

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 24 (1929)

Artikel: Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen
Versicherungskasse

Autor: Wyss, Hans

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967448>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse.

Von Dr. **Hans Wyss**, Zürich.

- I. Die gegenwärtige Lage der eidgenössischen Versicherungskasse.
 - II. Zur Berechnung des Beharrungszustandes.
 - III. Die Entwicklung einer offenen Kasse.
 - IV. Die Entwicklung der Erneuerungszahl für eine offene Gesamtheit.
 - V. Die Entwicklung der Altersverteilung einer offenen Gesamtheit.
 - VI. Die Entwicklung der eidgenössischen Versicherungskasse zum Beharrungszustand.
-

Hat der Versicherungstechniker die Lage einer Versicherungskasse zu prüfen, so gibt ihm eine technische Bilanz Rechenschaft über die gegenwärtigen Kassenverhältnisse. *Diese Bilanz berücksichtigt freilich die künftigen Vorgänge innerhalb des im Bilanztermin versicherten Personenkreises, aber nicht die künftige Entwicklung der Kasse selbst. Zuweilen besitzt jedoch gerade die Frage nach der Entwicklungsrichtung der zu untersuchenden Versicherungseinrichtung eine besondere Bedeutung.

Periodisch wiederholte Bilanzierungen ergeben einige Punkte aus dieser Entwicklung. Es wird vielleicht festgestellt, dass die Belastung der Kasse vom ersten zum zweiten, zum dritten Jahre angewachsen ist, und es drängt sich sogleich die Frage auf, wie weit sich diese Entwicklung wohl fortsetzen mag. Dabei ist ja ohne weiteres einzusehen, dass ein solches Anwachsen nicht

bis ins Unermessliche anhalten kann und dass die Entwicklung einmal eine stationäre Lage, den Beharrungszustand, erreichen muss.

Die Versicherungstechnik gibt die Grundlagen, solche Entwicklungsgrenzen zu berechnen. Die nachstehenden Ausführungen möchten die praktische Auswertung und Darstellung der Grenzlage einer Versicherungskasse andeuten, um dann die Grenze mit der Entwicklung einzelner Vorgänge in vergleichende Beziehung zu setzen. Die Vergleichsbeispiele sind dem Materiale der eidgenössischen Versicherungskasse entnommen, so dass mit jener Mitteilung eine Darstellung der Lage dieser Kasse sowie ihrer erwartungsmässigen Entwicklung zum Beharrungszustand verbunden werden kann. Den Ausführungen sei deshalb eine knappe Schilderung des gegenwärtigen Standes der Versicherungskasse des eidgenössischen Personals vorausgeschickt.

I. Die gegenwärtige Lage der eidgenössischen Versicherungskasse.

Ein Bundesgesetz vom 30. September 1919 hat für die eidgenössischen Beamten, Angestellten und Arbeiter eine Versicherungskasse (E. V. K.) geschaffen, die auf Beginn des Jahres 1921 ihren Betrieb aufnahm. Sie versichert ihre Mitglieder gegen den Alters- und Invaliditätsfall, indem sie Renten vorsieht, welche in Abhängigkeit vom Dienstalter 36—70 Prozent der versicherten Besoldung betragen. Auch an die hinterlassene Ehefrau und an die Kinder unter 18 Jahren werden Renten ausgerichtet.

Als ordentlichen Beitrag hat der Versicherte 5, der Bund 7 Lohnprozent zu entrichten. Bei Besoldungserhöhungen fliessen 9 Monatsbeträge in die Kasse. Ausserdem sehen die Statuten einen ausserordentlichen

Bundesbeitrag zur Verzinsung und Tilgung des Fehlbetrages vor.

Bei der Gründung der Kasse wurde das gesamte aktive Personal unter uneingeschränkter Anrechnung der zurückgelegten Dienstjahre und ein Bestand von rentenberechtigten Rücktrittsgehaltsbezügern in die Kasse aufgenommen. Dadurch wurde der Kasse schon bei ihrer Gründung eine gewaltige Last überbunden, der keine entsprechende Rücklagen gegenübergestellt werden konnten. Aus diesem Umstande wies die Kasse bei ihrer Eröffnung ein Eintrittsdefizit von rund 243 Millionen Franken auf. Der Bund hat damals für dieses Defizit eine gewisse Garantie übernommen. Die Verzinsung des Fehlbetrages wurde aber vorerst aufgeschoben und setzte im Jahre 1924 mit einem Zinszuschuss von 1 % der Lohnsumme ein, wurde im Jahre 1925 und 1926 um je ein weiteres Lohnprozent vermehrt und 1927 auf 3 % des Fehlbetrages erhöht.

Infolge dieser ungenügenden Verzinsung ist das Defizit seit Eröffnung der Kasse alljährlich angewachsen. Seine Entwicklung wurde ausserdem während der ersten vier Jahre ungünstig beeinflusst durch sehr hohe Invaliditätsziffern, die auf den von den Nachkriegsverhältnissen verlangten Personalabbau zurückzuführen sind.

Der Stand der Kasse auf Ende 1928 ist der folgende:

Gesamter Bestand an Aktiven: 26 114 Personen.

Versicherte Lohnsumme: Fr. 137 149 126.

Rentenbezüger (Invalide und Hinterbliebene): 7219 Personen.

mit einem Rentenanspruch auf: Fr. 17 526 514.

Die Bilanz auf 31. Dezember 1928 weist folgende Posten auf:

I. Entlastung der Kasse:

| | |
|----------------------------|---------------------|
| Fonds | Fr. 95 877 242. 05 |
| Barwert der Beiträge . . . | » 184 381 272. — |
| Gesamtentlastung | Fr. 280 258 514. 05 |

II. Belastung der Kasse:

| | |
|--|--------------------|
| Anwartschaften der Aktiven | Fr. 421 376 836. — |
| Deckungskapital der laufenden Renten | » 141 448 704. — |
| Anwartschaften der Invaliden auf Hinterbliebenenrenten | » 17 511 502. — |
| Gesamtbelastung | Fr. 580 337 042. — |

Die Bilanz weist also einen Fehlbetrag aus in der Höhe von:

$$\text{Fr. 580 337 042. —} \quad \text{— Fr. 280 258 514. 05 =} \\ \text{Fr. 300 078 527. 95}$$

Die Existenz und die Höhe dieses Fehlbetrages haben zu verschiedenen Diskussionen Anlass gegeben. Es ist hier nicht der Ort, darüber zu berichten. Hingegen kann erwähnt werden, dass auf ein Postulat des Nationalrates hin die Lage der Kasse genau studiert wurde von den Herren Prof. Moser, Dr. Schaertlin und Prof. Dr. Dumas, deren Befund im Drucke erschienen ist. Ihr Gutachten kommt zum Schlusse, dass die Höhe des Fehlbetrages nicht etwa zu pessimistisch angegeben sei. Aus ihren eingehenden Untersuchungen möchte ich nur einen einzigen Punkt hervorheben, der auch für die Leiter privater Gruppenversicherungsgeschäfte von Interesse sein dürfte.

Zur Prüfung der Rechnungsgrundlagen wurde aus den eigenen Kassenerfahrungen eine Invaliditätswahrscheinlichkeit abgeleitet. Dazu konnten nur die Ergeb-

nisse der normalen Betriebsjahre 1925—1927 herangezogen werden. Diese Beobachtungen wurden verarbeitet und ausgeglichen. Ihre Gegenüberstellung mit den Voraussetzungen der Rechnungsgrundlagen, die der Figur 1 zu entnehmen ist, ergibt für jüngere Alter (bis zum 45. Jahre) eine geringere Invalidität als die vorausgesetzte, für höhere Alter aber eine grössere.

Gestützt auf die eigenen Erfahrungen wurde eine vollständige Tafel aufgestellt, so dass auf Ende 1927 eine Bilanz nach eigenen Rechnungsgrundlagen berechnet werden konnte. Die Auswertung ergab eine Erhöhung des Fehlbetrages um 30 Millionen Franken oder rund 10 %. Es zeigt sich also, dass die ungünstige Abweichung der Invalidität im höheren Alter das Rechnungsergebnis stärker beeinflusst als die Verminderung der Invaliditäts-häufigkeit in jüngeren Altern.

Was aber besonders erwähnenswert scheint, ist die Beziehung dieser Feststellung zu den Ergebnissen der alljährlich durchgeführten Gewinn- und Verlustberechnungen. Der Ausweis ergab nämlich für die Jahre, welche zur Aufstellung der neuen Grundlagen herangezogen wurden, also für:

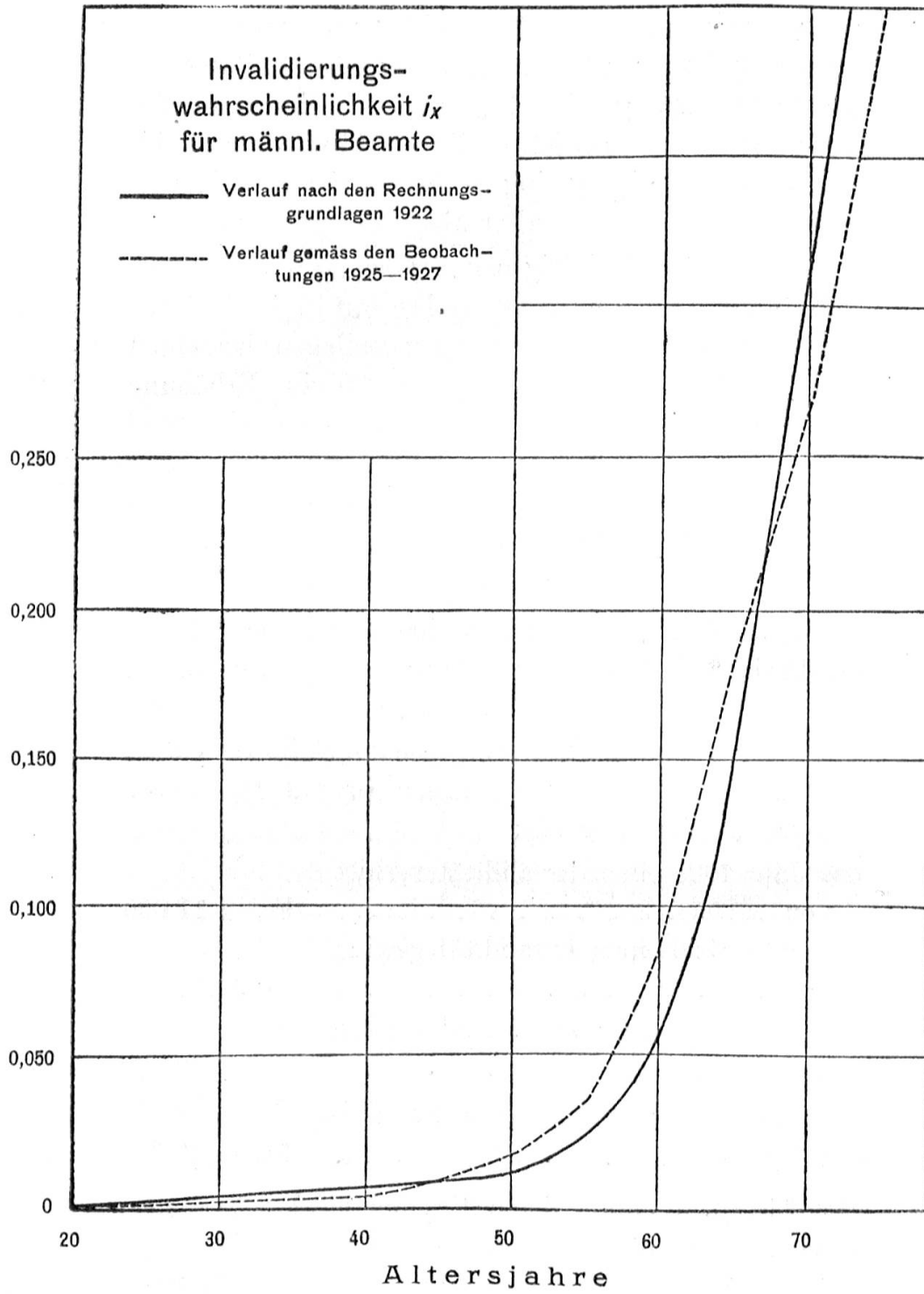
| | |
|---|---------------|
| das Jahr 1925 einen Invaliditätsverlust | |
| von | Fr. 11 000 |
| das Jahr 1926 einen Invaliditätsgewinn | |
| von | » 1 337 000 |
| das Jahr 1927 einen Invaliditätsgewinn | |
| von | » 93 000 |
| die Epoche 1925—1927 einen Invalidi- | |
| tätsgewinn von | Fr. 1 419 000 |

Dieselben Jahre, deren Ergebnisse eine Verschärfung der Invaliditätsvoraussetzungen und eine Erhöhung der Reserven verlangen, haben Invaliditäts-

i_x

E V K

Figur 1



gewinne gebracht. Um diese, auf den ersten Blick etwas paradox erscheinende Tatsache zu erklären, muss die Altersverteilung der Versicherten berücksichtigt werden. Weist der Bestand verhältnismässig viele junge Mitglieder auf (wie es für den Bestand der E. V. K. zutrifft), so erhalten die günstigen Abweichungen des Invaliditätsverlaufes in jüngeren Altern vorerst ein erhöhtes Gewicht und führen zu momentanen Gewinnen. Mit der Zeit verschiebt sich aber innerhalb des Bestandes das Verhältnis der Altersbesetzung. Nach einer Reihe von Jahren werden die höheren Altersgruppen eine verhältnismässig starke Besetzung aufweisen. Dadurch wird dann die Bedeutung der ungünstigen Abweichungen von den Voraussetzungen verstärkt, und die Kasse wird Verluste erleiden. Und zwar werden im Falle der eidgenössischen Versicherungskasse die späteren Verluste die anfänglichen Gewinne im Barwerte um 30 Millionen Franken übertreffen.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass aus dem gegenwärtigen Ergebnis einer Rechnungsperiode nicht ohne weiteres auf die Gültigkeit der Rechnungsgrundlagen geschlossen werden darf. Diese Beobachtung bei der E. V. K. weist auf eine Gefahr hin, von welcher die Gruppenversicherung mit Gewinnbeteiligung bedroht wird:

Die meisten Gruppen sind heute noch sehr jung. Und es wird für viele zutreffen, dass die jüngeren Altersstufen verhältnismässig stark besetzt sind. Durchläuft nun eine solche Gruppe eine ähnliche Entwicklung, wie man sie für die E. V. K. feststellte, dann wird sie anfänglich jedes Jahr einen Gewinn erzielen, der an die Versicherten ausgerichtet wird. Im Laufe der Zeit werden aber infolge der Verschiebung des Invaliditätsverlaufes und der Altersverteilung die Gewinne von

Verlusten abgelöst. Die Versicherungsanstalt hat nun aber die anfänglichen Überschüsse bereits verteilt und kann sie zum Ausgleiche nicht mehr heranziehen.

