Der Risikoausgleich zwischen Erlebensfall- und Todesfallversicherung bei der gemischten Versicherung

Autor(en): **Aeppli, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **23 (1928)**

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967459

B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

Der Risikoausgleich zwischen Erlebensfall- und Todesfallversicherung bei der gemischten Versicherung.

Von Dr. **A. Aeppli**, Zürich.

Wenn wir voraussetzen, dass die zugrunde gelegte Absterbeordnung und der gewählte Zinsfuss zutreffend seien, so können wir die Fragen nach den zufälligen Schwankungen der versicherungstechnischen Grössen durch Übertragung des Wahrscheinlichkeitsvorganges auf das Bernoullische Urnenschema und Anwendung bekannter Sätze beantworten. Im Hinblick auf die praktische Anwendung der Formeln werden wir die sogenannte diskontinuierliche Methode anwenden, das heisst, wir nehmen an, dass die Todesfälle immer unmittelbar vor Erreichen des um 1 Jahr höheren Alters erfolgen.

1. Betrachten wir als erstes Beispiel die $n$jährige Erlebensfallversicherung auf den Betrag 1 eines heute $x$jährigen gegen Entrichtung einer Einmalprämie ${}_nE_x$. Der Barwert der Auszahlung des Versicherers, bezogen auf den Beginn der Versicherung, den wir mit ${}_n\underline{E}_x$ bezeichnen wollen, ist eine im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung veränderliche Grösse, d. h. abhängig vom Zufall. Sie wird in der Tat einen der beiden Werte v^n oder o annehmen, je nachdem der Versicherte nach n Jahren noch lebt oder gestorben ist. Bezeichnen wir

die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieser zwei Ereignisse mit ${}_np_x$ resp. ${}_nq_x$, so gilt ${}_np_x + {}_nq_x = 1$ und für die mathematische Erwartung der Variabeln ${}_n\underline{E}_x$ finden wir

$$[{}_n\underline{E}_x] = v^n \cdot {}_np_x + o \cdot {}_nq_x = v^n \cdot {}_np_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x$$

wie ohne weiteres verständlich ist.

Die Differenz ${}_n\underline{E}_x - {}_nE_x$ bedeutet den Barwert des Verlustes des Versicherers, hervorgerufen durch den tatsächlichen Ausfall des versicherten Ereignisses; dieser kann die zwei Werte annehmen:

$$v^n - {}_nE_x = v^n \cdot {}_nq_x \quad \text{oder} \quad - {}_nE_x = - v^n \cdot {}_np_x$$

je nachdem der Versicherte nach n Jahren noch lebt oder gestorben ist, und bedeutet im zweiten Falle einen Gewinn des Versicherers. Die mathematische Erwartung dieses Verlustes ist Null, dadurch wird die Bezeichnung Nettoeinlage für die Grösse ${}_nE_x$ gerechtfertigt. Für den Versicherer ist nun aber das Verhalten der Grösse ${}_n\underline{E}_x - {}_nE_x$ von ausschlaggebender Bedeutung für die Beurteilung des mit dem Abschlusse der betrachteten Versicherung übernommenen Risikos: je grösser die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese Differenz einen bestimmten Betrag überschreitet (je grösser die Streuung dieser Differenz ist), um so riskanter wird für ihn die Versicherung. Als Mass für diese Streuung benutzt man vorteilhaft die mathematische Erwartung des Quadrates dieser Differenz:

$$\mu^2({}_n\underline{E}_x - {}_nE_x) = \mu^2({}_n\underline{E}_x) = [({}_n\underline{E}_x - {}_nE_x)^2] = [{}_n\underline{E}_x^2] - {}_nE_x^2$$

$\mu({}_n\underline{E}_x)$, d. h. die Quadratwurzel aus der mathematischen Erwartung des Fehlerquadrates der Variabeln ${}_n\underline{E}_x$ bezeichnet man als Schwankungsmass von ${}_n\underline{E}_x$;

und in der Versicherungstechnik als totales mittleres Risiko der betrachteten Versicherung.

Nun ist

$$\left[{}_{n}\underline{E}_{x}^{2}\right] = v^{2n} \cdot {}_{n}p_{x} + o \cdot {}_{n}q_{x} = v^{2n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{2(x+n)}}{l_{x}\, v^{2x}} =$$

$$= D'_{x+n} : D'_{x} = {}_{n}E'_{x}$$

folglich:

$$\mu^2\left({}_{n}\underline{E}_{x} - {}_{n}E_{x}\right) = \mu^2\left({}_{n}\underline{E}_{x}\right) = {}_{n}E'_{x} - {}_{n}E^{2}_{x} \qquad (1)$$

dabei bedeutet:

$${}_{n}E'_{x} = D'_{x+n} : D'_{x}$$

und

$$D'_{x} = l_{x} \cdot v^{2x}$$

2. Für die $n$jährige Todesfallversicherung auf den Betrag 1 eines heute $x$jährigen, abgeschlossen gegen Entrichtung einer Einmalprämie $A^{1}_{x\,\overline{n|}}$, können wir entsprechende Überlegungen anstellen. Bezeichnen wir den Barwert der Auszahlung des Versicherers mit $\underline{A}^{1}_{x\,\overline{n|}}$, so ist diese Grösse wieder eine zufällige Variable, und wir finden:

$$\left[\underline{A}^{1}_{x\,\overline{n|}}\right] = A^{1}_{x\,\overline{n|}}$$

$$\mu^2\left(\underline{A}^{1}_{x\,\overline{n|}} - A^{1}_{x\,\overline{n|}}\right) = \mu^2\left(\underline{A}^{1}_{x\,\overline{n|}}\right) = A'^{1}_{x\,\overline{n|}} - A^{2\,1}_{x\,\overline{n|}} \qquad (2)$$

dabei ist

$$A^{1}_{x\,\overline{n|}} = (M_{x} - M_{x+n}) : D_{x}$$

$$A'^{1}_{x\,\overline{n|}} = (M'_{x} - M'_{x+n}) : D'_{x}$$

$$C_{x} = d_{x} \cdot v^{x+1} \quad ; \quad M_{x} = \Sigma\, C_{x}$$

$$C'_{x} = d_{x} \cdot v^{2(x+1)} \quad ; \quad M'_{x} = \Sigma\, C'_{x}$$

Es wird also, wie schon oben bemerkt wurde, vorausgesetzt, dass die Sterbefälle am Schlusse des Jahres erfolgen.

