**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 18 (1923)

**Artikel:** Approximation und Präzision in der Versicherungslehre

**Autor:** Friedli, Werner

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-967452

# B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

## Approximation und Präzision in der Versicherungslehre.

Von Dr. **Werner Friedli,** Bern.

In seinen gehaltvollen, erkenntnistheoretischen Vorlesungen über Mathematik betonte *Felix Klein* den Unterschied zwischen Präzisions- und Approximationsmathematik. Der im Gebiete der Geometrie leicht konstatierbare Unterschied von begrenzter und unbegrenzter Genauigkeit findet sich immer wieder, wenn man irgendein Gebiet der äussern Wahrnehmung oder der praktischen Betätigung mit der abstrakten Mathematik vergleicht [1]). Er gilt namentlich auch für das numerische Rechnen.

Unter Präzisionsmathematik versteht Klein das Rechnen mit absolut genauen Zahlen, unter Approximationsmathematik das Rechnen mit Zahlen von begrenzter Genauigkeit.

Durch die gesamte Naturforschung und die mathematischen Anwendungsgebiete zieht sich das Bestreben, die Approximationsmathematik durch die Präzisionsmathematik zu ersetzen. Da dies nur die der Behandlung unterliegenden Objekte, die Zahlengrössen betreffen kann, so muss man deutlicher mit Klein sagen: Warum

[1]) *F. Klein*, «Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien». Vorlesung, ausgearbeitet von C. Müller, Neuer Abdruck, Leipzig 1907.

dieses Bestreben, das Gegebene durch etwas Abstraktes zu ersetzen? Einmal aus dem Bedürfnis heraus, Gesetzmässigkeiten zu finden, zum andern doch wohl deswegen, die fruchtbaren Methoden der Infinitesimalrechnung auf alle Gebiete der Naturforschung anwenden zu können.

Eine Untersuchung der Frage, inwieweit diese Methode unserer Wissenschaft gerechtfertigt ist, muss daher von grosser Wichtigkeit sein. Die Approximationsmathematik wird freilich durch die subtilen Methoden und Inhalte der Präzisionsmathematik ersetzt. Die Resultate aber sollen wiederum im Ausgangsgebiet gedeutet werden, können nur der Approximation zugänglich sein; denn unsere Sinne vermitteln nur bis zu einer gewissen begrenzten Genauigkeit, sowohl aufnehmend als abgebend.

Es liegt nun jedem speziellen Anwendungsgebiete ob, den Vergleich zwischen den Methoden und Resultaten der Präzision und der Approximation zu ziehen. F. Klein kritisiert es lebhaft, dass sich «die Theoretiker zu einseitig mit der Präzisionsmathematik beschäftigen, während die Praktiker die Approximationsmathematik gebrauchen, ohne mit der Präzisionsmathematik Fühlung zu haben».

Wohl in keinem Gebiete der angewandten Mathematik tritt der Unterschied zwischen der sogenannten Approximations- und Präzisionsmathematik schroffer zutage als in der Versicherungsmathematik. Auf der einen Seite verlangt das rasch pulsierende wirtschaftliche Leben eine möglichst einfache und kurze Erfassung der Aufgaben der Lebensversicherung durch die Versicherungsmathematiker, auf der andern Seite bieten die tieferen Probleme, die Grundprobleme dieser Wissenschaft, bedeutende mathematische Schwierigkeiten, aber auch Anlass zu theoretischen Untersuchungen mannigfachster Art. Aber während der Mathematiker im eigentlichen Sinne sich mit schönen Formeln und interessanten Beziehungen begnügt, darin aufgeht, darf der Versicherungsmathematiker nicht bei den Formeln stehen bleiben, sondern er muss stets zur Approximation, zu Zahlwerten mit beschränkter Genauigkeit zurückkehren.

Und da ist es nun wichtig, dass die mit den Methoden der Präzision gefundenen Resultate mit den auf dem Boden der Approximation gefundenen Resultaten genügend harmonieren. Bevor wir näher hierauf eintreten, ist es vielleicht vorteilhaft, durch ein Bild die obwaltenden Verhältnisse kurz in Erinnerung zu rufen:

Stellt man sich eine an einem breiten Flusse gelegene Grosstadt vor, die mit mächtigen (langen und breiten) Brücken mit den Aussenquartieren verbunden sei, wie dies in kleinem Rahmen in Bern, schon ausgeprägter in Basel der Fall ist. Begeben wir uns einen Moment in Gedanken an den schönen Rheinstrand und stellen wir uns vor, es sei 12 Uhr mittags auf der mittleren Rheinbrücke.

Wir schauen nun zu, wie allmählich die Fussgänger auf der Brücke sich vermehren und der aus den Geschäften, Fabriken und Schulen herausflutende Menschenstrom denjenigen des klaren Rheinwassers kreuzt. Wenn wir lange genug aushalten, werden wir gewahr, wie die Personenzahl allmählich anwächst, zu einem Maximum anschwillt und langsam wieder abflaut. Werden die Vordersten als die Leichtesten, vielleicht auch Leichtsinnigsten und infolgedessen Leichtfüssigsten angesehen, wobei das durchschnittliche Gewicht pro Person nach hinten nach einem mathematischen Gesetz zunehme, so ist es möglich, in einem beliebigen Moment die *Belastung der Brücke* durch die Personen anzugeben. Es ist dies schon eine Aufgabe, wie sie mutatis mutandis der

*Versicherungsmathematiker* in seinem Gebiete zu lösen hat. Statt der Brücke haben wir uns den Versicherungsträger zu denken, statt der um 12 Uhr heimkehrenden Fussgänger die ins Leben eintretenden Neugeborenen oder die in die Versicherungsgesellschaft eintretenden Versicherten, statt des Gewichtes den Einfluss der Verzinsung, die die Belastung um so mehr verringert, je weiter die Versicherten rechnungsmässig vom Abschlussdatum der Versicherung in die Zukunft marschiert sind. Kehren wir zu unserem Bild zurück und beschränken uns nun auf die *Häufigkeit* der heimkehrenden Personen an einer gewissen Stelle der Brücke, so kann diese in einem *gegebenen Zeitmoment* durch eine Häufigkeitskurve dargestellt werden (Fig. 1).

