Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 22 (1927)

Artikel: Die Zinsformel von Hardy als Funktionalgleichung

Autor: Ruch, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550961

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Zinsformel von Hardy als Funktionalgleichung.

Von **H. Ruch**, Basel.

Am Schlusse irgendeines Geschäftsjahres wird jede Gesellschaft ihr Augenmerk unter anderm auch auf die Gebarung des Zinsfusses im Verlaufe des eben abgelaufenen Jahres richten. Hierzu dient ihr die unter dem Namen Hardysche Zinsformel bekannte Gleichung

$$i = \frac{2\,Z}{V_0 + V_1 - Z}, \tag{1}$$

worin: V_0 das Anlagekapital (die Aktiven) zu Beginn des betreffenden Geschäftsjahres,

V_1 das Anlagekapital am Ende des betreffenden Geschäftsjahres,

Z die im Verlaufe des Jahres eingenommenen Zinsen bedeutet.

Die Formel (1) ist insofern ein ganz spezieller Fall einer viel allgemeinern Formel, als sie gerade nur für die Zeiteinheit, d. h. für die Zeitstrecke von einem Jahr, Geltung hat.

Es seien nun sowohl die Zinseneinnahmen Z als auch das angelegte Kapital V_1 als Funktionen der Zeit t aufgefasst, und zwar derart, dass

$Z(t)$ die auf der Zeitstrecke 0 bis t eingenommenen Zinsen,

$V(t)$ das Anlagekapital im Zeitpunkt t bedeutet.

Das Anlagekapital V_0 zu Beginn des Geschäftsjahres kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden. An Stelle des Zinsfusses i soll die ebenfalls von der Zeit abhängige Zinsintensität $\sigma(t)$ eingeführt werden. Die mittlere auf der Zeitstrecke 0 bis t erzielte Zinsintensität — sie sei mit $\bar{\sigma}(t)$ bezeichnet — kann sodann durch das arithmetische Mittel

$$(2) \qquad \bar{\sigma}(t) = \frac{\int_0^t \sigma(t)\, V(t)\, dt}{\int_0^t V(t)\, dt}$$

definiert werden.

Der Zinsfuss i auf der linken Seite von Gleichung (1) hat aber als Grenzwert die Bedeutung von

$$i = \lim_{t=1} [(1+i)^t - 1].$$

Zieht man ferner noch in Betracht, dass zwischen dem Zinsfuss i und der Zinsintensität $\bar{\sigma}(t)$ die Beziehung $1 + i = \lim_{t=1} e^{\bar{\sigma}(t)}$ besteht, so erscheint es ganz natürlich, dass man der Hardyschen Formel die allgemeinere Gestalt

$$(3) \qquad \lim_{t=1} \left\{ e^{t\,\bar{\sigma}(t)} - 1 \right\} = \lim_{t=1} \left\{ \frac{2\,Z(t)}{1 + V(t) - Z(t)} \right\}$$

gibt. Durch Weglassung der «Lim»-Zeichen in vorstehender Gleichung bewirkt man, dass die Hardysche Formel verallgemeinert wird:

$$(4) \qquad e^{t\,\bar{\sigma}(t)} - 1 = \frac{2\,Z(t)}{1 + V(t) - Z(t)}.$$

Die Formel (4) ist, wie auch die Formel (1), nur Näherungsformel, und es ist nicht schwer, Fälle zu konstruieren, für welche sie vollständig versagt. Es ist daher

von Interesse, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Formel streng richtig ist. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man der Formel die Gestalt einer Funktionalgleichung gibt. Es sei $\omega(t) = \sigma(t) + \tau(t)$ die totale Intensitätsfunktion der Kapitalanlage $V(t)$, so dass $\omega(t)$ durch die Gleichung

$$\omega(t) = \frac{d\ lg\ V(t)}{dt} \tag{5}$$

definiert ist. $\sigma(t)$ und $\tau(t)$ sind dabei die partiellen Intensitäten, und zwar sei $\sigma(t)$ die Intensität des Zinsfusses und $\tau(t)$ die Intensität aller übrigen Änderungsursachen. Durch Einführung dieser Funktionen in die Ausdrücke der Gleichung (4) erhält man dann die gesuchte Bedingung. Die Fragestellung kann daher jetzt präziser wie folgt formuliert werden:

Die Intensitäten in Gleichung (4) eingesetzt, gibt uns eine Bedingungsgleichung, die Funktionalgleichung zwischen $\sigma(t)$ und $\tau(t)$. Welches sind die Lösungen dieser Funktionalgleichung in $\sigma(t)$ und $\tau(t)$?

