**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 21 (1926)

**Artikel:** Le contrôle de la mortalité

**Autor:** Dumas, S.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-967428

# Le contrôle de la mortalité.

Par **S. Dumas.**

## Nécessité d'employer une table de sélection.

Tous les calculs de l'actuaire sont basés sur des observations et sur l'hypothèse que l'avenir sera semblable au passé. Il doit donc vérifier régulièrement ses bases techniques de crainte que ses primes ou ses réserves mathématiques ne se révèlent insuffisantes. S'il commet une erreur, il est important de la déceler aussi tôt que possible, afin de la corriger avant qu'elle soit irréparable.

Ces vérifications, nécessaires en tout temps, sont indispensables dans une période de concurrence aussi active que celle dans laquelle se trouvent actuellement nos sociétés. Il est fort à craindre que le besoin de conclure des affaires et de se développer ne les amènent à des concessions trop larges sur les primes ou à répartir des bénéfices qui, même s'ils sont acquis, devraient être mis en réserve. L'actuaire doit résister à la pression des services commerciaux qui, tout aux difficultés du présent, ne redoutent pas assez les dangers de l'avenir. Il en puisera la force dans l'étude attentive des faits; il s'efforcera de restreindre le champ de l'appréciation personnelle pour s'en tenir aux données irréfutables de l'expérience.

Le taux d'intérêt que rapportent en moyenne les placements est facile à déterminer. Chaque année, la comptabilité nous en fournit les éléments.

Pour les taux de frais, la tâche est un peu moins simple; à côté de la comptabilité, nous devons tenir une statistique des contrats. En outre, il faut faire certaines hypothèses sur la répartition des frais pour la première année et les années ultérieures. Néanmoins ce travail a le grand avantage de pouvoir être effectué annuellement.

Le contrôle de la mortalité exige des statistiques spéciales; il s'étend sur un grand nombre d'années; pour qu'il soit complet, il faudrait des distinctions fort nombreuses chez les assurés; c'est un travail énorme et l'on aboutit à des groupes si petits qu'on ne peut rien conclure.

Parmi les distinctions, une des plus importantes est celle de la durée qui s'est écoulée depuis que l'assuré a subi l'examen médical. Très souvent, on la néglige; on se sert de tables agrégées, c'est-à-dire de tables de mortalité pour lesquelles on réunit en un seul groupe toutes les personnes de même âge. On a tort; il est indispensable d'utiliser des tables de sélection, c'est-à-dire des tables dans lesquelles on fait en outre une distinction suivant l'âge auquel les assurés sont entrés dans la compagnie d'assurances. Nous avons en réalité plusieurs tables de mortalité, celle des assurés qui sont entrés à vingt ans à la compagnie, celle des assurés qui sont entrés à vingt et un ans, et ainsi de suite.

Considérons la table anglaise $O^{[M]}$. Le taux annuel de mortalité pour les assurés de vingt-cinq ans qui viennent de subir l'examen médical est

$$q_{[25]} = 0{,}00281\,;$$

pour les assurés qui ont le même âge, mais qui ont subi l'examen médical il y a dix ans, il est

$$q_{[15]+10} = 0{,}00700\,;$$

la table réunit dans un même groupe toutes les personnes qui ont subi l'examen médical il y a dix ans et davantage; en effet, les observations sur lesquelles elle est basée montrent qu'elles forment un groupe suffisamment homogène au point de vue de la sélection médicale.

Si nous envisageons maintenant des personnes de quarante-neuf ans qui viennent de subir l'examen médical, leur taux annuel de mortalité est:

$$q_{[49]} = 0{,}00702.$$

Ainsi, lorsque nous faisons varier l'âge à l'entrée, le taux annuel de mortalité des personnes de vingt-cinq ans se meut dans les mêmes limites que le taux de mortalité des personnes qui viennent de subir l'examen médical, lorsque leur âge varie de vingt-cinq à quarante-neuf ans. Personne ne songerait à négliger l'âge dans une recherche sur la mortalité, mais souvent, on ne s'occupe pas de l'âge à l'entrée, ce qui revient à ne pas tenir compte d'une différence de vingt-quatre ans dans l'âge.

Plus tard, les limites se resserrent; c'est ainsi que nous trouvons dans la même table:

$$q_{[45]} = 0{,}00530$$
$$q_{[35]+10} = 0{,}01205$$
$$q_{[57]} = 0{,}01200$$

L'influence immédiate de la sélection médicale correspond ici à une différence d'âge de douze ans.

Il est presque superflu d'ajouter que nous ne parlons que du taux annuel de mortalité; pour les primes et les réserves mathématiques, les mêmes comparaisons nous conduiraient à des résultats différents.

Dans la table agrégée, les taux de mortalité correspondent, pour chaque âge, à une certaine répartition, des personnes qui ont subi l'examen médical à différentes époques. Cette répartition varie d'une société à l'autre; elle constitue une cause d'erreur d'autant plus à craindre que le portefeuille d'assurances se modifie plus rapidement. Or c'est le cas où se trouvent les compagnies suisses dont la production est actuellement très forte. Voici en résumé le mouvement de leurs assurances de capitaux au cours des dix dernières années, c'est-à-dire dans la période où l'influence de l'examen médical se fait encore sentir:

**Portefeuille suisse des sociétés suisses d'assurances sur la vie [1]).**

| | Polices | Capitaux assurés |
|---|---|---|
| | | Fr. |
| Etat à la fin de 1914 | 253,483 | 805,089,170 |
| Extinctions de 1915 à la fin de 1924 . | 288,490 | 683,861,606 |
| Production de 1915 à la fin de 1924 . . | 719,164 | 2,055,064,646 |
| Etat à la fin de 1924 | 650,878 | 2,061,172,223 |

De longs commentaires sont inutiles. On ne peut pas contrôler efficacement la mortalité en négligeant la sélection médicale, lorsque la plus grande partie des assurances se trouve dans la période où cette sélection se fait sentir avec le plus de force.