3. Fassen wir die gemischte Versicherung auf als zwei getrennte gleichzeitige Versicherungen auf die gleiche Person, wie sie unter 1. und 2. betrachtet wurden, und bezeichnen die gesamte zu entrichtende Einmalprämie mit $A_{x\overline{n}|}$, den Barwert der Auszahlung des Versicherers dagegen mit $\underline{A}_{x\overline{n}|}$, wobei der Querstrich wieder die zufällige Variable kennzeichnet, so finden wir

$$[\underline{A}_{x\overline{n}|}] = [\underline{A}^1_{x\overline{n}|} + {}_n\underline{E}_x] = A^1_{x\overline{n}|} + {}_nE_x = A_{x\overline{n}|}$$

$$\mu^2(\underline{A}_{x\overline{n}|}) = \mu^2(\underline{A}^1_{x\overline{n}|} + {}_n\underline{E}_x) = [(\underline{A}^1_{x\overline{n}|} + {}_n\underline{E}_x)^2] - [\underline{A}^1_{x\overline{n}|} + {}_n\underline{E}_x]^2 =$$

$$= A'^1_{x\overline{n}|} + {}_nE'_x - A^2_{x\overline{n}|} = A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|}$$

dabei wurde von der offenbar richtigen Beziehung $[\underline{A}^1_{x\overline{n}|} \cdot {}_n\underline{E}_x] = 0$ Gebrauch gemacht.

Also gilt die zu (1) und (2) analoge Formel

$$\mu^2(\underline{A}_{x\overline{n}|} - A_{x\overline{n}|}) = \mu^2(\underline{A}_{x\overline{n}|}) = A'_{x\overline{n}|} - A^2_{x\overline{n}|} \quad (3)$$

4. Zum Vergleich der verschiedenen Versicherungsarten in bezug auf das mit ihnen verbundene Zufallsrisiko eignet sich als Masstab am besten das relative mittlere Risiko, d. h. das totale mittlere Risiko pro Einheit des Barwertes der Prämieneinnahme; denn eine Versicherung ist für den Versicherer um so günstiger, je kleiner das Risiko ist, das er mit einer gegebenen Prämieneinnahme auf sich nehmen muss. Ist z. B. für die erste von zwei Versicherungen das relative mittlere Risiko doppelt so gross wie für die zweite, so kann für die letztere die Prämieneinnahme doppelt so gross sein wie für die erste Versicherung, wenn die mittleren

Risiken der zwei Versicherungen gleich gross sein sollen.

Die Tabellen 4 bis 6 geben zahlenmässigen Aufschluss über die relativen mittleren Risiken der drei oben betrachteten Versicherungsarten:

$$\mu\left(\underline{{}_{n}E_{x}} - {}_{n}E_{x}\right) : {}_{n}E_{x} = \sqrt{\left\{{}_{n}E'_{x} - {}_{n}E^{2}_{x}\right\}} : {}_{n}E_{x} \tag{4}$$

$$\mu\left(\underline{A^{1}_{x\overline{n|}}} - A^{1}_{x\overline{n|}}\right) : A^{1}_{x\overline{n|}} = \sqrt{\left\{A'^{1}_{x\overline{n|}} - A^{2\,1}_{x\overline{n|}}\right\}} : A^{1}_{x\overline{n|}} \tag{5}$$

$$\mu\left(\underline{A_{x\overline{n|}}} - A_{x\overline{n|}}\right) : A_{x\overline{n|}} = \sqrt{\left\{A'_{x\overline{n|}} - A^{2}_{x\overline{n|}}\right\}} : A_{x\overline{n|}} \tag{6}$$

Man sieht, dass die Werte (6) durchwegs kleiner sind als die entsprechenden Werte (4) und (5). Dies rührt davon her, dass bei der gemischten Versicherung ein Risikoausgleich zwischen ihren zwei Bestandteilen, der Erlebensfall- und der Todesfallversicherung, stattfindet.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, in welchem Verhältnis die Erlebensfall- und Todesfallsumme zu einer «gemischten Versicherung» vereinigt werden müssen, um das relative mittlere Risiko der letzteren zu einem Minimum zu machen. Wir suchen also diejenige verallgemeinerte gemischte Versicherung, die für den Versicherer am günstigsten ist; d. h. bei welcher er für eine gegebene Prämieneinnahme ein möglichst kleines Risiko übernehmen muss. Es handelt sich also darum, zwei Koeffizienten, α_1 und α_2, so zu bestimmen, dass für eine gegebene, konstante Gesamteinlage

$$E = \alpha_1 \cdot {}_{n}E_{x} + \alpha_2 \cdot A^{1}_{x\overline{n|}}$$

das Quadrat des mittleren Risikos:

$$\mu^2\left\{\alpha_1\, \underline{{}_{n}E_{x}} + \alpha_2\, \underline{A^{1}_{x\overline{n|}}}\right\}$$

ein Minimum wird.

Um diese Extremalaufgabe allgemein zu lösen, bezeichnen wir die beiden zufälligen Variabeln, die wir betrachten, mit x_1 und x_2 und deren mathematische Erwartungen mit A_1 und A_2.