Aus Gleichung (5) erhält man sofort

$$V(t) = e^{\int_0^t \omega(t)\,dt}. \tag{6}$$

Dabei ist die Integrationskonstante bereits so bestimmt, dass $[V(t)]_{t=0} = 1$ wird. Die aus dem Kapital $V(t)$ während der unendlich kleinen Zeitstrecke dt resultierende Zinseneinnahme ist $dZ = \sigma(t)\ V(t)\ dt$ und daraus folgt die Zinseneinnahme $Z(t)$ auf der Zeitstrecke 0 bis t als Integral aus diesem Ausdruck:

$$Z(t) = \int_0^t \sigma(t)\ V(t)\ dt$$

oder nach (6)

$$Z(t) = \int_0^t \sigma(t)\, e^{\int_0^t \omega(t)\, dt}\, dt \tag{7}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (2), (6) und (7) in Gleichung (4), erhält man sodann die gewünschte *Funktionalgleichung* in der Gestalt einer allerdings komplizierten Integralgleichung:

$$\left\{ e^{\left(\frac{\int_0^t \sigma(t)\, e^{\int_0^t [\sigma(t)+\tau(t)]\, dt}\, dt}{\int_0^t e^{\int_0^t [\sigma(t)+\tau(t)]\, dt}\, dt} \right) t} - 1 \right\} = \tag{8}$$

$$= \frac{2 \int_0^t \sigma(t)\, e^{\int_0^t [\sigma(t)+\tau(t)]\, dt}\, dt}{1 + e^{\int_0^t [\sigma(t)+\tau(t)]\, dt} - \int_0^t \sigma(t)\, e^{\int_0^t [\sigma(t)+\tau(t)]\, dt}\, dt}.$$

Die Auflösung der Gleichung erfolgt mühelos, wenn man wieder auf die ursprüngliche Form (4) zurückgreift und darin $\bar{\sigma}(t)$ durch den Ausdruck (2) ersetzt. Gleichung (4) geht dann über in:

$$\left\{ e^{t \cdot \frac{\int_0^t \sigma(t)\, V(t)\, dt}{\int_0^t V(t)\, dt}} - 1 \right\} = \frac{2\, Z(t)}{1 + V(t) - Z(t)}. \tag{9}$$

Der Zähler im Exponent von „e“ kann aber nach Gleichung (7) durch $Z(t)$ ersetzt werden. Führt man sodann

noch an Stelle von $V(t)$ die neue Funktion

$$\varphi(t) = \int_0^t V(t)\, dt$$

ein, so ist

$$V(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}; \tag{10}$$

Gleichung (9) geht dann über in

$$\left\{ e^{t\frac{Z(t)}{\varphi(t)}} - 1 \right\} = \frac{2\,Z(t)}{1 + \frac{d\varphi}{dt} - Z(t)}. \tag{11}$$

Damit ist an Stelle der Integralgleichung (8) auch bereits eine Differentialgleichung zwischen den beiden Funktionen $Z(t) = Z[\sigma(t)]$ und $\varphi(t) = \varphi[\sigma(t), \tau(t)]$ getreten. Die Auflösung nach dem darin vorkommenden Differentialquotienten führt zu:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = Z(t) \left\{ 1 + \frac{2}{e^{t\frac{Z(t)}{\varphi(t)}} - 1} \right\} - 1. \tag{12}$$

