

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 16 (1921)

Artikel: Über den Einfluss der Wiederverheiratungen auf die Zahl der Witwen

Autor: Schenker, O.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-967468>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Einfluss der Wiederverheiratungen auf die Zahl der Witwen.

Von Dr. **O. Schenker**, Matten bei Interlaken.

Wir stellen uns die Aufgabe: Wie gestaltet sich der Verlauf der Witwenkurve, die aus einer gegebenen Anzahl (H) von Ehepaaren der Alterskombination α, β entsteht, unter dem Einfluss der Wiederverheiratungen der Witwen?

Um die Aufgabe rechnerisch lösen zu können, muss man für die Wiederverheiratungen der Witwen ein Mass festlegen, in ähnlicher Weise, wie man für die Sterblichkeit Masse aufgestellt hat. Es ist klar, dass dies bloss mittels der Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschehen kann, d. h. unter Zugrundelegung des Urnenschemas. Hierzu ist allerdings zu bemerken, dass die weissen und schwarzen Kugeln in der Urne vollkommen gleichartige Elemente vorstellen, währenddem gleichaltrige Personen diese Bedingung eben nicht erfüllen, sofern nicht für eine genügende Differenzierung gesorgt wird. Wir können uns übrigens auch auf Harald Westergaard berufen, der darauf hinweist, dass die Spezialisierung alle wissenschaftliche Statistik beherrscht. Um trotzdem tunlichst grosse Zahlen zu erhalten, müsste auf möglichste Zen-

tralisation der Statistik abgestellt werden. Es ist übrigens nicht ausgeschlossen, durch eine Verallgemeinerung des Urnenschemas einen bessern Anschluss an die sozialen Erscheinungen zu erhalten.

Schreiten wir nun zur Definition der Heiratswahrscheinlichkeit. Man versteht unter der einjährigen Heiratswahrscheinlichkeit h_β einer β -jährigen Witwe einen Bruch, dessen Zähler angibt, wie viele von w_β Witwen des Alters β im Laufe des nächsten Jahres heiraten, und dessen Nenner w_β selbst ist; h_β ist offenbar von der Sterblichkeit der Witwen abhängig und wird darum auch als abhängige Heiratswahrscheinlichkeit bezeichnet. Eine Ermittlung von h_β nach genauen Altern ist uns nicht bekannt; man wird darum unter β das abgerundete Alter zu verstehen haben; z. B. gehören Witwen zwischen den Altern $-\frac{1}{2} + 30$ und $+\frac{1}{2} + 30$ zum abgerundeten Alter 30. Die mehrmaligen Wiederverheiratungen berücksichtigen wir nicht, und zunächst wollen wir auch die im Schweizerischen Zivilgesetzbuch vom 10. XII. 1907 und auch schon im Zivilstandsgesetz von 1874 vorgeschriebene Wartezeit von zehn Monaten übergehen. Die Zahl der Witwen $w_{\beta+t+1}$ zur Zeit $t+1$ zerlegen wir in zwei Teile: erstens in solche, welche von den $w_{\beta+t}$ Witwen überleben, und in solche, welche aus den $H \cdot {}_t p_a \cdot {}_t p_\beta$ zur Zeit t überlebenden Ehepaaren neu entstanden sind und zur Zeit $t+1$ noch leben; wir erhalten so die Beziehung (wenn H auf 1 reduziert wird):

$$w_{\beta+t+1} = w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t} + {}_t p_a \cdot {}_t p_\beta \cdot p_{\beta+t} \cdot q_{a+t} \text{ oder}$$

$$w_{\beta+t+1} = w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t} + {}_t p_a \cdot {}_{t+1} p_\beta \cdot q_{a+t}. \quad (1)$$

Gleichung (1) wird erfüllt, wenn man setzt:

$$w_{\beta+t+1} = {}_{t+1}p_{\beta} \cdot {}_{t+1}q_{\alpha} \text{ und } w_{\beta+t} = {}_t p_{\beta} \cdot {}_t q_{\alpha},$$

wie es sein soll.