Dann muss sein

$$E = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \text{Konstant}$$

und zugleich

$$\mu^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \sum_{\mu=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{2} \alpha_\mu \alpha_\nu \mu_{\mu\nu} \quad \text{ein Minimum.}$$

Dabei bedeutet

$$\mu_{\mu\nu} = \mu (x_\mu \cdot x_\nu) = [x_\mu \cdot x_\nu] - [x_\mu] \cdot [x_\nu]$$

Bilden wir nach Lagrange, unter Benutzung eines Parameters K, die Hauptfunktion:

$$F \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{2} \alpha_\mu \alpha_\nu \mu_{\mu\nu} - K \sum_{\mu=1}^{2} \alpha_\mu A_\mu$$

so muss für die gesuchten Werte α_1 und α_2 gelten:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = o \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0 \,;$$

oder ausgeführt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \mu_{11} + \alpha_2 \mu_{12} = KA_1 \\ \alpha_1 \mu_{21} + \alpha_2 \mu_{22} = KA_2 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

daraus folgt:

$$\alpha_1 = K \frac{\begin{vmatrix} A_1 & \mu_{12} \\ A_2 & \mu_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}} \text{ und } \alpha_2 = K \frac{\begin{vmatrix} \mu_{11} & A_1 \\ \mu_{12} & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & \mu_{12} \\ A_2 & \mu_{22} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} \mu_{11} & A_1 \\ \mu_{21} & A_2 \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}$$

so folgt $\alpha_1 = K \cdot \frac{D_1}{D}$; $\alpha_2 = K \cdot \frac{D_2}{D}$; $\alpha_1 : \alpha_2 = D_1 : D_2$

Um K zu bestimmen, setzen wir diese Werte von α_1 und α_2 in den Ausdruck für E ein:

$$E = \frac{K}{D} \{D_1 A_1 + D_2 A_2\} = K \cdot \frac{R}{D}$$

dabei ist: $R = D_1 A_1 + D_2 A_2 = - \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & A_1 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & A_2 \\ A_1 & A_2 & 0 \end{vmatrix}$

Den Wert μ_o^2 des gesuchten Minimums von μ^2 finden wir, indem wir die Gleichungen (a) der Reihe nach mit α_1 resp. α_2 multiplizieren und die so entstandenen, erweiterten Gleichungen addieren:

$$\mu_o^2 = \sum_{\mu=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{2} \alpha_\mu \cdot \alpha_\nu \, \mu_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{2} K \alpha_\mu A_\mu = K \cdot E = K^2 \cdot \frac{R}{D}$$

folglich ist $\mu_o = K \sqrt{\frac{R}{D}}$

oder auch $\frac{\mu_o}{E} = \sqrt{\frac{D}{R}}$

und $\alpha_1 = E \cdot \frac{D_1}{R}$; $\alpha_2 = E \cdot \frac{D_2}{R}$ (b)

Um noch zu zeigen, dass sich für die gefundenen Werte von α_1 und α_2 wirklich ein Minimum von $\mu^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ ergibt, setzen wir

$$\bar{a}_1 = a_1 + \beta_1 \,; \quad \bar{a}_2 = a_2 + \beta_2$$

Dann ist

$$\mu^2 (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) = \Sigma\,\Sigma\,\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \mu_{\mu\nu} = \Sigma\,\Sigma\,(a_\mu + \beta_\mu)(a_\nu + \beta_\nu)\,\mu_{\mu\nu} =$$
$$= \Sigma\,\Sigma\,a_\mu a_\nu \mu_{\mu\nu} + \Sigma\,\Sigma\,(a_\mu \beta_\nu + a_\nu \beta_\mu)\,\mu_{\mu\nu} + \Sigma\,\Sigma\,\beta_\mu \beta_\nu \mu_{\mu\nu} =$$
$$= \mu_o^2 + 2\,\Sigma\,\Sigma\,a_\mu \beta_\nu \mu_{\mu\nu} + \mu^2 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

Nun gilt aber

$$\sum_{\mu=1}^{2} a_\mu \mu_{\mu\nu} = K \cdot A_\nu$$

folglich

$$\sum_{\nu=1}^{2} \sum_{\mu=1}^{2} a_\mu \beta_\nu \mu_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{2} K A_\nu \beta_\nu$$

d. h.

$$\mu^2 (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) = \mu_o^2 + 2\,K \sum_{\nu=1}^{2} \beta_\nu A_\nu + \mu^2 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

Setzen wir noch voraus, dass

$$\sum_{\mu=1}^{2} \bar{a}_\mu A_\mu = E$$

so folgt

$$\sum_{\mu=1}^{2} \beta_\mu A_\mu = 0$$

d. h.

$$\mu^2 (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2) = \mu_o^2 + \mu^2 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) > \mu_o^2$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichungen (*b*) im allgemeinern Fall, d. h. vorausgesetzt, dass zwischen den beiden Variabeln x_1 und x_2 keine gesetzmässige Abhängigkeit besteht, die einzigen Werte α_1, α_2 liefern, welche den beiden gestellten Bedingungen genügen.

6. Wenden wir die gefundenen Resultate an auf unser spezielles Problem aus Nr. 4; d. h. setzen wir

$$x_1 = {}_nE_x\,; \quad x_2 = A^{1}_{x\overline{n|}}$$

so folgt

$$A_1 = [x_1] = {}_nE_x\,; \quad A_2 = [x_2] = A^{1}_{x\overline{n|}}$$

$$\mu_{11} = {}_nE'_x - {}_nE^2_x = \mu_1^2\,; \quad \mu_{22} = A'^{1}_{x\overline{n|}} - A^{2\,1}_{x\overline{n|}} = \mu_2^2$$

$$\mu_{12} = \mu\left({}_nE_x \cdot A^{1}_{x\overline{n|}}\right) = -\,{}_nE_x \cdot A^{1}_{x\overline{n|}}$$

Daraus findet man

$$D = \mu_{11}\,\mu_{22} - \mu_{12}^2 = {}_nE'_x \cdot A'^{1}_{x\overline{n|}} - \left({}_nE'_x \cdot A^{2\,1}_{x\overline{n|}} + A'^{1}_{x\overline{n|}} \cdot {}_nE^2_x\right)$$

$$D_1 = A_1\,\mu_{22} - A_2\,\mu_{12} = {}_nE_x \cdot A'^{1}_{x\overline{n|}}$$

$$D_2 = A_2\,\mu_{11} - A_1\,\mu_{21} = A^{1}_{x\overline{n|}} \cdot {}_nE'_x$$

$$R = D_1\,A_1 + D_2\,A_2 = {}_nE'_x\,A^{2\,1}_{x\overline{n|}} + A'^{1}_{x\overline{n|}} \cdot {}_nE^2_x$$

Es gilt daher die einfache Beziehung:

$$D + R = {}_nE'_x \cdot A'^{1}_{x\overline{n|}}$$

Als Mass der Strammheit des Zusammenhanges der beiden zufälligen Variabeln ${}_nE_x$ und $A^{1}_{x\overline{n|}}$ benutzt man zweckmässig ihren Korrelationskoeffizienten:

$$\varrho = \frac{\mu_{12}}{\mu_1 \cdot \mu_2} = -\,\frac{{}_nE_x \cdot A^{1}_{x\overline{n|}}}{\mu_1 \cdot \mu_2}\,;$$

weil dieser negativ ist, müssen D_1 und D_2, also auch α_1 und α_2, positiv sein.

