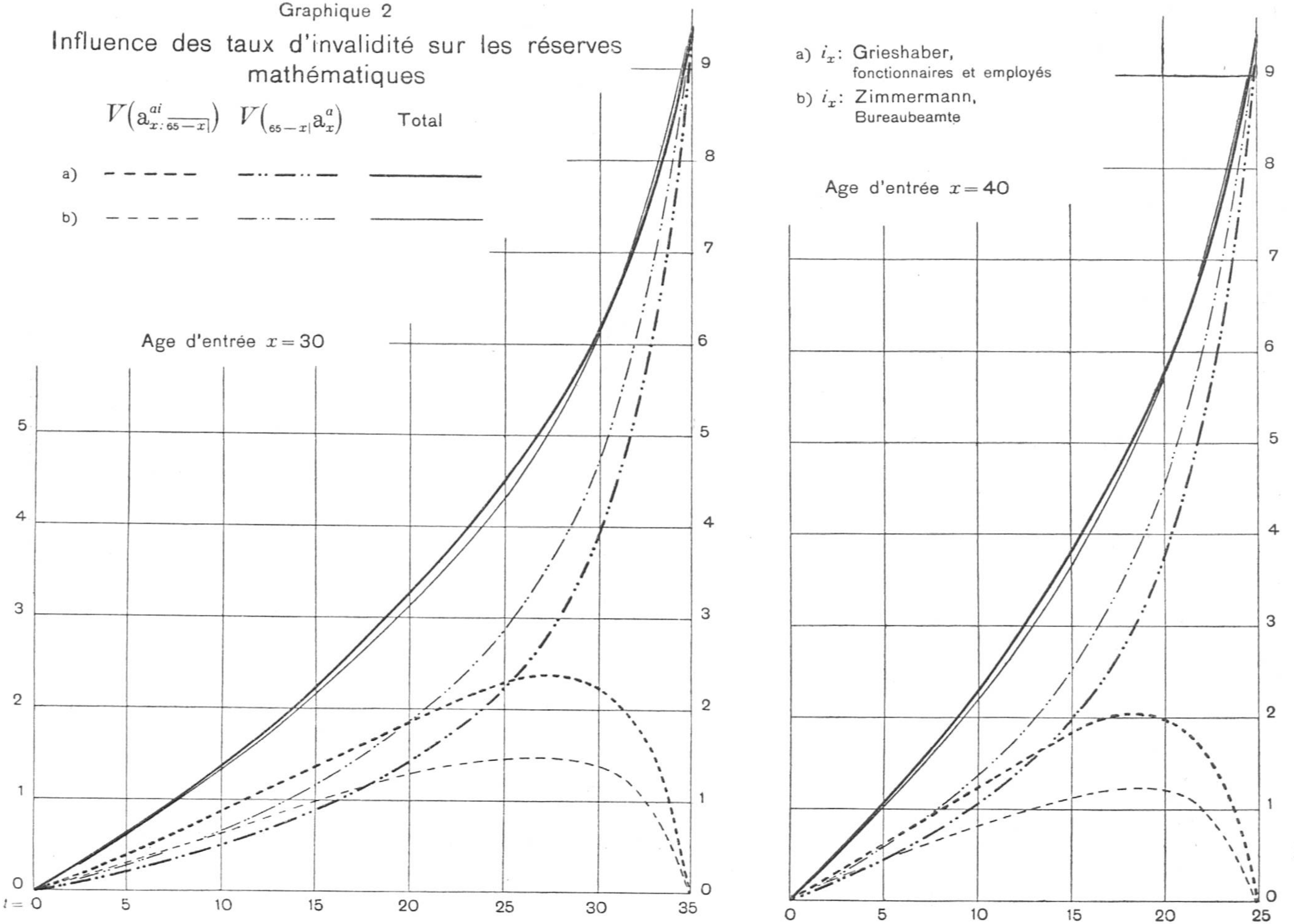
y	Probabilités indépendantes i_y	Ordre simple $l_y^{(i)}$	Ordre des actifs $l_y^{aa} = l_y \cdot \frac{l_y^{(i)}}{87729}$	Ordre des invalides l_y^{ii}
50	0,03 600	66 142	51 110	16 680
51	4 044	63 761	48 637	18 282
52	4 539	61 183	46 037	19 975
53	5 093	58 406	43 318	21 749
54	5 711	55 431	40 489	23 592
55	0,06 400	52 265	37 563	25 488
56	7 168	48 920	34 559	27 415
57	8 022	45 413	31 498	29 350
58	8 973	41 770	28 411	31 259
59	0,10 030	38 022	25 327	33 110
60	0,11 200	34 208	22 283	34 864
61	12 498	30 377	19 320	36 477
62	13 934	26 580	16 478	37 907
63	15 522	22 876	13 796	39 112
64	17 272	19 325	11 315	40 051
65	0,19 200	15 987	9 067	40 689
66	21 319	12 917	7 079	40 999
67	23 646	10 163	5 368	40 964
68	26 191	7 760	3 938	40 580
69	28 972	5 728	2 784	39 854
70	0,32 000	4 068	1 887	38 808
71	35 288	2 766	1 220	37 471
72	38 846	1 790	747	35 885
73	42 682	1 095	431	34 094
74	46 801	628	232	32 145
75	0,51 200	334	115	30 082
76	58 813	163	52	27 944
77	67 559	67	20	25 767
78	77 605	22	6	23 578
79	89 144	5	1	21 401
80	1	1	0	19 257