Die Beziehung (1) berücksichtigt die Abhängigkeit der Sterblichkeit vom Zivilstand nicht. Suchen wir Gleichung (1) so umzuformen, dass sie den Wiederverheiratungen der Witwen gerecht wird. Am leichtesten ist das erste Glied zu behandeln. Von den zur Zeit t vorhandenen $w_{\beta+t}$ Witwen heiraten im Laufe des nächsten Jahres $w_{\beta+t} \cdot h_{\beta+t}$, wovon bis zum Jahres-

ende sterben: $w_{\beta+t} \cdot h_{\beta+t} \cdot \frac{q_{\beta+t}}{2}$; im Zeitpunkt $t+1$

leben, also $w_{\beta+t} \cdot h_{\beta+t} \left(1 - \frac{q_{\beta+t}}{2}\right)$ verheiratete Witwen.

Im Zeitpunkt $t+1$ beträgt daher die Zahl der überlebenden unverheirateten Witwen:

$$w_{\beta+t} \left[p_{\beta+t} - h_{\beta+t} \left(1 - \frac{q_{\beta+t}}{2}\right) \right]. \quad (2)$$

Der Ausdruck (2) ist genau, wenn angenommen wird, die Wiederverheiratungen verteilen sich gleichmässig über das ganze Jahr, und in gleichen Zeiträumen ereignen sich gleich viel Sterbefälle. Wenn das Jahr in n gleiche Teile Δ eingeteilt wird, so erläutert dies die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \Delta \cdot h_{\beta+t} (1-\Delta) \cdot q_{\beta+t} + \Delta \cdot h_{\beta+t} (1-2\Delta) \cdot q_{\beta+t} + \dots + \\ & + \Delta \cdot h_{\beta+t} \cdot \Delta \cdot q_{\beta+t} = \Delta \cdot h_{\beta+t} \cdot q_{\beta+t} (1-\Delta+1-2\Delta+ \\ & + \dots + \Delta) = \Delta \cdot h_{\beta+t} \cdot q_{\beta+t} \cdot \frac{(n-1) \cdot 1}{2} = h_{\beta+t} \cdot \frac{q_{\beta+t}}{2}, \end{aligned}$$

da $n\Delta = 1$, mit Weglassung unendlich kleiner Grössen der ersten Ordnung.

Suchen wir nun auch das letzte Glied in Gleichung (1) den Wiederverheiratungen anzupassen. Man teile die Zeit von t bis $t+1$ in n unendlich kleine Teile Δ , so dass $n \cdot \Delta = 1$, so bilden sich in der Zeit Δ , vom Zeitpunkt $t+x$ an:

$${}_{t+x}p_a \cdot {}_{t+x}p_\beta \cdot \frac{q_{a+t} \cdot \Delta}{1-x \cdot q_{a+t}}, \quad (0 < x < 1)$$

Witwen, unter der Voraussetzung, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilen; oder da

$${}_{t+x}p_a \cdot {}_{t+x}p_\beta = {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta \cdot {}_xp_{a+t} \cdot {}_xp_{\beta+t} = {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta$$

$$\frac{l_{a+t} - x(l_{a+t} - l_{a+t+1})}{l_{a+t}} \cdot \frac{l_{\beta+t} - x(l_{\beta+t} - l_{\beta+t+1})}{l_{\beta+t}} =$$

$$= {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta (1-x \cdot q_{a+t}) (1-x \cdot q_{\beta+t})$$

$${}_{t+x}p_a \cdot {}_{t+x}p_\beta \frac{q_{a+t} \cdot \Delta}{1-x \cdot q_{a+t}} = {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta (1-x \cdot q_{\beta+t}) \cdot q_{a+t} \cdot \Delta.$$

Hievon heiraten bis zum Zeitpunkt $t+1$:

