Les états stationnaires dans l'assurance sur la vie.

Par **Edouard Guillaume**, Neuchâtel.

L'actuaire appelé à suivre la marche d'un portefeuille, à prévoir les bénéfices d'exploitation ou à étudier l'influence de la mortalité, du taux de l'intérêt ou du taux de Zillmer sur les réserves mathématiques, utilise aujourd'hui, presque exclusivement, des grandeurs actuarielles déduites de «*valeurs actuelles*».

Or, il existe une catégorie de grandeurs fondamentales que l'on n'emploie que rarement et qui, cependant, pourraient rendre certains services: ce sont celles qui caractérisent les «*états stationnaires*».

Le but de la présente note est d'attirer l'attention sur ce point.

Prenons une table de mortalité. Elle peut être envisagée sous deux points de vue différents.

1° On peut considérer un groupe de l_x personnes d'âge x et le suivre d'année en année jusqu'à l'âge $x+n$. Chaque année, un certain nombre de personnes sortent du groupe par décès; à l'âge $x+1$, il ne compte plus que l_{x+1} personnes; à l'âge $x+2$, l_{x+2}, etc.; à l'âge $x+n$, l_{x+n}. Nous dirons que le groupe envisagé est en voie d'extinction.

2° On peut considérer simultanément l'ensemble des $l_x + l_{x+1} + \ldots + l_{x+n}$ personnes, dont les âges sont compris entre x et $x+n$ années. Cet ensemble forme un groupe alimenté par l'entrée annuelle de l_x

personnes ayant toutes le même âge x. Le nombre de têtes du groupe est maintenu invariable par les sorties; ces dernières sont produites par les $d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1}$ personnes qui décèdent chaque année entre les âges x et $x+n$, et par les l_{x+n} personnes qui survivent à l'âge $x+n$ et quittent le groupe annuellement. Le nombre l_x des personnes qui alimentent le groupe est évidemment égal au nombre $d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1} + l_{x+n}$ des personnes qui en sortent. Nous dirons que le groupe envisagé est dans l'«*état stationnaire*».

Il serait aisé d'étendre ces notions à des ordres de survie présentant plusieurs causes d'extinction: décès, invalidité, etc. Nous ne considérerons que le cas le plus simple, et puisqu'il ne s'agit que d'en exposer les grandes lignes, nous nous bornerons à imaginer une compagnie d'assurance schématique, dont le portefeuille, entièrement homogène, ne comporte que des contrats d'assurance mixte, conclus à l'âge uniforme x pour une même durée de n années.

Abrégeons l'écriture en posant:

$$l_{x+t} = l_t\,; \quad d_{x+t} = d_t,$$

où t peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et n.

Désignons par:

i le taux de l'intérêt;

v l'expression $\dfrac{1}{1+i}$;

d l'expression $\dfrac{i}{1+i}$;

${}_tp_x$ la probabilité $\dfrac{l_t}{l_0}$ pour un assuré d'âge x de vivre encore t années;

$_{/n-1}e_x$ la somme $\sum_{1}^{n-1} {}_tp_x$, c'est-à-dire l'espérance temporaire abrégée de vie;

α le taux des frais d'acquisition pour l'unité de capital assuré;

β le taux des frais d'encaissement pour une prime du tarif égale à l'unité;

γ le taux des frais annuels de gestion pour un capital assuré égal à l'unité;

Π_T la prime payée par les assurés, c'est-à-dire la prime du tarif;

P la prime pure;

$P^{(a)}$ la prime pure augmentée de la quote d'amortissement annuelle des frais d'acquisition; c'est une prime d'inventaire désignée quelquefois par «prime-réserve» de Zillmer;

${}_tW$ la réserve mathématique après t années (voir les remarques faites plus bas);

$\mathfrak{D}_t$ le bénéfice (positif, négatif ou nul) réalisé par la compagnie à la fin de la t^e année.