Dieses Ergebnis der Prüfung der E. V. K. wurde erwähnt, um zu zeigen, dass in der Verwendung der anfänglichen Betriebsgewinne in der Gruppenversicherung besondere Vorsicht geboten ist.

II. Zur Berechnung des Beharrungszustandes.

A. Grundlegendes.

Im 21. Hefte der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker hat Prof. Ch. Moser eine allgemeine Darstellung des Beharrungszustandes für eine sich erneuernde Gesamtheit bekanntgegeben. Als geschlossene Gesamtheit wird ein Personenbestand bezeichnet, der durch Zugang nicht ergänzt wird und der nur infolge des natürlichen Ausscheidens der Mitglieder abnehmen kann; die offene sich erneuernde Gesamtheit aber ergänzt ihren Bestand immer wieder durch Neuzugänge. Zwischen den Vorgängen in der geschlossenen Gesamtheit und den entsprechenden in der offenen bestehen nun bestimmte Zusammenhänge, die formelmässig dargestellt werden können. Als Grundlage zu nachfolgenden Untersuchungen wird die Mosersche Beziehung dienen, welche für den Beharrungszustand irgendeinen Vorgang (Y) in der offenen, sich erneuernden Gesamtheit zurückführt auf den entsprechenden bekannten Vorgang (y) in der geschlossenen Gesamtheit. Mathematisch formuliert lautet diese allgemeine Mosersche Beziehung im Beharrungszustand (B. Z.):

$$H \cdot Y(\infty) = a H \int_0^{\infty} y(t) dt$$

Dabei bedeutet:

H = konstanter Bestand der offenen Gesamtheit;

a = die im B. Z. konstant gewordene Erneuerungsfunktion;

∞ = Index zur Kennzeichnung des B. Z.

H könnte aus der Gleichung weggekürzt werden, d. h. die Beziehung gilt unabhängig vom Umfang der Gesamtheit. Soll aber, wie es in unserer Absicht liegt, die Darstellung einer bestimmten Kasse erreicht werden, so scheint es praktischer, die Ergebnisse gleich auf deren Bestand zu beziehen.

Zur Auswertung benützen wir die Rechnungsgrundlagen für Beamte der eidgenössischen Versicherungskasse ¹⁾. Diese technischen Voraussetzungen müssen ergänzt werden durch die Annahme eines mittleren Eintrittsalters. Den Beobachtungen im Bestande der E. V. K. gemäss konnte dieses auf $z = 25$ angesetzt werden.

Vorerst führen wir die Untersuchung für einen schematischen Bestand durch. Im Beharrungszustand bleibt nicht bloss der gesamte Bestand konstant, sondern auch der jährliche Zugang zum Bestand. Erfolgt der Zutritt im einheitlichen Alter von z Jahren, dann sollen jährlich l_z^a Personen zum Bestand treten. Diese Generation vermindert sich im Laufe der Jahre gemäss der geltenden Sterblichkeit und Invalidität, so dass sie nach $(x-z)$ Jahren noch l_x^a Mitglieder umfasst. Da aber alljährlich eine Generation von l_z^a Personen dem Aktivbestand beitrifft, umfasst der neue ergänzte Gesamtbestand immer wieder

¹⁾ Dr. H. Grieshaber, Rechnungsgrundlagen der Versicherungskasse für die eidgenössischen Beamten, Angestellten und Arbeiter. Bern 1922.

$$H = \sum_{x=z}^{\omega} l_x^a$$

Mitglieder, deren Altersverteilung der zugrunde gelegten Aktivitätsordnung entspricht. Schematisch können wir als l_x^a die Zahl der Aktiven gemäss der Grieshaberschen Ordnung für Beamte (vgl. Rechnungsgrundlagen der E. V. K., Tab. 1) einsetzen. Um das Zahlenmaterial etwas übersichtlicher zu gestalten, kürzen wir die Rechnungsergebnisse vor ihrer Wiedergabe jeweils durch 100. Somit ergibt sich für den Bestand der Gesamtheit der schematische Ansatz:

$$H = \sum_{x=25}^{\omega} l_x^a = 324\ 627$$

Auf diese Voraussetzungen werden sich die nachfolgenden Berechnungen stützen. In der Zahlentabelle am Schlusse dieses Abschnittes sind die einzelnen Rechnungsergebnisse für die verschiedenen Personalbestände im B. Z. zusammengestellt. Die Durchführung der Rechnung wird nachstehend kurz skizziert.

B. Die Bestände im B. Z.

1. *Die jährliche Erneuerungszahl.* Es wurde bereits festgestellt, dass die Erneuerungsfunktion im B. Z. zur Konstanten wird. Die Erneuerungszahl des Bestandes H wird somit dargestellt durch:

$$a H$$

Als Vorgang fassen wir die Bestandesänderung der Gesamtheit ins Auge. Der Vorgang (y) in der geschlossenen Gesamtheit wird als Abnahme des Bestandes charakterisiert durch die Wahrscheinlichkeit, dem Aktiven-

bestande t Jahre nach dem Eintritte noch anzugehören, so dass für diesen Fall zu ersetzen ist: $y(t) \rightarrow p_z^a(t)$. Im B. Z. ist der Bestand der offenen Gesamtheit keiner Änderung unterworfen, weshalb $Y(\infty) = 1$ zu setzen ist.

Die Fundamentalgleichung geht dann über in:

$$H = \alpha H \int_{25}^{\infty} p_{25}^a(t) dt,$$

woraus die Erneuerungszahl bestimmt wird zu:

$$\alpha H = \frac{l_{25}^a H}{\int_{25}^{\infty} l_{25}^a p_{25}^a(t) dt}$$

Wird noch berücksichtigt, dass an Stelle von $l_{25}^a \cdot p_{25}^a(t)$ gesetzt werden kann l_{25+t}^a , und wird das Integral als Gliederungsdarstellung ¹⁾ durch eine näherungsweise Summation ausgewertet, dann ergibt sich als Erneuerungszahl:

$$\alpha H = \frac{l_{25}^a H}{\sum_{x=25}^{\omega} l_x^a}$$

Da aber $H = \sum_{x=25}^{\omega} l_x^a$ gesetzt wurde, vereinfacht sich die Beziehung weiter zu:

$$\alpha H = l_{25}^a$$

Für unseren Bestand von 324 627 Aktiven wird die jährliche Zahl der Eintritte im Z. B. somit zu:

$$\alpha H = 9791$$

¹⁾ Über die Darstellung der Integration einer Gliederungsdarstellung vergleiche die Bemerkungen «Zur Berechnung von Durchschnittswerten», Heft 3 der Zeitschrift für schweizerische Statistik. Bern, 1928.

Die im Alter 25 stattfindende Erneuerung beträgt allgemein für die Grieshabersche Tafel:

$$\alpha = 0.03016 = \text{rund } 30 \text{ ‰}$$

2. *Die Zahl der jährlichen Sterbefälle von Aktiven.* Als Vorgang wird das Absterben untersucht. In der geschlossenen Gesamtheit ist diese Entwicklung nach den Rechnungsgrundlagen bekannt, so dass ersetzt werden kann:

$$y(t) \rightarrow q^a(t)$$

Die Zahl der im B. Z. aus der offenen Gesamtheit H jährlich hervorgehenden Todesfälle kann gemäss der Fundamentalgleichung berechnet werden zu:

$$H T(\infty) = \alpha H \int_0^{\infty} q^a(t) dt$$

Dabei bedeutet:

$$q^a(t) = \frac{l_{25+t}^a q_{25+t}^a}{l_{25}^a}$$

und die numerische Integration führt zu:

$$H T(\infty) = \sum_{t=0}^{\omega} l_{25+t}^a q_{25+t}^a$$

Die Auswertung ergibt als Zahl der jährlichen Todesfälle im Aktivenbestande:

$$\underline{H T(\infty) = 3077}$$

3. *Die Zahl der jährlichen Invalidierungen* wird in ganz ähnlicher Weise berechnet. Als Vorgang in der geschlossenen Gesamtheit tritt auf:

$$y(t) \rightarrow i(t)$$

so dass die Fundamentalgleichung übergeht in:

$$H I (\infty) = \alpha H \int_0^{\infty} i (t) dt$$

Zur Auswertung dient die umgeformte Beziehung:

$$H I (\infty) = \frac{\alpha H}{l_{25}^a} \sum_{t=0}^{\omega} l_{25+t}^a i_{25+t}$$

Die Zahl der jährlichen Invalidierungen ergibt sich daraus als:

$$\underline{H I (\infty) = 6714}$$

Der gesamte jährliche Abgang aus dem Aktivenbestande beträgt also:

$$H T (\infty) + H I (\infty) = 3077 + 6714 = 9791$$

und stimmt mit dem jährlichen Zuwachs überein.

Aus der Rechnung geht hervor, dass sich für den gesamten Aktivenbestand die Sterblichkeitsquote auf 9,5 ‰ und die Invalidierungsquote auf 20,7 ‰ beziffert.

4. Der Invalidenbestand. Als Vorgang wird die Entwicklung des Invalidenbestandes in Betracht gezogen. Bezeichnen wir diese Entwicklung für die geschlossene Gesamtheit mit $j (t)$ und für die offene mit $J (t)$, dann wird der Zusammenhang durch die Grundgleichung folgendermassen hergestellt:

$$H J (\infty) = \alpha H \int_0^{\infty} j (t) dt$$

Nun gilt es aber vorerst die Funktion $j (t)$ zu bestimmen.

Die Generation l_{25}^a tritt zur Zeit 0 als geschlossene Gesamtheit auf. Zu dieser Zeit sind noch keine Invaliden vorhanden, so dass wir setzen können:

$$l_{25}^a j(0) = 0$$

In der Mitte des ersten Jahres sind $l_{25}^a i_{25}$ Invalide entstanden, so dass auf Ende des Jahres, zur Zeit (1), ein Bestand vorhanden ist von:

$$l_{25}^a j(1) = l_{25}^a i_{25} (1 - \frac{1}{2} q_{25}^i)$$

Im zweiten Jahre entstehen $l_{26}^a i_{26}$ Invalide, wovon $l_{26}^a i_{26} (1 - \frac{1}{2} q_{26}^i)$ das Jahresende erleben. Vom letztjährigen Bestande sind noch $l_{25}^a j(1) p_{26}^i$ Invalide vorhanden. Zur Zeit (2) beträgt also der Gesamtbestand:

$$l_{25}^a j(2) = l_{26}^a i_{26} (1 - \frac{1}{2} q_{26}^i) + l_{25}^a j(1) p_{26}^i$$

Aus der Fortsetzung dieser Überlegung lässt sich sofort die Rekursionsbeziehung erkennen:

$$l_{25}^a j(t+1) = l_{25+t}^a i_{25+t} (1 - \frac{1}{2} q_{25+t}^i) + l_{25}^a j(t) p_{25+t}^i$$

Aus der Entwicklung für $l_{25}^a j(t)$ ist ersichtlich, dass der Invalidenbestand der offenen Kasse der Schaertlinschen Gesamtheit der Invaliden entspricht. Ein Vergleich zeigt nämlich, dass der Ausdruck $l_{25}^a j(t)$ übereinstimmt mit dem Symbol $l_{\omega+t}^a$ in Schaertlins Abhandlung über die Invaliditätsversicherung ¹⁾.

Mit Hilfe des nunmehr bekannten Vorganges $j(t)$ kann der Invalidenbestand der offenen Kasse berechnet werden nach der angenäherten Beziehung:

$$H J(\infty) = a H \sum_{t=0}^{\omega} j(t)$$

Die Auswertung ergibt für den B. Z. einen Invalidenbestand von 85 326 Personen, das sind 26,3 % des Aktivenbestandes.

¹⁾ G. Schaertlin, Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung. Heft 1 der Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker (Bern 1906).

5. Der Witwenbestand lässt sich in ganz analoger Weise berechnen nach der Grundgleichung:

$$H W (\infty) = \alpha H \int_0^{\infty} w (t) dt$$

Dabei setzt sich der Bestand der Witwen in der offenen Gesamtheit zusammen aus den Überlebenden des vorjährigen Bestandes und den durch Todesfälle von Aktiven und Invaliden neuentstehenden Witwen. In Berücksichtigung der Voraussetzungen über die Altersdifferenz der Ehegatten kann also die Rekursionsformel aufgestellt werden:

$$l_{25}^a w (t+1) = (l_{25+x/25+t}^a q_{25+x}^a + l_{25}^a j (t) q_{25+x/25+t}^i) \cdot \vartheta_{25+x+1/2/25+t} (1 - 1/2 q_{25+t}^w) + l_{25}^a w (t) p_{25+t}^w$$

Die Auswertung dieser Beziehungen ergibt für unser Beispiel im B. Z. einen Bestand von 100 910 Witwen.

6. *Der Bestand der Waisen* bis zum 18. Altersjahre kann in ähnlicher Rechnung ermittelt werden und ergibt sich zu 26 713 Rentenbezügern.