${}_tp_a \cdot {}_tp_\beta (1-x \cdot q_{\beta+t}) \cdot q_{a+t} \cdot \Delta \cdot h_{\beta+t} \cdot (1-x)$, wenn ${}_{1-x}h_{\beta+t+x}$ (d. i. die Heiratswahrscheinlichkeit einer $\beta+t+x$ jährigen Witwe für die Risikodauer $1-x$) in 1. Annäherung $= h_{\beta+t} \cdot (1-x)$ gesetzt wird, und es sterben davon bis zum Jahresende:

$${}_tp_a \cdot {}_tp_\beta (1-x \cdot q_{\beta+t}) q_{a+t} \cdot \Delta \cdot h_{\beta+t} (1-x) \frac{\Delta \cdot q_{\beta+t}}{1-x \cdot q_{\beta+t}}$$

$$(1-x+1-x-\Delta+\dots+\Delta) = {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta \cdot q_{a+t} \cdot \Delta \cdot h_{\beta+t} \cdot$$

$$\cdot (1-x) \Delta \cdot q_{\beta+t} \cdot (1-x) n \cdot \frac{1-x+\Delta}{2} = {}_tp_a \cdot {}_tp_\beta \cdot q_{a+t} \cdot \Delta \cdot$$

$$\cdot h_{\beta+t} \cdot (1-x) \cdot q_{\beta+t} \cdot \frac{(1-x)^2}{2}, \text{ bei gleichmässiger Vertei-}$$

lung der Sterbefälle auf den Jahresrest. Im Zeitpunkt $t+1$ überleben daher an unverheirateten Witwen:

$${}_t p_a \cdot {}_t p_\beta \cdot q_{a+t} \left\{ p_{\beta+t} - h_{\beta+t} \left[\int_0^1 (1-x) (1-x \cdot q_{\beta+t}) \cdot dx - \int_0^1 q_{\beta+t} \frac{(1-x)^3}{2} \cdot dx \right] \right\}, \quad (3)$$

woraus nach Integration und Reduktion:

$$w_{\beta+t+1} = w_{\beta+t} \left[p_{\beta+t} - h_{\beta+t} \left(1 - \frac{q_{\beta+t}}{2} \right) \right] + {}_t p_a \cdot {}_t p_\beta \cdot q_{a+t} \left[p_{\beta+t} - \frac{h_{\beta+t}}{2} \left(1 - \frac{7}{12} q_{\beta+t} \right) \right].$$

Sehr angenähert ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$w_{\beta+t+1} = w_{\beta+t} \left[p_{\beta+t} - h_{\beta+t} \left(1 - \frac{q_{\beta+t}}{2} \right) \right] + {}_t p_a \cdot {}_t p_\beta \cdot q_{a+t} \left[p_{\beta+t} - \frac{h_{\beta+t}}{2} \left(1 - \frac{q_{\beta+t}}{2} \right) \right], \quad (4)$$

die auch durch eine einfache Überlegung plausibel wird.

Soll die Wartezeit berücksichtigt werden, so wird die Rechnung noch umständlicher. Leichter kommt man ans Ziel, indem man sich auf unendlich kleine Zeiten beschränkt. Gleichung (1) lautet dann:

$$w_{\beta+t+\Delta} = w_{\beta+t} \cdot {}_\Delta p_{\beta+t} + {}_t p_a \cdot {}_t p_\beta \cdot {}_\Delta p_{\beta+t} \cdot {}_\Delta q_{a+t}, \text{ oder}$$

$$w_{\beta+t} + \Delta \cdot w'_{\beta+t} = w_{\beta+t} \cdot \frac{l_{\beta+t+\Delta}}{l_{\beta+t}} + \frac{l_{a+t}}{l_a} \cdot \frac{l_{\beta+t}}{l_\beta} \cdot \frac{l_{\beta+t+\Delta}}{l_{\beta+t}} \left(1 - \frac{l_{a+t+\Delta}}{l_{a+t}} \right),$$

woraus durch Reduktion mittels des Taylorschen Satzes:

$$w'_{\beta+t} - w_{\beta+t} \cdot \frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{\alpha+t}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} = 0, \quad (5)$$

mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen der 2. und höhern Ordnung. Die Lösung von (5) ist uns bekannt, nämlich:

$$w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \left(1 - \frac{l_{\alpha+t}}{l_{\alpha}} \right).$$

