

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker<br>= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of<br>Swiss Actuaries |
| <b>Herausgeber:</b> | Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker   |
| <b>Band:</b>        | 21 (1926)   |
| <b>Artikel:</b>     | Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes<br>bei einer sich erneuernden Gesamtheit   |
| <b>Autor:</b>       | Moser, C.   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-967426">https://doi.org/10.5169/seals-967426</a>   |

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

### Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit.

Von Prof. Dr. Chr. Moser, Bern.

#### A. Allgemeines.

Im nachfolgenden bedienen wir uns der kontinuierlichen Methode. Diese Betrachtungsweise zur Darstellung von Vorgängen bei Personengesamtheiten hat vor 100 Jahren<sup>1)</sup> zu dem Begriffe der Sterblichkeitsintensität und seither zu den Intensitätsfunktionen geführt. Die Vorgänge selbst, z. B. das Absterben, die Entstehung von Witwen, Kranken, Invaliden etc., werden bei einer Gesamtheit als sich fortlaufend vollziehbar angesehen. Kurz, in der Versicherungsmathematik hat, namentlich in den letzten Dezennien, in stets steigendem Masse die nämliche Betrachtungsweise Eingang gefunden, die in sämtlichen Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik seit Erfindung der Differential- und Integralrechnung so fruchtbare und glänzende Resultate gezeitigt hat. Sie trägt auch wesentlich dazu bei, die

<sup>1)</sup> Vgl. *Benjamin Gompertz* in den *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 1825: «On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. F. R. S. etc. By Benjamin Gompertz, Esq. F. R. S. Read June 16, 1825.»

technisch-rechnerischen Untersuchungen auf dem Gebiete der Versicherung zu vertiefen.

Bei Ausrechnungen, es ist wahr, bedient man sich noch vielfach oder sogar vorzugsweise der diskontinuierlichen Methode. Man schreitet gewöhnlich von Jahr zu Jahr oder auch in grössern und, ohne an die Grenze zu gehen, in kleinern endlichen Zeitspannen vorwärts.

Beide Methoden haben ihre Berechtigung. Dem Gebrauch der Differential- und Integralrechnung kommt jedoch in der Regel der Vorteil zu, die Formeln und Ausdrücke in besonders übersichtlicher und eleganter Weise zur Darstellung zu bringen. Man gelangt mit ihr, wie Jörgensen <sup>1)</sup> betont, gewöhnlich auch schneller zum Ziele.

Wir sprechen von Gesamtheiten, die sich erneuern. Dabei sind wir nicht notwendig an Personengesamtheiten gebunden. Die Erscheinungswelt bietet uns im Gegen teil eine ganze Menge von Gesamtheiten, die aus Elementen, homogenen oder heterogenen, bestehen.

Bei unsren Betrachtungen gelangen wir, gleichsam spielend, zu Integralgleichungen. Die Bedeutung dieser Sorte von Gleichungen zur Lösung verschiedenster Probleme der Physik und anderer Gebiete und nicht zuletzt der Versicherungsmathematik drängt sich immer mehr auf. Ich erwähne hier ebenfalls die Anwendungen im Bereiche der mathematischen Statistik, die eines unserer Mitglieder in seinen Arbeiten betreffend die tschechoslovakischen Sozialversicherungsgesetzentwürfe und in andern Veröffentlichungen <sup>2)</sup> vorgenommen hat.

---

<sup>1)</sup> Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. Von N. R. Jörgensen. Jena, Verlag von Gustav Fischer, 1913.

<sup>2)</sup> Prof. Dr. Emil Schoenbaum. Anwendungen der Volterra-schen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924 und 1925.

Über Personengesamtheiten überhaupt sind Ihnen besonders die Arbeiten unserer beiden so verdienten korrespondierenden österreichischen Mitglieder bekannt, nämlich die Darstellungen des leider kürzlich verstorbenen Herrn Prof. Dr. *E. Czuber* und die Untersuchungen und Publikationen des hier an unserer Versammlung freundlicherweise anwesenden Herrn Prof. Dr. *E. Blaschke* aus Wien.

Was die Erneuerung von Gesamtheiten und den Beharrungszustand einer Kasse betrifft, so ist hier der Ort, auf die «Elemente» Prof. Dr. *Hermann Kinkelins*, unseres ersten Präsidenten, und eine Arbeit Dr. *Gottfried Schaertlins* hinzuweisen.

In seinen Elementen der Lebensversicherungsrechnung schliesst Prof. Kinkelin <sup>1)</sup> für eine Witwenkasse, deren versicherter Bestand an Ehepaaren sich alle 10 Jahre erneuert, auf die Zahl der Witwen. Er erkennt die Wellenbewegung, die diese Zahl darstellt, bevor der Beharrungszustand eintritt, und zieht daraus lehrreiche Schlüsse für die Witwenkasse.

In der trefflichen Arbeit über die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten kommt Dr. G. Schaertlin <sup>2)</sup> im besondern auf den Beharrungszustand der Gesamtheit der Versicherten und auf die Summen, die sich dabei ergeben, zu sprechen. Mit ihm halten wir es für wichtig, dass der Versicherungsmathematiker untersuche, wie sich die Verhältnisse einer Kasse, namentlich einer Sozialversicherungskasse, im Beharrungszustande gestalten. Man erhält damit den

---

<sup>1)</sup> Prof. Dr. *Hermann Kinkel*. Die Elemente der Lebensversicherungsrechnung. Basel 1869 und (zweite Auflage) 1875.

<sup>2)</sup> Dr. *G. Schaertlin*. Die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten. Separatabdruck aus der Zeitschrift für schweizerische Statistik. Bern 1889.

Kompass, der zur Beurteilung der Zukunft auf Grund gegebener Voraussetzungen dient. Solche Untersuchungen dürften um so mehr am Platze sein, als auch in unserm Lande nicht wenig Kassen existieren, die allzu sehr in den Tag hineinleben, ohne sich die wünschenswerte Rechenschaft über ihre Versprechungen zu geben.