Tabelle (7) enthält nun in $\mu_o : E = \sqrt{D : R}$ die gesuchten Minimalwerte der relativen mittleren Risiken. Die folgende Tabelle (8) gibt an, wie oft diese Zahlen in den entsprechenden relativen mittleren Risiken der gewöhnlichen gemischten Versicherung enthalten sind. Sie zeigen, dass die Prämieneinnahme durch zweckmässige Wahl des Verhältnisses $\alpha_2 : \alpha_1$ in einzelnen Fällen gegenüber der gewöhnlichen gemischten Versicherung mehr als verdoppelt werden kann, ohne dass dadurch das übernommene Zufallsrisiko eine Steigerung erfahren würde. (9) enthält die dazu nötigen Verhältniszahlen

$$\alpha_2 : \alpha_1 = D_2 : D_1$$

der Todesfall- und Erlebensfallsummen. Schliesslich gibt (10) die Werte von ϱ, die zeigen, dass der Risikoausgleich zwischen Erlebensfall- und Todesfallversicherung ein immer besserer ist, je grösser die Strammheit der beiden Variabeln ist (kurze Dauer und niedriges Eintrittsalter).

7. Wir wollen nun dazu übergehen, die gleiche Frage für Versicherungen, abgeschlossen gegen Entrichtung von jährlichen gleichbleibenden Prämien, zu beantworten. Zu diesem Zwecke benutzen wir die allgemeinen Resultate aus Nr. 5 und betrachten die beiden zufälligen Variabeln:

$$x_1' = P_1 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n}|} - {}_n\underline{E}_x + {}_nE_x$$

$$x_2' = P_2 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n}|} - \underline{A}^1_{x\,\overline{n}|} + A^1_{x\,\overline{n}|}$$

oder allgemein:

$$x_1' = P_1 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n}|} - x_1 + A_1$$

$$x_2' = P_2 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n}|} - x_2 + A_2$$

dabei bedeuten

$$P_1 = \frac{A_1}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{A_2}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

die beiden in Betracht zu ziehenden jährlichen Prämien.
Jetzt folgt zunächst

$$[x_1'] = A_1 \,; \quad [x_2'] = A_2$$

$$\mu\,(x_1') = \mu\,(P_1\,\underline{\mathfrak{a}}_{x\,\overline{n}|} - x_1) = \mu_1'$$

$$\mu\,(x_2') = \mu\,(P_2\,\underline{\mathfrak{a}}_{x\,\overline{n}|} - x_2) = \mu_2'$$

Die Quadrate der mittleren Risiken können wir folgendermassen umformen:

$$\mu^2\,(x_1') = \mu_{11}' = \mu^2\,(P_1\,\underline{\mathfrak{a}}_{x\,\overline{n}|} - x_1) = \mu^2 \left\{ \frac{P_1}{d}\,(1 - \underline{A}_{x\,\overline{n}|}) - \underline{A}_1 \right\} =$$

$$= \mu^2 \left\{ \frac{P_1}{d} \cdot \underline{A}_{x\,\overline{n}|} + \underline{A}_1 \right\} = \left(\frac{P_1}{d} \right)^2 \mu^2\,(\underline{A}_{x\,\overline{n}|}) + \frac{2\,P_1}{d}\,\mu\,(\underline{A}_{x\,\overline{n}|} \cdot \underline{A}_1) +$$

$$+ \mu^2\,(\underline{A}_1)$$

Nun ist aber $\quad \dfrac{P_1}{d} = \dfrac{A_1}{1 - A_{x\,\overline{n}|}} \quad$ daher findet man

$$\mu_{11}' = \frac{1}{(1 - A_{x\,\overline{n}|})^2} \left\{ A_1^2\,\mu^2\,(\underline{A}_{x\,\overline{n}|}) + 2\,A_1\,(1 - A_{x\,\overline{n}|})\,\mu\,\{\underline{A}_{x\,\overline{n}|} \cdot \underline{A}_1\} + \right.$$

$$\left. + (1 - A_{x\,\overline{n}|})^2\,\mu^2\,(\underline{A}_1) \right\}$$

und entsprechend gilt auch

$$\mu_{22}' = \frac{1}{(1 - A_{x\,\overline{n}|})^2} \left\{ A_2^2\,\mu^2\,(\underline{A}_{x\,\overline{n}|}) + 2\,A_2\,(1 - A_{x\,\overline{n}|})\,\mu\,(\underline{A}_{x\,\overline{n}|} \cdot \underline{A}_2) + \right.$$

$$\left. + (1 - A_{x\,\overline{n}|})^2\,\mu^2\,(\underline{A}_2) \right\}$$

Durch eine ähnliche Überlegung findet man:

$$\mu'_{12} = \frac{1}{(1-A_{\overline{x n|}})^2} \Big\{ A_1 A_2 \mu^2 (\underline{A}_{\overline{x n|}}) + A_1 (1-A_{\overline{x n|}}) \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_2) + $$
$$+ A_2 (1-A_{\overline{x n|}}) \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_1) + (1-A_{\overline{x n|}})^2 \mu (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2) \Big\}$$

Jetzt folgt aus

$$D'_1 = A_1 \mu'_{22} - A_2 \mu'_{12}$$
$$D'_2 = A_2 \mu'_{11} - A_1 \mu'_{21}$$

durch Einsetzen der gefundenen Werte

$$D'_1 = D_1 + \frac{A_2}{(1-A_{\overline{x n|}})} \cdot \Big\{ A_1 \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_2) - A_2 \cdot \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_1) \Big\}$$

$$D'_2 = D_2 + \frac{A_1}{1-A_{\overline{x n|}}} \cdot \Big\{ A_2 \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_1) - A_1 \cdot \mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_2) \Big\}$$

$$R' = A_1 D'_1 + A_2 D'_2 = A_1 D_1 + A_2 D_2$$

$$\text{d. h. } R' = R$$

Da für den allgemeinen Fall der Wert von D' keine einfache Form annimmt, verzichten wir darauf, denselben anzugeben. In der folgenden Nummer wollen wir jetzt den uns interessierenden Spezialfall behandeln.