Ganz analog leitet man aus (4) eine Differentialgleichung her. An Stelle von $h_{\beta+t}$, $q_{\beta+t}$ und $q_{\alpha+t}$ treten dann $\Delta h_{\beta+t}$; $\Delta q_{\beta+t}$ und $\Delta q_{\beta+t}$, d. h. unendlich kleine Grössen der 1. Ordnung; die Produkte je zweier dieser Grössen sind daher unendlich klein von der 2. Ordnung und fallen neben Gliedern 1. Ordnung ausser Betracht. Gleichung (4) geht dann über in:

$$w_{\beta+t+\Delta} = w_{\beta+t} (\Delta p_{\beta+t} - \Delta h_{\beta+t}) + p_{\alpha} \cdot p_{\beta} \cdot \Delta q_{\alpha+t} \cdot \Delta p_{\beta+t},$$

oder nach Reduktion gleich wie bei (5):

$$w'_{\beta+t} - w_{\beta+t} \left(\frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \frac{\Delta h_{\beta+t}}{\Delta} \right) + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{\alpha+t}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} = 0. \quad (6)$$

Es sei gestattet, mit Rücksicht auf die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\Delta h_{\beta+t}}{\Delta}$ einige mehr literarische Bemerkungen einzuflechten:

Zu der vorliegenden Arbeit sind wir durch einige kurze Bemerkungen im „Technischen Bericht über die Höhe der erforderlichen Einlagen in die akademische Witwen- und Waisenasse in Bern“ angeregt worden und waren damit Mitte 1919 zu Ende. Das

Bedürfnis, über die vorhandene Literatur Material zu sammeln, brachte uns Anfang 1920 mit Herrn Prof. Karup in Weimar in Verbindung, der uns in seltener zuvorkommender Weise seine eigenen originellen Arbeiten zur Verfügung stellte und über die bestehende Literatur wertvolle Angaben machte, die wir hier zum

Teil wiedergeben wollen. $\frac{\Delta h_{\beta+t}}{\Delta}$ ist nichts anderes, als

die von Karup eingeführte Heiratsintensität $\eta_{\beta+t}$, welche von der Sterbenswahrscheinlichkeit $q_{\beta+t}$ unabhängig ist, sofern dieselbe als stetige Funktion des Alters angenommen wird. Damit im Zusammenhang steht der ebenfalls von J. Karup eingeführte Begriff der unabhängigen einjährigen Heiratswahrscheinlichkeit: $\bar{h}_{\beta+t}$ (nämlich unabhängig von $q_{\beta+t}$). In Anlehnung an

J. Karup gelangt man hierzu folgendermassen ¹:

Sei $B(t)$ eine Gesamtheit von Witwen des Alters $\beta+t$; jeder Todesfall einer Witwe soll sofort durch eine gleichaltrige Witwe ersetzt werden, so dass im Alter $\beta+t_1$ von der Gesamtheit $B(t)$ noch $B(t_1)$ Witwen vorhanden sind. Haben in der Zeit t auf t_1 $H(t_1)$ Heiraten stattgefunden, so ist offenbar: $B(t) - B(t_1) = H(t_1)$; somit, wenn t_1 als Variable betrachtet wird: — $d B(t_1) =$

$$= d H(t_1); \text{ ferner ist definitionsgemäss: } \eta_{\beta+t_1} = \frac{d H(t_1)}{B(t_1) \cdot d t_1},$$

oder wegen $B(t) - B(t_1) = H(t_1)$,

$$\eta_{\beta+t_1} \cdot d t_1 = \frac{d H(t_1)}{B(t) - H(t_1)};$$

integriert man beiderseits zwischen den Grenzen t und T , so kommt:

$$-\int_t^T \eta_{\beta+t_1} \cdot d t_1 = \text{Log nat } [B(t) - H(T)] + \text{Log } C.$$