Die auftretende *Häufigkeitskurve* ist ihrem Wesen nach gebrochen, unstetig. Sie hängt ab von der Jahreszeit und allen möglichen Einflüssen. Bringt z. B. die am andern Ufer des Flusses beim Rathaus befindliche Nationalzeitung eine Sensationsnachricht oder ein humoristisches politisches Plakat, so wird sich dies bei der Kurve schon etwas geltend machen. Statt allmählich, schwillt die Kurve auf einmal an, ebenso wenn ein Strassenvorfall das *allmähliche* Abflauen hindert (Fig. 2). Als Mittel aus allen mittäglichen Beobachtungen eines Jahres wird sich aber ungefähr ein Verlauf ergeben, wie er in Fig. 1 gezeichnet ist.

Hierbei haben wir schon beträchtlich «*abstrahiert*». Wir haben für unser Beispiel eine Brücke ausgewählt, so dass der Verlauf der Ereignisse in *einer Dimension* vor sich geht. Wir setzen weiter stillschweigend voraus, dass uns der Staat auch zu einem einfachen *Vorgang* verhilft, indem er verordnet, dass auf dem Trottoir *rechts* marschiert werden muss, so dass die Bewegung nur in *einer Richtung*, von der Stadt her auf dem einen Trottoir,

Fig. 1.


Fig. 2.

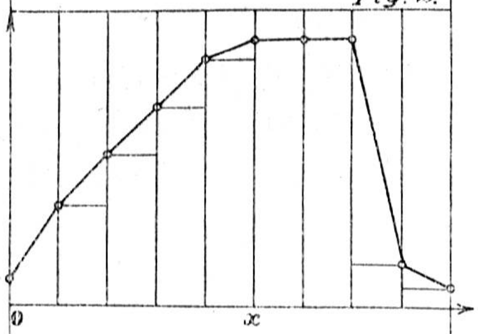



Fig. 3.

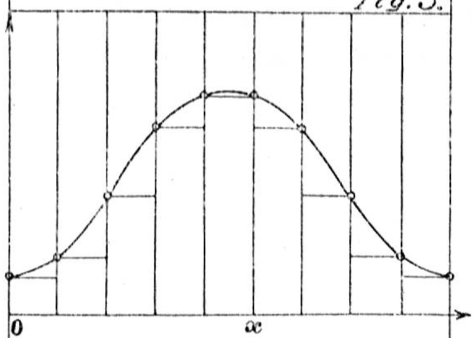
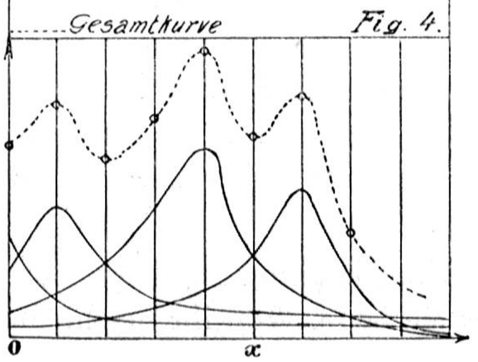



Fig. 4.



gegen die Stadt hin auf dem andern vor sich geht. Wir führen nun eine weitere Abstraktion durch, welche das Problem erst zu einem *mathematischen* macht, indem wir annehmen, die gezeichnete Häufigkeitskurve sei eine *stetige* (Fig. 3).

Dann haben wir das erreicht, was *Felix Klein* als «idealisiertes Gedankending» bezeichnet. *Warum gehen wir so weit?* Weil es nun möglich ist, mit den Hilfsmitteln der Mathematik vorzugehen und infolgedessen *allgemeine* Schlüsse zu ziehen.

Was vorher ein Einzelverlauf, eine zufällige Zickzacklinie war, ist nun die unter dem Namen *Gaussische Fehlerkurve* bekannte Linie geworden, deren passend transformierte Gleichung heisst:

$$f(x) = a\, e^{-(x-b)^2 c^2}.$$

Mit ihr liesse sich nun die eingangs gestellte *Belastungsaufgabe* lösen. Die Konstanten $a$, $b$ und $c$ sind sogenannte Parameter. Mit ihnen kann man die Häufigkeitskurve eines *einzelnen* Tages berechnen, sie hangen von der Jahreszeit und allerlei zusammenhängenden Einflüssen (Markt auf dem Rathausplatz, Ferien und daherige Abwesenheit vieler Leute, Lohnauszahlung am Monatsende etc. etc.) ab. Sie müssen für jeden Tag neu berechnet werden, damit die Glockenkurve sich dem beobachteten unstetigen Zickzackzug möglichst anpasst. Das ganze wäre aber eine einfache Spielerei, wenn nun nicht bei einer genügend *grossen Zahl* von Beobachtungen die Ergebnisse der zu lösenden Aufgaben mit Hilfe der *stetigen* wie der *unstetigen* Linie praktisch gesprochen die *nämlichen* wären.

In dieser Übereinstimmung liegt nun aber das Fruchtbare der Methode. Von ihr macht die *mathema-*

*tische Theorie der Lebensversicherung* ausgiebigen Gebrauch, indem sie sich der kontinuierlichen Barwerte bedient, um gewisse Beziehungen abzuleiten.