Nous admettrons que les quantités (i, ${}_tp_x$, α, β, γ) caractérisent les conditions *réelles* d'exploitation de la compagnie. Elles correspondent à ce que l'on appelle parfois les bases techniques du second ordre. La prime du tarif Π_T est supposée calculée d'une façon quelconque, sans relation simple avec les bases précédentes. Si nous en déduisons les frais réels d'encaissement et les frais réels annuels de gestion, il reste à la compagnie, pour couvrir les risques, les frais d'acquisition et les bénéfices, la prime:

(1) $$\Pi = (1 - \beta)\, \Pi_T - \gamma.$$

La réserve mathématique ${}_tW$ est également supposée calculée d'une manière quelconque, sans être nécessairement en relation simple avec les quantités précédentes, sauf quand nous le spécifierons expressément. En particulier, elle peut être ou non zillmée, et le taux de Zillmer peut être lui-même différent ou non de α. C'est la raison pour laquelle nous avons préféré le symbole ${}_tW$ au symbole ${}_tV$, que nous appliquerons à la réserve calculée sur primes pures.

Ce sont les conditions qui se présentent approximativement dans la pratique.

§ 1. Calcul du bénéfice en valeur actuelle et en valeur stationnaire.

Pour chaque âge, compris entre x et $x+n$, nous pouvons écrire la suite d'égalités:

$$\mathfrak{D}_1 = -\alpha\, l_0\,(1+i) + \Pi l_0\,(1+i) - d_0 - l_1 \cdot {}_1W$$

$$\mathfrak{D}_2 = l_1\,({}_1W+\Pi)\,(1+i) - d_1 - l_2 \cdot {}_2W$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{D}_{n-1} = l_{n-2}\,({}_{n-2}W+\Pi)\,(1+i) - d_{n-2} - l_{n-1} \cdot {}_{n-1}W$$

$$\mathfrak{D}_n = l_{n-1}\,({}_{n-1}W+\Pi)\,(1+i) - d_{n-1} - l_n.$$

Dans ces égalités, on suppose que les sommes échues par décès sont réglées à la fin de l'année d'assurance.

On peut faire la somme de ces égalités de deux façons différentes, selon que l'on se place à l'un ou à l'autre des points de vue définis plus haut.

I. Du premier point de vue, on obtient la *valeur actuelle du bénéfice* à réaliser pendant les n années. Pour la déterminer, nous procéderons comme suit:

Considérons la $(t+1)^e$ égalité:

$$\mathfrak{D}_{t+1} = l_t\,({}_tW + \Pi)\,(1+i) - d_t - l_{t+1} \cdot {}_{t+1}W,$$

et posons en introduisant les symboles internationaux:

$$D_t = l_t \cdot v^t;\ C_t = d_t \cdot v^{t+1}.$$

La valeur actuelle, au début de la $(t+1)^e$ année, du bénéfice de cette année est:

$$\mathfrak{D}_{t+1} \cdot v^{t+1} = D_t\,({}_tW + \Pi) - C_t - D_{t+1} \cdot {}_{t+1}W.$$

Faisons la somme en désignant par $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$ la valeur actuelle du bénéfice total:

$$D_0\,\mathfrak{D}^{\mathrm{I}} = \sum_0^{n-1} \mathfrak{D}_{t+1} \cdot v^{t+1} = -\,a\,D_0 + \Pi\,(N_0 - N_n)$$
$$-\,(M_0 - M_n) - D_n,$$

ce que l'on peut écrire sous la forme évidente:

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{D}^{\mathrm{I}} = -\,a + (\Pi - P_{x:\overline{n}|}) \cdot \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}.$$

C'est là un résultat bien connu [1]. La quantité $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$ représente ce que l'on appelle habituellement le «bénéfice de contribution». Ce bénéfice est *indépendant* de la façon dont on calcule les réserves mathématiques ${}_tW$; il ne dépend que de la prime du tarif, des frais réels de la compagnie, de la mortalité et du taux d'intérêt réels, avec lesquels sont supposées calculées ici les quantités $P_{x:\overline{n}|}$ et $\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$.

On sait également que si l'on considère la valeur actuelle, au début de la $(t+1)^e$ année, de tous les bénéfices subséquents, on obtient:

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}_{t+1} = {}_tW + (\Pi - P_{x+t:\overline{n-t}|}) \cdot \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|}.$$

---

[1]) Voir par exemple: Dr Alfred Berger, *Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik*, 1. Teil, page 164 et suiv.

Cette valeur actuelle *dépend* de la manière dont on calcule la réserve mathématique.

En résumé, la valeur actuelle, au début de l'assurance, du bénéfice de contribution est indépendante de la manière dont on calcule les réserves mathématiques; par contre, sa distribution au cours de l'assurance en dépend.