Die genannten Ausführungen Kinkelins haben Herrn Dr. *Otto Schenker*<sup>1)</sup> zu der Ihnen bekannten Arbeit in Heft 11 unserer Veröffentlichungen bewogen.

Eine Anwendung einiger der nachstehenden Gleichungen nahm Herr Dr. *A. Alder*<sup>2)</sup> mit Rücksicht auf die Witwenversicherung vor.

Über Versicherungskassen, die sich erneuern, hatte der Sprechende selbst Gelegenheit, sich des öfters in Vorlesungen (z. B. im S.-S. 1898 und im W.-S. 1901/02 sowie in andern Semestern) zu beschäftigen und in den verflossenen Jahren auch vielfach die kontinuierliche Methode zu verwenden. Dies und die kurze Notiz in den Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft<sup>3)</sup> mögen vielleicht meine Freunde im Vorstand unserer Vereinigung veranlasst haben, mich zu ersuchen, über das heutige Thema zu sprechen. Ich

---

<sup>1)</sup> Dr. *O. Schenker*. Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 11. Heft, Bern 1916.

<sup>2)</sup> Dr. *Arthur Alder*. Beiträge zur Kenntnis einiger Funktionen der Versicherungsmathematik. Dissertation. Jahrbuch der phil. Fakultät II der Universität Bern. Band III. Bern 1923.

<sup>3)</sup> Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. *Chr. Moser*, Über Gleichungen für eine sich erneuernde Gesellschaft mit Anwendung auf Sozialversicherungskassen. Bern, Buchdruckerei Büchler & Cie., 1921. Auch ins Französische übersetzt von Herrn Dr. *E. Marchand*, Enseignement mathématique, XXII<sup>e</sup> année, 1921/1922. Genève, Georg & Cie.

komme diesem Wunsche hiermit nach, möchte Sie aber immerhin um die erforderliche Nachsicht bitten.

Wir unterscheiden zwischen der geschlossenen und der offenen, sich erneuernden Gesamtheit.

### B. Die geschlossene Gesamtheit.

Die Anfangszahl der Elemente oder Personen sei  $H$ . Nach der Zeit  $t$  seien noch  $H p(t)$  Elemente vorhanden.  $1 \geq p(t) \geq 0$ ;  $p(0) = 1$ ;  $p(\infty) = 0$ . Eintritte von neuen Elementen in die Gesamtheit oder Wiedereintritte von schon ausgeschiedenen Elementen kommen nicht vor. Die Gesamtheit öffnet ihre Türen nur zu Ausritten, nicht aber zu Eintritten oder Wiedereintritten. Den Fall von Wiedereintritten werden wir später berücksichtigen. Es hande sich also um eine wirklich geschlossene Gesamtheit.

Man kann die Gesamtheit als homogen, also z. B. die Personen als gleichaltrig annehmen. Aber diese Voraussetzung ist nicht notwendig. Es lässt sich auch mit nicht homogenen Elementen eine Ordnung  $H p(t)$  ermitteln. Die Grösse  $p(t)$  ist dann für ein durchschnittliches Element, wenn wir so sagen dürfen, die Wahrscheinlichkeit, der Gesamtheit nach der Zeit  $t$  noch anzugehören.

Die mittlere Dauer  $F_p$  der Zugehörigkeit zur geschlossenen Gesamtheit ist offenbar

$$F_p = \frac{1}{H} \int_0^\infty H p(t) dt = \int_0^\infty p(t) dt.$$

Sie kann etwa als Validitätsdauer bezeichnet werden und stellt eine Fläche dar (vgl. die graphische Tafel in Abschnitt G).

Scheidet ein Element lediglich durch Tod aus, so ist  $F_p$  gleich der mittlern vollen Lebensdauer. Wird das Ausscheiden z. B. durch Tod und Invalidierung hervorgerufen, so ist  $F_p$  gleich der mittlern Aktivitätsdauer.

Wir erinnern noch an die Beziehung zwischen  $p(t)$  und  $\mu(t)$ . Wird nämlich die Intensität des Ausscheidens mit  $\mu(t)$  bezeichnet, so besteht die bekannte Beziehung:

$$\mu(t) = -\frac{1}{p(t)} \cdot \frac{dp(t)}{dt}.$$

Die Funktion  $\mu(t)$  stellt daher die in einem Momente zurzeit  $t$  erfolgende Abnahme von  $p(t)$  dar, wenn diese Abnahme auf den Größenbetrag 1 und die Zeitdauer 1 bezogen wird<sup>1)</sup>.

Ersetzen wir  $t$  durch  $\tau$  und schreiben:

$$\frac{1}{p(\tau)} \cdot dp(\tau) = -\mu(\tau) d\tau \quad \text{oder,}$$

indem wir den natürlichen Logarithmus einführen:

$$d \log p(\tau) = -\mu(\tau) d\tau,$$

so folgt, wenn zwischen den Grenzen  $o$  und  $t$  integriert wird und man berücksichtigt, dass  $p(o) = 1$  ist:

$$\log p(t) = - \int_0^t \mu(\tau) d\tau,$$

das heisst:

$$p(t) = e^{- \int_0^t \mu(\tau) d\tau}.$$

---

<sup>1)</sup> Vgl. Prof. Dr. Chr. Moser, Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion. Zeitschrift für schweizerische Statistik 1906 und Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 1. Bern 1906.