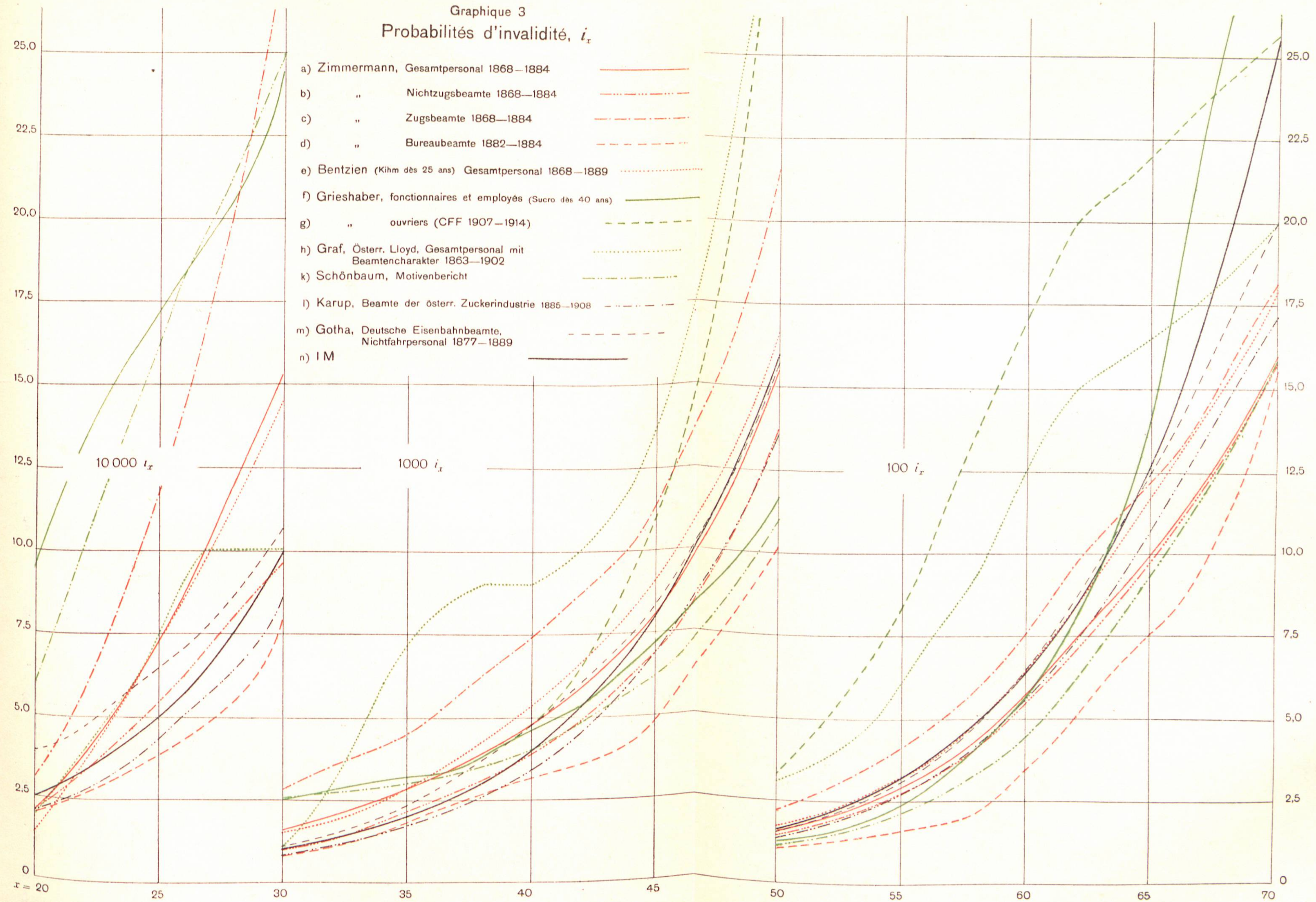


Graphique 1
Influence des taux d'invalidité sur les primes
$P\left(a^{ai}_{x:\overline{65-x}|}\right)$
$P\left({}_{65-x|}a^{a}_{x}\right)$
Total
a) i_x: Grieshaber, fonctionnaires et employés
b) i_x: Zimmermann, Bureaubeamte
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1,0
0,9
0,8
0,7
$x =$ 30 2 4 6 8 40 2 4 6 8 50 2 4 6 8 60