En conséquence, les chiffres que publient les sociétés pour montrer la faiblesse de la mortalité réelle par rapport à la mortalité présumée n'ont pas d'intérêt.

[1]) Ce tableau n'est pas tout à fait satisfaisant; de 1914 à 1918, les réassurances sont déduites; elles y sont comprises de 1919 à 1924. Nous n'avons pas le moyen de corriger cette imperfection.

En 1924, suivant la société, la mortalité réelle a varié, en Suisse, de 297 à 558 ‰ de la mortalité présumée. Ces taux nous montrent que la table de mortalité adoptée par la compagnie est trop loin de la réalité pour que les prévisions qu'on en tire aient de la valeur. Seules les tables de sélection nous donneront une meilleure approximation.

### Simplification dans l'emploi des tables de sélection.

On objectera immédiatement aux tables de sélection que leur emploi comporte un travail considérable au point d'en être prohibitif. Nous devons chercher des simplifications. Celle qui se présente naturellement à l'esprit est de grouper tous les assurés entrés dans la société la même année, d'en calculer l'âge moyen et de comparer la mortalité réelle à la mortalité présumée du groupe, calculée comme si tous les assurés avaient l'âge moyen. Nous savons que le résultat serait médiocre; en revanche, au lieu de déterminer l'âge moyen, nous pouvons calculer l'âge actuarien, qui est un âge moyen pondéré.

Considérons une table de mortalité ajustée au moyen de la formule de Makeham et désignons par

$$\mu_x = -(\text{Log}s + \text{Log}g \, \text{Log}c \; c^x)$$

le taux instantané de mortalité à l'âge $x$, autrement dit l'intensité de la mortalité à l'âge $x$. Supposons que nous ayons $n$ personnes d'âge $x, y, z \ldots$; l'âge actuarien du groupe $w$ est défini par l'équation:

$$\mu_w = \frac{1}{n}(\mu_x + \mu_y + \mu_z + \ldots.).$$

La mortalité du groupe sera la même que si tous les assurés avaient l'âge actuarien.

Si la mortalité réelle obéissait exactement à la loi de Makeham et si nous connaissions pour tous les âges le taux instantané de mortalité, nous ne commettrions aucune erreur en remplaçant le groupe de personnes d'âges divers par un groupe de personnes de même âge. Le procédé serait rigoureusement exact. Mais, il n'en est pas ainsi. D'une part, si la formule de Makeham est très satisfaisante pour ajuster les tables agrégées à partir de l'âge de vingt-cinq ans ou trente ans, elle ne donne pas de bons résultats en dessous; d'autre part, dans une table de sélection, on ne peut pas l'appliquer pour les années qui suivent immédiatement l'entrée de l'intéressé dans la société d'assurances. Nous avons là des sources d'erreurs; pouvons-nous les négliger?

Une étude analytique nous permettrait probablement de limiter l'erreur à craindre; nous ne l'entreprendrons pas ici. Il y a, en effet, beaucoup de chances, pour qu'elle soit difficile et que le résultat ne soit pas proportionné à nos peines. Nous ne voulons pas dire qu'elle ne méritât pas d'être faite; aujourd'hui, nous désirons seulement aller au plus pressé. Nous nous contenterons de montrer, par un exemple numérique, que nous obtenons une bonne approximation[1]).

Nous avons considéré une société d'assurances dans laquelle entreraient simultanément 5156 personnes âgées de 18 à 60 ans. Voici comment nous les avons réparties par âge d'entrée; nous reconnaissons que cette répartition comporte une large part d'arbitraire; nous nous sommes efforcés de la choisir d'une manière raisonnable.

---

[1]) M. le Dr Zaugg, mathématicien au Bureau fédéral des assurances, a eu l'obligeance de faire les calculs et diverses recherches que comportait le présent mémoire; je l'en remercie bien sincèrement.

| Age d'entrée | Nombre des assurés | Age d'entrée | Nombre des assurés | Age d'entrée | Nombre des assurés | Age d'entrée | Nombre des assurés |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 11 | 29 | 227 | 40 | 182 | 51 | 60 |
| 19 | 16 | 30 | 243 | 41 | 168 | 52 | 53 |
| 20 | 22 | 31 | 253 | 42 | 152 | 53 | 46 |
| 21 | 32 | 32 | 256 | 43 | 136 | 54 | 40 |
| 22 | 47 | 33 | 254 | 44 | 122 | 55 | 35 |
| 23 | 68 | 34 | 249 | 45 | 110 | 56 | 31 |
| 24 | 92 | 35 | 242 | 46 | 99 | 57 | 27 |
| 25 | 119 | 36 | 231 | 47 | 91 | 58 | 24 |
| 26 | 148 | 37 | 222 | 48 | 84 | 59 | 19 |
| 27 | 177 | 38 | 211 | 49 | 76 | 60 | 12 |
| 28 | 205 | 39 | 196 | 50 | 68 | | |

Nous sommes obligés de prendre une mortalité théorique et de la considérer comme réelle. Adoptons à cet effet la table de mortalité de la Gotha; si nous faisons le calcul pour chaque âge, étant donnée la répartition adoptée, nous trouvons 23,86 [1]) décès pour la première année. C'est ce nombre que nous considérerons comme nombre réel des décès.

Pour calculer l'âge actuarien, prenons les taux instantanés de mortalité que donne la table A F; avec notre répartition par âge, nous arrivons à 39,60 ans; cet âge-là nous conduit d'après la table de la Gotha à 24,39 décès, ce que nous considérerons comme mortalité présumée. Nous arrivons ainsi à ce que la mortalité présumée dépasse de 0,53 la mortalité réelle; l'erreur commise est de 2,22 °/o.

[1]) Nous calculons avec une grande précision, car nous allons arriver à des différences très faibles; nous désirons éliminer l'erreur commise en arrondissant les résultats; en pratique, ce souci perdrait toute importance.