8. Wir fordern

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = x_1 + x_2 = \underline{A}_{\overline{x n|}}$$

Jetzt gilt:

$$\mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_1) = \mu_{11} + \mu_{12}$$
$$\mu (\underline{A}_{\overline{x n|}} \cdot \underline{A}_2) = \mu_{22} + \mu_{21}$$

es ist auch

$$\mu^2 (\underline{A}_{\overline{x n|}}) = \mu_{11} + 2 \mu_{12} + \mu_{22}$$

daher findet man:

$$\mu'_{11} = \mu^2 \left({}_nE_x - P_1 \cdot \mathrm{a}_{x\,\overline{n|}}\right) = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})^2} \left\{\mu_{11} + R - 2\,D_2\right\}$$

$$\mu'_{22} = \mu^2 \left(A^1_{x\,\overline{n|}} - P_2 \cdot \mathrm{a}_{x\,\overline{n|}}\right) = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})^2} \left\{\mu_{22} + R - 2\,D_1\right\}$$

$$\mu'_{12} = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})^2} \left\{\mu_{12} - R + D_1 + D_2\right\}$$

$$D'_1 = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})} \left\{D_1 - R\right\}$$

$$D'_2 = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})} \left\{D_2 - R\right\}$$

Folglich $\alpha'_1 : \alpha'_2 = (D_1 - R) : (D_2 - R)$

weiter gilt: $R' = R\,;\; D' = \dfrac{1}{(1-A_{x\,\overline{n|}})^2} \cdot D$

Für die Koeffizienten α'_1 und α'_2, die angeben, in welchem Verhältnis die Erlebensfall- zur Todesfallsumme steht, findet man

$$\alpha'_1 = K' \cdot \frac{D'_1}{D'} = K'\,(1-A_{x\,\overline{n|}}) \cdot \left\{\frac{D_1 - R}{D}\right\}$$

$$\alpha'_2 = K' \cdot \frac{D'_2}{D'} = K' \cdot (1-A_{x\,\overline{n|}}) \left\{\frac{D_2 - R}{D}\right\}$$

Dabei ist

$$E' = K' \cdot \frac{R'}{D'} = K' \cdot (1-A_{x\,\overline{n|}})^2 \cdot \frac{R}{D}$$

und das gesuchte minimale mittlere Risiko ist gegeben durch

$$\mu'_0 = K' \sqrt{\frac{R'}{D'}} = K' \sqrt{\frac{R}{D}} \cdot (1-A_{x\,\overline{n|}})$$

$$\frac{\mu_o'}{E'} = \sqrt{\frac{D'}{R'}} = \sqrt{\frac{D}{R}} \cdot (1 - A_{x\overline{n|}})$$

d. h. es gilt: $\dfrac{\mu_o'}{E'} = \dfrac{\mu_o}{E} \cdot \dfrac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})}$

Zum Vergleich ziehen wir schliesslich noch das mittlere Risiko der gemischten Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung heran. Dieses findet man am einfachsten folgendermassen:

$$\mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}} - P \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) = \mu^2 \left\{ \underline{A}_{x\overline{n|}} - \frac{P}{d} (1 - \underline{A}_{x\overline{n|}}) \right\} =$$

$$= \mu^2 \left\{ \left(\frac{P}{d} + 1 \right) \cdot \underline{A}_{x\overline{n|}} \right\} = \left(\frac{P}{d} + 1 \right)^2 \mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}})$$

nun ist $\quad P = \dfrac{A_{x\overline{n|}}}{\mathrm{a}_{x\overline{n|}}} \; ; \; \dfrac{P}{d} = \dfrac{A_{x\overline{n|}}}{1 - A_{x\overline{n|}}}$

folglich $\quad \dfrac{P}{d} + 1 = \dfrac{1}{1 - A_{x\overline{n|}}}$

und daher weiter:

$$\mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}} - P \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) = \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})^2} \cdot \mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}})$$

also auch

$$\mu (\underline{A}_{x\overline{n|}} - P \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) = \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})} \cdot \mu (\underline{A}_{x\overline{n|}}) \text{ [1]}$$

---

[1]) Diese Beziehung kann auch aus den Ausdrücken für μ_{11}', μ_{22}' und μ_{12}' direkt hergeleitet werden:

$$\mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}} - P \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) = \mu^2 \left\{ ({}_n\underline{E}_x - P_1 \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) + (\underline{A}^1_{x\overline{n|}} - P_2 \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}}) \right\} =$$

$$= \mu_{11}' + 2\mu_{12}' + \mu_{22}' = \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})^2} \cdot \mu_{11} = \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})^2} \cdot \mu^2 (\underline{A}_{x\overline{n|}})$$

wie bekannt. (Vgl. z. B. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. II; Broggi, Versicherungsmathematik.)