Sind verschiedene Ausscheideursachen vorhanden, deren Intensitäten der Reihe nach  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$ ,  $\dots$ ,  $\mu_n(\tau)$  sind, so ist entsprechend für  $\mu(\tau)$  zu setzen:

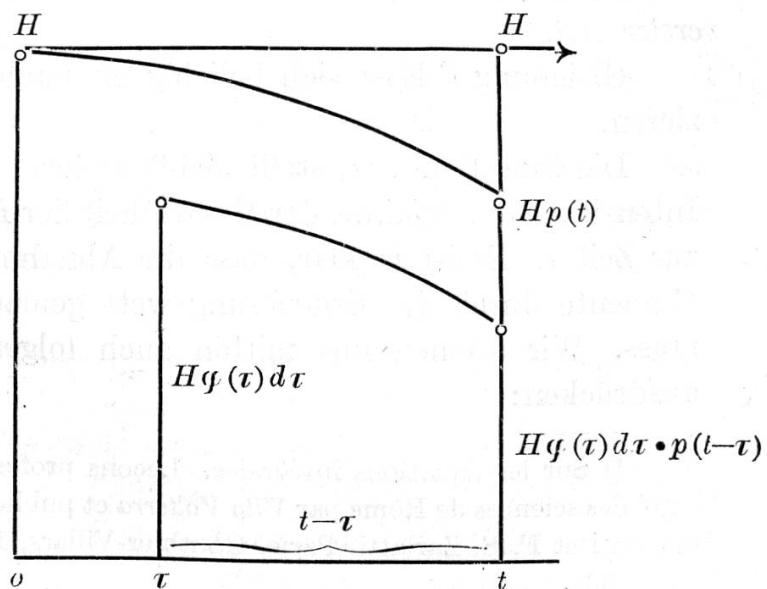
$$\mu(\tau) = \mu_1(\tau) + \mu_2(\tau) + \dots + \mu_n(\tau).$$

Die Ausscheideordnung  $p(t)$  werden wir im folgenden als bekannt annehmen. Sie ist durch Beobachtung zu ermitteln.

### C. Die sich erneuernde Gesamtheit.

Die Erneuerung kann nach irgendeinem Gesetze vor sich gehen. Da wir aber Gewicht darauf legen, die Verhältnisse im Beharrungszustande einer Gesamtheit zu kennen, so lassen wir die Erneuerung so vor sich gehen, dass die Zahl der Elemente konstant, gleich  $H$ , erhalten wird. Im Momente zur Zeit  $\tau$  werde die Erneuerung dargestellt durch  $H\varphi(\tau)d\tau$  Elemente, die in ihrem Aufbau genau der Anfangsgeneration entsprechen und die sich zur Zeit  $t$  auf  $H\varphi(\tau)d\tau \cdot p(t-\tau)$  reduziert haben. (Vgl. die Figur. Sowohl  $H\varphi(\tau)d\tau$ , als auch das

stationäre Gesamtheit-



Produkt  $H \varphi(\tau) d\tau \cdot p(t-\tau)$  sind in Wirklichkeit sehr klein.) Zur Bestimmung der Erneuerungsfunktion  $\varphi(\tau)$  haben wir, wie ohne weiteres klar ist, die Integralgleichung:

$$H = H p(t) + \int_0^t H \varphi(\tau) p(t-\tau) d\tau, \text{ oder,}$$

mit  $H$  dividiert:

$$1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p(t-\tau) d\tau \dots \dots \text{I.}$$

Sind bei einer Integralgleichung die Integrationsgrenzen konstant, so wird sie als *Fredholmsche* bezeichnet. Ist jedoch eine oder sind beide Integrationsgrenzen variabel, so haben wir es mit dem Typus von *Volterra* zu tun <sup>1)</sup>. Die Gleichung I ist eine Volterrascche Integralgleichung. Man nennt sie speziell Volterrascche Integralgleichung erster Art. Der Kern, so bezeichnet nach *D. Hilbert*, ist hier  $p(t-\tau)$ , ist also lediglich eine Funktion der Differenz der beiden Variablen  $t$  und  $\tau$ .

*Die Erneuerungsfunktion  $\varphi(\tau)$  einer sich erneuernden Gesamtheit führt auf eine Volterrascche Integralgleichung erster Art.*

Gleichung I lässt sich beliebig oft nach  $t$  differenzieren.

Die Funktion  $\varphi(\tau)$  stellt nichts anderes dar, als die Intensität der Abnahme der Gesamtheit der  $H$  Elemente zur Zeit  $\tau$ . Es ist ja klar, dass die Abnahme in jedem Momente durch die Erneuerung wett gemacht werden muss. Wir können uns mithin auch folgendermassen ausdrücken:

---

<sup>1)</sup> Sur les équations intégrales. Leçons professées à la Faculté des sciences de Rome par *Vito Volterra* et publiées par M. Tomassetti et F. S. Zarlatti. Paris, Gauthier-Villars, 1913 (v. pages 32 et 33).

Die Erneuerungsfunktion  $\varphi(\tau)$  einer sich erneuernden Gesamtheit stellt die Intensität der Abnahme der Gesamtheit der  $H$  Elemente zur Zeit  $\tau$  dar. Im Anfang ist die Intensität der Abnahme der sich erneuernden gleich der Intensität der Abnahme der geschlossenen Gesamtheit, es ist also  $\varphi(0) = \mu(0)$ .

#### D. Vorgänge und ihre Übertragung.

An die geschlossene Gesamtheit binde sich irgend ein Vorgang, dessen Masszahl zur Zeit  $t$  gleich  $H y(t)$  sei. Wir brauchen hier den ganz allgemeinen Ausdruck «Vorgang» und sprechen von der Masszahl des Vorganges. Handelt es sich um Personen, so kann z. B.  $H y(t)$  die Zahl der Witwen, der Kranken, der Krankentage, der Invaliden, der Sterbenden etc. bedeuten, die aus der geschlossenen Gesamtheit hervorgegangen sind oder hervorgehen. Diese Zahl sei durch Beobachtung ermittelt, so dass die Funktion  $H y(t)$  bekannt ist. Die geschlossene Gesamtheit verschwindet mit der Zeit. Auch der betrachtete Vorgang vollziehe sich in endlicher Weise und verschwinde für grosse Werte von  $t$ , so dass  $y(t) < \infty$  und  $y(\infty) = 0$  wird. Immerhin kann der Vorgang noch bestehen, wenn  $p(t)$  praktisch zu 0 geworden ist. So können z. B. von einer Gesamtheit von versicherten Ehepaaren noch Witwen vorhanden sein, wenn die Ehepaare selbst längst ausgestorben sind.