Il nous reste 5132,14 vivants. Faisons le même calcul et suivons ainsi pendant vingt ans la mortalité. Nous obtenons le tableau ci-dessous. Nous voyons que la différence maximum entre la mortalité réelle et la mortalité présumée est de 3,06 %.

| Durée de l'assurance en années | Nombre des assurés | Age d'entrée actuarien des survivants | Nombre réel des décès | Nombre présumé des décès | Erreur absolue | Erreur relative % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5.156,00 | 39,60 | 23,86 | 24,39 | —0,53 | —2,22 |
| 1 | 5.132,14 | 39,58 | 32,61 | 32,90 | —0,29 | —0,89 |
| 2 | 5.099,53 | 39,55 | 37,82 | 38,30 | —0,48 | —1,27 |
| 3 | 5.061,71 | 39,50 | 42,00 | 42,92 | —0,92 | —2,19 |
| 4 | 5.019,71 | 39,45 | 45,48 | 46,53 | —1,05 | —2,31 |
| 5 | 4.974,23 | 39,39 | 49,01 | 49,24 | —0,24 | —0,49 |
| 6 | 4.925,22 | 39,34 | 53,68 | 53,30 | 0,38 | 0,71 |
| 7 | 4.871,54 | 39,26 | 58,53 | 56,95 | 1,58 | 2,70 |
| 8 | 4.813,01 | 39,21 | 61,25 | 59,44 | 1,81 | 2,96 |
| 9 | 4.751,76 | 39,11 | 64,11 | 62,15 | 1,96 | 3,06 |
| 10 | 4.687,65 | 39,00 | 67,12 | 65,30 | 1,82 | 2,71 |
| 11 | 4.620,53 | 38,91 | 70,26 | 68,85 | 1,41 | 2,01 |
| 12 | 4.550,27 | 38,77 | 73,50 | 72,44 | 1,06 | 1,44 |
| 13 | 4.476,77 | 38,66 | 76,80 | 76,37 | 0,43 | 0,56 |
| 14 | 4.399,97 | 38,54 | 80,29 | 80,34 | —0,05 | —0,06 |
| 15 | 4.319,68 | 38,40 | 83,78 | 84,28 | —0,50 | —0,60 |
| 16 | 4.235,90 | 38,26 | 87,40 | 88,32 | —0,92 | —1,05 |
| 17 | 4.148,50 | 38,09 | 91,26 | 92,22 | —0,96 | —1,05 |
| 18 | 4.057,24 | 37,94 | 94,77 | 96,44 | —1,67 | —1,76 |
| 19 | 3.962,47 | 37,75 | 98,47 | 100,53 | —2,06 | —2,09 |

Le résultat auquel nous arrivons est très satisfaisant; il justifie l'emploi de la méthode.

Nous nous sommes placés dans des circonstances rappelant la réalité, puisque nous avons employé pour le calcul de l'âge actuarien et la détermination du nombre des décès, deux tables de mortalité aussi différentes que la table A F et celle de la Gotha. Si nous n'avons pas tenu compte des sorties anormales, c'est que, pour notre calcul, nous pouvons considérer chaque groupe comme indépendant du groupe de l'année précédente. Il serait facile de déterminer le nombre des entrées de manière que la seconde année, même en tenant compte des résiliations, nous ayons 5.132,14 assurés se répartissant par âge exactement comme les nôtres; le calcul relatif à la seconde année ne serait modifié en rien.

Nous avons calculé l'âge actuarien comme un âge moyen pondéré, chaque âge étant affecté d'un poids égal au taux instantané de mortalité. Nous calculons l'âge d'entrée actuarien, afin que le poids reste le même pendant tout le temps où la personne est sous le risque. Considérons l'équation qui définit l'âge actuarien; des simplifications faciles nous montrent qu'elle est équivalente à la suivante:

$$c^w = \frac{1}{n}(c^x + c^y + c^z + \ldots)$$

Le poids $c^x$ étant un peu plus simple que $\mu_x$, c'est celui que nous adopterons.

Jusqu'ici, nous avons calculé l'âge d'entrée actuarien; il vaut mieux calculer l'âge actuarien du groupe à un moment déterminé, le même pour tous les groupes.

Pendant les premières années d'observations, il est d'une grande importance de tenir compte du temps qui s'est écoulé depuis que l'assuré a subi l'examen médical. Au bout de quelques années, par exemple sept ans pour les observations de la Gotha, dix ans pour celles qui sont à la base de la table $O^{[M]}$, cette durée a produit tout son effet; nous pouvons alors mettre dans le même groupe tous les assurés de même âge, quel que soit le moment où ils ont subi l'examen médical. A partir de ce moment-là, nous pourrions faire abstraction de l'âge actuarien et comparer la mortalité pour chaque âge avec les valeurs finales de la table. Nous pouvons aussi, pour rester fidèle à notre méthode, comparer la mortalité réelle du groupe final avec celle que nous permet d'en présumer l'âge actuarien. Il faut recommander ce dernier procédé lorsque le groupe final sera petit, ce qui arrivera lorsque, comme nous le verrons plus loin, on désirera faire diverses distinctions entre les assurés.

Une petite difficulté se présente alors. Supposons deux personnes nées la même année et s'assurant, l'une à vingt ans et l'autre à vingt-cinq. Puisqu'elles ont le même âge, nous ne pouvons pas les faire figurer dans le groupe final, avec deux poids différents. Il suffit de calculer pour tous les groupes l'âge actuarien à une date déterminée, par exemple le 1er juillet 1900. Dans $c^x$, l'exposant $x$ ne sera plus égal à l'âge d'entrée, mais à l'âge au moment considéré; en particulier, il pourra être négatif, ce qui n'a aucune importance au point de vue mathématique.

Il nous reste encore une question: choisir $c$. Dans notre exemple numérique, nous avons adopté la valeur à laquelle a conduit l'ajustement de la table A F, soit

$$c = 1,0916817$$

mais ce choix n'a rien d'obligatoire.