Der Klammerausdruck kann wie folgt umgeformt werden:

$$\left\{ 1 + \frac{2}{e^{t\frac{Z(t)}{\varphi(t)}} - 1} \right\} = \mathfrak{Cotg}\left(\frac{Z(t)}{\varphi(t)} \cdot \frac{t}{2} \right). \tag{13}$$

Gleichung (12) nimmt so die definitive Gestalt an:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = Z(t)\, \mathfrak{Cotg}\left[\frac{Z(t)}{\varphi(t)} \frac{t}{2} \right] - 1. \tag{14}$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung I. Ordnung, muss man drei Fälle unterscheiden:

1. Weder die Funktion $\varphi(t)$ noch $Z(t)$ seien bekannt. Es gilt in diesem Falle, die Funktion $\varphi(t)$ auf die Form $\varphi[Z(t)]$ zu bringen.
2. Es sei die Funktion $\varphi(t)$ als gegeben vorausgesetzt. Die Funktion $Z(t)$ sei die gesuchte Funktion.
3. Es sei die Funktion $Z(t)$ als gegeben vorausgesetzt. Die Funktion $\varphi(t)$ sei die gesuchte Funktion.

Es soll hier nur der *dritte Fall* in Betracht gezogen werden; sei also die Funktion $Z(t)$ durch irgendeine bekannte analytische Funktion oder durch eine Potenzreihe definiert.

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots\ldots \tag{15}$$

Macht man jetzt den Ansatz

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{16}$$

worin die Konstanten c_k vorläufig noch unbestimmt sind, so wird es, wenn auch erst nach mühsamer Rechnung, möglich sein, sowohl die linke als auch die rechte Seite von (13) in die Form einer Potenzreihe zu bringen. Durch Koeffizientenvergleichung kann man die bisher noch unbestimmten Koeffizienten c_k näherungsweise bestimmen.

In gewissen speziellen Fällen ist es sogar möglich, die Differentialgleichung explizit zu integrieren. Einer dieser Fälle ist der folgende:

Der Zinsfuss und mit ihm die Zinsintensität $\sigma(t)$ soll während der Dauer des zu untersuchenden Zeitabschnittes 0 bis t konstant sein. Demgemäss ist:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma} = \sigma = \text{konstant}$$

Dadurch geht $Z(t)$ über in:

$$Z(t) = \int_0^t \sigma(t)\, V(t)\, dt = \sigma \int_0^t V(t)\, dt = \sigma\, \varphi(t),$$

und die Differentialgleichung geht in die folgende *lineare inhomogene Differentialgleichung I. Ordnung* über.

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \sigma\varphi(t)\,\mathfrak{Cotg}\left(\frac{\sigma(t)}{2}\right) - 1. \tag{17}$$

Das allgemeine Integral $\varphi\,(t)$ dieser Differentialgleichung setzt sich aus einem partikulären Integral $\varphi_0\,(t)$ und dem allgemeinen Integral $\bar{\varphi}\,(t)$ der entsprechenden *homogenen* Differentialgleichung in bekannter Weise zusammen. Dieses letztere ist gleich $\bar{\varphi}\,(t) = C\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\sigma t}{2}$, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann. Das partikuläre Integral $\varphi_0\,(t)$ wird am besten vermittels der Methode der Variation der Konstanten bestimmt. Man findet $\varphi_0\,(t) = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\,t$, so dass das allgemeine Integral lautet:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\,t + C\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\sigma t}{2}. \tag{18}$$

Hieraus ergeben sich dann alle noch unbekannten Funktionen. Es ist unter anderm

$$V(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \mathfrak{Cos}\,\sigma\,t + \frac{C\sigma}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\,t. \tag{19}$$