Die Fläche  $F_y = \int_0^\infty y(t) dt$  soll als Vorgangsfläche der geschlossenen Gesamtheit bezeichnet werden (vgl. die graphische Tafel in Abschnitt G). Da  $y(t)$  überall endlich oder null ist, so wird auch  $F_y$  nicht unendlich gross.

falsch

Es gilt nun, *den Vorgang auf die sich erneuernde Gesamtheit zu übertragen*. Für diese sei er  $H Y(t)$ . Dann hat man

$$H Y(t) = H y(t) + \int_0^t H \varphi(\tau) y(t-\tau) d\tau \text{ oder}$$

$$Y(t) = y(t) + \int_0^t \varphi(\tau) y(t-\tau) d\tau \dots \text{II.}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung II sind alle Größen bekannt, nämlich  $y(t)$  durch Beobachtung und  $\varphi(\tau)$  aus Gleichung I.

*Ein Vorgang, der für die geschlossene Gesamtheit bekannt ist, lässt sich auf die sich erneuernde Gesamtheit vermittelst der Gleichung II übertragen.*

Man gestatte uns hier noch eine Bemerkung. Wir können uns nämlich vorstellen, dass ein Wiederzuströmen von ausgeschiedenen Elementen oder ein Zuströmen von neuen Elementen an die Gesamtheit stattfinde. Das wäre nichts anderes als ein spezieller Vorgang, der sich an die geschlossene Gesamtheit bindet und den wir auch ohne weiteres auf die sich erneuernde Gesamtheit übertragen können. Diese Art der Betrachtung gewährt uns die Möglichkeit, die Schicht der zugeströmten Elemente zu erkennen und den Zusatz zu ermitteln, den die sich erneuernde Gesamtheit erhält, und zwar sowohl für endliche  $t$ , als auch für den Beharrungszustand, wo das durch den Zusatz bedingte Plus konstant wird.

Wir wollen indessen auf die Ausführung dieses Gedankens im einzelnen hier nicht eintreten. Dagegen seien in den folgenden Kapiteln noch Konsequenzen aus der Übertragung von zwei andern speziellen Vorgängen gezogen.

### E. Ausscheidefunktion.

Man wähle als Vorgang das Ausscheiden aus der geschlossenen Gesamtheit, also

$$y(t) = p(t) \mu(t) = -p'(t),$$

wo  $\mu(t)$  die Ausscheideintensität darstellt. Dann wird das Ausscheiden aus der sich erneuernden Gesamtheit gleich gross sein, wie die eintretende Erneuerung selbst, mithin wird  $Y(t) = \varphi(t)$ . Es muss daher gelten:

$$\varphi(t) = p(t) \mu(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p(t-\tau) \mu(t-\tau) d\tau \quad \text{III.}$$

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$0 = p'(t) + \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p'(t-\tau) d\tau \quad \text{III'}$$

Die spezielle Übertragung bedeutet nichts anderes als eine *Differentiation* der Gleichung I. Das Übertragen eines Vorganges von der geschlossenen auf die sich erneuernde Gesamtheit ist daher eine *allgemeinere Operation* als das Differenzieren. Lediglich in unserm Spezialfalle wird das Übertragen zur Differentiation. Dass die Gleichung III' in der Tat durch die Differentiation der Gleichung I erhalten werden kann, sieht man leicht ein.

Wenn

$$L = \int_a^{b(\lambda)} F(\tau, \lambda) d\tau \quad \begin{matrix} a \leq \lambda \leq b \\ \tau = \text{Parameter.} \end{matrix}$$

ist und die Grenzen  $a$  und  $b$  Funktionen von  $\lambda$  sind, so hat man:

$$\frac{dL}{d\lambda} = F(b, \lambda) \frac{db}{d\lambda} - F(a, \lambda) \frac{da}{d\lambda} + \int_a^b \frac{\delta F(\tau, \lambda)}{\delta \lambda} d\tau.$$

Demnach wird aus Gleichung I, das heisst aus

$$1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p(t-\tau) d\tau$$

durch Differentiation folgen:

$$0 = p'(t) + \varphi(t) p(t-t) \frac{dt}{dt} - \varphi(0) p(t) \frac{do}{dt} + \int_0^t \varphi(\tau) p'(t-\tau) d\tau$$

oder (da  $p(0) = 1$ ,  $\frac{dt}{dt} = 1$  und  $\frac{do}{dt} = 0$ ):

$$0 = p'(t) + \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) p'(t-\tau) d\tau.$$

Diese Gleichung, das Resultat der Differentiation, ist aber nichts anderes als Gleichung III'.

In der Gleichung III ist der Kern  $p(t-\tau) \mu(t-\tau)$ . Sie ist eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art und lässt sich ebenfalls verwenden zur Bestimmung der Erneuerungsfunktion  $\varphi(t)$ .

*Durch die Übertragung eines speziellen Vorganges, nämlich des Elementeausscheidens, von der geschlossenen auf die sich erneuernde Gesamtheit gelangt man von der Volterraschen Integralgleichung erster Art zur Volterraschen Integralgleichung zweiter Art. Die Operation der Übertragung wird in diesem Falle zur Differentiation.*

Ist  $t = 0$ , so ist, wie wir schon vorn bemerkt haben und man auch hier (nach Gleichung III) ohne weiteres einsieht:  $\varphi(0) = \mu(0)$ .

Wählt man für  $p(t)$  eine Funktion, deren Intensität der Abnahme *konstant* ist, also eine Exponentialfunktion, so wird auch  $\varphi(t)$  konstant. Ist z. B.

$$p(t) = e^{-t},$$

so wird  $\mu(t)$  und damit auch  $\varphi(t)$  gleich 1. Gleichung I:

$$1 = e^{-t} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

wird wirklich durch  $\varphi(\tau) = 1$  befriedigt.