9. Durch die Formeln der vorangehenden Nummer sind wir in den Stand gesetzt, das Problem des Risikoausgleiches bei der gemischten Versicherung auf einfache Weise auch dann zu lösen, wenn die Versicherungen gegen Entrichtung von jährlichen, gleichbleibenden Prämien abgeschlossen werden. Zunächst enthalten die Tabellen 11, 12 und 13 die totalen mittleren Risiken für die Versicherungssumme 1 der Erlebensfall-, reinen Todesfall- und gemischten Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung. Diese Werte könnte man auch bezeichnen als Schwankungsmasse des Barwertes des Verlustes (oder Gewinnes) des Versicherers, hervorgerufen durch den zufälligen Verlauf des versicherten Ereignisses. Die Berechnung stützt sich auf folgende Formeln:

$$\mu^2\left({}_nE_x - P_1 \cdot \mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n}|})^2}\left\{\mu_{11} + R - 2\,D_2\right\} \tag{11}$$

$$\mu^2\left(A^1_{x\,\overline{n}|} - P_2 \cdot \mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n}|})^2}\left\{\mu_{22} + R - 2\,D_1\right\} \tag{12}$$

$$\mu^2\left(A_{x\,\overline{n}|} - P\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) = \frac{1}{(1-A_{x\,\overline{n}|})^2}\left\{\mu^2\left(A_{x\,\overline{n}|}\right)\right\} \tag{13}$$

Die nächsten drei Tabellen enthalten die entsprechenden relativen mittleren Risiken:

$$\mu\left({}_nE_x - P_1\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) : {}_nE_x \tag{14}$$

$$\mu\left(A^1_{x\,\overline{n}|} - P_2\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) : A^1_{x\,\overline{n}|} \tag{15}$$

$$\mu\left(A_{x\,\overline{n}|} - P \cdot \mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}\right) : A_{x\,\overline{n}|} \tag{16}$$

Wir sehen hier, dass in bezug auf das zu übernehmende Risiko auch für Versicherungen mit jährlicher

Prämienzahlung die gemischte Versicherung für den Versicherer im allgemeinen günstiger ist als die entsprechende Erlebensfall- oder temporäre Todesfallversicherung. Nur für niedere Eintrittsalter und kurze Versicherungsdauern ist die Erlebensfallversicherung etwas im Vorsprung gegenüber der gemischten Versicherung.

Tabelle (17) enthält den Minimalwert des relativen mittleren Risikos der verallgemeinerten gemischten Versicherung (Erlebensfall- und Todesfallsumme in beliebigem aber konstantem Verhältnis), abgeschlossen gegen Entrichtung jährlicher gleichbleibender Prämien:

$$\frac{\mu'_o}{E'} = \frac{1}{(1 - A_{x\overline{n|}})} \cdot \sqrt{\frac{D}{R}} \tag{17}$$

Vergleichen wir auch hier wieder diese minimalen relativen mittleren Risiken mit den entsprechenden Werten der gewöhnlichen gemischten Versicherung, so finden wir die in Tabelle (18) enthaltenen Zahlen:

$$\frac{\mu\,(\underline{A}_{x\overline{n|}} - P \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\overline{n|}})}{A_{x\overline{n|}}} : \frac{\mu'_o}{E'} = \frac{\mu\,(\underline{A}_{x\overline{n|}})}{A_{x\overline{n|}}} : \sqrt{\frac{D}{R}}$$

$$= \frac{\mu\,(\underline{A}_{x\overline{n|}})}{A_{x\overline{n|}}} : \frac{\mu_o}{E} \tag{18}$$

Wir sehen also, dass Tabelle (18) identisch ist mit Tabelle (8), welche die entsprechenden Zahlen für Versicherungen mit Einmalprämien enthält. Dieses bemerkenswerte Resultat wollen wir folgendermassen aussprechen: *Durch zweckmässige Wahl des Verhältnisses der Erlebensfall- und Todesfallsumme können wir eine verallgemeinerte gemischte Versicherung bilden, für welche der Barwert der Prämieneinnahme gegenüber der gewöhnlichen gemischten Versicherung in einzelnen Fällen mehr* *als verdoppelt werden kann, ohne dass dadurch das vom Versicherer übernommene Zufallsrisiko eine Steigerung erfahren würde, und zwar ist die erzielte relative Vermehrung des Barwertes der Prämieneinnahme unabhängig davon, ob die Versicherung gegen Entrichtung einer Einmalprämie oder mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung abgeschlossen wird.*

Tabelle (19) enthält die Zahlenwerte des Verhältnisses zwischen Todesfall- und Erlebensfallsumme, für welches der in (18) tabulierte Minimalwert des relativen mittleren Risikos eintritt; in diesem Falle ist also der Risikoausgleich zwischen den zwei Versicherungen der denkbar beste, wenn wir voraussetzen, dass es sich um jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung handelt.

$$a'_2 : a'_1 = D'_2 : D'_1 = (D_2 - R) : (D_1 - R) \qquad (19)$$

Schliesslich gibt (20) den Wert des Korrelationskoeffizienten für die zwei zufälligen Variabeln $({}_{n}\underline{E}_x - P_1 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{n\,\overline{x}|})$ und $(\underline{A}^1_{x\,\overline{n}|} - P_2 \cdot \underline{\mathrm{a}}_{x\,\overline{n}|})$:

$$\varrho' = \frac{\mu'_{12}}{\mu'_1 \cdot \mu'_2} \qquad (20)$$

Es zeigt sich, dass auch hier beständig negative Korrelation vorhanden ist; ϱ' verhält sich ganz ähnlich wie ϱ, nur ist die Strammheit durchwegs eine geringere als für die beiden zufälligen Variabeln ${}_{n}\underline{E}_x$ und $\underline{A}^1_{x\,\overline{n}|}$.

10. Zum Schlusse möchten wir der Hoffnung Ausdruck geben, dass diese Arbeit, besonders durch die beigegebenen Zahlenbeispiele, auch dem Versicherungspraktiker eine klare Vorstellung über die Grösse und den Verlauf des Risikoausgleiches innerhalb der gemischten Versicherung ermöglicht. Eine praktische Anwendung unserer Resultate von weittragender Bedeutung liesse

sich für das Problem der Rückversicherung durchführen. Dabei würde jede gemischte Versicherung zerlegt in ihre Erlebensfall- und temporäre Todesfallversicherung. Rückversichert würde dann so, dass im Selbstbehalt lauter verallgemeinerte gemischte Versicherungen mit minimalem relativem mittleren Risiko verbleiben. Auf diese Weise liesse sich für einen normal zusammengesetzten Bestand der Barwert der gesamten Prämieneinnahme des Selbstbehaltes gegenüber einer Rückversicherung, welche die gemischte Versicherung nicht aufteilt, beinahe verdoppeln, ohne dass dadurch der Sterblichkeitsschwankungsfonds stärker in Anspruch genommen würde. Eine genauere Durchführung dieses Gedankens liegt jedoch ausserhalb des Zieles dieser Arbeit.