7. *Der Einfluss der Altersrücktritte.* Sieht die Organisation der Kasse auch die Ausrichtung einer Altersrente vor, die von einem gewissen Rücktrittsalter hinweg beansprucht werden kann, so tritt neben die Gesamtheiten der Aktiven und der Invaliden als dritte jene der Altersrentner. Dadurch wird das Verhältnis zwischen dem aktiven, prämienpflichtigen Bestande und dem rentenberechtigten verschoben. Und zwar wird die Verschiebung um so grösser, je tiefer das Rücktrittsalter angesetzt ist. Der Aktivenbestand H wird nämlich bei Berücksichtigung einer Altersgrenze (a) dargestellt durch:

$$H = \sum_{x=z}^{a-1} l_x^a$$

Der Bestand der Altersrentner ergibt sich dann als:

$$A = \sum_{x=a}^{\omega} l_x^a$$

Durch die Gewährung eines Rücktrittsrechtes wird die jährliche Zahl der aus dem Aktivenbestande Ausscheidenden heraufgesetzt, so dass auch die Erneuerungszahl entsprechend grösser werden muss, gemäss der Beziehung:

$$\alpha = \frac{l_{25}^a}{\sum_{x=a}^{a-1} l_x^a}$$

Die Ergebnisse der Auswertung sind der nachstehenden Aufstellung zu entnehmen:

| Rück- tritts- alter a | Aktive | Alte | Invalide | Rentner in % der Aktiven | Erneue- rung in % |
|----------------------------------|---------|-------|----------|-----------------------------------|-------------------------|
| ω | 324 627 | 0 | 85 326 | 26,3 | 3,02 |
| 70 | 323 111 | 1516 | 85 326 | 26,9 | 3,03 |
| 65 | 313 816 | 10811 | 85 326 | 30,6 | 3,12 |
| 60 | 292 538 | 32089 | 85 326 | 40,1 | 3,35 |
| 55 | 262 145 | 62482 | 85 326 | 56,4 | 3,74 |
| 50 | 225 676 | 98951 | 85 326 | 81,7 | 4,34 |

C. Die jährlichen Rentenzahlungen im B. Z.

Es erübrigt sich, die Berechnung weiterer Vorgänge, wie die Entwicklung der Rentenzahlungen oder der Deckungskapitalien, in aller Ausführlichkeit darzulegen. Immer dient als Grundbeziehung die Mosersche Gleichung:

chung, in welche der jeweils zu untersuchende Vorgang einzuführen ist.

Für die Darstellung der Rentenzahlungen mögen einige Andeutungen genügen.

Zur Festsetzung der einzelnen Rentenhöhen muss neben die statistischen Voraussetzungen der Grundlagen eine solche über die Besoldung in den verschiedenen Altersstufen treten. Es muss also die Wahl einer bestimmten Lohnordnung B_x für den B. Z. getroffen werden. Ferner setzen die Statuten der untersuchten Kasse die Rente eines mit t Dienstjahren Invalidierten auf P_t^i % des versicherten Lohnes an. Wird dieser Prozentsatz kombiniert mit der Besoldung und der Zahl der im Alter t Invalidierten, so ergibt sich der in einer geschlossenen Gesamtheit im (t) -ten Jahre neuentstehende Rentenbetrag zu:

$$\frac{1}{100} P_t^i B_{25+t} l_{25+t}^a i_{25+t}$$

Für die nach $(t+1)$ Jahren auszurichtenden Renten gilt also die Rekursionsformel:

$$l_{25}^a r^i(t+1) = \frac{1}{100} P_t^i B_{25+t} l_{25+t}^a i_{25+t} (1 - \frac{1}{2} q_{25+t}^i) + l_{25}^a r^i(t) p_{25+t}^i$$

Aus diesen Rentenbeträgen lässt sich nun mittelst der Fundamentalgleichung die jährliche Summe von Invalidenrenten im B. Z. berechnen als:

$$H R^i(\infty) = a H \sum_{t=0}^{\omega} r^i(t)$$

In ganz analoger Weise lassen sich auch die Witwen- und Waisenrenten berechnen,

D. Die Deckungskapitalien im B. Z.

Aus den Statutenbestimmungen und den Rechnungsgrundlagen seien die Beitragsreserven ($V_{25+t, t}$) bekannt für einen $(25+t)$ -jährigen Aktiven mit t Dienstjahren. $v(t)$, die Entwicklung der Beitragsreserve in der geschlossenen Gesamtheit, lässt sich dann wiedergeben durch:

$$v(t) = \frac{1}{100} \cdot V_{25+t, t} B_{25+t} l_{25+t}^a$$

Und die Beitragsreserve der Aktiven im B. Z. wird dargestellt durch:

$$H V(\infty) = a H \sum_{t=0}^{\omega} v(t)$$

In ähnlicher Weise kann das Deckungskapital der Invaliden, deren Anwartschaften und das Deckungskapital der Witwen berechnet werden.

So gilt z. B. für das Deckungskapital der Invalidenrenten im B. Z.:

$$H D^i(\infty) = a H \sum_{t=0}^{\omega} r^i(t) \cdot a_{25+t}^i$$

für jenes der Witwenrenten:

$$H D^w(\infty) = a H \sum_{t=0}^{\omega} r^w(t) \cdot a_{25+t}^w$$

In solcher Art lassen sich alle zur Aufstellung einer Bilanz benötigten Komponenten für den B. Z. darstellen.

E. Der Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse.

Gestützt auf die Ergebnisse der früheren Abschnitte können nun die Verhältnisse im Bestande der männlichen Beamten der E. V. K. für den B. Z. dargestellt

werden. Die neben den Rechnungsgrundlagen und den Statutenbestimmungen benötigten Voraussetzungen wurden, gestützt auf Beobachtungen oder gewisse Überlegungen, folgendermassen getroffen:

Der aktive Bestand H soll unverändert bleiben, $H = 20\,629$ Personen. Das mittlere Eintrittsalter wird gemäss den Feststellungen der letzten Jahre auf $z = 25$ angesetzt. Durch die Statuten wird das Rücktrittsrecht den 70jährigen Beamten gewährt. Im übrigen entspricht die Auswertung genau dem oben dargelegten Vorgehen und führt zu folgenden Ergebnissen für den Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse.

Bestände:

| | |
|--|-----------------------------|
| Aktive Versicherte | 20 629 |
| Zahl der jährlichen Invaliditätsfälle | 434 |
| Zahl der jährlichen Todesfälle | 191 |
| Jährlicher Zugang zum Aktivenbestande | 625 |
| Erneuerung | 3,03 % |
| Jährlich in Rentengenuss tretende Witwen | 409 |
| Jährlich in Rentengenuss tretende Waisen | 261 |
| Rentenberechtigte Invalide | 5 544 (26,9 % der Aktiven) |
| Rentenberechtigte Witwen | 6 443 (31,2 % der Aktiven) |
| Rentenberechtigte Waisen | 1 706 (8,3 % der Aktiven) |
| Gesamtbestand der Renten- | |
| bezüger | 13 693 (66,4 % der Aktiven) |

Lohn- und Rentensummen:

| | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| Versicherte Lohnsumme | Fr. 113421999 |
| Järl. Invalidenrenten | Fr. 20 641 000 (18 % des Lohnes) |
| Järl. Witwenrenten | » 12 010 000 (11 % des Lohnes) |
| Järl. Waisenrenten | » 2 334 000 (2 % des Lohnes) |
| Gesamte jährliche | |
| Rentenausgabe | Fr. 34 985 000 (31 % des Lohnes) |

Die Personalbestände einer schematischen Versicherungskasse im Beharrungszustand.
(Grundlagen E. V. K.)

| Alter | Aktive | Total Invali- dierungen | Total Sterbefälle | Alter | Aktive | Total Invali- dierungen | Total Sterbefälle |
|-------|--------|----------------------------|----------------------|-------|--------|----------------------------|----------------------|
| 25 | 9791 | 16 | 22 | 55 | 6641 | 153 | 103 |
| 6 | 9753 | 18 | 24 | 6 | 6386 | 175 | 104 |
| 7 | 9712 | 19 | 26 | 7 | 6106 | 203 | 105 |
| 8 | 9667 | 20 | 27 | 8 | 5798 | 231 | 106 |
| 9 | 9620 | 21 | 29 | 9 | 5461 | 257 | 107 |
| 30 | 9570 | 23 | 30 | 60 | 5098 | 284 | 108 |
| 1 | 9517 | 25 | 31 | 1 | 4706 | 314 | 107 |
| 2 | 9461 | 26 | 33 | 2 | 4285 | 344 | 106 |
| 3 | 9402 | 27 | 34 | 3 | 3835 | 378 | 103 |
| 4 | 9340 | 28 | 36 | 4 | 3354 | 413 | 97 |
| 35 | 9276 | 29 | 39 | 65 | 2844 | 434 | 89 |
| 6 | 9208 | 30 | 41 | 6 | 2321 | 422 | 79 |
| 7 | 9137 | 32 | 43 | 7 | 1820 | 398 | 67 |
| 8 | 9063 | 34 | 46 | 8 | 1354 | 345 | 54 |
| 9 | 8982 | 37 | 49 | 9 | 956 | 275 | 41 |
| 40 | 8897 | 41 | 50 | 70 | 640 | 202 | 30 |
| 1 | 8806 | 43 | 50 | 1 | 408 | 144 | 20 |
| 2 | 8712 | 46 | 53 | 2 | 244 | 98 | 13 |
| 3 | 8613 | 51 | 55 | 3 | 132 | 61 | 8 |
| 4 | 8507 | 56 | 57 | 4 | 63 | 35 | 4 |

— 58 —

| | | | | | | | |
|----|------|-----|-----|----|---------|------|------|
| 45 | 8394 | 61 | 62 | 75 | 24 | 18 | 1 |
| 6 | 8271 | 65 | 68 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| 7 | 8138 | 70 | 71 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 7996 | 76 | 78 | | | | |
| 9 | 7843 | 82 | 84 | | 324 627 | 6714 | 3077 |
| 50 | 7677 | 90 | 88 | | | | |
| 1 | 7500 | 99 | 92 | | | | |
| 2 | 7309 | 108 | 98 | | | | |
| 3 | 7104 | 119 | 104 | | | | |
| 4 | 6880 | 134 | 104 | | | | |

— 59 —

Die Personalbestände einer schematischen Versicherungskasse im Beharrungszustand.
(Grundlagen E. V. K.)

| Invalidenbestand | | | | Witwenbestand | | | | Waisenbestand | |
|------------------|-----|-------|------|---------------|-----|-------|------|---------------|-------|
| Alter | | Alter | | Alter | | Alter | | Alter | |
| 25 | 0 | 65 | 3141 | 25 | 0 | 65 | 3581 | 0 | 0 |
| 6 | 16 | 6 | 3417 | 6 | 7 | 6 | 3867 | 1 | 0 |
| 7 | 31 | 7 | 3652 | 7 | 16 | 7 | 4082 | 2 | 0 |
| 8 | 47 | 8 | 3831 | 8 | 43 | 8 | 4057 | 3 | 16 |
| 9 | 63 | 9 | 3923 | 9 | 59 | 9 | 3990 | 4 | 83 |
| 30 | 78 | 70 | 3916 | 30 | 77 | 70 | 3917 | 5 | 161 |
| 1 | 95 | 1 | 3813 | 1 | 98 | 1 | 3822 | 6 | 268 |
| 2 | 113 | 2 | 3638 | 2 | 156 | 2 | 3670 | 7 | 408 |
| 3 | 132 | 3 | 3410 | 3 | 180 | 3 | 3454 | 8 | 489 |
| 4 | 151 | 4 | 3148 | 4 | 207 | 4 | 3189 | 9 | 678 |
| 35 | 172 | 75 | 2866 | 35 | 235 | 75 | 2909 | 10 | 782 |
| 6 | 193 | 6 | 2577 | 6 | 266 | 6 | 2614 | 11 | 1136 |
| 7 | 215 | 7 | 2290 | 7 | 299 | 7 | 2335 | 12 | 1548 |
| 8 | 239 | 8 | 2015 | 8 | 336 | 8 | 2062 | 13 | 2316 |
| 9 | 265 | 9 | 1758 | 9 | 374 | 9 | 1800 | 14 | 3309 |
| 40 | 294 | 80 | 1521 | 40 | 415 | 80 | 1551 | 15 | 3758 |
| 1 | 325 | 1 | 1308 | 1 | 522 | 1 | 1319 | 16 | 3936 |
| 2 | 358 | 2 | 1117 | 2 | 573 | 2 | 1107 | 17 | 3921 |
| 3 | 392 | 3 | 947 | 3 | 630 | 3 | 915 | 18 | 3904 |
| 4 | 428 | 4 | 798 | 4 | 694 | 4 | 745 | | 26713 |

| | | | | | | | |
|----|------|-----|--------|----|------|-----|---------|
| 45 | 468 | 85 | 664 | 45 | 761 | 85 | 598 |
| 6 | 512 | 6 | 545 | 6 | 835 | 6 | 471 |
| 7 | 558 | 7 | 438 | 7 | 916 | 7 | 365 |
| 8 | 607 | 8 | 345 | 8 | 1002 | 8 | 278 |
| 9 | 660 | 9 | 263 | 9 | 1208 | 9 | 208 |
| 50 | 716 | 90 | 195 | 50 | 1312 | 90 | 152 |
| 1 | 778 | 1 | 138 | 1 | 1416 | 1 | 109 |
| 2 | 846 | 2 | 93 | 2 | 1521 | 2 | 77 |
| 3 | 923 | 3 | 61 | 3 | 1627 | 3 | 54 |
| 4 | 1009 | 4 | 39 | 4 | 1734 | 4 | 37 |
| 55 | 1109 | 95 | 23 | 55 | 1843 | 95 | 24 |
| 6 | 1226 | 6 | 14 | 6 | 1953 | 6 | 15 |
| 7 | 1361 | 7 | 7 | 7 | 2064 | 7 | 9 |
| 8 | 1520 | 8 | 4 | 8 | 2342 | 8 | 6 |
| 9 | 1700 | 9 | 2 | 9 | 2458 | 9 | 3 |
| 60 | 1897 | 100 | 1 | 60 | 2574 | 100 | 1 |
| 1 | 2112 | | 85 326 | 1 | 2895 | 1 | 1 |
| 2 | 2345 | | | 2 | 3019 | | 100 910 |
| 3 | 2594 | | | 3 | 3368 | | |
| 4 | 2860 | | | 4 | 3481 | | |