M. Blaschke [1]) a publié les constantes de Makeham pour 30 tables de mortalité différentes. La constante $c$

[1]) Die Todesursachen bei österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraum 1876—1900 (Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, Mai 1914, Verlag des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungs-Anstalten, Wien I, Börsegasse 10).

y varie entre 1,11172 pour la table autrichienne $F\frac{S}{N}$ et 1,06687 pour la table austro-hongroise $A\,H\,\frac{M}{G\,(10)}$. Pour nous faire une idée de l'erreur qui peut provenir du choix de $c$, nous avons fait les mêmes calculs que ci-dessus, en admettant que la mortalité réelle, au lieu d'être conforme à la table de la Gotha le soit à la table $F\,\frac{S}{N}$. Nous sommes arrivés aux résultats suivants :

| Durée de l'assurance en années | Nombre des assurés | Age d'entrée actuarien des survivants | Nombre réel des décès | Nombre présumé des décès | Erreur absolue | Erreur relative % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5.156,00 | 39,60 | 48,74 | 48,00 | 0,74 | 1,52 |
| 1 | 5.107,26 | 39,58 | 49,30 | 48,57 | 0,73 | 1,48 |
| 2 | 5.057,96 | 39,55 | 50,16 | 49,21 | 0,95 | 1,89 |
| 3 | 5.007,80 | 39,53 | 50,90 | 49,98 | 0,92 | 1,81 |
| 4 | 4.956,90 | 39,47 | 51,86 | 50,76 | 1,10 | 2,12 |
| 5 | 4.905,04 | 39,45 | 52,89 | 51,75 | 1,14 | 2,16 |
| 6 | 4.852,15 | 39,39 | 54,00 | 52,74 | 1,26 | 2,33 |
| 7 | 4.798,15 | 39,37 | 55,29 | 53,93 | 1,36 | 2,46 |
| 8 | 4.742,86 | 39,32 | 56,70 | 55,16 | 1,54 | 2,72 |
| 9 | 4.686,16 | 39,26 | 58,51 | 56,56 | 1,95 | 3,33 |
| 10 | 4.627,65 | 39,21 | 60,09 | 58,12 | 1,97 | 3,28 |
| 11 | 4.567,56 | 39,13 | 61,69 | 59,74 | 1,95 | 3,16 |
| 12 | 4.505,87 | 39,05 | 63,63 | 61,46 | 2,17 | 3,41 |
| 13 | 4.442,24 | 38,97 | 65,67 | 63,44 | 2,23 | 3,40 |
| 14 | 4.376,57 | 38,89 | 67,94 | 65,56 | 2,38 | 3,50 |
| 15 | 4.308,63 | 38,80 | 70,31 | 67,82 | 2,49 | 3,54 |
| 16 | 4.238,32 | 38,69 | 72,84 | 70,19 | 2,65 | 3,64 |
| 17 | 4.165,48 | 38,57 | 75,49 | 72,65 | 2,84 | 3,67 |
| 18 | 4 089,99 | 38,46 | 78,23 | 75,34 | 2,89 | 3,69 |
| 19 | 4.011,76 | 38,31 | 81,17 | 77,99 | 3,18 | 3,92 |

Dans notre premier tableau, lorsque nous sommes partis de la mortalité de la Gotha, l'erreur commise était tout d'abord négative, puis positive, passait par un maximum de 3 %, puis diminuait et redevenait négative. Ici, l'erreur commise croît constamment; elle n'atteint pas au bout de 20 ans 4 % du nombre des décès; elle nous paraît rester dans des limites acceptables. Nous croyons avoir ainsi démontré que le choix de $c$ n'a pas une importance capitale et qu'en prenant une valeur voisine de 1,09, moyenne entre la plus grande et la plus petite des valeurs citées par M. Blaschke, on ne risque pas de se tromper trop lourdement.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que la mortalité des personnes; nous devons envisager aussi celle des sommes assurées. En résumé, voici comment nous procéderons.

Nous choisirons la valeur de $c$ qui nous semblera la plus convenable et la date pour laquelle nous calculerons l'âge actuarien.

Lorsqu'une personne qui avait l'âge $x$ à la date choisie s'assurera pour une somme $S$, nous inscrirons deux coefficients $c^x$ et $S\,c^x$ dans la carte technique afférente à son assurance.

Nous additionnerons les coefficients attribués à toutes les assurances que nous grouperons ensemble; supposons qu'elles soient au nombre de $n$; nous résoudrons par rapport à $t$ et à $s$ les équations:

$$c^t = \frac{1}{n} \sum c^x$$

$$c^s = \frac{\sum S\,c^x}{\sum S}$$

$t$ sera, pour la date choisie, l'âge actuarien du groupe de personnes et $s$ l'âge actuarien se rapportant au groupe de sommes assurées.

Chaque société d'assurances a certaines habitudes pour fixer l'âge de ses assurés à une date déterminée ; il n'est donc pas opportun que nous entrions ici dans plus de détails.

De même, suivant la compagnie, il faudra résoudre d'une manière ou d'une autre la difficulté provenant du fait que l'année d'assurance ne coïncide pas avec l'année civile.

Enfin, il nous reste une petite correction à faire subir à l'âge actuarien, à cause des sorties ayant une autre cause que le décès ; supposons en effet que la résiliation, le rachat et les arrivées à terme soient particulièrement nombreux chez les assurés les plus jeunes ; à la fin de l'année, nous aurions des assurés qui seraient en moyenne plus âgés que nous ne l'avons admis. En pratique, il ne semble guère qu'il faille craindre une erreur sensible. Pour la supprimer, il suffira probablement de procéder ainsi : nous calculerons l'âge actuarien pour toutes les personnes appartenant au groupe au début de l'année d'observation ; nous calculerons ensuite cet âge-là en éliminant les assurés qui pendant l'année ont quitté la compagnie pour une autre raison que le décès ; nous adopterons comme âge actuarien la moyenne des deux âges ainsi définis.