Zur Bestätigung auf Grund von Gleichung III bestimmen wir  $\varphi(t)$  noch nach dem bei der Auflösung von Integralgleichungen üblichen Annäherungsverfahren. Da  $\mu(t) = 1$  ist, so wird  $p(t)\mu(t) = p(t)$ , also ist nach Gleichung III:

$$\varphi(t) = e^{-t} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \quad \text{oder}$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-t} \cdot \frac{t^n}{n!} = 1.$$

Geht man ferner beispielsweise von einem bestimmten *gleichen Alter* für eine *Personengesamtheit* aus, so wird  $\varphi(t)$  in der Regel um einen gewissen Wert oszillieren und diesen im Unendlichen erreichen. So hat Herr *W. Planta*, Mitglied des mathematisch-versicherungswissenschaftlichen Seminars an der Universität Bern, nach Massgabe der Tafel AF (assurés français) und eines Eintrittsalters von 30 Jahren nach den Gleichungen I

und III und lediglich unter Berücksichtigung des Todes als Ausscheideursache für alle Werte  $t = \tau = 0, 1, 2, 6, 10, \dots$  bis  $134$  und  $\infty$  die Erneuerungsfunktion ausgerechnet und dabei z. B. gefunden:

10,000  $\varphi(\tau)$

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Für $\tau_0 = 0$         | 69  |
| » $\tau_1 = 46$          | 384 |
| » $\tau_2 = 62$          | 238 |
| » $\tau_3 = 90$          | 312 |
| » $\tau_4 = 110$         | 279 |
| » $\tau_5 = 134$         | 296 |
| » $\tau_\infty = \infty$ | 291 |

Die angegebenen Werte für  $\tau_1, \tau_2, \dots$  liegen nahe bei Extremwerten. Da  $\tau_4$  erst gleich 110 ist, so sieht man, welch bedeutende Schwankungen in den ersten hundert Jahren auftreten können.

Der Verlauf der 3 Funktionen

$$p(t), y(t) = p(t) \mu(t) \text{ und } Y(t) = \varphi(t)$$

ergibt sich schematisch an einem Beispiele gemäss der graphischen Tafel in Abschnitt G.

Der Grenzwert  $Y(\infty) = \varphi(\infty)$  wird (auf 3 Stellen) gleich 0,029. In der vorn zitierten Arbeit fand Dr. G. Schaertlin, allerdings bei etwas andern Grundlagen und bei Berücksichtigung der Austritte nicht nur durch Tod, sondern auch durch Invalidität einen ähnlichen, aber begreiflicherweise etwas höhern Wert, nämlich (ebenfalls auf 3 Stellen abgerundet): 0,034.

Weil bei der geschlossenen Gesamtheit jedes Element früher oder später ausscheidet, also die Gewissheit des Ausscheidens besteht, so muss in unserm Falle, wo der

Vorgang eben durch das Ausscheiden aus der Gesamtheit gebildet wird, die Vorgangsfläche  $F_y$  gleich 1 werden. In der Tat ergibt sich sofort aus

$$F_y = \int_0^\infty y(t) dt,$$

das heisst in unserm Falle:

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^\infty p(t) \mu(t) dt \quad \text{oder} \\ &= - \int_0^\infty p'(t) dt \quad \text{das Resultat:} \end{aligned}$$

$$F_y = -p(\infty) + p(0) = 1.$$

Wir erhalten somit konsequenterweise eine Bestätigung unserer Überlegung.

## F. Deckungskapital.

Der Vorgang, der sich an die geschlossene Gesamtheit binde, sei die Bildung und der Verbrauch eines Deckungskapitals, das nach der Zeit  $t$  durch  $Hz(t)$  dargestellt sei.

Für  $z(t)$  gilt, nach der prospektiven Methode (Barwert der künftigen Kassenleistungen weniger Barwert der künftigen Prämien), wenn die Einheit des versicherten Vorganges  $y$  die Leistung 1 erfordert und man den Wert des Kapitals, das mit seinen Zinsen in der Zeit 1 zu 1 auswächst, mit  $v$  bezeichnet:

$$z(t) = \int_t^\infty v^{\tau-t} \cdot y(\tau) d\tau - P \int_t^\infty v^{\tau-t} p(\tau) d\tau.$$

Bei einem Jahre als Zeiteinheit ergibt sich für die Jahresprämie  $P$ :

$$P = \frac{\int_0^\infty v^t y(t) dt}{\int_0^\infty v^t p(t) dt}.$$

Die ganze Deckungskapitalfläche für die geschlossene Gesamtheit wird:

$$F_z = \int_0^\infty z(t) dt,$$

also nach Substitution des Wertes für  $z(t)$ :

$$F_z = \int_0^\infty \int_t^\infty v^{\tau-t} y(\tau) d\tau dt - \frac{\int_0^\infty v^t y(t) dt}{\int_0^\infty v^t p(t) dt} \int_t^\infty \int_t^\infty v^{\tau-t} p(\tau) d\tau dt.$$

Diese Beziehung werden wir später verwenden.  
 $F_z$  ist, wie  $z(t)$ , eine Funktion der Funktionen  $p$  und  $y$ .

Für das Deckungskapital der sich erneuernden Gesamtheit hat man, in Analogie mit Gleichung II:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t \varphi(\tau) z(t-\tau) d\tau \dots \text{IV.}$$

*Das Deckungskapital der sich erneuernden Gesamtheit bestimmt sich aus dem Deckungskapital der geschlossenen Gesamtheit gemäss der Gleichung IV.*

Besteht die Gesamtheit im ganzen aus  $H$  Personen, so ist das Deckungskapital für diese  $H Z(t)$ .

### G. Beharrungszustand.

Gehen wir, was wir von Anfang an beabsichtigten, nunmehr zum Beharrungszustand über. Dabei müssen wir  $t$  sehr gross,  $t = \infty$ , setzen. Die Spezialisierung für diesen Fall macht sich nun sozusagen von selbst.

Den Beharrungszustand bezeichnet man auch öfters als stationären Zustand und spricht dementsprechend von stationären Kassen, z. B. von stationären Sozialversicherungskassen.