II. Calculons maintenant la *valeur stationnaire du bénéfice.* A cet effet, faisons directement la somme des égalités qui figurent en tête de ce paragraphe:

$$\sum_0^{n-1} \mathfrak{D}_{t+1} = -a\, l_0\,(1+i) + (1+i)\,\Pi \sum_0^{n-1} l_t - \sum_0^{n-1} d_t$$
$$+\, i \sum_1^{n-1} l_t \cdot {}_tW - l_n.$$

Or:

$$\frac{1}{l_0}\sum_0^{n-1} d_i = \frac{1}{l_0}\left\{ l_0 - l_n \right\} = 1 - {}_np_x$$

d'où pour le bénéfice annuel dans l'état stationnaire et pour l'ensemble du portefeuille:

$$\text{(II)} \quad \mathfrak{D}^{\text{II}} = -a + \Pi\,(1 + {}_{/n-1}e_x) + d \sum_1^{n-1} {}_tp \cdot {}_tW - v.$$

Comme on le voit et comme on pouvait s'y attendre, ce bénéfice *dépend* de la façon dont sont calculées les réserves mathématiques; de même que le bénéfice de contribution, il dépend de la prime du tarif et des grandeurs (i, ${}_tp_x$, α, β, γ).

§ 2. Amortissement des frais d'acquisition.

L'amortissement des frais d'acquisition s'opérera de façons différentes selon que l'on considérera les valeurs actuelles ou les valeurs stationnaires et que les réserves mathématiques seront calculées avec les bases réelles ou non.

Pour mettre nettement en évidence les différences, nous procéderons comme suit.

1° Introduisons, dans la relation (I), les deux conditions:

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{I}} = 0; \ \alpha = 0.$$

Nous obtenons en désignant par P_{I} la valeur numérique que prend Π dans ces conditions:

$$P_{\mathrm{I}} = P_{x:\overline{n|}},$$

c'est-à-dire la *prime pure*. Nous l'obtenons sans avoir fait d'hypothèse spéciale sur la manière dont sont calculées les réserves mathématiques.

2° N'introduisons, dans la relation (I), que la condition:

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{I}} = 0.$$

Nous obtenons pour la valeur de Π:

$$P_{\mathrm{I}}^{(\alpha)} = P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n|}}} = P_{x:\overline{n|}}^{(\alpha)},$$

c'est-à-dire la prime d'inventaire ou prime-réserve de Zillmer.

3° Considérons maintenant la relation (II) et introduisons-y les conditions:

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{II}} = 0; \ \alpha = 0.$$

La relation sera numériquement satisfaite si Π prend la valeur:

$$P_{\mathrm{II}} = \frac{v\left(1 - i \sum_{1}^{n-1} {}_{t}p \cdot {}_{t}W\right)}{1 + {}_{/n-1}e_{x}}.$$

Cette prime stationnaire P_{II} est en général différente de la prime pure $P_{x:\overline{n}|}$. Elle dépend de la façon dont sont calculées les réserves mathématiques. Supposons que celles-ci soient calculées sur primes pures avec les bases $(i, {}_tp_x)$ et posons:

$$ {}_tW = {}_tV. $$

La relation précédente apparaîtra sous la forme évidente:

$$ (2) \qquad (1 + {}_{/n-1}e_x)\, P_{x:\overline{n}|}\, (1 + i) + i \sum_{1}^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV = 1. $$

Elle signifie qu'en régime stationnaire, lorsque l'on fait usage d'un système uniforme de bases techniques $(i, {}_tp_x)$ pour calculer les grandeurs e, P et V, les décès et les arrivées à terme sont couverts à l'aide des primes pures augmentées des intérêts produits par les réserves.

4° Parallèlement à 2°, introduisons dans la relation (II) la seule condition:

$$ \mathfrak{D}^{\text{II}} = 0. $$

Nous pourrons écrire:

$$ P_{\text{II}}^{(a)} = P_{\text{II}} + \frac{a}{1 + {}_{/n-1}e_x}. $$

La prime $P_{\text{II}}^{(a)}$, comme P_{II}, dépend de la façon dont on calcule les réserves. Elle est, en général, différente de la prime d'inventaire $P^{(a)}$ (prime-réserve de Zillmer). Il est aisé de démontrer que pour avoir

$$ P_{\text{II}}^{(a)} = P^{(a)}, $$

il faut zillmer les réserves au taux a des frais d'acquisition réels de la compagnie. En effet. Posons:

$$\Pi = P + \frac{\alpha}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}$$
$$_tW = {}_tV - \alpha\,(1 - {}_tV).$$