Praktisch erfolgt immer eine Überlagerung vieler $f(x)$-Kurven (Fig. 4), denn es treten immer neue Ordnungen auf die Brücke (Neueintretende), und die ganze Erscheinung ist in unaufhörlichem Fluss begriffen. Aber es lässt sich eben durch *Zerlegung* in jene Elementargesamtheiten der ganze Verlauf mathematisch erfassen (in der Lebensversicherung: Neueintretende, für jede Schicht eine $l(x)$-Kurve). Diese Betrachtungsweise setzt allerdings voraus, dass wir die Personen einteilen können nach dem Zeitpunkte, in welchem sie ihre Arbeitsstätte bzw. ihre Wohnung verliessen, um die Brücke zu passieren. Die erste Gesamtheit umfasst alle Personen, welche um 12 Uhr sich auf die Beine machten, die zweite Gesamtheit z. B. alle diejenigen, welche um $12^1/_4$ Uhr abmarschierten usw. Mit dem gewöhnlichen Auge betrachtet, erscheinen alle diese Personen als eine Gesamtheit. Wenn wir sie aber in der genannten Weise in Elementargesamtheiten einteilen wollen, so muss jede Person im Zeitpunkt des Eintrittes auf der Brücke eine Bescheinigung vorweisen, dass sie in dem und dem Zeitpunkt aufgebrochen sei. In der nämlichen Weise pflegt man auch jedem Bürger einen Geburtsschein auszuhändigen, damit er sich immer, wenn es sich um die Einreihung in eine Gesamtheit handelt (Schuleintritt und -austritt, Rekrutenprüfung, Abschluss einer Lebensversicherung usw., ja sogar beim Tod), ausweisen kann, in welchem Zeitpunkt er sich für die irdische Lebensreise auf den Weg gemacht hat.....

Die Gesamtkurve $\sum_{t=0}^{t=n} l_{[x-t]+t} = \sum_{t=0}^{t=n} f([x-t]+t)$

führt zur Gesamtbelastung

$$\sum \int f(x)\, p(x)\, dx.$$

Diese Betrachtungsweise führt zwangslos weiter auf das Studium des Beharrungszustandes bei *Versicherungskassen,* seine Bedingungen und die für ihn charakteristischen Eigenschaften, welche beispielsweise für Kassen mit Durchschnittsprämien alle aus den eleganten Integralgleichungen von Prof. *Moser* (Verhandlungsberichte der schweiz. mathematischen Gesellschaft, 1921) hervorgehen. Gerade das Studium des Beharrungszustandes ist ein Problem, das fast ausschliesslich dem Gebiete der *Präzisionsmathematik* angehört und ohne sie kaum befriedigend gelöst werden kann.

Während man eine Zeitlang alle Probleme der Versicherungsmathematik nach der kontinuierlichen Methode behandeln zu müssen glaubte und nach der Berechtigung der *analytischen* Methoden kaum fragte, hat sich in neuester Zeit die umgekehrte Erscheinung gezeigt, indem viele Autoren die kontinuierliche Methode verpönten (weil die meisten auftretenden Funktionen ihrer Natur nach diskontinuierlich seien) und die mit der kontinuierlichen Methode erhaltenen Resultate anzweifelten.

Damit geht man entschieden zu weit; es heisst dies das Kind mit dem Bade ausschütten! Es gibt gewisse Probleme, denen am besten mit der kontinuierlichen Methode beizukommen ist. Gelingt es, für gewisse typische Fälle zu zeigen, dass die mit der kontinuierlichen Methode gefundenen Resultate mit denen der gewöhnlichen Summenmethode übereinstimmen, oder «praktisch übereinstimmen», so ist die Berechtigung dieses Verfahrens dargelegt. Auch hier gilt es, den goldenen Mittelweg zu wählen und von jeder Seite des Weges die *guten Früchte* zu pflücken.

Schon jede *Ausgleichung* stellt einen Schritt vom Diskontinuierlichen zum Kontinuierlichen dar. Hier trägt kein Versicherungsmathematiker Bedenken, diese Methode anzuwenden, weil eben der *praktische* Zweck die Mittel heiligt. Und doch gibt auch nur die unausgeglichene Wertereihe das wahre Bild eines Vorganges [1]), die ausgeglichene Wertereihe oder Kurve stellt bereits einen idealisierten Vorgang dar. Und wie klein ist dann noch der Schritt von der ausgeglichenen Kurve zur differenzierbaren Funktion, wenn auch das innere Wesen von der allgemeinen Beobachtungsreihe himmelweit entfernt ist.

Eine interessante Parallele ergibt sich, wenn wir gewisse Probleme aus verschiedenen Disziplinen miteinander vergleichen. *Bessel* behandelt in seinen Abhandlungen das Problem, mit welcher Geschwindigkeit ein Meteorstein auf der Erde aufprallt. Die Lösung stellt sich mit Hilfe des sogenannten Integrallogarithmus dar, wenn, wie es Bessel tut, unter anderm folgende Voraussetzungen gemacht werden:

1. Die fallenden Meteorsteine sind Kugeln von bestimmter Grösse.
2. Die Dichtigkeit der Erdatmosphäre nimmt nach dem Gesetz

$$\Delta_z = \Delta_0 \overline{e}^{\,\frac{z}{h}}$$

wo $z$ die Höhe über Meer, $\Delta_0$ und $h$ Parameter sind, nach oben ab.

---

[1]) Worauf z. B. *Loewy* aufmerksam macht (Manes Versicherungslexikon).

Auf diese Weise erhält Bessel eine *auswertbare* Formel. Führt nun Bessel diese Funktion (Integrallogarithmus) erst ein, wo es nötig ist, um die Erscheinung zu erklären oder gestaltet er seine Voraussetzungen so, dass die Formel auf jene Funktion führt? Die Nachprüfung wird ergeben, dass das letztere der Fall ist.