Hierbei ist offenbar $\text{Log } C = -\text{Log nat } B(t)$, so dass

$$-\int_t^T \eta_{\beta+t_1} \cdot dt_1 = \text{Log nat } \frac{B(t) - H(T)}{B(t)} \text{ oder}$$

$$B(t) - H(T) = B(t) \cdot e^{-\int_t^T \eta_{\beta+t_1} \cdot dt_1} \text{ also}$$

$$\frac{H(T)}{B(t)} = 1 - e^{-\int_t^T \eta_{\beta+t_1} \cdot dt_1}.$$

Setzt man hier $T = t + 1$, so resultiert

$$\frac{H(t+1)}{B(t)} = 1 - e^{-\int_t^{t+1} \eta_{\beta+t_1} \cdot dt_1} = \bar{h}_{\beta+t}, \text{ q. e. d.}$$

Der Begriff der Intensität findet sich schon bei Woolhouse, ist aber wahrscheinlich schon früher eingeführt worden². Auf Invaliditäts- und Heiratsverhältnisse hat ihn wohl zuerst J. Karup ausgedehnt³. Unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeiten sind bereits von Heym, unabhängige Heiratswahrscheinlichkeiten von Kaan angewandt worden⁴. Heym hat die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeiten aber offenbar nicht erkannt, Kaan vielleicht ebensowenig. Kaan, dem eine geeignete Heiratsstatistik nicht zur Verfügung stand, nimmt die Heiratswahrscheinlichkeit (von ihm ohne nähere Definition mit h bezeichnet) für alle Alter zu $1/10$ an und setzt die Wahrscheinlichkeit eines x jährigen im Laufe des $(x+1)^{\text{ten}}$, $(x+2)^{\text{ten}}$. . . Lebensjahres zu heiraten $= h, h(1-h) \frac{l_{x+1}}{l_x}, h(1-h)^2 \frac{l_{x+2}}{l_x}, \dots$

wobei l_x die Lebenden in einer für alle Zivilstände geltenden Sterbetafel bedeutet. Eine auf die Intensi-

täten sich stützende Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ist wohl erst von J. Karup gegeben worden⁵. In England hat die Heiratsfrequenz selbst zu verschiedenen technischen Zwecken Verwendung gefunden⁶. Soviel über die von Prof. J. Karup selbst übermittelte Literatur. Herr Karup gibt über den Gegenstand folgendes Urteil ab:

„Sicherlich können abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten, auch wenn sie nebeneinander angewandt werden, zugleich aus dem Urmaterial abgeleitet werden; vom mathematischen Standpunkt scheint es mir aber richtiger, das Urmaterial nur einmal zu benutzen und alsdann entweder die abhängige Wahrscheinlichkeit aus der unabhängigen oder umgekehrt zu berechnen. Einen Vorteil bieten die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, auf den bisher nicht aufmerksam gemacht worden ist, der aber meines Erachtens nicht ohne Gewicht ist, denjenigen nämlich, dass sie sich für die extremen Alter leichter ausgleichen lassen als die abhängigen. Denn man weiss immer, gegen welche Grenze sie konvergieren, was bei den abhängigen nicht immer der Fall ist. Beispiel die Invaliditätswahrscheinlichkeit, die unabhängig schliesslich 1 werden muss, abhängig diese Grenze nicht erreichen kann und im Endresultat daher ziemlich unsicher ist. Das führt häufig zu umständlichen Erörterungen und Versuchen, wie die Arbeiten von Zimmermann und andern Autoren beweisen.“