Deckungskapitalien:

| | |
|---|-----------------------------------|
| Beitragsreserve der | |
| Aktiven | Fr. 199 295 000 (42 % des Totals) |
| Deckungskapital der | |
| Invalidenrenten . . » | 142 912 000 (30 % des Totals) |
| Deckungskapital der | |
| Witwenrenten . . » | 94 443 000 (20 % des Totals) |
| Deckungskapital der | |
| Waisenrenten . . » | 9 444 000 (2 % des Totals) |
| Anwartschaften der | |
| Invaliden auf Hinterbliebenenrenten . . » | 26 885 000 (6 % des Totals) |
| Gesamtes Deckungskapital | Fr. 474 979 000 |
| | (419 % des vers. Lohnes) |

Die Einnahmen der Kasse werden sich im B. Z. zusammensetzen aus:

| | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| Jahresprämien (12% | |
| des vers. Lohnes) Fr. 13 611 000 | (39 % des Totals) |
| Zinsen (4½ % des | |
| Deckungskapitals) » | 21 374 000 (61 % des Totals) |
| Das Total der Einnahmen beträgt . | Fr. 34 985 000 |

und entspricht dem Total der jährlichen Rentenausgaben. Es geht aus dieser Aufstellung ferner hervor, welche wichtige Rolle dem Zins bei einer nach dem Deckungskapitalverfahren organisierten Kasse zukommt. Wie die Angabe für die jährlichen Rentenzahlungen zeigt, müsste die Umlageprämie im B. Z. 31 Lohnprozent betragen.

III. Die Entwicklung einer offenen Kasse.

Die Kenntnis des Grenzzustandes eines bestimmten Vorganges ergibt schon wertvolle Anhaltspunkte über dessen Entwicklungsrichtung. Werden aber die beobachteten Anfangspunkte der Entwicklung verglichen mit ihrer theoretisch ermittelten Grenze, so klafft dazwischen häufig eine sehr beträchtliche Lücke, die nicht selten Zweifel über den Zusammenhang von Feststellung und Theorie erweckt. Längere Beobachtungsreihen stehen meist nicht zur Verfügung, weil bloss in den seltensten Fällen eine Kasse über eine genügend lange und ungestörte Entwicklung zurückblicken kann. Ein Versuch, an Beispielen aus dem Materiale der E. V. K. die Beziehungen zwischen Beobachtung, Entwicklung und Grenze darzulegen, wird deshalb vielleicht einiges Interesse finden.

Zur theoretischen Darstellung einer Entwicklung dient die in der oben bereits zitierten Arbeit von Prof. Moser gegebene Grundgleichung. Sie lautet für einen Vorgang in der offenen, von der Zeit (t) abhängigen Gesamtheit:

$$H(t) Y(t) = H(t) y(t) + \int_0^{\infty} H(t) \varphi(t) y(t) dt$$

Um den Vorgang selbst bestimmen zu können, muss noch entweder die Entwicklung des Bestandes $H(t)$ oder aber der Verlauf der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ bekannt sein. $H(t)$ und $\varphi(t)$ selbst stehen in einer Wechselbeziehung, wie sofort einzusehen ist und im einzelnen später noch dargelegt werden soll.

Die praktische Auswertung des in der Moserschen Grundgleichung niedergelegten Prinzipes kann auf einfachem Wege geschehen. Es wird für die künftige Entwicklung des Versichertenbestandes eine einfache, den Verhältnissen angepasste Annahme getroffen; danach kann vorerst die Erneuerung schrittweise bestimmt und

schliesslich die Entwicklung des Vorganges $Y(t)$ von Jahr zu Jahr rechnerisch verfolgt werden.

Es wurde seinerzeit vom technischen Dienste der E. V. K. eine budgetmässige Darstellung der Entwicklung der Kasse auf 50 Jahre hinaus verlangt. Die Ergebnisse dieser Rechnung erlauben uns, in diesem Zusammenhange einige Beispiele schematischer Entwicklung besonderer Vorgänge mitzuteilen.

Zur Auswertung der erwähnten Budgetrechnung trafen wir nach gewissen Erwägungen die Voraussetzung, dass der Gesamtbestand des eidgenössischen Personals künftig unverändert bleibe. Ausgehend vom Endbestand 1924 konnte dann durch rechnungsmässigen Abbau der Personalbestände und durch deren jeweilige Ergänzung auf H durch die nötigen Zutritte im Alter 25 von Jahr zu Jahr die Altersverteilung des Bestandes ermittelt werden. Nach Einführung der bei der E. V. K. beobachteten Lohnordnung und der für sie geltenden statutarischen Ansätze konnten ferner die fälligen Rentensummen und die gesamte Kassenbelastung bestimmt und für jedes Jahr eine budgetmässige Bilanz erstellt werden. Auf diese Weise wurden für alle interessierenden Vorgänge schematische Entwicklungen ermittelt, aus deren Reihe einige Beispiele angeführt seien:

1. *Der jährliche Neuzugang (Figur 2).* Im B. Z. ist ein jährlicher Zugang von 625 Neueintretenden zu erwarten, wie oben bereits festgestellt wurde. Da der Berechnung die Annahme eines konstanten Bestandes zugrunde liegt, ist diese Zugangsquote schon bei Beginn der Entwicklung nahezu erreicht. Infolge der notwendigen Umgruppierung in der Altersverteilung der heutigen Generation ist sie aber noch geringen Schwingungen unterworfen. Die Übereinstimmung zwischen Ent-

wicklung und Grenzlage geht jedoch deutlich aus der Figur 2 hervor.

2. *Die Beitragsreserve der aktiven Beamten (Figur 3).* Für diese Komponente steigt die rechnungsmässige Entwicklung steil zu einer Schwingung an, deren Axe mit der für den B. Z. berechneten Grenzlage übereinstimmt. Es fällt ferner auf, dass die Welle der Beitragsreserve zeitlich verschoben ist gegenüber jener des Zuganges. Und zwar wird das Maximum der Reserve jeweilen erreicht, bevor die Zahl der Neueintritte zum Höchstwerte gelangt, d. h. bevor die alten Mitglieder (die schwer belastenden Risiken) zahlreich ausscheiden.

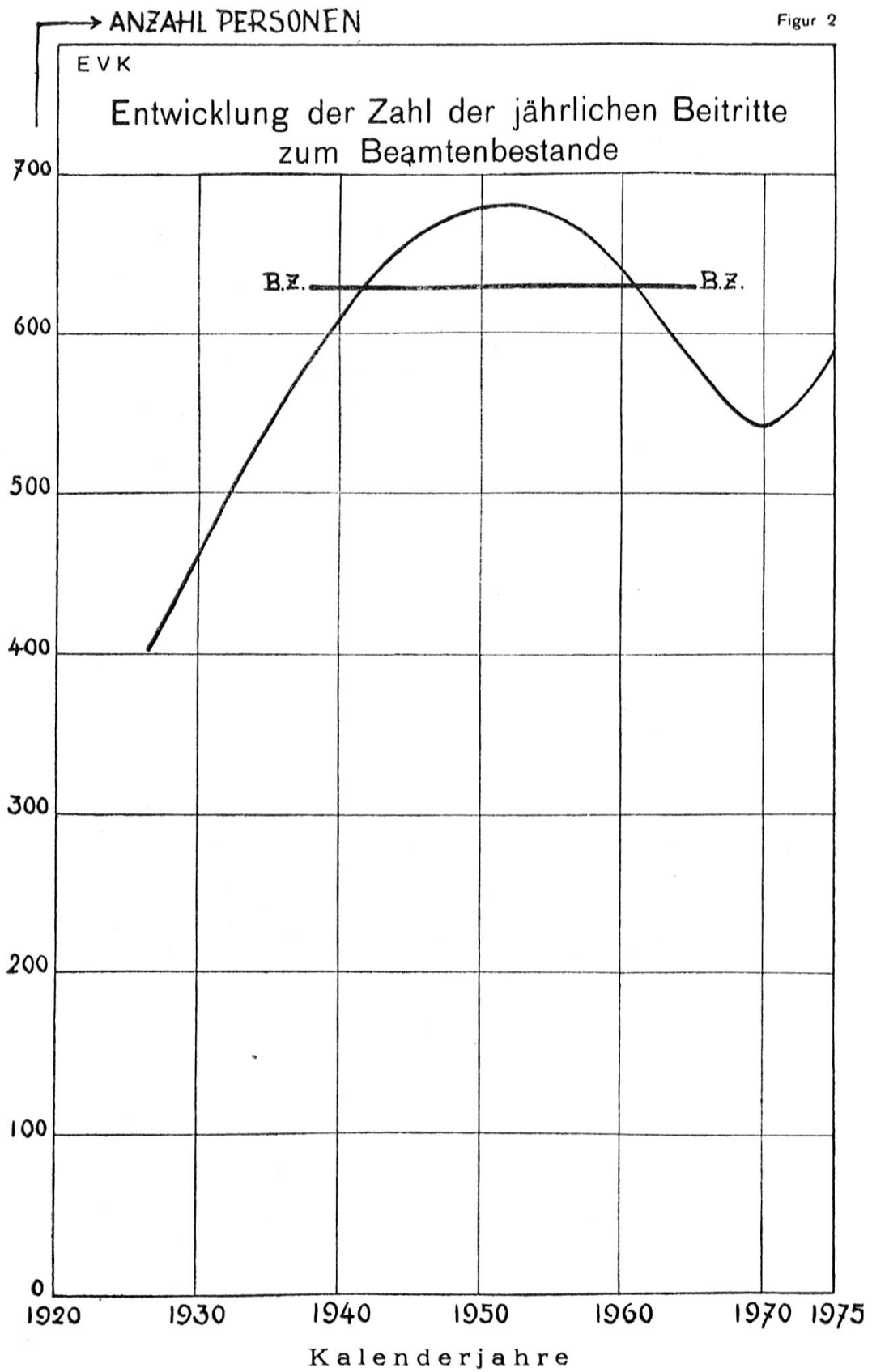
3. *Die jährlichen Invalidenrenten (Figur 4).* Die Rentenhöhe ist gegenwärtig noch recht weit von der Grenzlage entfernt. Sie entwickelt sich auch in Zukunft langsamer als die auf den Aktivenbestand bezüglichen Komponenten und erreicht die für den B. Z. berechnete Höhe erstmals nach etwa 25 Jahren. Später schwingt sie in regelmässiger Bewegung um die Grenzlage.

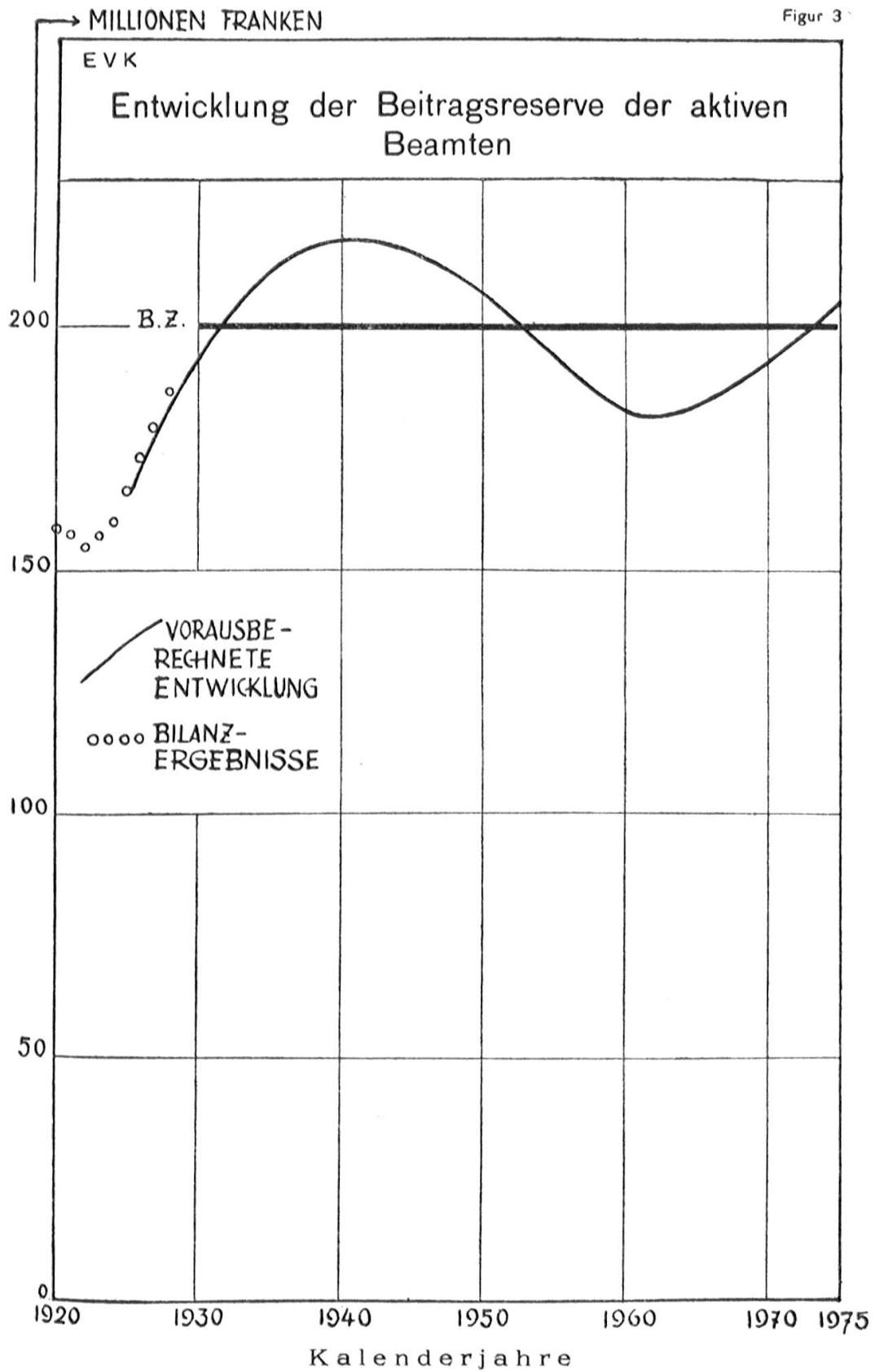
Diese Beispiele liessen sich ohne Mühe vermehren. Die hier gebotene Auswahl mag jedoch genügen, um darzutun, wie der Bestand der E. V. K., von dem man eine gewisse Stabilität erwarten könnte, noch wesentlichen Entwicklungsschwankungen unterworfen ist. Aus allen diesen Beispielen geht aber insbesondere hervor, wie sich die schematische Weiterführung der Vorgänge in gedämpfter Schwingung der für den B. Z. berechneten Grenzlage annähert.