Auf die nämliche Funktion führt die Aufgabe der mittleren *Lebenserwartung,* wenn folgende Voraussetzungen getroffen werden:

1. Jede der $l_x$ Personen ist gleichwertig mit der andern und bleibt in jedem Augenblick $t$ gleichwertig mit jeder andern Person des Alters $x + t$ (Kugelcharakter).

2. Die Abnahme der Personen geschieht nach dem Gompertzschen Gesetz

$$l_z = k\, g^{c^z}$$

bzw. bei passender Wahl der Konstanten

$$\mu_z = \mu_0\, e^{-\frac{z}{h}}.$$

In beiden Fällen wird der Integrallogarithmus, dieses «idealisierte Gedankending» der reinen Mathematik, in die Aufgabe durch die nämlichen Voraussetzungen hineingetragen. In beiden Fällen leitet uns das Bestreben, durch möglichst einfache Voraussetzungen praktische und elegante Formeln zu erhalten.

In diesem Bestreben liegt das Wesen der Präzisionsmathematik begründet. Damit erkennt man auch die *Gefahren* dieser Disziplin! Das Streben nach Einfachheit und Eleganz geschieht leicht auf Kosten der Wahrheit, d. h. der «Wirklichkeit».

* * *

Die nach der gewöhnlichen oder «Approximationsmethode» gewonnenen Zahlenergebnisse sind stets mit gewissen Fehlern behaftet, und es ist wichtig, die «Fehlergrenzen» kennen zu lernen. Damit erhält man gleichzeitig Anhaltspunkte über die Schwankungsmöglichkeiten und verfällt nicht in den Fehler, die erhaltenen Resultate als absolute Grössen zu betrachten.

Schon die Tatsache, dass man es mit Wahrscheinlichkeitsgrössen zu tun hat, die sich meistens in der Form der mathematischen Hoffnung darstellen, bedingt Fehlergrenzen. Dann aber tritt noch die Tatsache hinzu, dass die Wahrscheinlichkeiten nicht eigentliche oder «Wahrscheinlichkeiten a priori», sondern Häufigkeiten oder «Wahrscheinlichkeiten a posteriori» darstellen, die von einem Bestand auf einen andern, von einer frühern Zeitperiode auf eine spätere übertragen werden, womit aber wiederum eine grosse Fehlerquelle in die Rechnung eintritt. Bei den Hilfsgrössen selber tritt noch die bei allen numerischen Rechnungen auftretende natürliche Fehlergrenze hinzu.

Wir sehen in diesem Zusammenhang davon ab, dass schon die Zahlen der Personen unter Risiko bei Berechnung der $q_x$ ungenau sind und daher die Sterbenswahrscheinlichkeiten nur beschränkte Genauigkeit besitzen. Diese $q_x$ werden allerdings dann ausgeglichen, aber die wahren Werte bleiben trotzdem jene unausgeglichenen Zahlen. Unsere Absicht geht dahin, den *Grad der Genauigkeit der einzelnen Grössen zu berechnen, gestützt auf den Umstand, dass die Zahlen $l_x$ nur auf Einheiten genau angegeben sind und daher eine Fehlergrenze von* $\pm$ 0,5 *vorliegt.*

Es ergeben sich alsdann auf einfache Weise für die Grössen $D_x$, $N_x$, $\mathfrak{a}_x$, $A_x$ und $P_x$ Ausdrücke für die Fehlergrenzen, welche wir ableiten, indem wir uns auf die wertvolle Schrift des unlängst verstorbenen Zürcher Mathematikers Prof. Dr. *C. Brandenberger* «Das abgekürzte Rechnen» [1]) stützen.

Bei sukzessiver Anwendung der Regeln der Abkürzungsrechnung erhalten wir für die Kommutationszahlen und Barwerte Fehlergrenzen, wie sie im Anhang zum vorliegenden Referat abgeleitet und für ein Beispiel (Tafel MWI, 3½ %) numerisch berechnet sind. Beispielsweise wird der Ausdruck für die Fehlergrenze des Rentenbarwertes $\mathfrak{a}_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{{}^E\mathfrak{a}_{\overline{\omega - x|}} + {}^E\mathfrak{a}_x}{l_x}\, 0{,}5$$

wobei ${}^E\mathfrak{a} = E(\mathfrak{a})$ den ganzzahligen Bestandteil der Grösse $\mathfrak{a}$ bedeutet. Wir halten das Resultat fest, dass die letzte verlässliche Dezimalstelle beim Barwert $\mathfrak{a}_x$ die 3. ist und dass die Berechnung und Tabulierung von mehr als 4 Dezimalstellen unnütze Arbeit und Kosten verursacht.

Es ist allerdings zu erwarten, dass bei der Berechnung der Zahlen $N_x$ durch Summation sich positive und negative Fehler gegenseitig kompensieren. Doch entzieht es sich unserer Feststellung a priori, wieweit dies der Fall ist. Wenn wir die *Fehlergrenze* aufzustellen haben, dürfen wir darauf nicht abstellen, sondern müssen ein Maximum der Fehler ins Auge fassen. Die genaue Nachprüfung zeigt übrigens, dass auch unter der genannten Voraussetzung die Grössenordnung des Fehlers bei $\mathfrak{a}_x$ nicht berührt wird. Wir dürfen also auch unter dieser Voraussetzung an den im Anhang mitgeteilten Fehlergrenzen festhalten. Wir können zum nämlichen Ergebnis auch durch andere Überlegungen gelangen, wollen hier

[1]) 2. Auflage, herausgegeben von Prof. Dr. Fueter, (1922), Zürich.

aber nicht näher darauf eintreten. Schon das Anbringen des Verwaltungskostenzuschlages *vergröbert* übrigens unsern Rentenbarwert so sehr, dass es nicht mehr darauf ankommt, ob 4 oder 5 Dezimalstellen genau berechnet sind. Die praktisch verlangte *äusserste Genauigkeit* für Rentenbarwerte dürften denn auch 4 Dezimalstellen sein. Es hat keinen Sinn, die Grösse $a_x$ auf mehr als 4 Dezimalstellen genau zu berechnen, sonst gibt man sich nur einer Selbsttäuschung hin [1]).