## Questions diverses.

Il y a une foule de questions très importantes pour les compagnies d'assurances, que seule une étude approfondie de la mortalité permet de résoudre. Malheureusement, si l'on ne dispose pas d'observations extrêmement nombreuses, la discrimination des risques conduit à de si petits groupes d'assurés qu'on ne peut rien conclure. Le calcul de l'âge actuarien diminue considérablement le nombre des groupes; en effet, il évite, dans une même classe de risques, la distinction par âge.

Une des plus importantes de ces questions est la suivante: certaines compagnies d'assurances se montrent très sévères dans l'acceptation des risques; dès que l'examen médical décèle une tare, elles exigent une surprime; d'autres compagnies estiment qu'il est préférable d'éviter la complication des surprimes; l'intéressé en est froissé inutilement et l'on facilite tellement la production en y renonçant qu'on retrouve rapidement, d'une manière indirecte, ce qu'on abandonne. Elles acceptent donc à la prime normale beaucoup de personnes que les autres considèrent comme des risques tarés, refusent, en revanche, les candidats auxquels il conviendrait de demander une surprime un peu élevée.

Cette dernière augmentation est séduisante; elle présente toutefois un danger; il est à craindre que peu à peu la politique des compagnies soit connue du public; les personnes en très bonne santé se présenteront aux sociétés sévères; les autres iront de préférence aux sociétés plus larges. Mais tandis qu'il ne serait pas grave d'avoir, sans surprimes, dans un portefeuille de dix à quinze pour-cent de risques légèrement sous-normaux, ce serait inquiétant qu'il y en eût cinquante pour-cent.

Les partisans des deux méthodes pourraient discuter longtemps sans résultat; pour trancher le différend, il faut des chiffres; il faut que les sociétés larges dans l'acceptation des risques prouvent que la mortalité de leurs assurés reste dans des limites raisonnables; la comparaison avec une table agrégée ne suffit pas; souvent elle donne même une sécurité trompeuse. En revanche, si l'emploi d'une table de sélection ne nous permet pas de résoudre définitivement un problème dont les éléments varient constamment, nous pouvons espérer qu'elle nous montrera le danger avant que nos erreurs soient irréparables.

Les sociétés sévères dans l'acceptation des risques ont aussi un grand intérêt à se servir de tables de sélection. Mais pour elles, la question est différente; leurs surprimes sont-elles proportionnées à l'augmentation de mortalité? L'usage de la table de sélection est indispensable, car, pendant les deux ou trois premières années, il faudrait une surmortalité terrible pour atteindre le taux d'une table agrégée. Si nous ne sommes pas obligés de faire des groupes séparés suivant l'âge des assurés, il ne sera pas indispensable d'avoir des observations extrêmement nombreuses pour étudier l'influence qu'exercent l'hérédité, les maladies antérieures ou actuelles, la profession, etc., sur la mortalité des assurés.

L'assurance sans examen médical nous pose un problème semblable. L'examen médical est trop coûteux pour y recourir si la somme assurée est très faible; il est nécessaire lorsque la somme assurée est très élevée. Où devons-nous fixer la limite? Actuellement, nos sociétés varient de Fr. 4000 à Fr. 10,000, mais sans donner de raisons péremptoires en faveur de leur décision. Une étude plus approfondie de la mortalité nous permettra de voir approximativement pour quelle somme nous pouvons renoncer à l'examen médical, l'économie couvrant la surmortalité. Ici encore, la question ne comporte pas de réponse absolue et définitive; nous pouvons heureusement nous contenter de moins.

Rappelons encore les nombreuses questions que pose l'autosélection: la mortalité suivant la hauteur de la somme assurée, suivant la combinaison, suivant que l'assurance participe ou non dans les bénéfices, etc.

On pourrait également étudier la mortalité par région, par agence, par médecin examinateur. Les sociétés d'assurances y trouveraient un moyen précieux de juger la qualité de leur production et de leur personnel.

Immédiatement, une objection se présente à l'esprit; pour tous ces travaux, il faudrait grouper les cartes techniques de tant de manières différentes que le travail qui en résulterait deviendrait pratiquement impossible. Cet inconvénient disparaîtra lorsque les machines automatiques à faire les statistiques seront plus répandues. Il conviendrait aussi d'examiner l'opportunité pour les sociétés de se grouper et d'organiser en commun toutes leurs recherches concernant la mortalité.

Faisons encore remarquer que le calcul de l'âge actuarien nous rendra des services ailleurs que dans le contrôle de la mortalité, en particulier dans certaines méthodes de groupement pour le calcul des réserves mathématiques. Nous rappelons que la méthode de M. Lidstone consiste à grouper les assurances mixtes par années d'échéance et à déterminer l'âge actuarien à l'échéance du contrat. Il est facile d'en déduire la réserve mathématique du groupe. Nous pourrions employer cette méthode; la seule différence consisterait dans le fait que nous calculerions l'âge actuarien pour une autre date que l'échéance.

Quelques sociétés d'assurances utilisent la méthode de récurrence connue en France sous le nom de méthode de Fouret; elle est basée sur la formule

$$ {}_{n+1}V_x = \frac{({}_nV_x + P_x)(1+i) - q_{x+n}}{p_{x+n}} $$

Nous donnerons à $x + n$ la valeur de l'âge actuarien au début de l'année; si nous calculons nos réserves mathématiques avec une table agrégée, nous constituerons un seul groupe de toutes nos polices. Lorsqu'on adopte cette méthode, il faut vérifier de temps en temps par un autre moyen le résultat obtenu; sinon, une perte se reportant d'une année à l'autre, finirait par devenir grave. Nous ferions ainsi, par exemple, tous les cinq ans, le calcul exact des réserves mathématiques; dans l'intervalle, un calcul très simple nous donnerait une approximation que nous pouvons espérer suffisante.