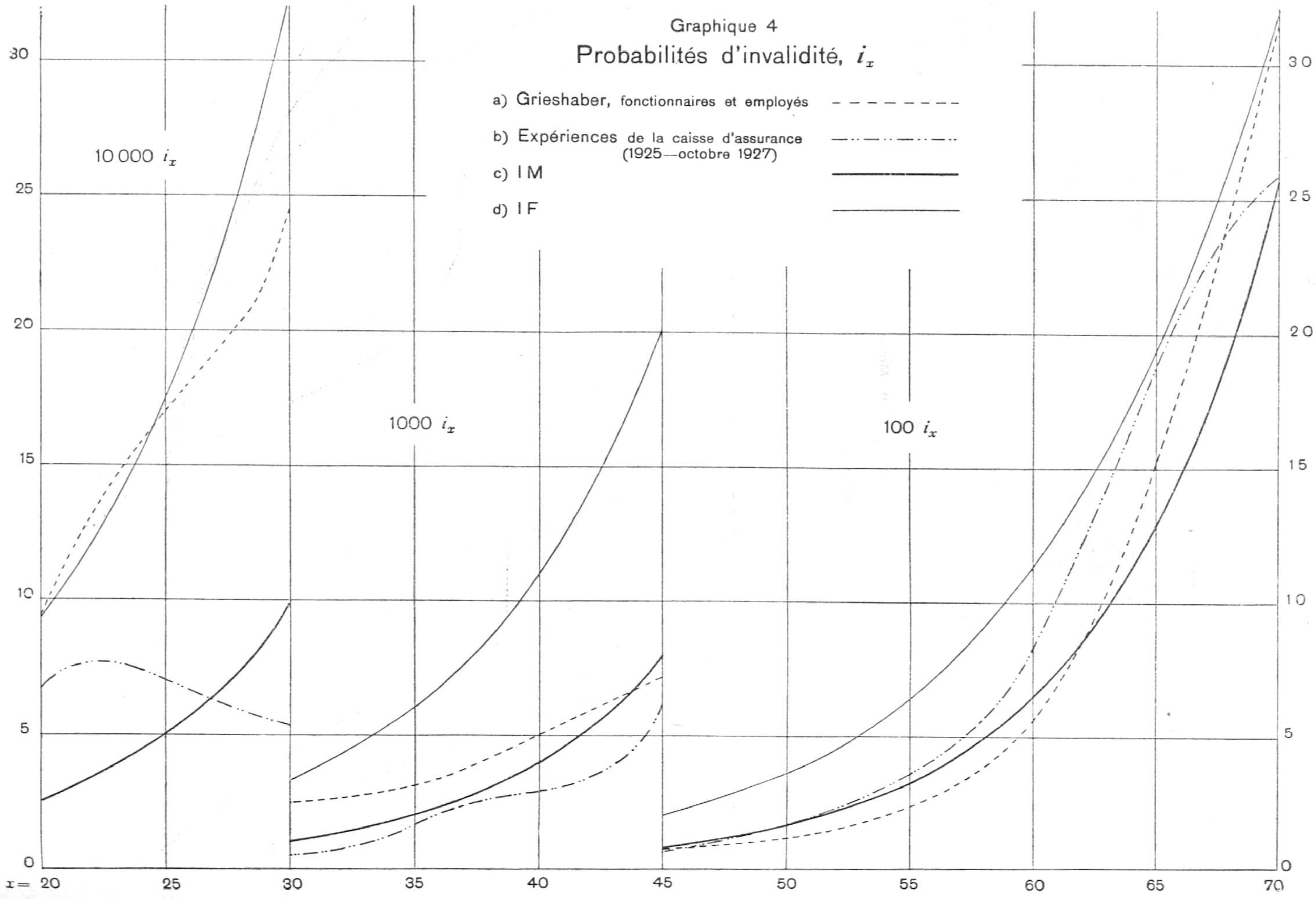
Graphique 2

Influence des taux d'invalidité sur les réserves mathématiques

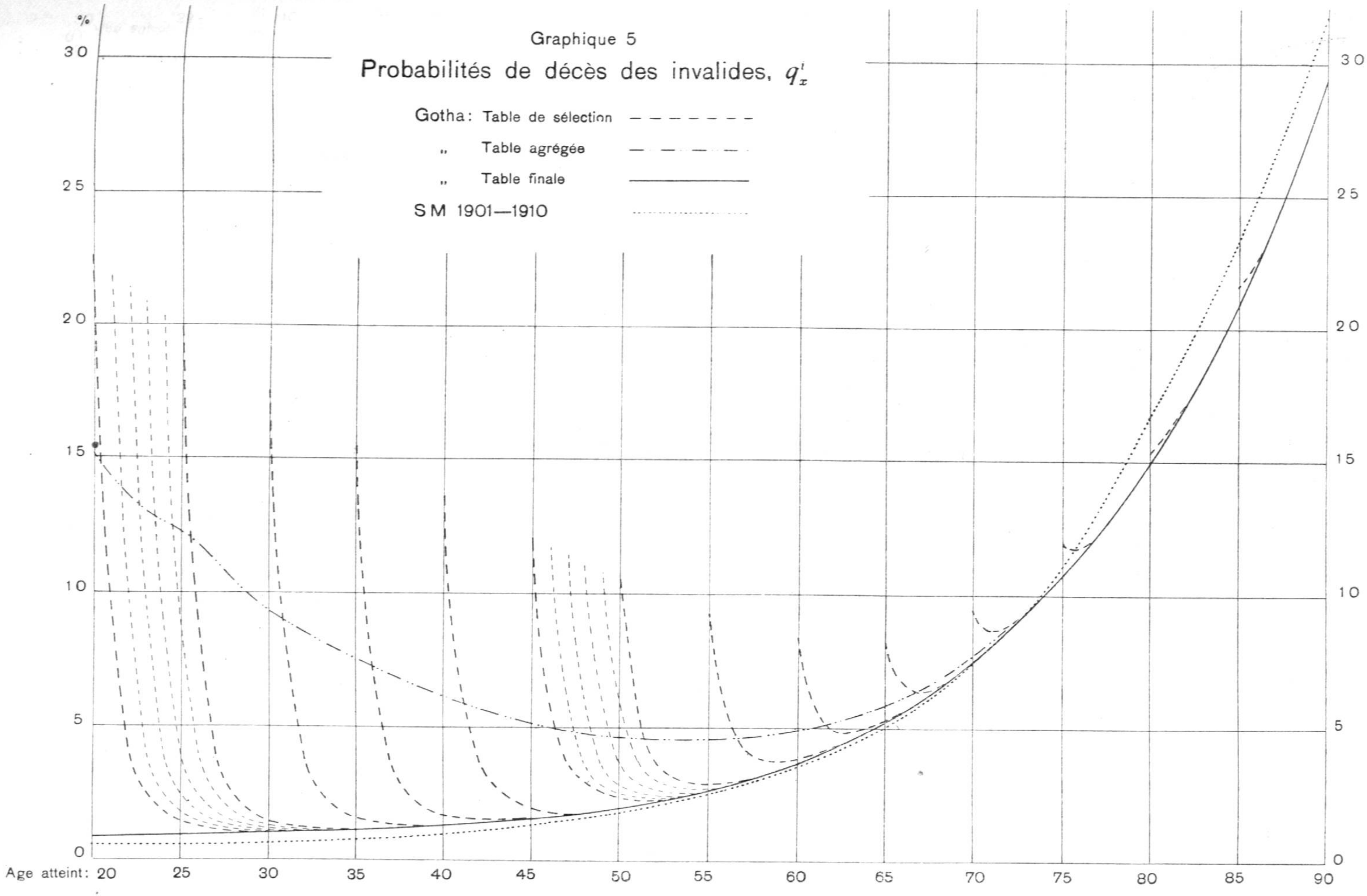


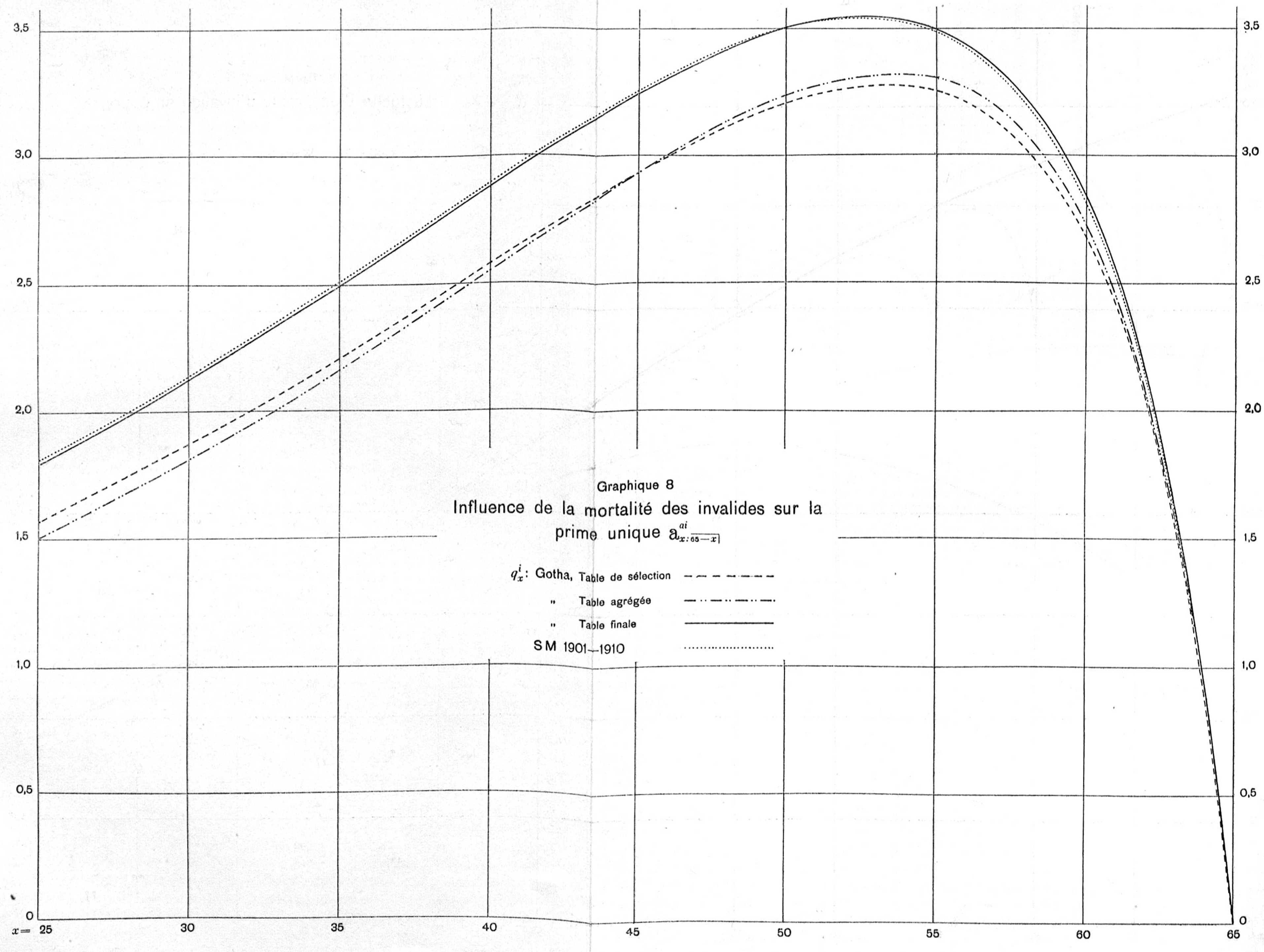


Graphique 3
Probabilités d'invalidité, i_x
a) Zimmermann, Gesamtpersonal 1868–1884
b) „ Nichtzugsbeamte 1868–1884
c) „ Zugsbeamte 1868–1884
d) „ Bureaubeamte 1882–1884
e) Bentzien (Kihm dès 25 ans) Gesamtpersonal 1868–1889
f) Grieshaber, fonctionnaires et employés (Sucro dès 40 ans)
g) „ ouvriers (CFF 1907–1914)
h) Graf, Österr. Lloyd, Gesamtpersonal mit Beamtencharakter 1863–1902