Wenn man sich alle *Abweichungen* vergegenwärtigt, welche im wirklichen Verlauf der versicherten Ereignisse möglich sind, so muss man auch hier wieder erkennen, dass man nicht allzu ängstlich an den gewonnenen Zahlen kleben und ihnen nicht eine absolute Bedeutung beimessen darf. Wenn irgend möglich, sollte immer der Schwankungsbereich festgestellt werden. Wir sind überzeugt, dass die ganze Arbeit der Versicherungsmathematiker damit in ein deutlicheres Licht gerückt würde.

*  *
*

Was von den Einzelwerten gilt, gilt auch von den Gesamtberechnungen.

Bei der Aufstellung *vollständiger versicherungstechnischer Bilanzen* bei Versicherungsgesellschaften und kleineren Kassen wird namentlich stets folgende Frage

---

[1]) Nach dieser Feststellung richten sich dann auch alle abgeleiteten Grössen, so z. B. $a_x^{(m)}$. Ein auf 4 Stellen genaues $a_x^{(m)}$ stellt unter sotanen Verhältnissen den höchsten Genauigkeitsgrad dar. Eine Näherungsformel, welche $a_x^{(m)}$ auf so viele Stellen genau gibt, muss als «praktisch vollkommen genau» bezeichnet werden. Vom präzisionsmathematischen Standpunkt aus bleibt das so bestimmte $a_x^{(m)}$ trotzdem ein Näherungswert, weil es auf einer Näherungsformel beruht und nicht das idealisierte Gedankending genau widergibt.

wichtig bleiben: Wie gross wird die Abweichung vom berechneten Resultat, wenn die verwendeten Rechnungsannahmen (Zinsfuss, Verwaltungskosten, Sterbens-, Invaliditäts-, Heiratswahrscheinlichkeit u. a.) in der Praxis Abweichungen in positiver oder negativer Richtung zeigen? Jede Bilanz hat so ihre Fehlergrenzen, jedes Deckungskapital kann zu gross oder zu klein berechnet sein. Dass die wahrscheinlichen Fehlergrenzen des Deckungskapitals eine sehr grosse Rolle spielen, auch wenn man sie vielleicht nicht als solche definiert, geht daraus hervor, dass man neben dem Deckungskapital Sicherheitsfonds zurücklegt, stille Reserven ermittelt usw. (Interessant ist die Tatsache, dass die Gewinnreserve bald vom Standpunkt der obern Fehlergrenze, bald von demjenigen der untern Fehlergrenze [Schwankungsfonds] aus betrachtet wird.) Wie wertvoll wäre es doch, wenn man bei jeder technischen Bilanz die positive und negative *Fehlergrenze* des Deckungskapitals nach einfachen Grundsätzen berechnen könnte! Es ist zuzugeben, dass die Aufgabe in dieser Allgemeinheit sehr schwer ist und dass die Fehlergrenzen in gewissen Fällen auch wieder überschritten werden können, aber unter gewissen einschränkenden Bedingungen muss das Problem stets lösbar sein. Es ist hier der Ort, auf diese bilanzmässigen Fehlergrenzen (wenn der Ausdruck erlaubt ist) einzutreten.

Die Berechnung des Gewinnbarwertes stellt sich als eine Bestimmung der untern Fehlergrenze der Tarifprämie, die Berechnung der Gewinnreserve als Bestimmung der untern Fehlergrenze des Deckungskapitals dar. Sie ist in diesem Sinne eine nach allgemeinen Prinzipien notwendige Ergänzung der Berechnung der mathematischen Prämien und Reserven. Auch eine obere Fehlergrenze sollte stets berechnet werden. Diese wäre ebenfalls nicht ohne praktischen Nutzen: sie ergäbe das Mass für die Höhe der sogenannten *Sicherheitsrücklage* (Gründungsfonds bei neuen Unternehmungen etc.). Man hätte dann nicht das Resultat:

Das Deckungskapital ist $= V$, sondern man wüsste

$$V - f_u \leqq V \leqq V + f_0.$$

Auf die relativ ruhige wirtschaftliche Entwicklung in einer Zeitperiode, als die Theorie der Lebensversicherung einen sehr hohen Stand erreicht hatte, ist es zurückzuführen, wenn die Versicherungsmathematiker auf ihre Zahlen wie auf etwas *Feststehendes* bauten und bei den grossen (namentlich deutschen) Gesellschaften sogar die möglichst genau ermittelte untere *Fehlergrenze* technisch bis aufs äusserste ausnützten, zur Aufstellung von fein ausgedachten Dividendensystemen. Dass man angesichts der fortschreitenden Entwicklung, die diesen Massnahmen recht zu geben schien, die *obere* Fehlergrenze (ungünstige Abweichungen von den Voraussetzungen) gänzlich ausser acht liess, wäre an sich nicht so schlimm gewesen, wenn man nicht die relativ grosse untere Fehlergrenze zahlenmässig schwarz auf weiss verwendet hätte in den so berühmten, man möchte fast sagen berüchtigten *Nettokostenaufstellungen,* um den Abschluss einer Lebensversicherung als Geldgeschäft in ein recht günstiges Licht zu rücken und im Konkurrenzkampf zu siegen. Wenn die Aufsichtsämter von jeher diesen Aufstellungen grosses Misstrauen entgegenbrachten, so war diese Haltung mehr als gerechtfertigt, denn nicht nur bei der Bemessung der *Prämien* und Deckungskapitalien, sondern viel mehr noch bei der Beurteilung der Höhe der künftigen *Gewinnanteile* der Versicherten hat man zu beachten, dass es sich um eine Operation auf *lange Dauer* handelt und dass die wirklichen Ergebnisse sich durch Mischung aus mehreren *unabhängigen* Faktoren ergeben.