Sei  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \alpha$ , wobei  $\alpha$  eine Konstante, d. h. der Grenzwert der Erneuerungsfunktion ist. Diesen Grenzwert können wir leicht bestimmen. Aus Gleichung I folgt, da  $p(\infty) = 0$  ist,

$$1 = \alpha \int_0^t p(t-\tau) d\tau \quad (\text{Lim } t = \infty).$$

Führt man die Variable  $T = t - \tau$  ein, so wird

$$1 = \alpha \int_t^0 p(T) (-dT) \quad (\text{Lim } t = \infty)$$

oder was das Nämliche ist, wenn die Grenzen vertauscht werden, man  $t = \infty$  setzt und dann wieder die Variable mit  $t$  bezeichnet:

$$1 = \alpha \int_0^\infty p(t) dt, \quad \text{das heisst:}$$

$$\alpha = \frac{1}{\int_0^\infty p(t) dt}.$$

Im Beharrungszustande ist die Erneuerungsfunktion gleich der reziproken mittlern Validitätsdauer eines Elementes.

Führen wir, wie vorn, die Bezeichnung  $F_p$  ein:

$$F_p = \int_0^{\infty} p(t) dt, \quad \text{so folgt:}$$
$$1 = \alpha F_p.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich, wenn  $Y(\infty) = \beta$  gesetzt wird:

$$\beta = \alpha \int_0^{\infty} y(t) dt = \alpha F_y$$

und wenn  $Z(\infty) = \gamma$  gesetzt wird:

$$\gamma = \alpha \int_0^{\infty} z(t) dt = \alpha F_z.$$

Wir haben somit nacheinander:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \alpha F_p \\ \beta = \alpha F_y \\ \gamma = \alpha F_z \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{V.}$$

Hierin bedeutet also für den Beharrungszustand:  $\alpha$  den Wert der Erneuerungsfunktion,  $\beta$  allgemein den Wert der Vorgangsfunktion und  $\gamma$  den Wert des Deckungskapitals, wenn der Vorgang 1 die Versicherungsleistung 1 erfordert.

Zwischen den 3 Flächen  $F_p$ ,  $F_y$  und  $F_z$  besteht eine Relation.

In der Tat, im stationären Zustande muss im Moment  $d\tau$  die Prämie  $P d\tau$  und der Zins des Deckungskapitals  $\gamma \cdot \delta d\tau$  gleich der Versicherungsleistung  $\beta d\tau$  sein. Der logarithmische Diskont ist hier, wie üblich, mit  $\delta$  bezeichnet. Er ist, wenn  $i$  den Zinsfuss darstellt, gleich dem natürlichen Logarithmus des um  $i$  erhöhten Kapitals 1:

$$\delta = \text{Log} (1 + i).$$

Integriert man

$$P d\tau + \gamma \cdot \delta d\tau = \beta d\tau$$

von 0 bis 1, so wird

$$P + \gamma \delta = \beta.$$

Diese Gleichung gestattet, eine der vier Grössen zu berechnen, wenn die 3 andern gegeben sind. Ersetzt man  $\gamma$  und  $\beta$  aus Gleichung V und substituiert für  $\alpha$  seinen Wert  $\frac{1}{F_p}$ , so erhält man

$$P \cdot F_p + \delta \cdot F_z = F_y. \dots . VI.$$

Die Prämienfläche  $F_p$  wird mit der Prämie  $P$ , die Deckungskapitalfläche  $F_z$  mit der Zinsgrösse  $\delta$  und die Versicherungsleistungsfläche  $F_y$  mit der Leistung 1 belegt.

Für die Komponenten der Leistung 1 ergibt sich folgende Beziehung:

$$P \cdot \frac{F_p}{F_y} + \delta \cdot \frac{F_z}{F_y} = 1. \dots . VI'.$$

Für jede einzelne Versicherungsart lassen sich daher diese Komponenten leicht und auf elegante Weise bestimmen.

Die Versicherungsleistung 1 wird im Beharrungszustand aus zwei Komponenten gebildet, der Prämie und den Zinsen des Deckungskapitals. Die erste Komponente ist proportional der Prämie  $P$ , und zwar gleich

$$P \cdot \frac{F_p}{F_y},$$

und die zweite Komponente ist proportional der Zinsgrösse  $\delta$ , und zwar gleich

$$\delta \cdot \frac{F_z}{F_y}.$$

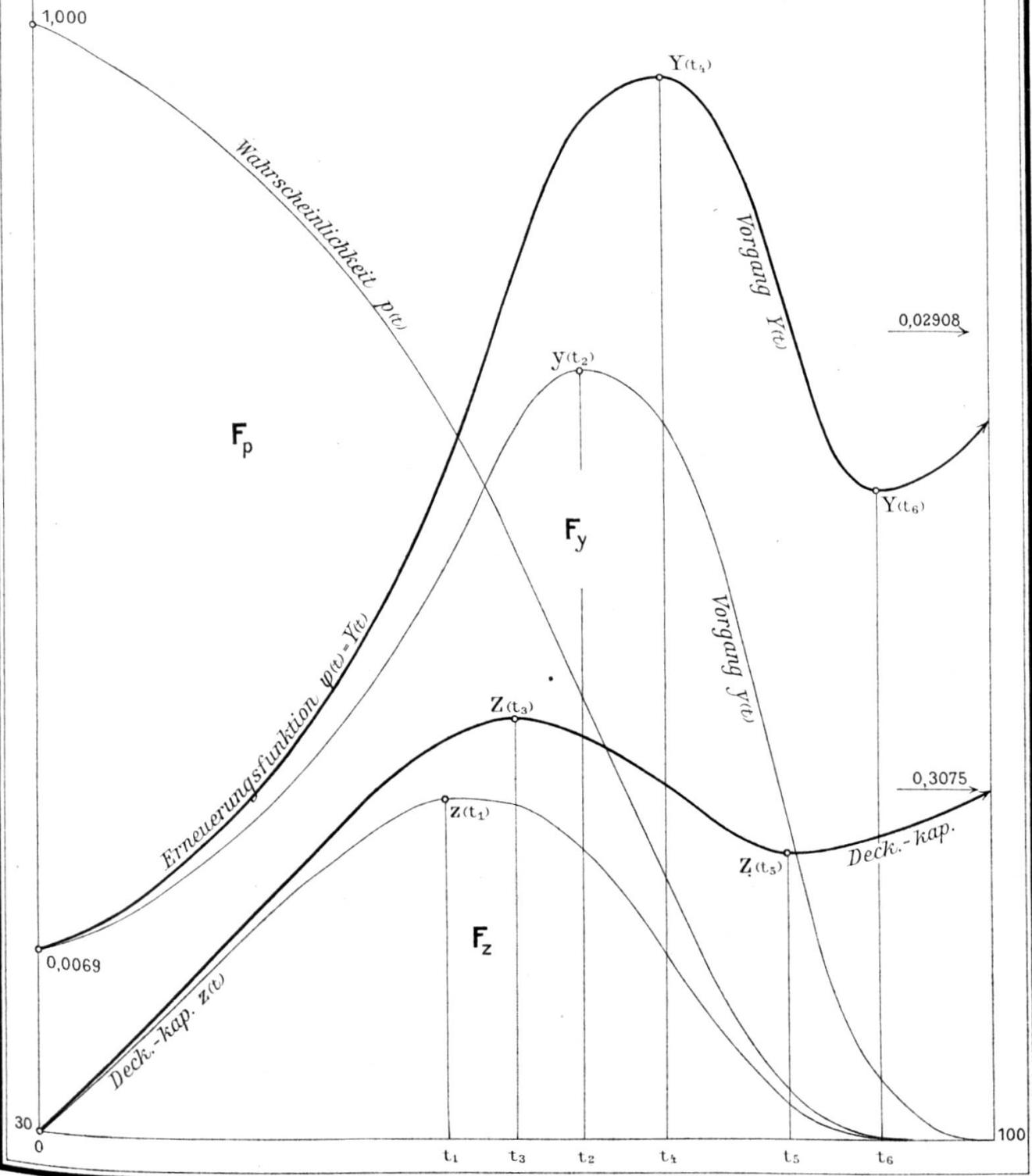
Führt man für  $F_p$ ,  $F_y$  und  $F_z$  ihre Integralwerte ein, so geht VI' über in