Für $t = 0$ nimmt dieser Ausdruck den Wert $V_{(0)} = 1$ an, wie vorausgesetzt war. Bei zweckmässiger Wahl der Form der Integrationskonstanten kann $V\,(t)$ auf die Form gebracht werden:

$$V(t) = \lambda\,\mathfrak{Cos}\,(\sigma\,t + \alpha) \quad \text{resp.} \quad V(t) = \mu\,\mathfrak{Sin}\,(\sigma\,t + \beta),$$

dabei sind die beiden λ und α resp. μ und β nur der einen Bedingung unterworfen

$$\lambda\,\mathfrak{Cos}\,\alpha = \mu\,\mathfrak{Sin}\,\beta = 1.$$

Die Funktionen $V(t)$, $Z(t)$ und $\omega(t)$ werden sodann durch das folgende Gleichungssystem dargestellt:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&\underline{V(t) = \lambda\, \mathfrak{Cof}\,(\sigma t + \alpha)} \quad \text{resp.} \quad \underline{V(t) = \mu\, \mathfrak{Sin}\,(\sigma t + \beta)}\\
&\underline{Z(t) = \lambda\, \mathfrak{Sin}\,(\sigma t + \alpha)} \quad \text{resp.} \quad \underline{Z(t) = \mu\, \mathfrak{Cof}\,(\sigma t + \beta)}\\
&\underline{\omega(t) = \sigma\, \mathfrak{Tg}\,(\sigma t + \alpha)} \quad \text{resp.} \quad \underline{\omega(t) = \sigma\, \mathfrak{Cotg}\,(\sigma t + \beta)}
\end{aligned}
$$

Der Sinn der Gleichung (19) ist der folgende: Setzt man die wirkliche Zinsintensität als konstant und bekannt voraus, so muss, damit die Hardysche Formel mit der Wirklichkeit übereinstimmende Werte liefert, die gesamte Wertzunahme der Kapitalanlage aus allen möglichen und denkbaren andern Intensitätsfunktionen gerade eine der unendlich vielen Funktionen $\sigma\, \mathfrak{Tg}\,(\sigma t + \alpha)$ resp. $\sigma\, \mathfrak{Cotg}\,(\sigma t + \beta)$ zur Intensität besitzt. Bei näherer Betrachtung der durch die Funktionen $\sigma\, \mathfrak{Tg}\,(\sigma t + \alpha)$ resp. $\sigma\, \mathfrak{Cotg}\,(\sigma t + \alpha)$ dargestellten Kurvenschar zeigt sich, dass sämtliche Kurven sich mit fortschreitender Zeit t der einen Geraden $\sigma(t) = \sigma =$ konstant asymptotisch nähern und dass ferner für die in der Praxis fast ausnahmslos vorkommenden Fälle, wo der Parameter α sehr klein ist, die Kurven äusserst flach und beinahe horizontal verlaufen. Es kann somit die totale Intensität $\omega(t)$ als konstant betrachtet werden.

Im folgenden seien einige numerische Beispiele zur Illustration durchgerechnet. In allen Fällen wird eine ideale Firma supponiert, die ihre Geldanlagen sämtlich zu einem gewissen festen Zinsfuss von 5 % angelegt hat.

1. Beispiel:

Die Zunahme des Kapitals infolge der übrigen Ursachen sei in gleichen Zeiträumen gleich gross, so dass sich diese durch die Formel $Y(t) = \lambda \cdot t$ darstellen

lässt. Der Proportionalitätsfaktor sei $\lambda = 0{,}975804$ gesetzt [1]). Die effektive Zinsintensität σ wird aus dem Zinsfuss 5 % gemäss der Formel $\sigma = lg\,(1 + i) = 0{,}0487902$ erhalten. Die totale Intensität schmiegt sich in diesem Beispiel ziemlich gut der geforderten theoretischen Intensität an, da beide im Bild nahezu horizontal sind. Das Anfangskapital ist in Abweichung der gemachten Voraussetzung zu $V(0) = 0{,}0$ angenommen. Trotzdem zeigt sich, dass das Resultat gut brauchbar ist. Die unendlich kleine Kapitalzunahme ergibt sich nämlich zu

$$d\,V = \sigma\,V\,dt + \lambda\,dt = (\sigma V + \lambda)\,dt = (lg\,(1 + i)\,V + \lambda)\,dt.$$