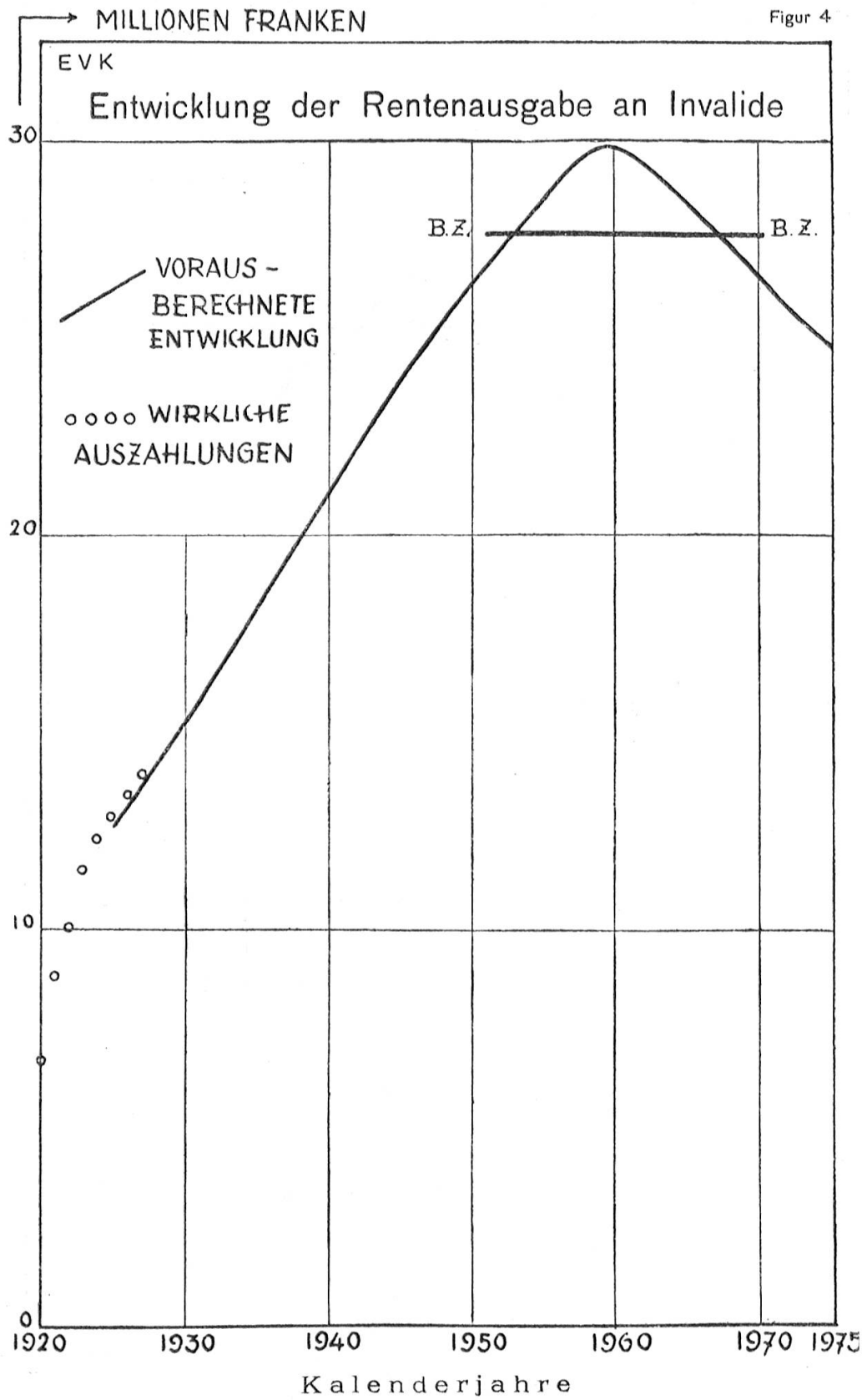
IV. Die Entwicklung der Erneuerungszahl für eine offene Gesamtheit.

A. Allgemeine Darstellung.

Im vorigen Abschnitte wurde erwähnt, dass zwischen dem Bestande $H(t)$ und der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$







eine Wechselbeziehung besteht. Den Ausdruck $H(t) \cdot q(t)$ haben wir früher Erneuerungszahl genannt. Diese stellt den absoluten Zugang im Zeitpunkte (t) dar, während die Erneuerungsfunktion $q(t)$ die relative Erneuerung angibt. In praktischen Beispielen tritt meistens die Erneuerungszahl auf, weshalb wir unsere Überlegungen auf den Ausdruck $H(t) q(t)$ beziehen, woraus im Bedarfsfalle die Erneuerungsfunktion $q(t)$ leicht ermittelt werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit für einen z -jährigen, nach x Jahren dem Bestande noch anzugehören, werde der üblichen Bezeichnungsweise entsprechend dargestellt durch:

$$p_z(x) = \frac{l(z+x)}{l(z)}$$

Sind also in einem gewissen Zeitpunkte (τ) zusammen $H(\tau) \cdot q(\tau)$ Personen im Alter (z) in einen Bestand eingetreten, dann gehören zur Zeit (t) , also nach Ablauf von $(t-\tau)$ Jahren noch

$$H(\tau) q(\tau) p_z(t-\tau)$$

Mitglieder dieser Generation an.

Bezeichnen wir den Zeitpunkt, in welchem die Betrachtung des Bestandes H beginnt, mit (0) , dann setzt sich in irgendeinem späteren Beobachtungsmoment (t) der Gesamtbestand der offenen Kasse zusammen aus den Überlebenden aller früheren Zugänge.

Wird vorerst sowohl das Ausscheiden wie die Bestandserneuerung als kontinuierlicher Vorgang gedacht, dann setzt sich also zur Zeit (t) der Gesamtbestand zusammen aus:

$$\text{I. } \underline{H(t) = \int_0^t H(\tau) q(\tau) p_z(t-\tau) d\tau}$$

Soll nun aus dieser Gleichung eine Beziehung für die Erneuerungsfunktion bzw. für die Erneuerungszahl $H(t) \varphi(t)$ hergeleitet werden, so führt am einfachsten eine Differentiation nach (t) zum Ziele. Gemäss der allgemeinen Regel zur Ableitung eines bestimmten Integrals entsteht nach dieser Operation im vorliegenden Problem der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= H(t) \varphi(t) p_z(o) - H(o) \varphi(o) p(t) \cdot 0 \\ &+ \int_0^t H(\tau) \varphi(\tau) \frac{d}{dt} p_z(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\mu(z+t) = - \frac{\frac{d}{dt} p_z(t)}{p_z(t)}$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{d}{dt} p_z(t) = - \mu(z+t) p_z(t)$$

Ferner ist $p_z(o) = 1$

Werden diese Einsetzungen oben eingeführt und die Beziehung geordnet, so ergibt sich eine Integralgleichung für die Erneuerungszahl:

$$\begin{aligned} &\text{II. } H(t) \varphi(t) \\ &= \frac{d}{dt} H(t) + \int_0^t H(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau) \mu(z+t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die Gleichung sagt aus, dass sich der Zugang zusammensetzt aus der Bestandesvermehrung und dem

Ersatze für die im selben Momente aus allen früheren Generationen Ausscheidenden.

Trifft man die vereinfachende Voraussetzung, dass der Bestand H unverändert bleibe, dann geht die Gleichung II über in:

$$\text{IIa. } \varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) p_z(t-\tau) \mu(z+t-\tau) d\tau$$

Die für die Erneuerungszahl hergeleiteten Beziehungen sind Volterrasche Integralgleichungen II. Art. Die Darstellung dieser Lösung wäre also für gewisse Fälle auf theoretischem Wege möglich. Die praktische Anwendung würde aber trotzdem Schwierigkeiten bereiten, da die in Beziehung gestellten Vorgänge in den seltensten Fällen als analytische Funktionen bekannt sind oder dann infolge ihres komplizierten Baues die analytische Behandlung nicht durchführen lassen. Freilich sind auch in diesen Fällen Näherungsmethoden verwendbar, deren Ergebnisse aber meist nicht voll zu befriedigen vermögen. Wir sehen deshalb an dieser Stelle von einer weiteren theoretischen Behandlung der erreichten Integralgleichungen ab und wenden uns dem Versuche zu, eine praktisch leicht anwendbare Beziehung für die Erneuerungszahl aufzustellen, die nur die in der Versicherungstechnik allgemein benutzten Annäherungen notwendig macht.

Lassen wir nämlich in unserer Ausgangsgleichung I

$$H(t) = \int_0^t H(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau) d\tau$$

das Ausscheiden in jährlichen Abständen erfolgen, wie es der üblichen technischen Darstellungsweise entspricht, dann findet auch die Erneuerung in jährlichen Abständen statt. Die Erneuerungsfunktion geht dabei also in eine Zahlreihe über. Die kontinuierliche Betrachtungsweise

kann dann ersetzt werden durch die diskontinuierliche. Die Integration wird als Summe dargestellt, und die Ausgangsgleichung I geht über in:

$$\text{Ia. } H(t) = \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau)$$

Das weitere Vorgehen entspricht nun genau der Entwicklung, welche soeben für die kontinuierliche Darstellung befolgt wurde.

Bildet man nun die Differenz $H(t+1) - H(t) = \Delta H(t)$, dann entsteht die Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta H(t) &= \sum_{\tau=0}^{t+1} H(\tau) \varphi(\tau) p_z(t+1-\tau) \\ &\quad - \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) p_z(t-\tau) \end{aligned}$$

Durch passende Umformung wird daraus:

$$\begin{aligned} \Delta H(t) &= H(t+1) \varphi(t+1) - \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) [p_z(t-\tau) \\ &\quad - p_z(t+1-\tau)] \end{aligned}$$

Wird noch bedacht, dass

$$p_z(t-\tau) = \frac{l_{z+t-\tau}}{l_z} \text{ und } p_z(t+1-\tau) = \frac{l_{z+t+1-\tau}}{l_z},$$

$$\begin{aligned} \text{also } p_z(t-\tau) - p_z(t+1-\tau) &= \frac{l_{z+t-\tau} - l_{z+t+1-\tau}}{l_z} \\ &= \frac{d_{z+t-\tau}}{l_z} \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich nach diesen Einsetzungen die Rekursionsbeziehung für die Erneuerungszahl:

$$\text{III. } H(t+1) \varphi(t+1) = \Delta H(t) + \frac{1}{l_z} \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

Erste Erweiterung.

Bei Eröffnung der Kasse (im Zeitpunkt 0) werde bereits eine Gruppe von Personen übernommen. Deren Altersverteilung sei dargestellt durch die Zahlreihe L_{z+x} . Der Anfangsbestand (alter Bestand) beträgt dann:

$$\sum_{x=0}^{\omega} L_{z+x}$$

Für diesen alten Bestand können entweder für die Zeit vor Eröffnung der Kasse [bezeichnet mit $(-t)$] die Erneuerungszahlen rekonstruiert werden. Es ergibt sich dann sofort aus der Proportion:

$$L_{z+x} : l_{z+x} = H(-x) \varphi(-x) : l_z$$

die Beziehung:

$$H(-x) \varphi(-x) = \frac{L_{z+x} l_z}{l_{z+x}}$$

Die Entwicklung der Erneuerungszahl kann auf diese Weise bis zur Zeit $(-\omega)$ rückwärts erweitert werden.

Oder es kann der Ersatz des alten Bestandes getrennt dargestellt werden. Die Erneuerungszahl für die ganze Gesamtheit zur Zeit (t) setzt sich dann zusammen aus:

$$\text{IIIa. } H(t+1) q(t+1) = \Delta H(t) + \frac{1}{l_z} \sum_{\tau=0}^t H(\tau) q(\tau) d_{z+t-\tau} \\ + \sum_{x=0}^w L_{z+x+t} q_{z+x+t}$$

Zweite Erweiterung.