$$P \cdot \frac{\int_0^\infty p(t) dt}{\int_0^\infty y(t) dt} + \delta \cdot \frac{\int_0^\infty z(t) dt}{\int_0^\infty y(t) dt} = 1 \dots \text{VI}'.$$

Die hier beigegebene *graphische Tafel* geht aus von einer Gesamtheit von dreissigjährigen Personen und lässt diese nach Mitgabe der Überlebensordnung *AF* der französischen Versicherten absterben. Dadurch ist  $p(t)$  bestimmt und als Vorgang kommt das Ausscheiden durch Tod in Betracht. Die Masszahl  $y(t)$  stellt also die Zahl der Sterbenden  $y(t) = p(t) \mu(t)$  dar. Durch Übertragung auf die sich erneuernde Gesamtheit erhält man für diese die Zahl der Sterbenden  $Y(t)$ . Sie muss selbstverständlich gleich der Erneuerungsfunktion sein. Es ist also  $Y(t) = \varphi(t)$ . Hierüber wurde schon vorn berichtet, ebenso über die Deckungskapitalien  $z(t)$  und  $Z(t)$ . Der Einfachheit halber wird alles auf  $H = 1$  bezogen. Als Zins ist ein solcher von  $3\frac{1}{2}\%$

Beispiel zur Veranschaulichung  
des Funktionenverlaufs und der Flächen  $F_p$ ,  $F_y$  und  $F_z$ .

Anfangsalter 30, AF. 3½ %,  $y(t) = p(t) \mu(t)$ .



in Rechnung gestellt. Um den Verlauf der Funktionen  $y(t)$  und  $Y(t)$  deutlich darzustellen, erscheinen sie gegenüber  $p(t)$ ,  $z(t)$  und  $Z(t)$  vergrössert, und zwar 25mal. Im Beharrungszustande macht das Deckungskapital in dem gewählten Beispiele rund 31 % der versicherten Summe aus (genauer 30,75 %, da  $Z(\infty) = 0,3075$  ist) und die Leistungen werden gemäss Gleichung VI' zu 64 % durch Prämien und zu 36 % durch Zinsen des Deckungskapitals aufgebracht. Aus dem Beispiel ist sehr schön ersichtlich (vgl. die graphische Tafel), wie die Ansammlung des Deckungskapitals vorausschauend gross wird, wenn eine grosse Zahl von Todesfällen, d. h. grosse Leistungen zu erwarten sind, und geringer, wenn kleinere Leistungen in Aussicht stehen. Die Extreme liegen für die geschlossene Gesamtheit nahe bei  $t_1$  und  $t_2$  und für die offene Gesamtheit nahe bei  $t_3, t_4, t_5, t_6$  etc., was näherungsweise zu den Werten für das Deckungskapital führt:  $z(t_1) = 0,31$ ,  $Z(t_3) = 0,38$ ,  $Z(t_5) = 0,26$  etc.  $Z(\infty) = 0,3075$  und für die Leistungen, wie z. T. schon vorn (Werte von  $\varphi(\tau)$ ) bemerkt:  $y(t_2) = 0,028$ ,  $Y(t_4) = 0,0384$ ,  $Y(t_6) = 0,0238$  etc.  $Y(\infty) = 0,02908$ . Es entsprechen sich mithin bei der geschlossenen Gesamtheit:

$t_1$  und  $t_2$

und bei der offenen Gesamtheit:

$t_3$  und  $t_4$

$t_5$  und  $t_6$

— — — —

$t_\infty$  und  $t_\infty$

Die Maxima und Minima des Deckungskapitals liegen also im Endlichen überall *vor* den bezüglichen Extremwerten der Leistungen. Die gegenseitig voneinander abhängigen Wellenbewegungen lassen sich auch rechnerisch

sehr wohl weit über 100 Jahre hinaus verfolgen. Man bemerkt auf der graphischen Tafel die Lage der beiden Geraden (durch Pfeile angedeutet), um die die Funktionen, einerseits  $g(t)$  und  $Y(t)$ , anderseits  $Z(t)$  oszillieren. Die Maximalabweichungen werden mit wachsendem  $t$  immer geringer, so dass die genannten Funktionen selbst in die Geraden auslaufen und damit den Beharrungszustand erreicht haben.