k) Schönbaum, Motivenbericht
l) Karup, Beamte der österr. Zuckerindustrie 1885–1908
m) Gotha, Deutsche Eisenbahnbeamte, Nichtfahrpersonal 1877–1889
n) I M
10 000 i_x
1000 i_x
100 i_x
25,0
22,5
20,0
17,5
15,0
12,5
10,0
7,5
5,0
2,5
0
x = 20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70



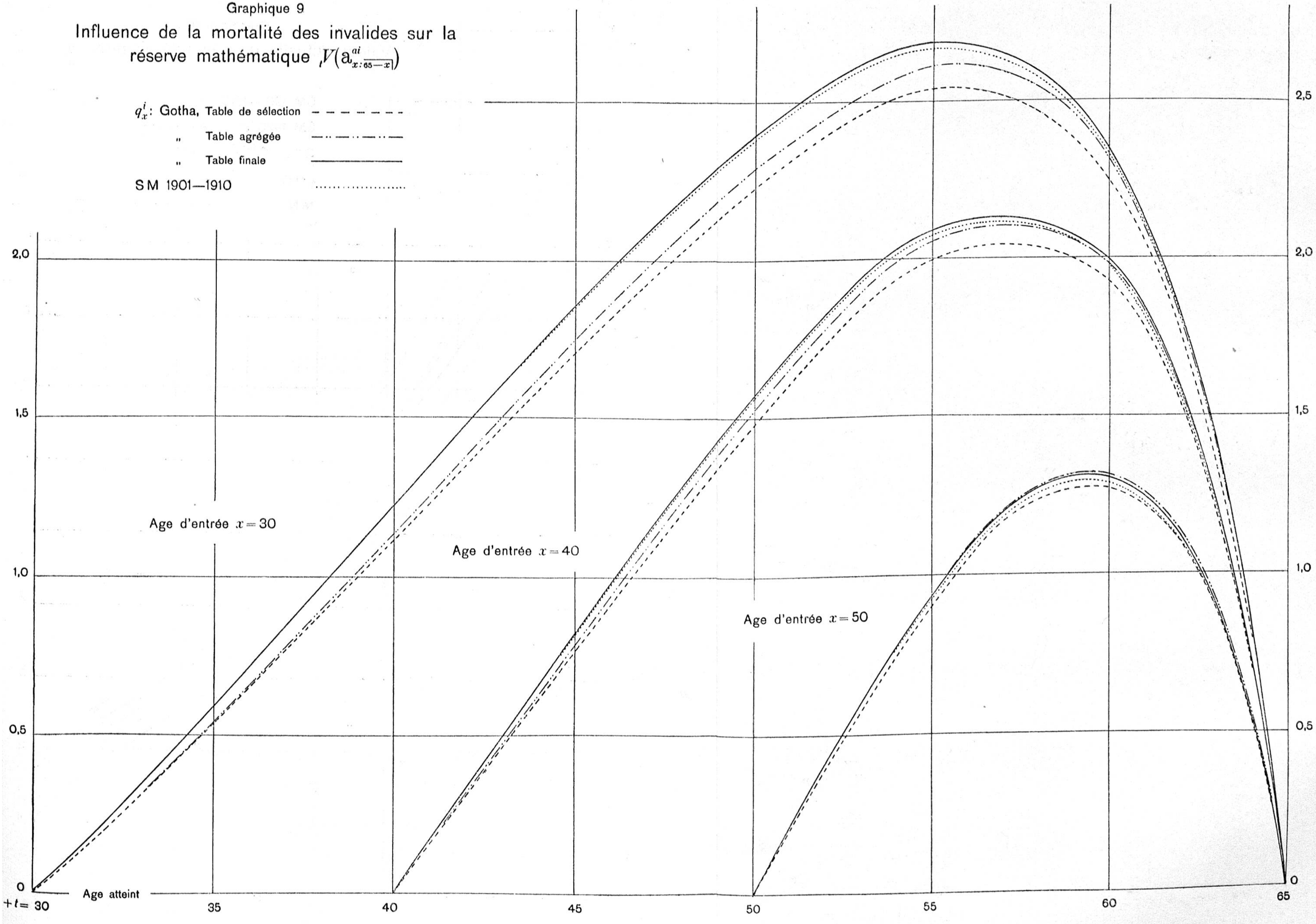
Graphique 4
Probabilités d'invalidité, i_x
a) Grieshaber, fonctionnaires et employés
b) Expériences de la caisse d'assurance (1925—octobre 1927)
c) IM
d) IF
10 000 i_x
1000 i_x
100 i_x
0
5
10
15
20
25
30
x = 20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70