La relation (II) peut alors s'écrire:

$$\mathfrak{D}^{\mathrm{II}} = \left\{ P\,(1 + {}_{/n-1}e_x) + d \sum_1^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV - v \right\}$$
$$- \alpha \left\{ 1 - \frac{1 + {}_{/n-1}e_x}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} + d \sum_1^{n-1} {}_tp\,(1 - {}_tV) \right\}.$$

Or, en vertu de la relation (2), la première parenthèse est identiquement nulle. On verrait qu'il en est de même de la seconde en substituant à la somme des produits ${}_tp \cdot {}_tV$ sa valeur tirée de cette-même relation (2). Ainsi donc, dans notre hypothèse, le bénéfice $\mathfrak{D}^{\mathrm{II}}$ est bien nul. Il en est évidemment de même de $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$, comme nous l'avons vu sous 2°. C'est le seul cas où $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$ et $\mathfrak{D}^{\mathrm{II}}$ ont la même valeur numérique.

Dans la pratique, la prime d'inventaire et les réserves mathématiques ne sont jamais zillmées au taux réel α des frais d'acquisition. Le cas le plus fréquent est celui où l'acquisition reste faible comparativement au portefeuille acquis et compense approximativement les décès et les arrivées à terme; l'effectif ne croît que lentement d'un exercice à l'autre: l'état stationnaire est plus ou moins réalisé. Dans ces conditions, la compagnie peut facilement calculer ses réserves sur primes pures. Admettons qu'elle le fasse justement sur les bases réelles $(i, {}_tp_x)$. La relation (II) dans laquelle nous remplaçons $\sum_1^{n-1} {}_tp \cdot {}_tW$ par $\sum_1^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV$ tiré de (2) nous donne:

$$(\mathrm{II^{bis}}) \quad \mathfrak{D}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{V}} = -\alpha + (\Pi - P_{x:\overline{n}|})\,(1 + {}_{/n-1}e_x).$$

Cette relation remarquable forme en quelque sorte le pendant de la relation (I), dont elle ne diffère, formellement, que par la substitution du facteur $(1 + {}_{/n-1}e_x)$ au facteur $\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}$. Elle s'en écarte essentiellement. Nous avons en effet:

$$\frac{\mathfrak{D}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}}{1 + {}_{/n-1}e_x} - \frac{\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}} = \alpha \left\{ \frac{1}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{1 + {}_{/n-1}e_x} \right\} > 0.$$

Les bénéfices annuels, actuel et stationnaire, ne sont pas identiques. Comme nous l'avons vu, il ne peut y avoir identité que lorsqu'ils sont nuls, et cette condition n'est réalisée que si les réserves sont zillmées au taux α des frais réels d'acquisition. Mais, dans ces circonstances, la notion même de bénéfice *s'évanouit.* C'est là une particularité digne de remarque.

§ 3. Réserve mathématique moyenne dans l'état stationnaire.

A. La relation (2) permet de calculer immédiatement la *réserve moyenne pure* dans l'état stationnaire pour différentes combinaisons. Les calculs sont simples. Bornons-nous à indiquer les formules. Nous désignerons par $\overline{V}$ cette réserve moyenne, que nous définirons au moyen de l'expression:

$$\overline{V} = \frac{\sum_{1}^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV}{1 + {}_{/n-1}e_x}.$$

a) Assurance mixte:

$$(3) \qquad \overline{V}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d} \left\{ \frac{v}{1 + {}_{/n-1}e_x} - P_{x:\overline{n}|} \right\}$$

b) Capitaux différés:

$$(4) \qquad \overline{V}\,({}_nE_x) = \frac{1}{d} \left\{ \frac{{}_np_x\, v}{1 + {}_{/n-1}e_x} - {}_nP_x \right\}$$

c) Rentes viagères différées, avant le service de la rente:

$$(5) \qquad \overline{V}\,(a_{x+n}) = \frac{a_{x+n}}{d}\left\{\frac{{}_np_x\,v}{1+{}_{/n-1}e_x} - {}_nP_x\right\}.$$

Dans ces deux dernières relations, ${}_nP_x$ désigne la prime pure annuelle, à verser pendant les n années du différé, pour l'unité de capital.