L'âge actuarien des assurés nous sera encore très utile lorsque nous essayerons d'évaluer nos bénéfices futurs; nous avons tant de causes d'incertitude qu'un calcul rigoureux ne se justifie guère; il vaut mieux faire souvent un calcul approximatif mais simple, qu'un calcul plus exact qui, par la nature des choses, est beaucoup plus compliqué. Ce sera aussi le cas pour les réserves de bénéfices; nous les calculerons au moyen de l'âge actuarien. La difficulté de l'opération en sera suffisamment atténuée pour que nous puissions la renouveler fréquemment.

Dans ce qui précède, nous avons en vue principalement les affaires directes; il n'en faudrait pas conclure que notre méthode n'offrirait aucun avantage pour le réassureur. Au contraire, elle lui permettra de contrôler sans trop de peine la mortalité par sociétés directes. La connaissance de l'âge actuarien lui permettra aussi, dans certains cas, de simplifier le calcul de ses réserves mathématiques.

## L'influence de l'âge sur la mortalité.

Nous désirons être bien compris; nous pensons que l'âge actuarien nous permet de comparer facilement les mortalités réelle et présumée; mais il ne s'agit ici que d'une approximation. Il sera toujours indispensable d'étudier la variation de la mortalité avec l'âge des personnes observées. Actuellement, la plupart des sociétés d'assurances calculent chaque année leur mortalité présumée sur la base d'une table agrégée; elles font le calcul âge par âge. Nous pensons qu'il faut se servir d'une table de sélection et nous cherchons une simplification pour compenser la complication qui s'impose. Il suffira de faire à intervalles plus éloignés, peut-être tous les dix ans, le contrôle de la mortalité d'après l'âge.

Pour établir la nécessité d'étudier l'influence de l'âge sur la mortalité, considérons trois tables de mortalité, par exemple entre 30 et 70 ans. La table I est une table normale. La table II indique une mortalité surélevée; à 30 ans, la mortalité II est supérieure à la mortalité I, mais la différence va s'atténuant pour disparaître à l'âge de 70 ans. La table III indique également une mortalité surélevée, mais, au contraire de la table II, la mortalité III qui à 30 ans est la même que la mortalité I, devient de plus en plus mauvaise à mesure que l'âge augmente. Pour la commodité du raisonnement, nous admettrons que pour un même nombre de vivants à 30 ans, les tables II et III ont le même nombre de décès jusqu'à 70 ans. Désignons par $P$ la prime d'une assurance mixte constituée à l'âge de 30 ans pour une durée de 40 ans et par $V$ la réserve mathématique de cette assurance au bout de $n$ années; l'indice fixe la table utilisée pour le calcul.

La table I est la plus favorable; par conséquent, la prime $P_{\mathrm{I}}$ est la plus faible. Par hypothèse, la table II prévoit autant de décès que la table III, mais ils sont plus rapprochés; la prime $P_{\mathrm{II}}$ est plus élevée que $P_{\mathrm{III}}$. Il en résulte les inégalités

$$P_{\mathrm{I}} < P_{\mathrm{III}} < P_{\mathrm{II}}.$$

Pour les réserves mathématiques, il en est autrement; leur hauteur dépend de la variation du taux de mortalité; plus il augmente rapidement et plus la réserve mathématique est élevée. C'est pour la table II que le taux de mortalité croît le moins; il commence, en effet, par une valeur supérieure à celle qu'indique la table I pour finir à 70 ans par la même valeur que la table I; la table II nous conduit à la plus faible des réserves mathématiques. C'est, au contraire, la table III dont le taux de mortalité augmente le plus rapidement et qui nous conduit aux plus fortes réserves mathématiques. Nous avons donc:

$$V_{\mathrm{II}} < V_{\mathrm{I}} < V_{\mathrm{III}}.$$

Si nous nous basions uniquement sur l'âge actuarien, nous pourrions confondre deux mortalités conformes l'une à la table II et l'autre à la table III. L'erreur pourrait avoir des conséquences fâcheuses. Cette objection a de la force; il ne faut cependant pas l'exagérer. En effet, notre procédé nous apprendra que dans les deux cas nous avons une mortalité supérieure à la normale. L'emploi d'une table agrégée, pour peu que les nouvelles affaires assumées soient nombreuses, pourrait au contraire nous faire croire à une sous-mortalité.

Nous avons défini théoriquement les tables II et III afin de pouvoir exprimer aisément notre pensée. En réalité, les choses sont un peu moins simples, sans être essentiellement différentes. Nous savons que les causes aggravant la mortalité se font sentir d'une manière très différente. Les unes augmentent la mortalité à tous les âges. Pour d'autres, la mortalité augmente avec l'âge; c'est le cas de l'obésité et des maladies de cœur qui vont souvent avec elles. Le danger d'autres causes diminue avec l'âge; ainsi, il faut craindre surtout dans la jeunesse une surmortalité due à une trop grande maigreur; ce sont aux mêmes âges que nous devons redouter le plus la tuberculose, à laquelle la maigreur prédispose, lorsqu'elle n'en est pas déjà un symptôme.

Dans le même ordre d'idée, il faut craindre de l'autosélection chez les personnes qui s'assurent tard, disons après quarante-cinq ans. On peut penser qu'elles recourent à l'assurance, car elles en éprouvent un besoin particulièrement grand. Aucun raisonnement ne peut établir si cette crainte est fondée ou non, seuls des chiffres montrent dans quelle mesure elle l'est.

### Emploi des tables de sélection pour les calculs de l'actuaire.

Nous estimons avoir démontré qu'il est indispensable d'utiliser une table de sélection pour contrôler la mortalité. Cela ne signifie pas qu'il faille nécessairement adopter la même table pour toutes les opérations de l'actuaire; envisageons de plus près le calcul de la prime, de la réserve mathématique et l'évaluation des bénéfices et voyons comment on peut justifier l'emploi d'une table agrégée. Pour fixer les idées, nous donnerons des exemples basés sur les deux tables anglaises $O^{[M]}$ et $O^{M}$; comme on le sait, elles ont été construites sur les mêmes observations faites par soixante compagnies anglaises de 1863 à 1893; dans l'une on a tenu compte de l'âge d'entrée, dans l'autre pas. Le taux d'intérêt est ici sans importance; nous prendrons $3\frac{1}{2}$ %.