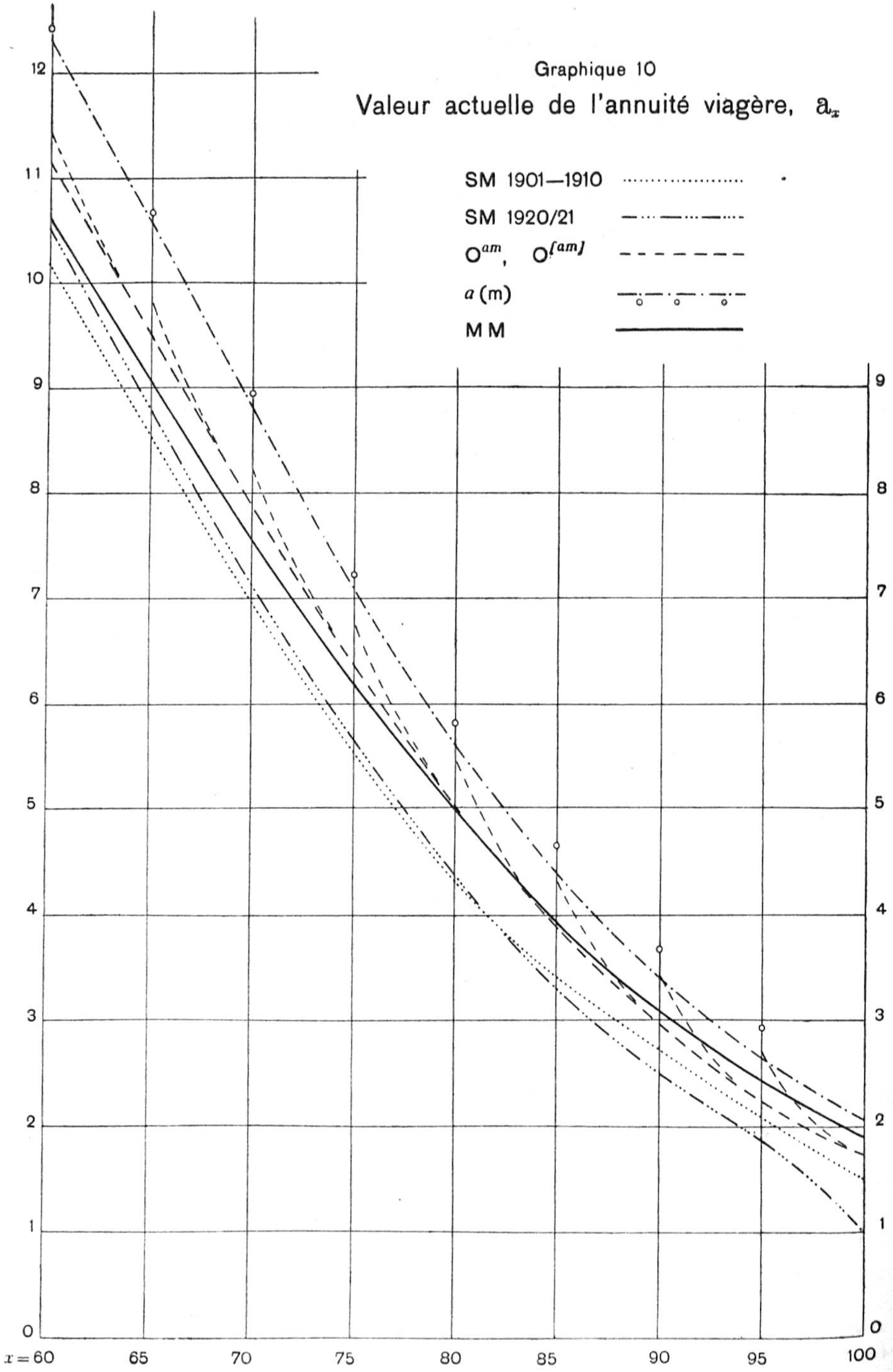

Graphique 5
Probabilités de décès des invalides, q'_x
Gotha: Table de sélection
" Table agrégée
" Table finale
SM 1901—1910
%
0
5
10
15
20
25
30
Age atteint: 20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90

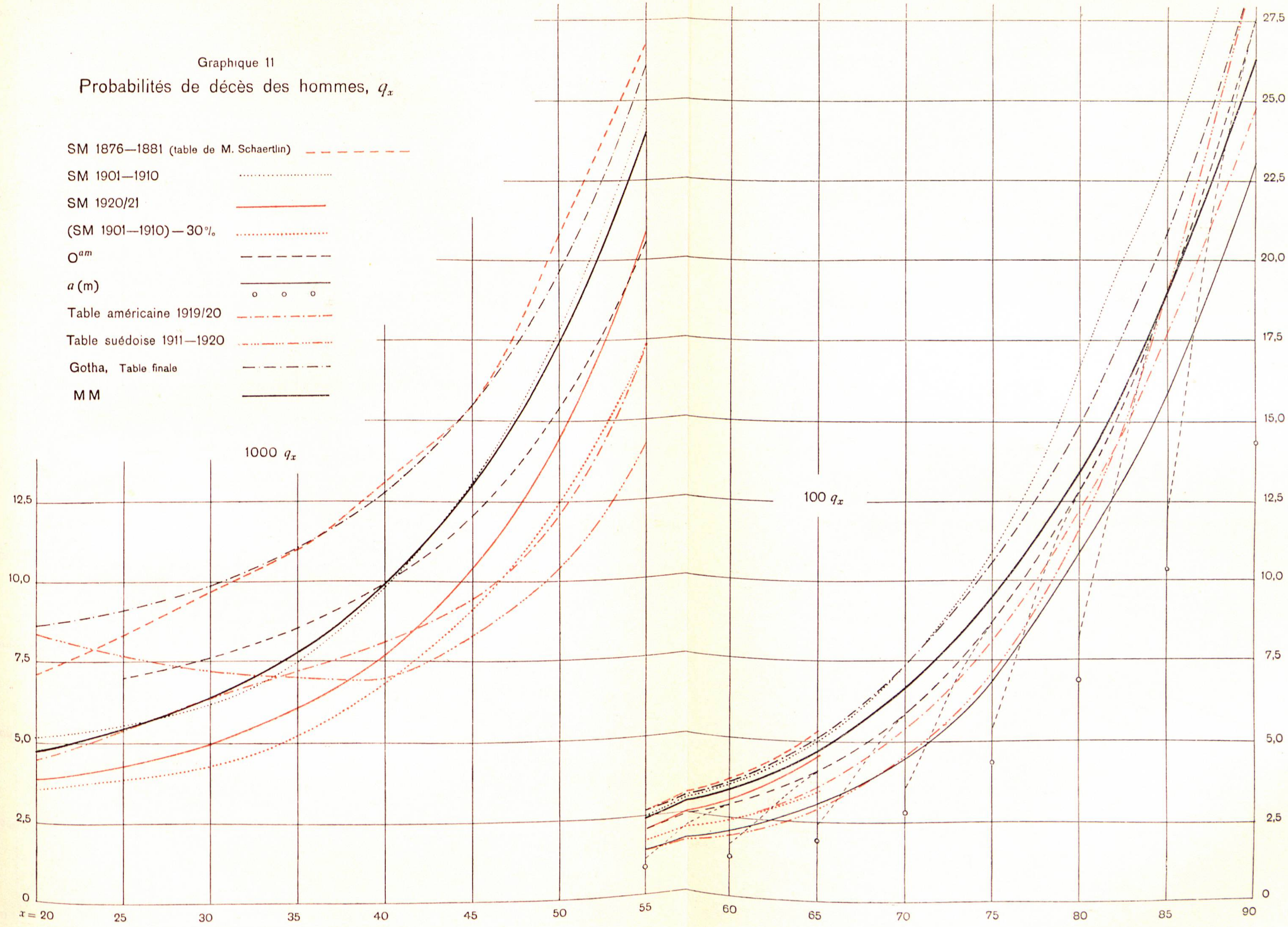

Graphique 8
Influence de la mortalité des invalides sur la prime unique $a^{ai}_{x:\overline{65-x|}}$
q^i_x: Gotha, Table de sélection
" Table agrégée
" Table finale
SM 1901–1910
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
x= 25
30
35
40
45
50
55
60
65