Benützte Literatur.

1. *Broggi, H.*, Versicherungsmathematik. Leipzig 1911.

2. *Czuber, E.*, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Bd. Leipzig 1910. 2. Aufl.

3. *Medolaghi, P.*, La teoria del rischio e le sue applicazioni. VI. Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft. Wien 1909.

4. *Berger, A.*, Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, 2. Teil. Berlin 1925.

Rechnungsgrundlagen: Absterbeordnung A F der 4 französischen Gesellschaften, Zinsfuss $3^1/_2$ %.

(Todesfälle auf Ende des Jahres.)

A. Versicherungen mit Einmalprämien.

I. Totales mittleres Risiko für die Versicherungssumme 1.

1. Erlebensfallversicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,1778	0,1847	0,1814	0,1726	0,1603	0,1449	0,1262
35	0,2057	0,2154	0,2114	0,1982	0,1770	0,1481	0,1128
45	0,2539	0,2605	0,2446	0,2110	0,1638	0,1098	0,0598
55	0,3170	0,2972	0,2408	0,1652	0,0910	0,0370	0,0098
65	0,3544	0,2615	0,1486	0,0612	0,0162		

2. Todesfallversicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,2087	0,2374	0,2553	0,2659	0,2705	0,2691	0,2617
35	0,2404	0,2743	0,2935	0,3006	0,2960	0,2799	0,2546
45	0,2958	0,3306	0,3396	0,3256	0,2923	0,2491	0,2121
55	0,3700	0,3810	0,3471	0,2853	0,2232	0,1876	0,1781
65	0,4185	0,3507	0,2503	0,1780	0,1553		

3. Gemischte Versicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,0366	0,0621	0,0872	0,1107	0,1319	0,1502	0,1654
35	0,0417	0,0708	0,0994	0,1256	0,1482	0,1661	0,1789
45	0,0512	0,0862	0,1190	0,1466	0,1671	0,1799	0,1860
55	0,0661	0,1070	0,1400	0,1619	0,1728	0,1765	0,1771
65	0,0834	0,1221	0,1436	0,1513	0,1528		

II. Totales relatives mittleres Risiko.

4. Erlebensfallversicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,2690	0,3466	0,4267	0,5170	0,6264	0,7675	0,9610
35	0,3199	0,4264	0,5463	0,6942	0,8910	1,1744	1,6235
45	0,4218	0,5868	0,7920	1,0763	1,5160	2,2975	3,9749
55	0,6177	0,9123	1,3417	2,0810	3,6419	7,9785	30,984
65	1,0134	1,6907	3,0537	6,7699	22,965		

5. Todesfallversicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	3,7376	2,9211	2,3993	2,0122	1,6995	1,4341	1,2045
35	3,1430	2,3763	1,8781	1,5075	1,2124	0,9712	0,7772
45	2,3845	1,7296	1,3028	0,9892	0,7488	0,5703	0,4570
55	1,6298	1,1179	0,7843	0,5491	0,3951	0,3219	0,3037
65	0,9964	0,6148	0,3800	0,2567	0,2216		

6. Gemischte Versicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,0511	0,1011	0,1641	0,2376	0,3178	0,3991	0,4745
35	0,0579	0,1142	0,1830	0,2590	0,3347	0,4010	0,4507
45	0,0706	0,1357	0,2089	0,2791	0,3353	0,3712	0,3882
55	0,0894	0,1605	0,2251	0,2702	0,2930	0,3005	0,3018
65	0,1083	0,1684	0,2030	0,2155	0,2178		

III. Verallgemeinerte gemischte Versicherung.

Erlebensfall- und Todesfallsumme in beliebigem aber konstantem Verhältnis.

7. Minimalwerte des relativen mittleren Risikos.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,0256	0,0486	0,0778	0,1141	0,1589	0,2134	0,2788
35	0,0301	0,0583	0,0951	0,1414	0,1979	0,2639	0,3361
45	0,0384	0,0750	0,1223	0,1797	0,2437	0,3070	0,3574
55	0,0517	0,0993	0,1560	0,2147	0,2635	0,2917	0,3010
65	0,0696	0,1240	0,1739	0,2054	0,2164		

8. Vergleich des relativen mittleren Risikos der gewöhnlichen gemischten Versicherung mit obigem Minimalwert.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	1,9911	2,0797	2,1080	2,0815	2,0006	1,8703	1,7017
35	1,9245	1,9586	1,9238	1,8315	1,6913	1,5196	1,3407
45	1,8395	1,8104	1,7075	1,5534	1,3757	1,2092	1,0863
55	1,7273	1,6170	1,4432	1,2588	1,1120	1,0300	1,0028
65	1,5552	1,3580	1,1676	1,0489	1,0066		

9. Ausgezeichnetes Verhältnis zwischen Todesfall- und Erlebensfallsumme: das relative mittlere Risiko der verallgemeinerten gemischten Versicherung wird ein Minimum.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,8483	0,7706	0,6991	0,6342	0,5758	0,5229	0,4744
35	0,8519	0,7779	0,7103	0,6484	0,5908	0,5356	0,4807
45	0,8547	0,7824	0,7148	0,6497	0,5848	0,5182	0,4503
55	0,8542	0,7785	0,7032	0,6257	0,5456	0,4664	0,3956
65	0,8471	0,7594	0,6669	0,5726	0,4863		