Diese schlimmen Erfahrungen, welche erst heute so recht jene Friedensperiode mit dem hartnäckigen Konkurrenzkampf charakterisieren, sollte man sich unseres Erachtens heute zunutze machen. Man sollte wieder einsehen, dass alle diese schönen Berechnungen der Versicherungsmathematiker *Schätzungen* sind, die an gewisse *Voraussetzungen* gebunden sind, welche ihrerseits eng mit der allgemeinen Wirtschaft verknüpft sind. Man sollte sich immer der Fehlergrenzen bewusst bleiben und auch beim stärksten Konkurrenzkampf diesen Gesichtspunkt nicht ausser acht lassen.

Was von den Lebensversicherungsgesellschaften gesagt wurde, gilt mutatis mutandis von all den vielen Sterbekassen, Pensionskassen u. dgl. Hier ist die Situation insofern eine andere, als der Regulator der Gewinnanteile fehlt. Während bei den privaten Versicherungsgesellschaften durch Wahl eines niedrigen technischen Zinsfusses eine grosse untere Fehlergrenze geschaffen wird, die zu ansehnlichen Gewinnanteilen führen *kann*, setzen diese kleineren Gebilde bei ihren Grundlagen den technischen Zinsfuss im allgemeinen höher; dafür gewinnt bei ihnen logischerweise die obere Fehlergrenze grössere Bedeutung; statt von künftigen Gewinnanteilen zu sprechen, sehen denn auch vernünftige Statuten solcher Kassen vor, dass im Bedarfsfall die Prämien (Durchschnittsprämie) *erhöht* werden können. Dass nicht nur die Wahl des Zinsfusses, sondern auch die der benötigten Ausscheideordnungen die Fehlergrenzen bedingt, liegt klar auf der Hand. Hier müsste ein tarifmässiges Tabellenwerk gute Dienste leisten, dem gewisse, nach Gefahrenklassen abgestufte Sterbe- und Invaliditätstafeln zugrunde liegen würden; diese Abstufung könnte vorläufig lediglich nach mathematischen Gesichtspunkten geschehen. Bei Aufstellung einer technischen Bilanz würde man stets nach zwei Gefahrenklassen rechnen: der eigentlichen technischen Grundlage und einer ungünstigeren zweiten Gefahrenklasse. Damit wäre zahlenmässig eine Fehlergrenze festgelegt, welche natürlich wiederum nicht eindeutig, aber doch lehrreich wäre.

* * *

Eine grosse Rolle spielen in der Versicherungsmathematik die *Näherungsformeln.* Vor allem hat die Eulersche Summenformel eine grosse Bedeutung erlangt; es ist dies eine semikonvergente unendliche Reihe, welche zwischen dem eine Grösse darstellenden *Integral* und einer *Summe* eine Beziehung schafft, also eigentlich Grössen der Präzision mit solchen der Approximation verbindet und aus diesem Grunde eine nicht zu unterschätzende Bedeutung besitzt. Leider wird sie meistens wie die andern Näherungsformeln ohne einen Ausdruck für die Grenze der Annäherung (Rest) benützt.

*Louis Maingie* beschäftigt sich in seinem Buche «La théorie de l'intérêt et ses applications» (Bruxelles 1911) ebenfalls mit dem Barwert der unterjährigen Zeitrente und findet dafür durch direkte Anwendung der Eulerschen Formel den Ausdruck

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1-v^n) - \frac{\delta\,(m^2-1)}{12\,m^2}(1-v^n) \quad \text{I.}$$

ohne sich jedoch auf eine Untersuchung des Restes einzulassen.

*Maingie* knüpft an seine Formel die folgende Bemerkung: «Wenn keine grosse Genauigkeit verlangt ist, so kann man das letzte Glied vernachlässigen. Diese Formel ist bequem; sie gibt

$$\left.\begin{aligned} a_{\overline{n}|}^{(2)} &= a_{\overline{n}|} + 0{,}25\,(1 - v^n) \\ a_{\overline{n}|}^{(4)} &= a_{\overline{n}|} + 0{,}375\,(1 - v^n) \\ a_{\overline{n}|}^{(12)} &= a_{\overline{n}|} + 0{,}458\,(1 - v^n) \\ \bar{a}_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|} + \tfrac{1}{2}\,(1 - v^n) \quad '' \end{aligned}\right\} \qquad \text{II.}$$

An diese Bemerkung anknüpfend, wollen wir zeigen, dass die Formel

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}^{(m)} &= a_{\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\,(1 - v^n) \\ &= a_{\overline{n}|}\,(1 + \frac{m-1}{2m}\,i) \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

in gewissen Fällen nicht nur zu ausreichend genauen, sondern *praktisch* allein zu *richtigen* Resultaten führt.