Entfallen die Eintritte nicht bloss auf ein einziges Alter, sondern auf verschiedene Altersstufen, dann muss eine Funktion der Verteilung der Eintritte auf die Alter z vorausgesetzt werden. Der Verlauf dieser Verteilung lässt sich beispielsweise durch Beobachtung ermitteln. Er werde allgemein wiedergegeben durch $v(z)$. Gemäss unserer Setzung ist dann:

$$\sum_{z=0}^w v(z) = 1$$

Die zur Zeit (τ) eingetretene Generation verteilt sich somit gemäss folgender Darstellung auf die Altersstufen:

$$H(\tau) q(\tau) v(z)$$

Zur Zeit (t) , nach $(t - \tau)$ Jahren, setzt sich dieselbe Generation zusammen aus:

$$H(\tau) q(\tau) \sum_{z=0}^w v(z) p_z(t-\tau)$$

wobei immer z alle Eintrittsalter umfasst. Die aus diesem Bestande in der Zeit (t) bis $(t+1)$ Ausscheidenden und durch die Erneuerung zu Ersetzenden werden also dargestellt durch:

$$H(\tau) q(\tau) \sum_{z=0}^w v(z) p_z(t-\tau) q_{z+t-\tau}$$

Unter Berücksichtigung dieser Erweiterung geht Gleichung II über in:

$$\text{IIIb. } H(t+1) \varphi(t+1) = \Delta H(t) + \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} v(z) p_z(t-\tau) q_{z+t-\tau}$$

Oder in bequemerer Form:

$$H(t+1) \varphi(t+1) = \Delta H(t) + \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) \sum_{z=0}^{\omega} \frac{v(z)}{l_z} d_{z+t-\tau}$$

B. Die praktische Auswertung

dieser Beziehungen kann in sehr einfacher Weise geschehen. Die Zahlen l_z und d_{z+t} in Gleichung III sind aus den Rechnungsgrundlagen bekannt. Wird neben diesen die Reihe der (t) mit den zugehörigen Werten von $H(t) \varphi(t)$ auf einem Hilfsstreifen von unten nach oben aufgetragen, so können die benachbarten Zahlen von 0 bis t je ausmultipliziert und aufsummiert, also die Summen:

$$\frac{1}{l_z} \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-\tau}$$

gebildet werden. Daraus geht die gesuchte Erneuerungszahl $H(t+1) \varphi(t+1)$ hervor. Diese wird auf dem Streifen beigefügt und ermöglicht nach dessen Verschiebung die Bildung der Summe:

$$\frac{1}{l_z} \sum_{\tau=0}^{t+1} H(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t+1-\tau}$$

Es kann wünschenswert erscheinen, die Entwicklung nicht von Jahr zu Jahr, sondern rascher fortschreitend in mehrjährigen Stufen durchzuführen. Zu diesem Zwecke, beispielsweise für fünfjährige Stufen, wird gesetzt:

$$H(t) \varphi(t) = H(t+1) \varphi(t+1) = \dots = H(t+4) \varphi(t+4) \\ = H(T) \varphi(T)$$

Dann ergibt sich aus III:

$$5 H(T) \varphi(T) = H(t+4) - H(t-1) \\ + \frac{1}{l_z} \sum_{\tau=0}^{t-1} H(\tau) \varphi(\tau) d_{z+t-1-\tau}$$

Für Darstellungen, welche sich über längere Zeitspannen ausdehnen sollen, ist dieses Vorgehen empfehlenswert.

Der Auswertung der erweiterten Formel IIIb geht am besten die Ermittlung einer schematischen Hilfszahl voraus.

Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$V_{t-\tau} = \sum_{z=0}^{\omega} \frac{v(z)}{l_z} d_{t+z-\tau}$$

Es entsteht dann die folgende Hilfstabelle:

| $\begin{smallmatrix} \tau \\ z \end{smallmatrix}$ | t | $t-1$ | \dots | 0 |
|---|------------------------|------------------------|---------|----------------------------|
| 0 | $\frac{v(0)}{l_0} d_0$ | $\frac{v(0)}{l_0} d_1$ | | $\frac{v(0)}{l_0} d_t$ |
| 1 | $\frac{v(1)}{l_1} d_1$ | $\frac{v(1)}{l_1} d_2$ | | $\frac{v(1)}{l_1} d_{t+1}$ |
| 2 | $\frac{v(2)}{l_2} d_2$ | $\frac{v(2)}{l_2} d_3$ | | $\frac{v(2)}{l_2} d_{t+2}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots |
| | V_0 | V_{1-1} | | V_t |

Entsprechend der beschränkten Zahl der in Betracht fallenden Eintrittsalter wird praktisch die Summe V_t nur aus wenigen Summanden bestehen. Die schematische Hilfstabelle wird deshalb meist nicht umfangreich und besitzt dabei den besonderen Vorzug, dass sie für alle Berechnungsvarianten Geltung behält, so lange die Altersverteilung der Eintretenden und die Rechnungsgrundlagen nicht geändert werden.

Durch die Einführung der Hilfszahl V vereinfacht sich die Formel IIIb zu:

$$H(t+1) \varphi(t+1) = \Delta H(t) + \sum_{\tau=0}^t H(\tau) \varphi(\tau) V_{t-\tau}$$

Die weitere Auswertung geschieht am einfachsten wieder nach der für III angegebenen Weise und kann ebenfalls in mehrjährigen Stufen vorgenommen werden.

C. Berechnungsbeispiel.

Für die eidgenössische Postverwaltung war festzustellen, wie hoch die Zahl der jährlich aufzunehmenden Lehrlinge anzusetzen sei, um eine bestimmte Entwicklung des Personalbestandes zu erreichen.

Vorerst wurde den früheren Beobachtungen folgende Altersverteilung der Neueintretenden entnommen:

| z | $v(z)$ | z | $v(z)$ |
|--------------------|--------|-----|--------|
| 15 | 0 | 20 | 0.11 |
| 16 | 0.02 | 21 | 0.04 |
| 17 | 0.31 | 22 | 0.02 |
| 18 | 0.32 | 23 | 0 |
| 19 | 0.18 | | |
| <hr/> | | | |
| $\sum v(z) = 1.00$ | | | |

Die Entwicklung sollte vom Personalbestand auf Ende 1923 ausgehen.

Für eine erste Variante galten folgende Voraussetzungen:

| | |
|-----------------------------------|--------------|
| Im Jahre 1924 wurden aufgenommen: | 52 Lehrlinge |
| 1925 | 65 |
| 1926 | 70 |
| 1927 | 68 |

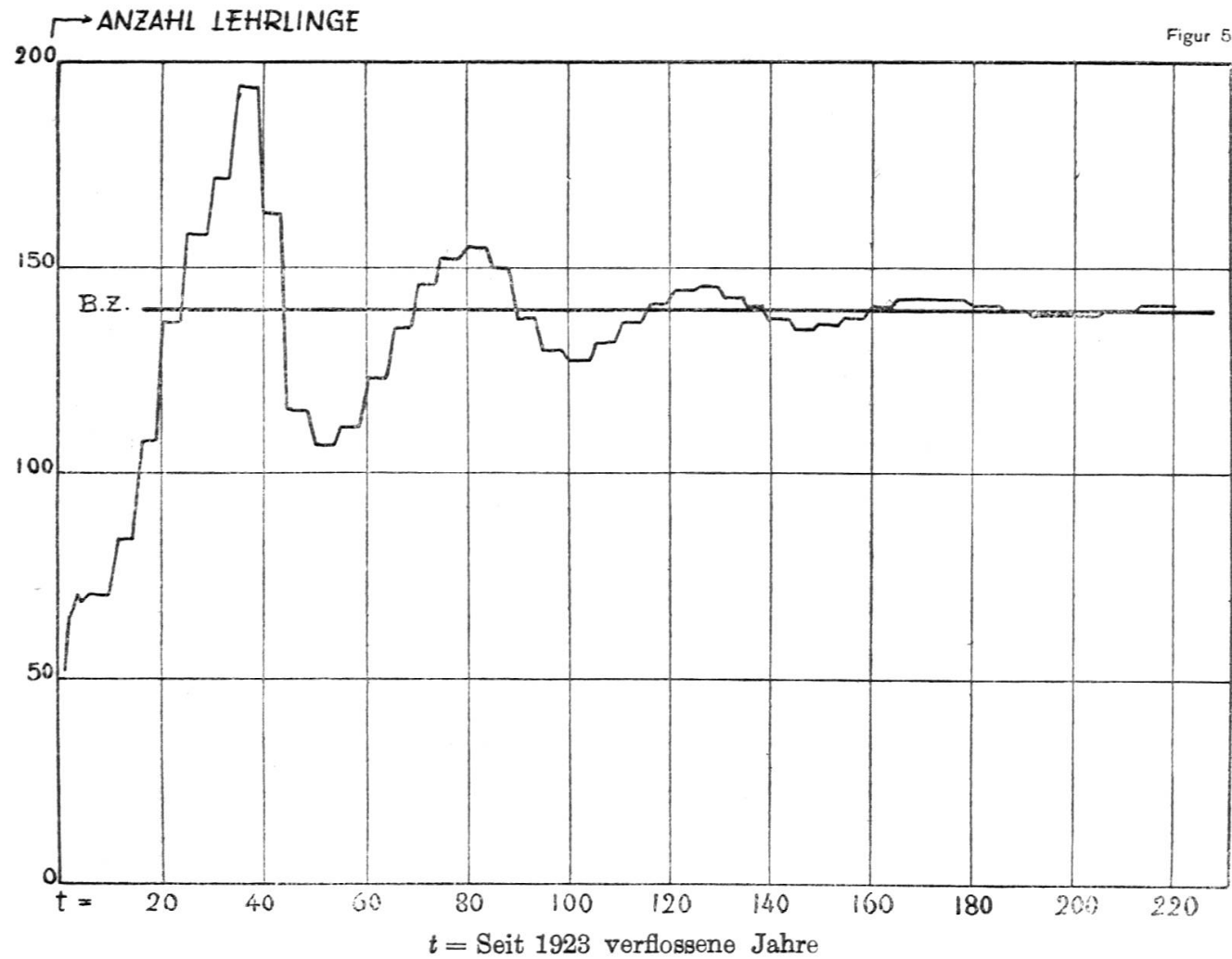
In den folgenden fünf Jahren gedenkt die Verwaltung 70—80, später 100 Lehrlinge aufzunehmen.

Es sind also folgende Erneuerungszahlen voranzusetzen:

| | | |
|---------------------|---|----------|
| $H(1) \varphi(1)$ | = | 52 |
| $H(2) \varphi(2)$ | = | 65 |
| $H(3) \varphi(3)$ | = | 70 |
| $H(4) \varphi(4)$ | = | 68 |
| $H(5) \varphi(5)$ | = | 70 |
| $H(6) \varphi(6)$ | = | 70 |
| $H(7) \varphi(7)$ | = | 75 |
| $H(8) \varphi(8)$ | = | 75 |
| $H(9) \varphi(9)$ | = | 80 |
| $H(10) \varphi(10)$ | = | 100 |
| \vdots | | \vdots |

Die Auswertung ergibt für den Bestand die nachstehende Entwicklung:

| Auf Beginn des Entwicklungsjahres (t) | Jahresbeginn | Personenbestand $H(t)$ |
|--|--------------|------------------------|
| 1 | 1924 | 4877 |
| 4 | 1927 | 4724 |
| 9 | 1932 | 4569 |
| 14 | 1937 | 4602 |
| 19 | 1942 | 4541 |
| 24 | 1947 | 4360 |
| 29 | 1952 | 4089 |



Postbeamte: Aufnahmeziffern, welche den Bestand auf 4500 Personen belassen

Diese Bestandesentwicklung, welche sich gemäss unserer Formel I zwangsläufig aus den vorgesehenen Aufnahmeziffern ergibt, entspricht aber nicht dem Wunsche der Postverwaltung. Man ist vielmehr bestrebt, den Bestand auf 4500 Personen zu reduzieren und dann auf dieser Höhe zu erhalten.

Als zweite Variante wird also eine Voraussetzung über die Entwicklung des Bestandes zugrunde gelegt. Und zwar wird die Entwicklung der Variante I befolgt, bis sich die Zahl der Beamten auf 4500 verringert hat; für spätere Jahre soll sie konstant bleiben. Es ergibt sich also die folgende Voraussetzung über die Bestandesentwicklung:

| Entwicklungsjahr (t) | Jahresanfang | Bestand $H(t)$ |
|--------------------------|--------------|----------------|
| 1 | 1924 | 4877 |
| 4 | 1927 | 4724 |
| 9 | 1932 | 4569 |
| 14 | 1937 | 4500 |
| 19 | 1942 | 4500 |
| \vdots | \vdots | \vdots |

Nach Formel IIIb kann nun in der angedeuteten Weise die Zahl der für diese Bestandesentwicklung benötigten Aufnahmen ermittelt werden. Die Rechnung wurde in fünfjährigen Stufen durchgeführt; die Ergebnisse sind der nachstehenden Tabelle und der Figur 5 zu entnehmen.

| Entwicklungsjahr (t) | Erneuerungszahl $H(t) \varphi(t)$ | Entwicklungsjahr (t) | Erneuerungszahl $H(t) \varphi(t)$ |
|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| 0 | 52 | 3 | 68 |
| 1 | 65 | 4 | 70 |
| 2 | 70 | 5—9 | 70 |

| Entwicklungs- jahr (t) | Erneuerungs- zahl $H(t) \varphi(t)$ | Entwicklungs- jahr (t) | Erneuerungs- zahl $H(t) \varphi(t)$ |
|---------------------------|---|---------------------------|---|
| 10—14 | 83 | 115—119 | 140 |
| 15—19 | 110 | 120—124 | 143 |
| 20—24 | 136 | 125—129 | 144 |
| 25—29 | 158 | 130—134 | 142 |
| 30—34 | 173 | 135—139 | 139 |
| 35—39 | 196 | 140—144 | 136 |
| 40—44 | 163 | 145—149 | 134 |
| 45—49 | 117 | 150—154 | 135 |
| 50—54 | 108 | 155—159 | 137 |
| 55—59 | 113 | 160—164 | 139 |
| 60—64 | 123 | 165—169 | 140 |
| 65—69 | 135 | 170—174 | 140 |
| 70—74 | 146 | 175—179 | 140 |
| 75—79 | 152 | 180—184 | 139 |
| 80—84 | 154 | 185—189 | 138 |
| 85—89 | 149 | 190—194 | 137 |
| 90—94 | 137 | 195—199 | 137 |
| 95—99 | 128 | 200—204 | 137 |
| 100—104 | 127 | 205—209 | 138 |
| 105—109 | 131 | . | . |
| 110—114 | 136 | B. Z. | 138 |

Die absichtlich so weit ausgedehnte Berechnung dieser budgetmässigen Entwicklung bietet trotz der fünfjährigen Abstufung ein schönes Beispiel der Annäherung eines Vorganges an den Beharrungszustand. Besonders aus Figur 5 ist ersichtlich, wie sich die Schwingungen der Entwicklung mehr und mehr der Grenzlage anschmiegen. Es zeigt sich übrigens auch eine Ausgleichung innerhalb der Schwingungen selbst. Während bei ungefähr gleichbleibender Länge die einzelne Welle

vorerst ganz unsymmetrisch verläuft (langsam ansteigt und rasch abfällt), ebnet sich diese Verschiedenheit allmählich aus, wie aus der Zeichnung deutlich hervorgeht.