Die Kapitalanlage selbst als Funktion der Zeit ist somit

$$V(t) = \frac{\lambda}{\sigma}[e^{\sigma t} - 1] = \frac{0{,}975804}{lg\,1{,}05}[1{,}05^t - 1]$$

oder nach Ausrechnung

$$V(t) = 20 \cdot [1{,}05^t - 1].$$

Die Zinseneinnahmen sind

$$Z(t) = \sigma \int_0^t V(t)\,dt = \lambda \int_0^t [e^{\sigma t} - 1]\,dt = \lambda \left\{ \frac{1}{\sigma}[e^{\sigma t} - 1] - t \right\}$$

$$Z(t) = 20 \cdot [1{,}05^t - 1] - 0{,}975804 \cdot t.$$

Die Zinseneinnahmen im Laufe eines Jahres sind daher

$$Z(1) = 0{,}024196.$$

$V(0)$, $V(1)$ und $Z(1)$ in die Formel (1) eingesetzt, gibt als Näherungswert für den Zinsfuss:

$$i = \frac{2 \cdot 0{,}024196}{0{,}0 + 1{,}0 - 0{,}024196} = 0{,}0495, \text{ also } p = 4{,}95\ \%.$$

---

[1]) λ wurde so gewählt, dass das Anlagekapital am Schlusse des Jahres gleich 1 ist.

2. Beispiel:

Es sei wiederum der effektive Zinsfuss 5 %, das Anfangskapital sei $V(0) = 1$. Diesmal jedoch sei die Intensität $\tau(t)$ = konstant, und zwar sei sie so gross, dass sich das Kapital im Verlaufe eines Jahres verhundertfacht, d. h.

$$\omega = lg\, 100 = 4{,}6051702,$$
$$\sigma = 0{,}0487902,$$
$$\tau = 4{,}5563800.$$

Die geforderte theoretische Intensität ist in diesen Lagen durch eine stark gekrümmte Kurve dargestellt, während obige Intensität durch eine horizontale Gerade dargestellt ist. Es ist daher zu erwarten, dass das Beispiel einen nicht brauchbaren Näherungswert ergeben wird, und tatsächlich erhält man der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$V(t) = e^{\omega t} = e^{t\, lg\, 100} = 100^t$$

$$V(0) = 1 \text{ und } V(1) = 100$$

$$Z(1) = \sigma \int_0^1 e^{\omega t}\, dt = \frac{\sigma}{\omega}(e^{\omega} - 1) = 1{,}048871.$$

Formel (1) ergibt daher als Näherungswert für den Zinsfuss $i = \dfrac{2 \cdot 1{,}048871}{101 - 1{,}048871} = 0{,}0210$ und somit $p =$ 2,10 % statt 5 %.

3. Beispiel:

Die totale Intensität ω sei konstant und so bemessen, dass das Kapital im Verlaufe eines Jahres um 20 % des Anfangskapitales zunimmt. Wenn somit das Anfangskapital $V(o) = 1{,}0$ gesetzt wird, so soll das Kapital am Schlusse des Jahres $V(1) = 1{,}2$ sein. In

der Regel ist das Wachstum der Kapitalanlage einer Firma noch innerhalb dieser Grenzen. Auch hier ist die vorausgesetzte totale Intensität ziemlich übereinstimmend mit der geforderten theoretischen. Es ist daher auch hier eine gute Näherung zu erwarten, und tatsächlich ist $\omega = lg\, 1{,}2 = 0{,}1823187$ und

$$V(t) = e^{t \cdot \omega} = 1{,}2^t$$

$$V(0) = 1{,}0 \quad \text{und} \quad V(1) = 1{,}2.$$

Ferner ist die Zinseneinnahme

$$Z(1) = \sigma \int_0^1 e^{t \cdot lg\, 1{,}2}\, dt = \frac{\sigma}{lg\ 1{,}2} \left[e^{\sigma} - 1\right] = 0{,}0535219$$

Die gefundenen Werte in die Hardysche Formel eingesetzt, ergeben das überraschend genaue Resultat

$$i = \frac{2 \cdot 0{,}0535219}{2{,}2 - 0{,}0535219} = 0{,}0499 \text{ und somit } p = 4{,}99\ \%.$$