Comparons les primes pures des deux tables.

Primes pures au taux de $3\frac{1}{2}$ %.
Somme assurée: 10.000.

| Vie entière | | | | Mixtes | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Durée 40 ans | | | Durée 30 ans | | | Durée 20 ans | | |
| Age d'entrée | $O^{[M]}$ | $O^{M}$ | $O^{[M]}$ en % de $O^{M}$ | $O^{[M]}$ | $O^{M}$ | $O^{[M]}$ en % de $O^{M}$ | $O^{[M]}$ | $O^{M}$ | $O^{[M]}$ en % de $O^{M}$ | $O^{[M]}$ | $O^{M}$ | $O^{[M]}$ en % de $O^{M}$ |
| 20 | 126 | 120 | 105 | 167 | 161 | 104 | 230 | 224 | 103 | 376 | 371 | 101 |
| 30 | 167 | 168 | 99 | 190 | 190 | 100 | 244 | 246 | 99 | 384 | 386 | 99 |
| 40 | 233 | 240 | 97 | 240 | 247 | 97 | 279 | 287 | 97 | 405 | 414 | 98 |
| 50 | 342 | 360 | 95 | 343 | 360 | 95 | 360 | 377 | 95 | 457 | 476 | 96 |

Dans une foule de cas, les primes $O^{[M]}$ et $O^{M}$ ne diffèrent pas sensiblement les unes des autres; en outre, sauf pour les jeunes âges, la prime calculée d'après la table de sélection est la plus faible. Il n'y a pas de graves inconvénients à calculer un tarif avec une table agrégée, surtout si l'on a soin, par mesure de prudence, d'ajouter encore un chargement spécial aux primes des jeunes âges.

Le calcul des réserves mathématiques pose la question d'une manière moins simple. Considérons, par exemple, les réserves mathématiques d'une assurance pour la vie entière.

| Assurance pour la vie entière de 10.000. —. Réserves mathématiques, au taux de $3^1/_2$ %. Age d'entrée: 30 ans. | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Age de la police | $O^{[M]}$ | $O^M$ | $O^{[M]}$ en % de $O^M$ | Age de la police | $O^{[M]}$ | $O^M$ | $O^{[M]}$ en % de $O^M$ |
| 1 | 142 | 115 | 123 | 20 | 2773 | 2751 | 101 |
| 3 | 398 | 351 | 113 | 25 | 3595 | 3585 | 100 |
| 5 | 653 | 596 | 110 | 30 | 4450 | 4450 | 100 |
| 10 | 1305 | 1250 | 104 | 40 | 6136 | 6148 | 99,8 |
| 15 | 2005 | 1969 | 102 | 50 | 7575 | 7587 | 99,8 |

A la fin de la première année, l'emploi de la table agrégée conduit à une réserve mathématique de 23 % trop faible; à la fin de la dixième année, son influence est la même que si l'on déduisait de la réserve mathématique des frais d'acquisition non amortis évalués à 6,3 ‰ de la somme assurée. Ensuite, la différence s'atténue puisque, dans notre exemple, il arrive même que la réserve mathématique d'après la table agrégée dépasse la réserve mathématique d'après la table de sélection, de très peu de chose, il est vrai.

Les tables agrégées risquent ainsi de nous conduire à des réserves mathématiques trop faibles. Il ne faut donc les employer qu'avec prudence; en particulier, il faut éviter les déductions trop fortes pour commissions non amorties. Si non, on pourrait considérer des bénéfices comme acquis avant qu'ils ne le soient.

Ce dernier point est important, car la table agrégée nous fera croire au début à des bénéfices de mortalité, puis plus tard à des pertes; la comparaison des taux de mortalités nous en montre la raison.

| $x$ | $q_{[30]+x-30}$ $O^{[M]}$ | $q_x$ $O^{M}$ | $q_x : q_{[30]+x-30}$ |
|---|---|---|---|
| 30 | 0,00312 | 0,00595 | 1,91 |
| 35 | 0,00728 | 0,00738 | 1,01 |
| 40 | 0,00986 | 0,00915 | 0,93 |
| 45 | 0,01205 | 0,01153 | 0,96 |
| 50 | 0,01546 | 0,01504 | 0,97 |
| 55 | 0,02079 | 0,02045 | 0,98 |
| 60 | 0,02907 | 0,02887 | 0,99 |
| 65 | 0,04192 | 0,04196 | 1,00 |
| 70 | 0,06169 | 0,06207 | 1,01 |
| 75 | 0,09187 | 0,09264 | 1,01 |
| 80 | 0,13720 | 0,13844 | 1,01 |
| 85 | 0,20371 | 0,20569 | 1,01 |
| 90 | 0,29777 | 0,30075 | 1,01 |
| 95 | 0,42329 | 0,42473 | 1,00 |
| 100 | 0,57640 | 0,57143 | 0,99 |

Immédiatement après l'examen médical, la mortalité de sélection est la plus faible ; au bout de quelques années, la mortalité agrégée est une moyenne entre la mortalité de personnes qui viennent de subir l'examen médical et celle de personnes qui l'ont subi il y a déjà plusieurs années. Il est naturel qu'elle soit inférieure à la mortalité de sélection qui ne se rapporte qu'à des personnes dont l'examen médical est déjà ancien. Plus tard, les entrées nouvelles sont peu nombreuses ; les deux tables se rapprochent beaucoup l'une de l'autre.

Cette marche du taux de mortalité se répercute sur le bénéfice de mortalité. Considérons une assurance mixte de Fr. 100,000 contractée par une personne de 30 ans pour une durée de 25 ans. Admettons que la mortalité réelle soit celle qu'indique la table $O^{[M]}$, tandis que nous faisons nos calculs d'après la table $O^{M}$ au taux de $3\frac{1}{2}$ %.