Stellt der Ausdruck $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ den Barwert einer periodischen Einzahlung von jährlich 1 dar, die in $m$ unterjährigen Raten von $\frac{1}{m}$ entrichtet wird und für welche der Zins am *Ende des Jahres* zum Kapital geschlagen wird, so berechnet die Sparkasse den Ratenzins linear. Beschränken wir uns auf den Zeitraum eines Jahres, so wachsen die $m$ Raten mit ihren Zinsen auf den Endwert an

$$s_{\overline{1}|}^{(m)} = 1 + \frac{m-1}{2m}\,i.$$

Nun ersieht man sofort, dass

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} \cdot a_{\overline{n}|}, \qquad \text{(III a.)}$$

welche Formel mit III übereinstimmt. Unter der gemachten Voraussetzung über die Ratenzinsen ist dies die *genaue Formel.*

Diese Feststellung zeigt, dass auch eine genaue Formel zu unrichtigen Schlussresultaten führt, wenn gewisse *praktische* Bedingungen bei ihrer Aufstellung vernachlässigt werden. Ein schlagendes Beispiel erwähnt *Cantor* in seiner politischen Arithmetik (2. Auflage, Leipzig 1903, Seite 41). Unter der Voraussetzung, dass Sparkassen einen gewissen Mindestbetrag bedingen, meistens 10 Mk., der erreicht sein muss, bevor Zinsenvergütung stattfindet, stellt er den Endwert eines Kapitals demjenigen gegenüber, der sich ohne jede Bedingung ergäbe. Die Rechnung wird an einem recht aktuellen Beispiel durchgeführt:

Als 1886 das 500jährige Stiftungsfest der Universität Heidelberg begangen wurde, legte man Mk. 10 in die dortige Sparkasse ein, welche bis zum 1000jährigen Stiftungsfeste unangetastet bleiben, dann mit ihrem ganzen Zuwachse den Universitätsbehörden zur Verfügung gestellt werden sollen.

Cantor berechnet den Endwert des Kapitals auf den genannten Zeitpunkt beim Zinsfuss 3 % auf Mark 14,975,273. 80. Bei bedingungslosem Zinseszins, d. h. nach der allgemeinen Aufzinsungsformel dagegen ergäbe sich der Endwert *Mk. 26,218,778*, der nahezu doppelt so gross ist.

Es ist dies ein deutliches Beispiel dafür, dass in vielen Fällen die Formeln der Präzision — denn um eine solche handelt es sich bei bedingungsloser Anwendung der Formel $K = k \cdot r^n$ — direkt zu falschen Ergebnissen führen. Vor kritikloser Anwendung dieser Formel muss man sich somit ebensosehr hüten wie vor unbedingter Anwendung der kontinuierlichen Methode und der Arbeitsweise der *Präzisionsmathematik* in der Versicherungslehre.

*Welches ist nun aber die Rolle dieser letzteren?*

Die Antwort lautet, dass es gewisse Aufgaben gibt, die ohne die genauen Methoden kaum gelöst werden können. Ferner ergibt sich mit ihrer Anwendung vielfach eine gewisse Eleganz und Kürze der Darstellung, die der gewöhnlichen Methode fehlt. Als frappantes Beispiel, zu welchen *praktisch* wichtigen Resultaten sie führt, sei die Ersetzung ungleicher Alter durch gleiche bei Anwendung des Makehamschen Gesetzes erwähnt, eine Methode, von der jeder Versicherungsmathematiker mit Vorteil Gebrauch macht und die der Franzose *Quinquet* durch Einführung hyperbolischer Funktionen noch mehr auf den Boden der Präzision zu stellen versucht hat.

Die Vorteile der Präzisionsmethode sind die streng *mathematische* Behandlungsweise der Probleme und die daherige Folgerungsmöglichkeit und Verallgemeinerung. Gleichzeitig wirkt damit die Versicherungsmathematik befruchtend auf die reine Mathematik.

Die Nachteile der Präzisionsmethode beruhen in der Möglichkeit zu Trugschlüssen, wie wir sie oben zu charakterisieren versucht haben, und in gewissen Fällen in einer Kompliziertheit der Ausdrücke, welche die praktische Deutung erschwert.

Dass es gewisse Beispiele gibt, welche nur auf dem Boden der Präzision gelöst werden können, beweist die alte Aufgabe der Zinsfussvariation. Die Franzosen nennen sie: «Le problème du taux». Welchen Einfluss hat eine Änderung des Zinsfusses auf die Barwerte der Lebensversicherung und wie kann man leicht diese Barwerte zu einem neuen Zinsfuss ermitteln, unter Umgehung der Kommutationszahlen, wenn sie bereits für einen oder mehrere Zinsfüsse gerechnet sind? Diese Aufgabe hat schon viele Köpfe beschäftigt.

Eine einwandfreie Lösung kennt man heute noch nicht. Warum? Man hat vielfach das der Präzisionsmathematik angehörende feine Problem mit den Methoden der Approximation zu lösen versucht. Immerhin muss zugegeben werden, dass die Franzosen und namentlich die holländischen Aktuare in ihrer Zeitschrift «Archief voor de Verzekerings-Wetenschap» eine ganze Anzahl wertvoller Arbeiten über diesen Gegenstand publiziert haben, wie sie überhaupt für alle theoretischen Fragen der Lebensversicherung als klassisches Land dieser Wissenschaft noch heute grosses Interesse an den Tag legen.

Trotz aller Versicherungswissenschaft gehen auch heute noch Gesellschaften zugrunde. Man könnte daher fragen, was da alle Theorie und Wissenschaft genützt habe.

Das wäre ein voreiliger Schluss. Stürzen nicht auch heute noch, trotz aller Ingenieurkunst, Brücken aus Stein und Metall zusammen? (Erdbeben).... Gibt es nicht auch heute noch, trotz aller Seefahrerkunst, grosse Schiffsunglücke, kann nicht ein ungeheurer Orkan die grössten Schiffe gefährden? Und hat man etwa deswegen, am Enderfolg aller jahrhundertelangen Bestrebungen verzweifelnd, die Bemühungen um Verbesserung der Schiffe, und namentlich der *Schiffsinstrumente*, aufgegeben?