Das Beispiel zeigt, dass die zur gewünschten Bestandesentwicklung benötigte Aufnahme von Lehrlingen recht verschieden ist von der Rekrutierungsabsicht der Verwaltung. Sicherlich vermag eine Berechnung, wie sie hier vorgeführt wurde, die Ergebnisse nicht auf sehr lange Zeit hinaus zuverlässig zu prophezeien. Nicht bewertbare Einflüsse werden sich bald geltend machen und Abweichungen von dieser schematischen Entwicklung verursachen. Wenn die Störungen aber nicht ganz einseitige sind, so wird doch die schematische Rechnung die im Laufe der Jahre zu gewärtigenden Unterschiede in der Aufnahmeziffer zum Ausdruck bringen. Der Wechsel dieser Zahlen kann aber unter Umständen von besonderem Interesse sein, wie die oben erwähnte Anfrage der Postverwaltung es beweist.

Es sei nur andeutungsweise beigelegt, dass mit Hilfe einer ganz analogen Rechnung die Anstellungs- oder Entwicklungsaussichten für bestimmte Berufszweige bewertet werden könnten. Sofern es möglich ist, für einen bestimmt umschriebenen Zweig aus praktischen Erwägungen heraus Voraussetzungen über die Bestandesentwicklung zu treffen, ergibt die geschilderte Berechnung für eine Reihe von Jahren die Bewegung der erforderlichen Zutritte zu diesem Berufskreise. Für die vor der Berufswahl Stehenden kann dann unter Berücksichtigung der Ausbildungszeit festgestellt werden, ob zur gegebenen Zeit im entsprechenden Zweige erhöhte oder verminderte Anstellungsaussichten bestehen.

V. Die Entwicklung der Altersverteilung einer offenen Gesamtheit.

A. Allgemeine Darstellung.

Stellt L_x die Zahl der (x) -jährigen Mitglieder eines Bestandes dar, dann lässt sich im einfachen Falle eines einheitlichen Eintrittsalters (z) für den Zeitpunkt (t) die Zahl der x -jährigen angeben als:

$$L_x = H (t+z-x) \varphi (t+z-x) p_z (z-x)$$

oder IV.
$$L_x = H (t+z-x) \varphi (t+z-x) \cdot \frac{l_x}{l_z}$$

Erfolgen aber die Zutritte in verschiedenen Altern, gemäss der Verteilung $v(z)$, dann ergibt sich für die Zahl der (x) -jährigen im Zeitpunkt (t) der Entwicklung die Beziehung:

$$\text{IVa. } L_x = l_x \sum_{z=0}^x H (t+z-x) \varphi (t+z-x) \frac{v(z)}{l_z}$$

B. Für den Beharrungszustand

wird der Zugang konstant zu αH . Die Altersverteilung ergibt sich somit aus:

$$L_x = \alpha H l_x \sum_{z=0}^x \frac{v(z)}{l_z}$$

Dabei ist

$$\sum_{x=0}^{\omega} L_x = H = \alpha H \sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot \sum_{z=0}^x \frac{v(z)}{l_z}$$

und

$$\alpha H = \frac{H}{\sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot \sum_{z=0}^x \frac{v(z)}{l_z}}$$

so dass im allgemeinen Falle die Altersverteilung einer sich erneuernden Gesamtheit im B. Z. wiedergegeben wird durch:

$$\text{IVb. } L_x = H l_x \frac{\sum_{z=0}^x \frac{v(z)}{l_z}}{\sum_{x=0}^{\omega} l_x \cdot \sum_{z=0}^x \frac{v(z)}{l_z}}$$

C. Berechnungsbeispiel.

Auf den Voraussetzungen der Variante II der Berechnungen für den Postbeamtenbestand (vgl. S. 80) fussend, werde die Entwicklung der Altersverteilung verfolgt.

Wir unterscheiden dabei zwei Bestände, deren Altersverteilung am besten getrennt untersucht wird: A. Der alte Bestand der zu Beginn der Entwicklung (Ende 1923) bereits vorhandenen Personen wird nach Massgabe der Ausscheideordnung abgebaut. B. Der neue Bestand der seither Eingetretenen wird gemäss Formel IVa auf die verschiedenen Altersstufen verteilt. Die normale Altersverteilung (im B. Z.) wird durch Auswertung der Gleichung IVb erreicht.

Die Rechnung ist für die Stichjahre:

$$(t) = \quad 0 \quad \quad 9 \quad \quad 19 \quad \quad 29 \quad \quad 39$$

also auf Ende der Ka-

lenderjahre 1923 1932 1942 1952 1962 durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind in Figur 6 dargestellt.

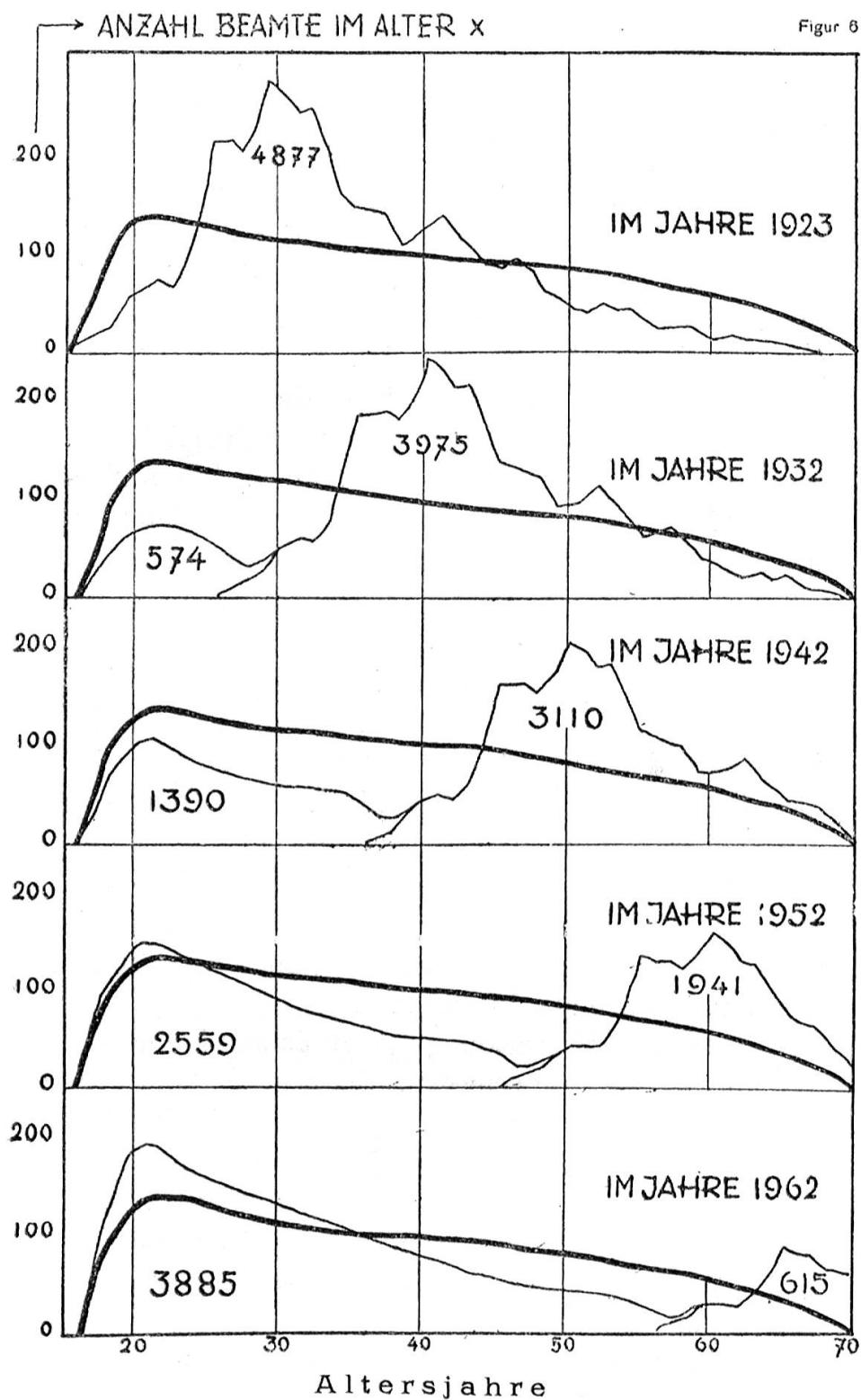
Es zeigt sich bei Beginn der Beobachtung eine ausgeprägte Häufung der Personen in der Altersgruppe von 25—35 Jahren. Diese Erscheinung ist auf die gewaltige

Verkehrszunahme vor dem Kriege und die dadurch bedingte Personalvermehrung zurückzuführen. Mit dieser beobachteten Altersverteilung wird die Normalverteilung des B. Z. verglichen, die einen geebneten Verlauf aufweist, mit einem Gipfel im höchsten Eintrittsalter. Die Darstellung zeigt, wie während der Nachkriegszeit durch die Zurückhaltung in der Neuaufnahme ein Ausfall an jüngerem Personal entstanden ist.

Nach neun Jahren erscheint der alte Bestand etwas vermindert. Die auffällige Häufung der Mitglieder ist in höhere Altersstufen verschoben worden. Durch Neuzugang ist ein Bestand von jungen Beamten entstanden der die Tendenz aufweist, sich dem Typus der normalen Altersverteilung anzupassen. Nach weiteren zehn Jahren haben sich diese Erscheinungen noch schärfer ausgeprägt.

Nach abermals zehn Jahren ist nur noch ein kleiner Rest des alten Bestandes vorhanden, der aber noch den inzwischen ins Alter 60 verschobenen Gipfel aufweist. Der Bestand der Neuen überwiegt. Der Ausfall im Personalbestand durch zeitweise Beschränkung der Aufnahmen konnte jedoch nicht verwischt werden, und schon zeigt sich, dass der schroffe Gipfel des alten Bestandes durch eine neue, etwas ausgeglichene Häufung der Zugetretenen abgelöst wird.

Nach einer Entwicklung von 40 Jahren ist der alte Bestand nahezu ausgeschieden. Der neue Bestand weist nun selbst eine Häufung der Mitglieder auf, die allerdings weniger scharf ausgeprägt ist als jene des alten Bestandes zu Beginn der Entwicklung. Diese Häufung wird nun ihrerseits die Wanderung durch die Altersjahre antreten und wird nach ihrem Ausscheiden von einer neuen, noch flacheren Kuppe abgelöst, so dass nach ungestörter Weiterentwicklung die normale Altersverteilung des Beharrungszustandes mehr und mehr erreicht wird.



Postbeamte: Entwicklung der Altersverteilung, verglichen mit der normalen Verteilung im Beharrungszustande

VI. Die Entwicklung der eidgenössischen Versicherungskasse zum Beharrungszustand.

Die früheren Abschnitte haben Beispiele für rechnungsmässige Entwicklungen von Vorgängen gebracht. Wenn jene Darstellungen auch schöne Schwingungsverläufe zeigen und die Beziehungen der Entwicklungsbewegung zur stationären Grenze sehr deutlich hervortreten lassen, so besitzen sie doch meist nicht die gewünschte Überzeugungskraft. Man betrachtet sie eben doch als rein theoretische Ergebnisse.

Es wurde früher schon erwähnt, dass man bloss in den seltensten Fällen über Beobachtungsergebnisse verfügt, die eine ausgedehnte und durch äussere Einflüsse ungestörte Entwicklung zu vermitteln vermögen. Speziell die E. V. K., die am 1. Januar 1921 ihren Betrieb aufnahm und besonders in den ersten Jahren unter den störenden Wirkungen der Nachkriegszeit zu leiden hatte, verfügt nicht über Erfahrungen, welche ein ausgeprägtes Entwicklungsbild der ganzen Einrichtung bieten. Trotz dieser ungünstigen Umstände lässt sich aber für gewisse Einzelvorgänge schon nach der kurzen Zeitspanne von acht Betriebsjahren eine ausgeprägte Annäherung gegen die theoretisch berechnete Grenze hin erkennen. Wir möchten unsere Ausführungen mit der Mitteilung einiger solcher Beobachtungen abschliessen.

Vorerst kann darauf hingewiesen werden, dass die vier nach der rechnerischen Ermittlung der zu erwartenden Weiterentwicklung vorgenommenen Beobachtungen auf Ende 1925, 1926, 1927 und 1928 gut mit der Vorausberechnung übereinstimmen.