10. Korrelationskoeffizient der beiden Grössen ${}_{n}E_{x}$ und $A_{\overline{x}\,\overline{n}|}^{1}$

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	-0,9948	-0,9876	-0,9767	-0,9612	-0,9394	-0,9085	-0,8639
35	-0,9946	-0,9870	-0,9747	-0,9556	-0,9257	-0,8767	-0,7925
45	-0,9943	-0,9853	-0,9691	-0,9393	-0,8809	-0,7633	-0,5505
55	-0,9933	-0,9805	-0,9503	-0,8752	-0,6949	-0,3891	-0,1280
65	-0,9904	-0,9620	-0,8617	-0,5752	-0,2060		

B. Versicherungen mit jährlicher gleichbleibender Prämienzahlung.

I. Totales mittleres Risiko für die Versicherungssumme 1.

11. Erlebensfallversicherung.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,1192	0,1269	0,1296	0,1292	0,1260	0,1197	0,1093
35	0,1412	0,1533	0,1583	0,1567	0,1479	0,1304	0,1041
45	0,1794	0,1938	0,1935	0,1779	0,1466	0,1034	0,0583
55	0,2330	0,2343	0,2051	0,1510	0,0876	0,0367	0,0098
65	0,2776	0,2254	0,1391	0,0601	0,0162		

12. Todesfallversicherung.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,2150	0,2490	0,2732	0,2909	0,3035	0,3110	0,3133
35	0,2503	0,2933	0,3238	0,3444	0,3551	0,3555	0,3463
45	0,3157	0,3700	0,4034	0,4170	0,4120	0,3938	0,3743
55	0,4193	0,4763	0,4933	0,4791	0,4526	0,4348	0,4295
65	0,5488	0,5755	0,5517	0,5236	0,5135		

13. Gemischte Versicherung.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,1293	0,1609	0,1862	0,2074	0,2255	0,2409	0,2538
35	0,1487	0,1867	0,2177	0,2439	0,2659	0,2837	0,2967
45	0,1868	0,2363	0,2764	0,3087	0,3331	0,3490	0,3570
55	0,2545	0,3208	0,3704	0,4037	0,4214	0,4277	0,4289
65	0,3620	0,4441	0,4903	0,5083	0,5120		

II. Totales relatives mittleres Risiko.

14. Erlebensfallversicherung.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	0,1803	0,2381	0,3049	0,3868	0,4923	0,6340	0,8327
35	0,2195	0,3036	0,4090	0,5489	0,7444	1,0341	1,4983
45	0,2981	0,4364	0,6267	0,9076	1,3575	2,1643	3,8804
55	0,4540	0,7193	1,1427	1,9016	3,5074	7,9035	30,984
65	0,7936	1,4562	2,8581	6,6495	22,935		

15. Todesfallversicherung.

$x \backslash n$	10	15	20	25	30	35	40
25	3,8504	3,0644	2,5673	2,2013	1,9068	1,6575	1,4421
35	3,2716	2,5407	2,0721	1,7271	1,4546	1,2335	1,0573
45	2,5448	1,9358	1,5474	1,2669	1,0553	0,9016	0,8067
55	1,8473	1,3976	1,1149	0,9219	0,8012	0,7461	0,7323
65	1,3067	1,0091	0,8378	0,7553	0,7328		

16. Gemischte Versicherung.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,1804	0,2620	0,3503	0,4450	0,5433	0,6400	0,7283
35	0,2066	0,3008	0,4007	0,5029	0,6006	0,6847	0,7474
45	0,2574	0,3720	0,4853	0,5878	0,6684	0,7202	0,7453
55	0,3439	0,4813	0,5955	0,6739	0,7144	0,7281	0,7307
65	0,4703	0,6126	0,6934	0,7237	0,7298		

III. Verallgemeinerte gemischte Versicherung.

Erlebensfall- und Todesfallsumme in beliebigem aber konstantem Verhältnis.

17. Minimalwert des relativen mittleren Risikos.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,0906	0,1260	0,1662	0,2138	0,2716	0,3422	0,4279
35	0,1074	0,1536	0,2083	0,2746	0,3551	0,4506	0,5575
45	0,1399	0,2055	0,2842	0,3784	0,4859	0,5957	0,6860
55	0,1991	0,2976	0,4126	0,5353	0,6425	0,7070	0,7286
65	0,3024	0,4511	0,5938	0,6900	0,7251		

18. Vergleich des relativen mittleren Risikos der gewöhnlichen gemischten Versicherung mit obigem Minimalwert.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	1,9911	2,0797	2,1080	2,0815	2,0006	1,8703	1,7017
35	1,9245	1,9586	1,9238	1,8315	1,6913	1,5196	1,3407
45	1,8395	1,8104	1,7075	1,5534	1,3757	1,2092	1,0863
55	1,7273	1,6170	1,4432	1,2588	1,1120	1,0300	1,0028
65	1,5552	1,3580	1,1676	1,0489	1,0066		

19. Ausgezeichnetes Verhältnis zwischen Todesfall- und Erlebensfallsumme: das relative mittlere Risiko der verallgemeinerten gemischten Versicherung wird ein Minimum.

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	0,4796	0,4329	0,3987	0,3718	0,3498	0,3310	0,3135
35	0,4922	0,4518	0,4228	0,3991	0,3773	0,3546	0,3283
45	0,5026	0,4647	0,4350	0,4064	0,3744	0,3363	0,2916
55	0,5022	0,4583	0,4173	0,3714	0,3185	0,2626	0,2125
65	0,4807	0,4164	0,3496	0,2805	0,2199		

20. Korrelationskoeffizient der beiden Grössen ($_n E_x - P_1 \cdot a_{\overline{xn}|}$) und ($A^1_{\overline{xn}|} - P_2 \cdot a_{\overline{xn}|}$)

x \ n	10	15	20	25	30	35	40
25	−0,8526	−0,8261	−0,8014	−0,7758	−0,7470	−0,7122	−0,6667
35	−0,8557	−0,8304	−0,8051	−0,7754	−0,7359	−0,6787	−0,5925
45	−0,8559	−0,8273	−0,7928	−0,7429	−0,6641	−0,5399	−0,3674
55	−0,8462	−0,8014	−0,7326	−0,6177	−0,4405	−0,2337	−0,0789
65	−0,8113	−0,7123	−0,5428	−0,3098	−0,1105		