Graphique 9

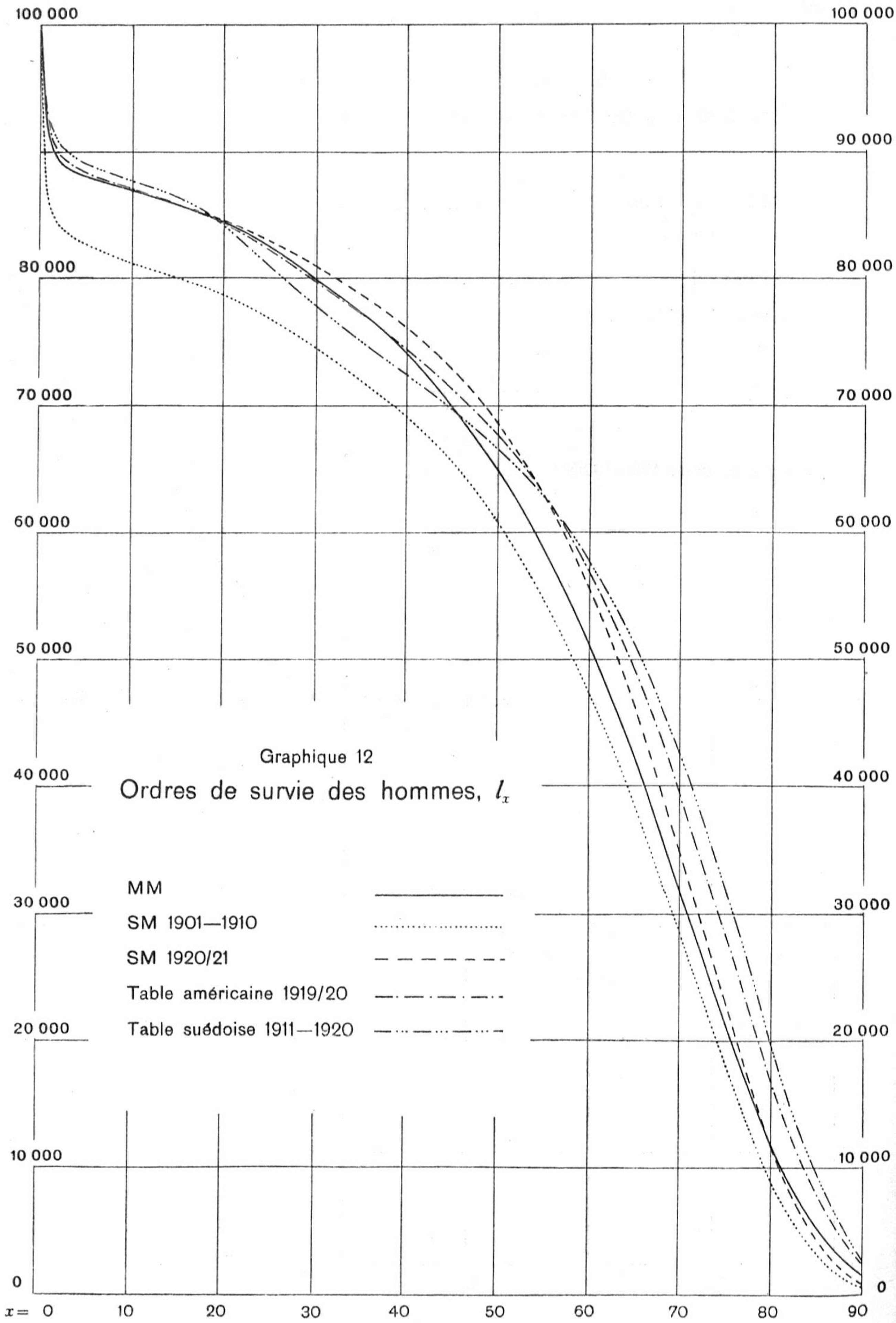
Influence de la mortalité des invalides sur la réserve mathématique ${}_tV(\mathrm{a}^{ai}_{x:\overline{65-x|}})$




Graphique 10
Valeur actuelle de l'annuité viagère, a_x
SM 1901—1910
SM 1920/21
O^{am}, $O^{[am]}$
a (m)
MM
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$x = 60$
65
70
75
80
85
90
95
100