B. Il est aisé de trouver l'expression de la *réserve moyenne de Zillmer* dans l'état stationnaire pour l'assurance mixte. Cette réserve, que nous désignerons par $\overline{V}^1_{x:\overline{n}|}$, s'obtient comme suit. Par définition, nous avons:

$$\overline{V}^1_{x:\overline{n}|}\,(1+{}_{/n-1}e_x) = \sum_0^{n-1} {}_tp\left\{{}_tV - \alpha\,(1-{}_tV)\right\} =$$

$$= \sum_0^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV - \alpha \sum_0^{n-1} {}_tp + \alpha \sum_0^{n-1} {}_tp \cdot {}_tV$$

d'où l'on tire:

$$(6) \qquad \overline{V}^1_{x:\overline{n}|} = \overline{V}_{x:\overline{n}|} - \alpha\,(1-\overline{V}_{x:\overline{n}|}).$$

On constate que la réserve moyenne de Zillmer est liée à la réserve moyenne pure suivant la relation habituelle.

§ 4. Applications numériques.

Les relations précédentes permettent des comparaisons intéressantes entre les diverses tables de mortalité que l'on rencontre habituellement.

Si nous prenons la table *MWI* 3½ %, utilisée par un grand nombre de compagnies pour calculer leurs réserves, la réserve moyenne pure dans l'état stationnaire d'un effectif d'*assurances mixtes* conclues à l'âge

$x = 30$ ans pour une durée de $n = 25$ années, aura la valeur:

$$\overline{V}_{30:\,\overline{25}|} = 0.3694.$$

Cette valeur correspond à celle d'une réserve ${}_tV_{30:\,\overline{25}|}$ après un nombre d'années:

$$t = 12{,}35$$

c'est-à-dire un nombre d'années inférieur à la moitié de la durée $(\frac{n}{2} = 12{,}5)$.

La réserve de Zillmer, calculée suivant la même table, avec un taux de Zillmer de 30 $^0/_{00}$ du capital assuré ($\alpha = 0.03$) a pour valeur:

$$\overline{V}^1_{30:\,\overline{25}|} = 0.3505.$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $\overline{V}_{30:\,\overline{25}|}$ pour quelques tables. Il permet de comparer ces tables à la table usuelle *MWI* 3½ % non zillmée ou zillmée à 30 $^0/_{00}$. Les abréviations *SH* et *SF* désignent les tables démographiques suisses pour le sexe masculin et le sexe féminin.

Tables	$\overline{V}_{30:\,\overline{25}|}$	En % de *MWI* 3½ % non zillmée	En % de *MWI* 3½ % zillmée à 30 $^0/_{00}$
MWI 3½ %	0.3694	$100._0$	$105._4$
Gotha 5 % (réduite) . .	0.3603	$97._5$	$102._8$
Gotha 5½ % (réduite) .	0.3522	$95._3$	$100._5$
$O^{[M]}$ 4 %	0.3728	$100._9$	$106._4$
$O^{[M]}$ 3½ %	0.3819	$103._4$	$109._0$
O^{M} 3½ %	0.3798	$102._8$	$108._4$
Abel 4 % (sélection) . .	0.3789	$102._6$	$108._1$
SH 1901/10 3½ % . . .	0.3787	$102._5$	$108._0$
SF 1901/10 3½ % . . .	0.3803	$103._0$	$108._5$
SH 1920/21 3½ % . . .	0.3840	$104._0$	$109._6$
SF 1920/21 3½ % . . .	0.3861	$104._5$	$110._2$

On remarquera qu'il faut prendre la table de la Gotha réduite avec un taux de $5\frac{1}{2}$ % pour obtenir une réserve moyenne de même ordre que la réserve moyenne de la table *MWI* $3\frac{1}{2}$ % zillmée à 30 ‰.

Le tableau ci-dessous donne la réserve moyenne stationnaire d'une *rente viagère différée* de Fr. 1 annuellement, avant le service de la rente, pour un âge d'entrée de $x = 30$ ans. Les calculs ont été faits dans l'hypothèse que la rente est servie à terme échu dès l'âge de 60 ans, respectivement 65 ans. C'est la formule (5) qui a été appliquée.