Les primes pures sont sur la base de $O^{[M]}$ $3\frac{1}{2}$ % de Fr. 2976 et sur la base $O^{M}$ $3\frac{1}{2}$ % de Fr. 2992; nous ferons un petit bénéfice de mortalité, en moyenne Fr. 16 par an.

La première année, le bénéfice de mortalité nous est donné par la formule

$$100{,}000 \left\{ ({}_{o}V + P)\,(1 + i) - q_{[30]} - p_{[30]}\,{}_{1}V \right\} =$$
$$2992 \cdot 1{,}035 - 312 - 0{,}99688 \cdot 2518 = \text{Fr. } 275.$$

La onzième année, il sera de

$$100{,}000 \left\{ ({}_{10}V + P)\,(1 + i) - q_{[30]+10} - p_{[30]+10}\,{}_{11}V \right\}$$
$$= (29213 + 2992)\,1{,}035 - 986 - 0{,}99014 \cdot 32713$$
$$= -\text{Fr. } 44.$$

Nous éprouvons donc une perte de mortalité.

A la fin de l'année, la prime de risque de la première année a comme valeur

$$100{,}000\ q_{30} \cdot (1 - {}_{1}V) = 0{,}00595 \cdot 97482 = \text{Fr. } 580.$$

Le bénéfice de mortalité s'élève à 47 % de la prime de risque.

Pour la onzième année, nous avons

$$100{,}000\ q_{40}\ (1 - {}_{11}V) = 0{,}00915 \cdot 67287 = \text{Fr. } 616.$$

La perte de mortalité est de 7 % de la prime de risque.

Nous donnons les chiffres ci-dessus à titre d'exemple; il n'est pas nécessaire de les multiplier, car l'influence de la sélection sur le bénéfice varie d'une société à l'autre; elle dépend de la composition du portefeuille. L'actuaire doit se rendre compte qu'en négligeant la sélection, il commet une erreur; il doit se demander si cette erreur reste dans les limites admissibles. On ne peut pas résoudre la question abstraitement; toutefois, nous devons nous rappeler l'incertitude de nos bases techniques; les inexactitudes sont si nombreuses et si importantes qu'il ne semble pas nécessaire de s'attacher, au prix de grandes complications, à corriger l'une d'elles. Il vaux mieux calculer ses réserves mathématiques de manière à être sûr qu'elles contiennent un supplément important qui servira de réserve pour toutes éventualités.

Il est douteux que personne combatte ces idées; cependant, à notre époque, elles sont difficiles à réaliser; la guerre et ses suites ont absorbé les réserves libres de bien des assureurs; d'autre part, la concurrence est effrénée; chacun s'efforce d'abaisser sa prime soit directement, soit par des procédés indirects, en particulier, en allouant aux assurés des parts de bénéfices qui vont à l'extrême limite du possible. On voudrait être sûr que cette limite n'est jamais dépassée; c'est la raison pour laquelle une surveillance active des bases techniques s'impose, en premier lieu dans le domaine où elle est la plus compliquée, le contrôle de la mortalité.

Cette étude permettra d'évaluer mieux qu'on ne le fait maintenant la part des bénéfices dont il est légitime que l'assureur dispose et celle qu'il doit réserver. Nous sommes dans une situation encore troublée, mais nous pouvons espérer que l'humanité assagie par l'effroyable guerre que nous venons de traverser, réfléchira sérieusement avant de se lancer dans de nouvelles aventures; nous ne sommes peut-être pas trop optimistes en pensant que les sociétés d'assurances sur la vie ont devant elles quelques années de travail tranquille. Elles doivent profiter de ce répit pour reconstituer leurs réserves libres; en effet, les catastrophes reviendront. Si les efforts pour supprimer la guerre réussissent, ce que nous souhaitons tous, autre chose se produira; il est en effet inconcevable que nous entrions dans un âge d'or délivré de toutes difficultés. Un jour ou l'autre les assureurs auront besoin de fortes réserves libres; ils doivent profiter de chaque exercice pour les créer et les doter largement.

Si nous estimons indispensable d'étudier attentivement la mortalité des assurés, nous devons pourtant reconnaître que c'est un gros travail. Il exige une préparation spéciale et ce serait, semble-t-il, gaspiller ses forces que d'avoir dans chaque compagnie d'assurances un actuaire capable de suivre la question dans tous ses détails. Nos sociétés d'assurances devraient s'unir, comme on l'a fait dans d'autres pays, pour organiser en commun l'étude de la mortalité. Elles examineraient s'il convient de créer à cet effet un organisme nouveau ou s'il n'existe pas déjà un service public ou privé qu'on pourrait charger de ce soin.

## Résumé.

1° Pour contrôler la mortalité, il est indispensable que les sociétés d'assurances sur la vie utilisent des tables de sélection.

2° L'emploi de l'âge actuarien permet d'utiliser les tables de sélection en évitant de trop grosses complications.

3° Pour calculer les primes et les réserves mathématiques, l'emploi des tables de sélection n'est pas indispensable à condition:

*a.* de vérifier périodiquement que l'erreur commise par l'emploi d'une table agrégée reste dans des limites admissibles;

*b.* de constituer de fortes réserves libres.

4° On ne peut pas prévoir avec exactitude le bénéfice de mortalité lorsqu'on utilise une table agrégée; toutefois, comme il ne constitue qu'une partie du bénéfice de l'assureur, l'erreur commise sera souvent admissible par rapport au bénéfice total.

5° Périodiquement, par exemple tous les dix ans, les sociétés d'assurances qui feront le contrôle de la mortalité sur la base de l'âge actuarien, devront faire un contrôle plus complet, par année d'âge.

6° Il est très désirable que les compagnies suisses d'assurances sur la vie fassent, soit individuellement, soit en commun, une étude approfondie de la mortalité.