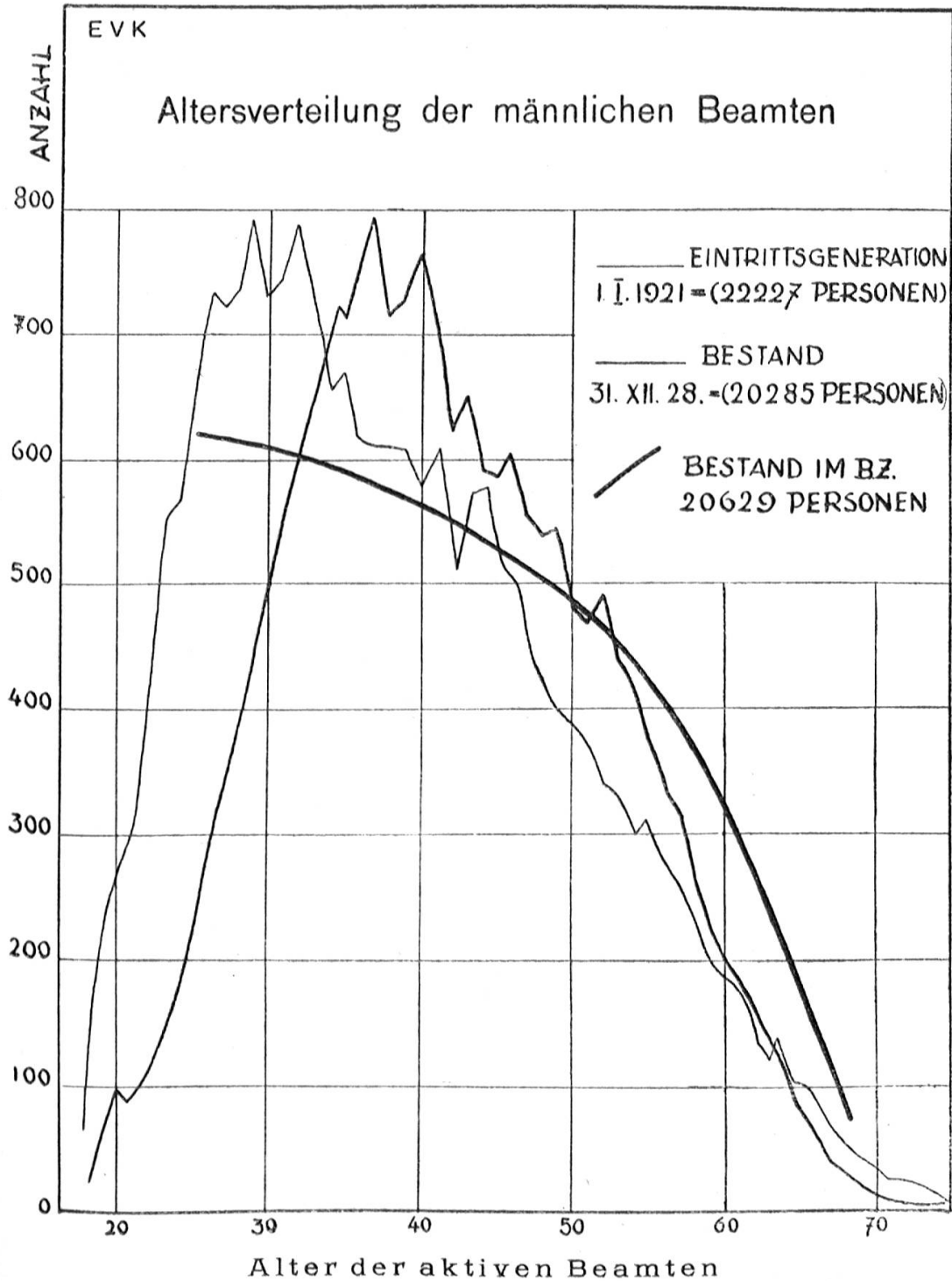
Der Vergleich kann aus den bereits vorgelegten Figuren gezogen werden. Ihnen ist auch zu entnehmen, dass die besonderen Verhältnisse der ersten Jahre 1921

bis 1924 recht einschneidende Störungen brachten. Der Beginn der späteren, verhältnismässig ruhigen Abwicklung der Ereignisse deutet aber schon die Richtung der Entwicklung zum Beharrungszustande an.

Deutlicher geht eine solche Entwicklung hervor aus der Beobachtung der Altersverteilung der Beamten der E. V. K. Wie oben bereits erwähnt, wurde zu unserer Budgetberechnung vorausgesetzt, dass dieser Bestand im B. Z. 20,629 Beamte umfasse. Deren Altersverteilung entspricht einer Aktivitätsordnung unter Berücksichtigung des Rücktrittsalters 70. Diese normale Altersverteilung wird in Fig. 7 verglichen mit der bei Eröffnung der Kasse (1. Januar 1921) festgestellten. Es zeigt sich hier wieder die nämliche Erscheinung, auf die bereits bei der Darstellung des Postbeamtenbestandes hingewiesen wurde: Die beobachtete Verteilung weicht von der normalen auffällig ab, indem die Altersklassen von 25—35 Jahren übermässig besetzt erscheinen. Die rechnungsmässige Weiterentwicklung, wie wir sie für eine Verteilung von solchem Typus soeben durchgeführt haben, hat gezeigt, dass dieser Berg im Laufe der Entwicklung gegen das höhere Alter hin wandern muss. Diese Voraussage wird bestätigt durch die Beobachtungen bei der eidgenössischen Kasse. Vergleichen wir in Figur 7 die Altersverteilung am 1. Januar 1921 mit jener auf Ende 1928, so zeigt sich deutlich die theoretisch erwartete Verschiebung. Aus der Darstellung geht ferner hervor, wie durch den Personalabbau der Jahre 1921 bis 1924 die älteren Beamten entfernt worden und andererseits durch die gewaltige Beschränkung der Neuaufnahmen die jüngeren Altersstufen sozusagen unbesetzt geblieben sind.

Die Fortsetzung dieser Verschiebung in der Altersverteilung wird die Häufung mehr und mehr in die Alters-

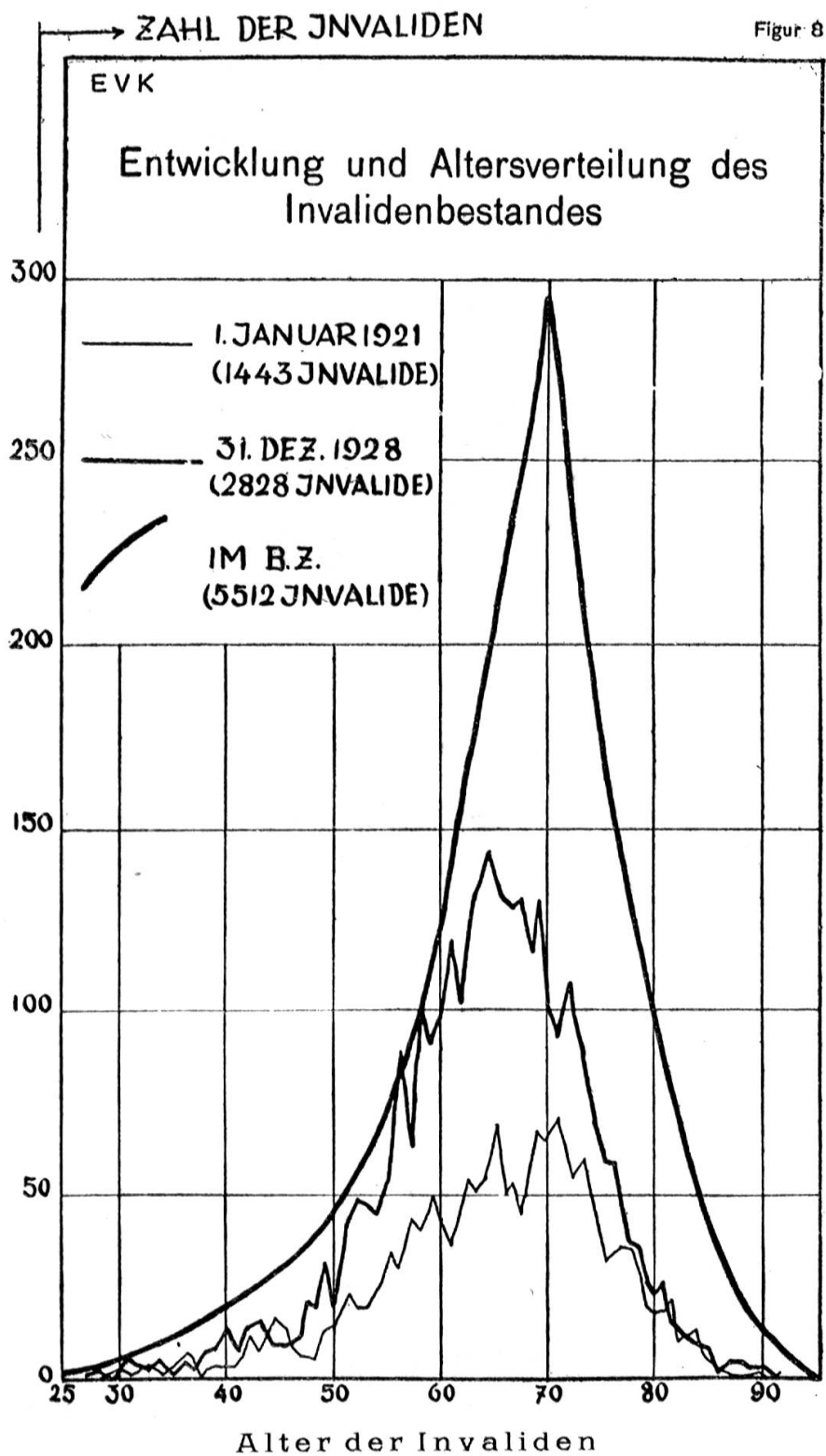
Figur 7



stufen mit grosser Sterbens- und Invalidierungsintensität schieben. Dadurch muss die Zahl der Ausscheidungsfälle und entsprechend jene der Erneuerungen anwachsen. Andererseits werden die Kassenlasten grösser, so dass auch das Deckungskapital ansteigen muss. Wird dann im Laufe der Zeit diese Häufung allmählich abgelöst durch einen neu entstandenen Überschuss an jungen Versicherten, dann sinkt die Zahl der Neueintritte und die Kassenlast wieder. Aus der wellenartigen Entwicklung des einen Vorganges ergibt sich auf diese Weise zwangsläufig der Schwingungscharakter des abhängigen Vorganges; Zusammenhänge, wie sie sich bereits aus der rechnungsmässigen Darstellung ergeben haben.

Als weiteres Beispiel möchten wir die Entwicklung des Invalidenbestandes vorführen. Wir haben weiter oben angedeutet, wie der Gesamtbestand für den B. Z. berechnet werden kann. Es ergab sich dort, dass in der eidgenössischen Kasse dieser Bestand 5512 Invalide umfassen wird. Die Rechnung liess auch deren Altersverteilung erkennen. Sie wird in Figur 8 vor Augen geführt.

Bei Eröffnung der Kasse wurde ein gewisser Bestand von Rentenbezüglern (die sogenannten Rücktrittsgehaltsbezüger) übernommen. Die Altersverteilung dieser 961 Rentner geht ebenfalls aus Fig. 8 hervor. Der Anfangsbestand betrug also noch nicht einmal ein Fünftel des zu erwartenden Grenzbestandes. Da aber oft geglaubt wird, dass im Jahre 1921 die Personalbestände doch längst voll entwickelt gewesen seien, wird leicht die Prophezeiung einer so bedeutenden Zunahme des Rentnerbestandes (von 961 auf 5512 Bezüger) als übertrieben missachtet. Aber schon die kurze Spanne von acht Betriebsjahren verleiht durch ihre Ergebnisse unserer Aussage einen besonderen Nachdruck. Im Jahre



1928 wurden nämlich 2828 Invalide gezählt, d. h. schon mehr als die Hälfte des Grenzbestandes. Deren Altersverteilung wird ebenfalls in Figur 8 dargestellt. Ein Vergleich mit der Verteilung im B. Z. zeigt, wie schon heute die Altersstruktur den Typus der Grenzkurve angenommen hat. Die in acht Jahren festgestellte Zunahme sowohl des Gesamtbestandes wie auch der Besetzung der einzelnen Altersklassen bestätigt die vorausberechnete Weiterentwicklung zum Beharrungszustande in allen Teilen. Aus der Figur geht ferner hervor, wie vorerst die jüngeren Altersstufen des Invalidenbestandes besetzt werden; erst im Laufe der Zeit wird durch die Alterung der Rentner auch die rechte Hälfte des Grenzbestandes aufgefüllt. Heute ist für die jüngeren Jahrgänge die Grenze bereits erreicht. Und die im grossen und ganzen festzustellende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und rechnermässiger Grenze gibt ihrerseits eine Bestätigung für die Richtigkeit der Rechnungsgrundlagen.

Diese Beispiele liessen sich noch vermehren, die vorliegenden Mitteilungen mögen aber genügen, um darzutun, wie auch nach verhältnismässig kurzen Beobachtungsintervallen und mit geringem Erfahrungsmaterial die Entwicklung gewisser Vorgänge zu ihrer theoretisch ermittelten Grenzlage verfolgt werden kann.

* * *

Die vorliegenden Ausführungen haben versucht, die praktische Auswertung der Moserschen Grundformel für Vorgänge in offenen, sich erneuernden Gesamtheiten anzudeuten. Es erübrigt sich, besonders hervorzuheben, von welcher Wichtigkeit die Kenntnis der Entwicklungseinrichtung einer Kasse ist. Leider reichen aber die Kassenerfahrungen nur selten aus, um

aus ihnen Schlüsse für ihre künftige Bewegung und deren Grenze zu ziehen. Eine rechnungsmässige Weiterentwicklung der Vorgänge erscheint aber in den meisten Fällen als recht umständlich; und eine solche lässt übrigens auch erst bei sehr weiter Ausdehnung einen Beharrungszustand erkennen. Wenn es den vorliegenden Ausführungen gelungen ist, zu zeigen, dass wohl aber umgekehrt die Anwendung der Moserschen Beziehung die Bestimmung der Grenzlage eines Vorganges in sehr einfacher und rascher Weise gestattet und dass die Kenntnis dieser Grenzen die Entwicklungsrichtung der Kasse vermittelt, dann haben sie ihr Ziel erreicht.

Bern, den 14. September 1928.