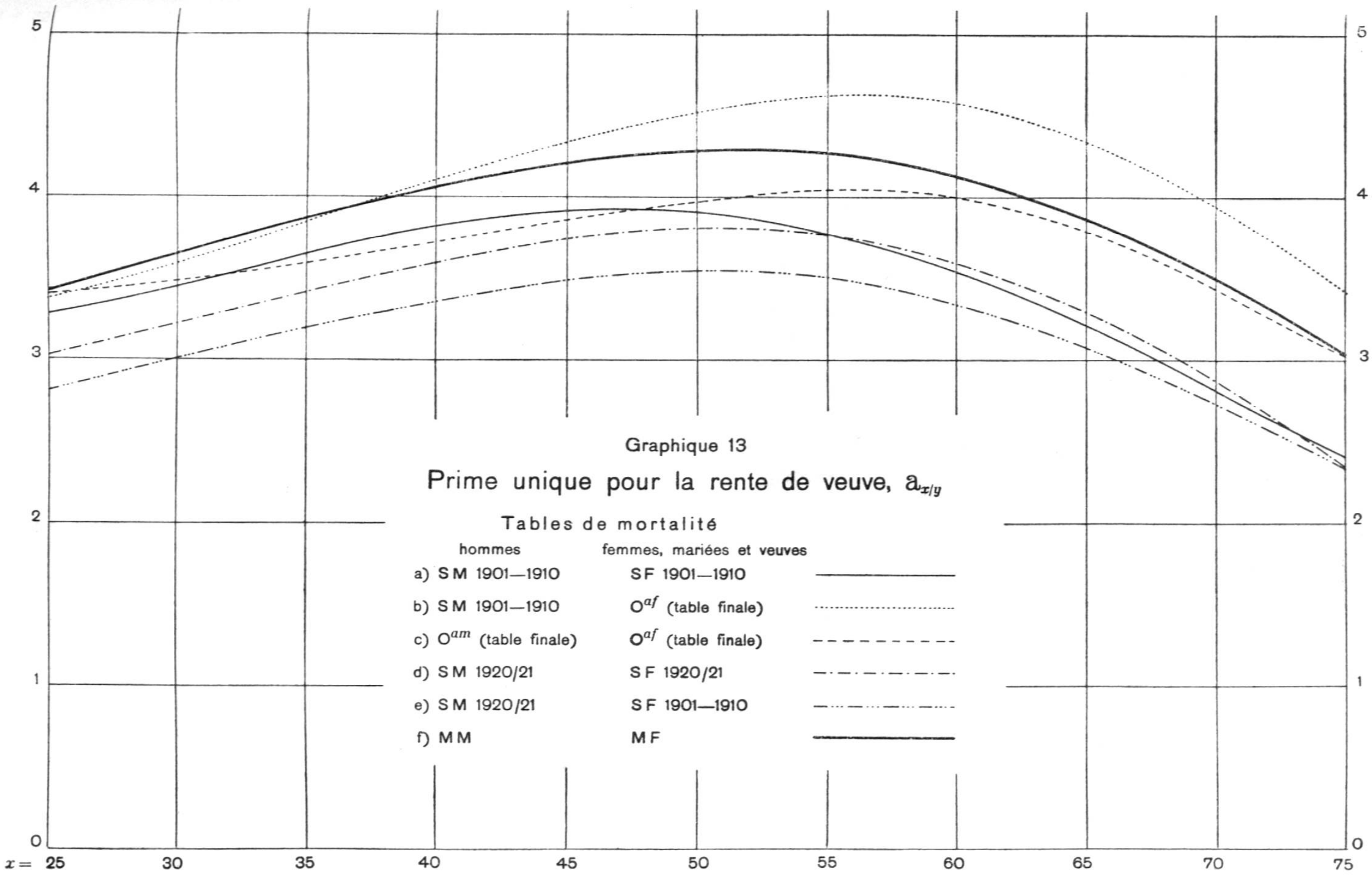


Graphique 11
Probabilités de décès des hommes, q_x
SM 1876—1881 (table de M. Schaertlin)
SM 1901—1910
SM 1920/21
(SM 1901—1910) — 30 %
O^{am}
a (m)
Table américaine 1919/20
Table suédoise 1911—1920
Gotha, Table finale
MM
1000 q_x
100 q_x
12,5
10,0
7,5
5,0
2,5
0
x = 20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
27,5
25,0
22,5
20,0
17,5
15,0
12,5
10,0
7,5
5,0
2,5
0