Wie vorhin allgemein gezeigt wurde, sind die 3 Flächen  $F_p$ ,  $F_y$  und  $F_z$  durch eine Relation verbunden. Nun ist  $F_z$ , wie wir schon hervorhoben, eine Funktion von  $p$  und  $y$ . Im Beharrungszustand sind daher auch  $p$  und  $y$  durch eine Beziehung verbunden. Wir erhalten diese, indem wir in Gleichung VI für  $F_p$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  und  $P$  ihre Integralwerte substituieren. Wird dies ausgeführt und nimmt man alle Glieder, die  $y$  enthalten, auf die eine und alle Glieder, die  $p$  enthalten, auf die andere Seite, so ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{\int_0^\infty y(t) dt - \delta \int_0^\infty \int_0^\infty v^{\tau-t} y(\tau) d\tau dt}{\int_0^\infty v^t y(t) dt} = \frac{\int_0^\infty p(t) dt - \delta \int_0^\infty \int_0^\infty v^{\tau-t} p(\tau) d\tau dt}{\int_0^\infty v^t p(t) dt} \quad (7)$$

Aber zu einer gegebenen Funktion  $p$  können beliebig viele voneinander unabhängige Funktionen  $y$  gewählt werden.<sup>+</sup> Damit daher die Gleichung bestehen kann, muss jede Seite konstant sein. Wir erkennen die Konstante sofort, wenn wir  $v = 1$ , also  $\delta = 0$  setzen. Dann wird jede Seite gleich 1. Mithin ist:

$$\delta \int_0^\infty \int_0^\infty v^{\tau-t} y(\tau) d\tau dt = \int_0^\infty y(t) dt - \int_0^\infty v^t y(t) dt \quad \text{VII.}$$

<sup>+</sup> Dieser Satz ist so zu verstehen: zwischen  $p$  und  $y$  müsste eine Funktionalgleichung bestehen. Es ist die mit (7) berechnete. Da jedoch  $p$  von  $y$  offenbar unabhängig ist, so kann diese Funktionalgleichung nur erfüllt sei, wenn ihre beiden Glieder konstant sind.

Das Doppelintegral auf der linken Seite kann durch die Differenz von zwei einfachen Integralen dargestellt werden, eine Eigenschaft, die sich wohl auch direkt zeigen lässt. Ich möchte Sie hierzu einladen<sup>1)</sup>. Die Funktion  $y(t)$  ist an die Bedingung gebunden, im Endlichen endlich zu sein und für grosse Werte von  $t$  der Null zuzustreben.

Ich verdanke Herrn Dr. *W. Friedli* die Ausrechnung verschiedener Beispiele für das Doppelintegral. Indem er für  $y$  eine *Makehamsche* Funktion substituierte, gelangte er zur unvollständigen Gammafunktion und zu Resultaten, die in der Literatur bekannt und auf anderm Wege hergeleitet worden sind.

Aus den vorstehenden Erörterungen sieht man, dass und wie der Zweck erreicht werden kann, auf die Grössen zu schliessen, die im Beharrungszustande auftreten. Indem man Formeln für beliebige  $t$  aufstellt, laden einen diese Formeln unwillkürlich dazu ein, die Werte zu bestimmen, die sich für die obere Grenze,  $t = \infty$ , ergeben.

Wir gelangen zum Schlusse. Einleitend erlaubten wir uns darauf aufmerksam zu machen, dass wir bei den in der Erscheinungswelt auftretenden Gesamtheiten, die sich erneuern, nicht nur an Personengesamtheiten gebunden sind. Weist z. B. nicht auch unser Organismus selbst Gesamtheiten auf (Zellen, lebenswichtige Organe etc.), die sich regelmässig erneuern und weist nicht die

---

<sup>1)</sup> Zu meiner angenehmen Überraschung erhielt ich von Herrn Dr. *Joh. Meier*, Mathematiker der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, einen Brief vom 2. November 1925 (also schon vom Tage nach der Jubiläumsversammlung in Basel), worin ein trefflicher direkter Beweis gegeben und damit Gleichung VII bestätigt wird.

Natur den bei der Erneuerung sich abspielenden Vorgängen eine so grosse Bedeutung bei, dass ihr öfters selbst die Hilfe eines erquickenden Schlafes erforderlich erscheint? In unserm beschränkten Gebiete indessen, wo es sich lediglich um Personengesamtheiten und speziell um Personengesamtheiten der Versicherungsmathematik handelt, hat die Untersuchung einen gewissen Vorzug voraus, nämlich den, dass wir das Schicksal jedes Elementes beobachtend verfolgen können und auf diese Weise eine genaue Massenbeobachtung erhalten. Auch von diesem Standpunkte aus erscheint die kontinuierliche Methode der Betrachtung und die Herbeiziehung analytischer Funktionen gegeben, denn je mehr Elemente vorhanden sind, um so mehr wird jedes einzelne im Vergleich zur Gesamtheit zum Differential.

Indem wir zusammenfassen, möchten wir folgende 3 Punkte hervorheben:

**1.** *Die Aufgabe, aus dem Verlaufe einer geschlossenen Gesamtheit auf die Erneuerung für eine konstante, sich erneuernde Gesamtheit zu schliessen, führt auf Volterrascche Integralgleichungen.*

**2.** *Die Übertragung eines Vorganges von der geschlossenen auf die sich erneuernde Gesamtheit ist eine allgemeine Operation, deren Resultat in einem Spezialfalle ebenfalls vermittelst einer durch Differentiation vorgenommenen Überleitung einer Volterrascchen Integralgleichung erster Art in eine solche zweiter Art erhalten werden kann.*

**3.** *Im Beharrungszustande einer sich erneuernden Gesamtheit werden die Vorgänge gewisse Grenzwerte erreichen. Unter diesen Grenzwerten bestehen, wenn es sich um stationäre Sozialversicherungskassen handelt, einfache und praktisch verwertbare Beziehungen.*

---