Nein, seien auch wir mutige Schiffer, genaue Schiffsingenieure, die auf die Fortschritte der Wissenschaft vertrauen und einen Misserfolg als Ansporn zu erneuter Anstrengung und Wegweiser für *neue Wege* auffassen. Halten wir die Fahne des Fortschrittes und der wissenschaftlichen Entwicklung hoch! Sie weist uns auch heute den Weg.

## Übersicht I.

# Fehlergrenzen.

| Grösse: | Ausdruck für die Fehlergrenze [1]: |
|---|---|
| $l_x$ . . . . . . | $\alpha = 0{,}5$ |
| $v^x$ . . . . . . | $\beta = 0{,}0000\,0000\,5$ bzw. beliebig klein |
| $D_x$ . . . . . . | $\gamma_x = v^x \cdot \alpha$ |
| $N_x$ . . . . . . | $\delta_x = \gamma_x \cdot {}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{\omega - x}|}$ [2] |
| $\mathfrak{a}_x$ . . . . . . | $\varepsilon_x = \dfrac{{}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{\omega - x}|} + {}^{E}\mathfrak{a}_x}{l_x}\,\alpha$ |
| $A_x$ . . . . . . | $\zeta_x = d \cdot \varepsilon_x$ |
| $P_x$ . . . . . . | $\eta_x = \dfrac{\varepsilon_x}{\left({}^{E}\mathfrak{a}_x\right)^2}$ |
| $d_x = l_x - l_{x+1}$ . | $\alpha' = 2\alpha$ |
| $C_x$ . . . . . . | $\gamma'_x = 2\,v\,\gamma_x$ |
| $M_x$ . . . . . . | $\delta'_x = \gamma'_x \cdot {}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{\omega - x}|} = 2\,\gamma_x \cdot {}^{E}a_{\overline{\omega - x}|}$ |
| $A_x$ . . . . . . | $\varepsilon'_x = \dfrac{{}^{E}a_{\overline{\omega - x}|}}{l_x}\,2\,\alpha \backsim \zeta_x$ [3] |
| $N_x - N_{x+n}$ . . | $\delta_{\overline{xn}|} = \gamma_x \cdot {}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{n}|}$ |
| $M_x - M_{x+n}$ . . | $\delta'_{\overline{xn}|} = 2\gamma_x \cdot {}^{E}a_{\overline{n}|}$ |
| $\mathfrak{a}_{\overline{xn}|}$ . . . . . | $\varepsilon_{\overline{xn}|} = \dfrac{{}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{n}|} + {}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{xn}|}}{l_x}\,\alpha$ |
| $A_{\overline{xn}|}$ . . . . . | $\zeta_{\overline{xn}|} = d \cdot \varepsilon_{\overline{xn}|} \backsim \dfrac{{}^{E}a_{\overline{n}|}}{l_x}\,2\,\alpha$ |
| $P_{\overline{xn}|}$ . . . . . | $\eta_{\overline{xn}|} = \dfrac{\varepsilon_{\overline{xn}|}}{\left({}^{E}\mathfrak{a}_{\overline{xn}|}\right)^2}.$ |

[1]) Der Index $E$ bedeutet den ganzzahligen Wert der betreffenden Grösse. Ist z. B. $\mathfrak{a}_x = 15{,}732$, so soll ${}^{E}\mathfrak{a}_x$ den Betrag 15 haben.

[2]) Es bedeutet $\omega$ = Höchstalter in dem Sinne, dass von $x = \omega$ an praktisch $l_x = 0$, z. B. bei Tafel M & W I : $\omega = 90$, bei A F : $\omega = 104$.

[3]) D. h. hinsichtlich der Grössenordnung müssen $\varepsilon'_x$ und $\zeta_x$ das nämliche Resultat ergeben.

## Übersicht II.

### Beispiel.

**Tafel M W I, 3 ½ %.**

| Alter $x$ | Fehlergrenzen von: | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $D_x$ | $N_x$ | $\mathfrak{a}_x$ | $A_x$ | $P_x$ |
| | $(\gamma_x)$ | $(\delta_x)$ | $(\varepsilon_x)$ | $(\zeta_x)$ | $(\eta_x)$ |
| 20 | 0,25 | 6,7 | $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ | $5{,}7 \cdot 10^{-7}$ |
| 40 | 0,13 | 3,2 | $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ | $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ | $9{,}2 \cdot 10^{-7}$ |
| 60 | 0,06 | 1,1 | $2{,}6 \cdot 10^{-4}$ | $8{,}8 \cdot 10^{-6}$ | $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ |
| 80 | 0,03 | 0,2 | $5{,}7 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ | $3{,}1 \cdot 10^{-5}$ |
| 88 | 0,02 | 0,04 | $1 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ | $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ |
| | Bei der Berechnung verlässliche Zahl von Dezimalstellen nach dem Komma: | | | | |
| 20 | 0 | — 2 | 3 | 4 | 5 |
| 40 | 0 | — 1 | 3 | 4 | 5 |
| 60 | 0 | — 1 | 3 | 4 | 5 |
| 80 | 1 | 0 | 2 | 4 | 4 |
| 88 | 1 | 1 | 2 | 4 | 3 |

Also rechnet man mit «sachgemässer Genauigkeit», wenn man die betreffenden Grössen auf *eine* Dezimale mehr berechnet, als soeben angegeben wurde, und alsdann nach Bedürfnis auf- oder abrundet.

Man wird also im vorliegenden Fall berechnen:

| Die Grösse: | Auf höchstens Dezimalstellen: |
|---|---|
| $D_x$ | 1 (in den obern Altersstufen 2) |
| $N_x$ | 0 ( „ „ „ „ 1) |
| $\mathfrak{a}_x$ | 4 ( „ „ „ „ 3) |
| $A_x$ | 5 |
| $P_x$ | 6 ( „ „ „ „ 5 bzw. 4) |