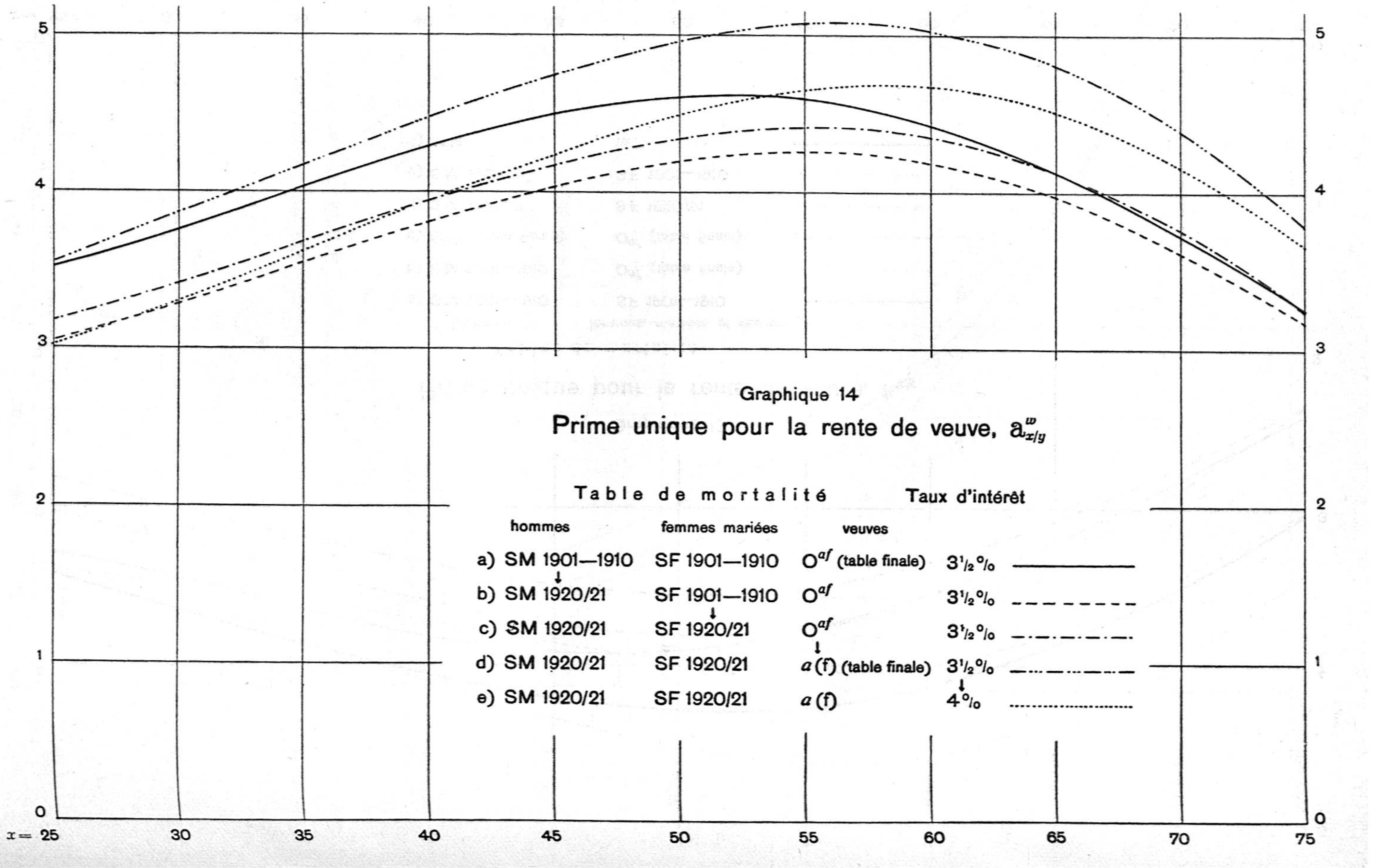
Graphique 12

Ordres de survie des hommes, l_x



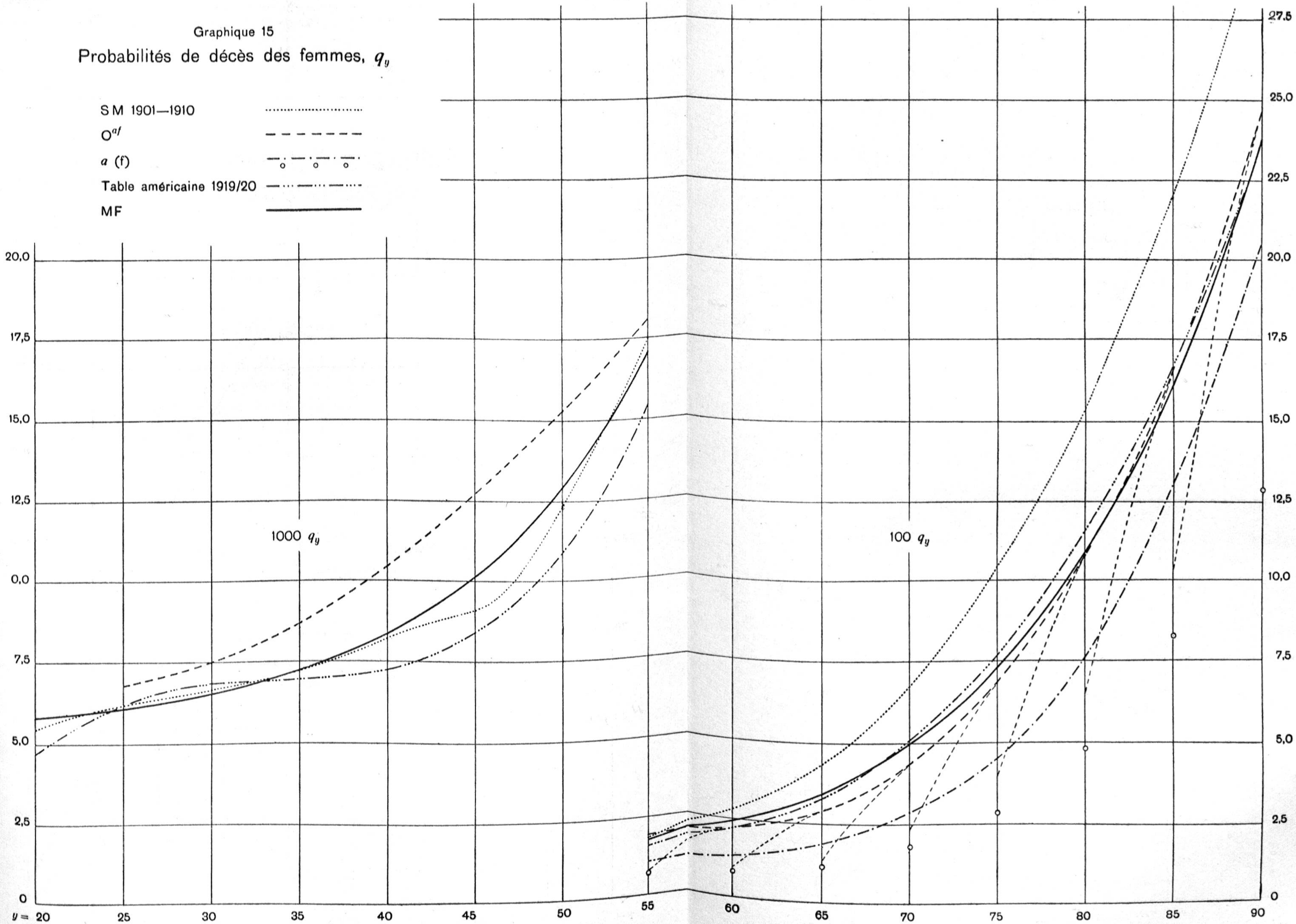
Graphique 13

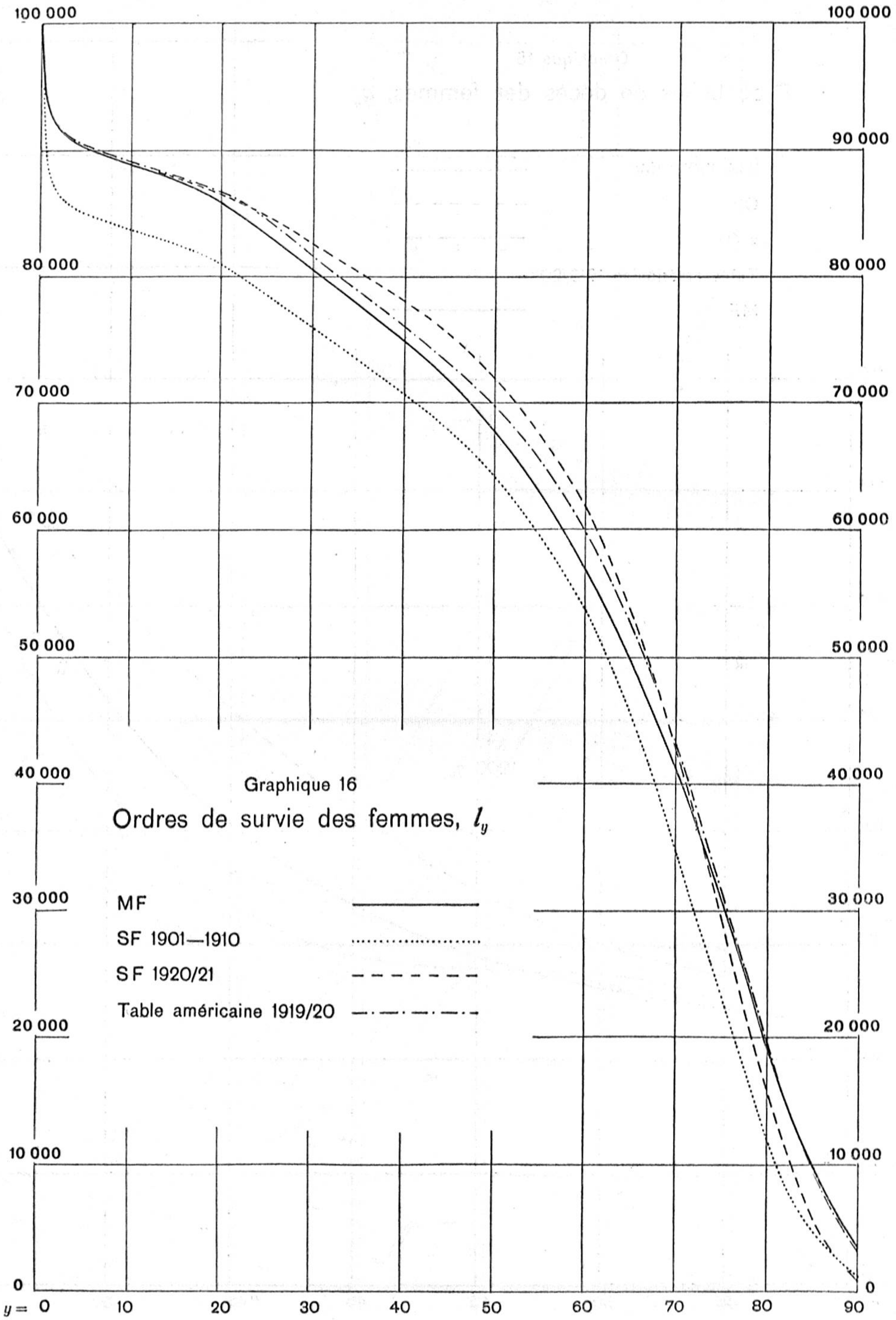
Prime unique pour la rente de veuve, $a_{x/y}$



Graphique 14

Prime unique pour la rente de veuve, $a^{w}_{x/y}$


Graphique 15
Probabilités de décès des femmes, q_y
S M 1901—1910
O^{af}
a (f)
Table américaine 1919/20
MF
1000 q_y
100 q_y
20,0
17,5
15,0
12,5
0,0
7,5
5,0
2,5
0
27,5
25,0
22,5
20,0
17,5
15,0
12,5
10,0
7,5
5,0
2,5
0
y = 20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90



100 000
90 000
80 000
70 000
60 000
50 000
40 000
30 000
20 000
10 000
0
y = 0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Graphique 16
Ordres de survie des femmes, l_y
MF
SF 1901—1910
SF 1920/21
Table américaine 1919/20