1. Sexe masculin $3\frac{1}{2}$ %.

Tables	$\overline{V}(a_{60})$	En % de $O^{[am]}$	$\overline{V}(a_{65})$	En % de $O^{[am]}$
$O^{[am]}$	3,2388	$100._0$	2,3355	$100._0$
SH 1901/10 .	2,8104	$86._8$	1,9278	$82._5$
SH 1920/21 .	3,0877	$95._3$	2,1515	$92._1$
RF	3,5309	$109._0$	2,5854	$110._7$
AF	2,9774	$91._9$	2,0753	$88._9$

2. Sexe féminin $3\frac{1}{2}$ %.

Tables	$\overline{V}(a_{60})$	En % de $O^{[af]}$	$\overline{V}(a_{65})$	En % de $O^{[af]}$
$O^{[af]}$.	3,7032	$100._0$	2,8106	$100._0$
SF 1901/10 .	3,2274	$87._2$	2,2509	$80._1$
SF 1920/21 .	3,4810	$94._0$	2,4758	$88._1$
RF	3,5309	$95._3$	2,5854	$92._7$
AF	2,9774	$80._4$	2,0753	$73._8$

Ces chiffres mettent en évidence, une fois de plus, la marche favorable de la mortalité de la population suisse. C'est une circonstance très importante pour l'assurance collective (caisse de pensions) et les assurances sociales sur la vie. Pour constituer des réserves suffisantes, le choix d'une table à faible mortalité s'impose.

Les chiffres ci-dessus montrent en outre à quelles divergences conduisent les tables à sexes réunis, particulièrement la table *RF*. Alors que les tables $O^{[am]}$ et *SH* d'une part et les tables $O^{[af]}$ et *SF* d'autre part manifestent des allures plus ou moins parallèles, la table *RF* présente une mortalité beaucoup trop faible pour le sexe masculin et beaucoup trop forte pour le sexe féminin: elle ne s'applique ni à l'un, ni à l'autre.

Pour terminer, nous donnerons un exemple numérique des formules exprimant le bénéfice dans l'état stationnaire. Les relations (I) et ($\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}$) permettent d'écrire comme suit les valeurs du bénéfice annuel:

$$\frac{\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n|}}} = \Pi - \frac{\alpha}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n|}}} - P_{x:\overline{n|}} \,.$$

$$\frac{\mathfrak{D}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{II}}}{1 + {}_{/n-1}e_x} = \Pi - \frac{\alpha}{1 + {}_{/n-1}e_x} - P_{x:\overline{n|}} \,.$$

Appliquons ces formules à un effectif d'assurances mixtes conclues à l'âge de 30 ans pour une durée de 25 ans. Comme prime du tarif, prenons la valeur:

$$\Pi_T = 0.0394,$$

qui est approximativement la prime moyenne des sociétés suisses pour une semblable assurance avec participation aux bénéfices. Admettons que les quantités α, β, γ aient pour valeurs:

$$\alpha = 0.04; \qquad \beta = 0.02; \qquad \gamma = 0.0025.$$

La formule (1) donne:

$$\Pi = 0.98 \cdot 0.0394 - 0.0025 = 0.0361.$$

Supposons enfin que les conditions réelles $(i, {}_tp_x)$ soient assez bien représentées par la table de sélection de la Gotha (table réduite), au taux de 5 %. Cette table nous conduit aux valeurs suivantes:

$$P_{[30]:\overline{25}|} = 0.0241\,;\ \mathfrak{a}_{[30]:\overline{25}|} = 13,948\,;\ 1 + {}_{24}e_{[30]} = 23,084\,;$$

ce qui donne pour le bénéfice annuel, en $^0/_{00}$ de l'effectif:

$$\frac{\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}}{\mathfrak{a}_{[30]:\overline{25}|}} = 9,1\ ^0/_{00}\,;$$

$$\frac{\mathfrak{D}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{V}}}{1 + {}_{24}e_{[30]}} = 10,3\ ^0/_{00}.$$

On voit que la différence entre les deux valeurs atteint 1,2 $^0/_{00}$. Elle n'est pas négligeable. La seconde de ces valeurs présuppose que la réserve mathématique a été calculée suivant la même table que la première, et sur prime pure. La valeur moyenne stationnaire de cette réserve figure dans notre premier tableau par le chiffre 0.3603. Elle équivaut à la valeur moyenne de la réserve *MWI* 3½ % zillmée à 14,4 $^0/_{00}$, comme la formule (6) permet de le déterminer.