„Die indirekte Methode ist natürlich bequemer als die direkte; sie gibt aber auch weniger zuverlässige Resultate. Das geht schon daraus hervor, dass bei letzterer die jeweilige Verteilungsweise des Personenbestandes nach dem Zivilstand immer genau berücksichtigt wird, während man nach jener ein starres Ver-

hältnis zugrunde legt, das — bei unveränderter Grundlage — bald mehr, bald weniger von dem wirklichen abweicht. Das aber ist um so bedenklicher, als man den jeweilig begangenen Fehler nicht einmal schätzungsweise beurteilen kann.“

Wir können nunmehr die Gleichung (6) in der etwas einfachern Form schreiben:

$$w'_{\beta+t} - w_{\beta+t} \left(\frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t} \right) + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{\alpha+t}}{l_{\beta} \cdot l_{\alpha}} = 0, \quad (6a)$$

$$\text{oder da } \frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} = -\mu_{\beta+t}$$

$$w'_{\beta+t} + w_{\beta+t} (\mu_{\beta+t} + \eta_{\beta+t}) + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{\alpha+t}}{l_{\beta} \cdot l_{\alpha}} = 0. \quad (6b)$$

Zur Lösung setze man nach bekannter Methode:
 $w_{\beta+t} = u \cdot v$ und erhält durch Substitution in (6a):

$$u \cdot v' + u'v - u \cdot v \left(\frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t} \right) + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{\alpha+t}}{l_{\beta} \cdot l_{\alpha}} = 0;$$

wählt man v so, dass $u v' - u v \cdot \left(\frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t} \right) = 0$

oder $\frac{v'}{v} = \frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t}$ (u kann im allgemeinen nicht

Null sein), so ergibt die Integration:

$$\log v = \log l_{\beta+t} - \int \eta_{\beta+t} \cdot dt + \log C, \text{ oder}$$

$$v = C \cdot l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}, \text{ somit}$$

$$u' \cdot C l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt} + \frac{l_{\beta+t} \cdot l'_{a+t}}{l_{\beta} \cdot l_a} = 0, \text{ also}$$

$$u = -\frac{1}{l_{\beta} \cdot l_a \cdot C} \int \frac{l'_{a+t} \cdot dt}{e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}} + C_2; \text{ darum ist:}$$

$$w_{\beta+t} = u \cdot v = C \cdot l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt} -$$

$$-\frac{l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}}{l_a \cdot l_{\beta}} \int \frac{l'_{a+t} \cdot dt}{e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}}.$$

Für $t=0$ geht $w_{\beta+t}$ über in: $w_{\beta} = C \cdot l_{\beta} - 1 = 0$,
denn $\int \eta_{\beta+t} \cdot dt$ muss für $t=0$ verschwinden, wie
sich mittels des Mittelwertsatzes leicht zeigen lässt;

$$\text{also ist } C = \frac{1}{l_{\beta}} \text{ und } w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}$$

$$\left(1 - \frac{1}{l_a} \int \frac{l'_{a+t} \cdot dt}{e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}} \right). \quad (7)$$

Für praktische Zwecke müssen in (7) die unbestimmten Integrale durch bestimmte ersetzt werden.

Wie bereits gesehen, ist: $\int \eta_{\beta+t} \cdot dt = \int_0^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi$,

($0 < \xi < t$), und (7) nimmt die Form an:

$$w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \cdot e^{-\int_0^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \left(1 - \frac{1}{l_a} \int_k^t \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_0^x \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}} \right); \quad 0 < x < t. \quad (7a)$$

Im Integral \int_k^t ist die untere Integrationsgrenze k so zu bestimmen, dass das unbestimmte Integral an dieser Grenze Null wird. Ein Mittelwert M des einen Faktors unter dem Integralzeichen kann vor dasselbe genommen werden; man hat dann:

$$\int_k^t = M \int_k^t l'_{a+x} \cdot dx = (l_{a+t} - l_{a+k}) \cdot M.$$

Hieraus folgt, dass $k = \infty$ sein muss. Folglich ist:

$$w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \cdot e^{-\int_0^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \left(1 - \frac{1}{l_a} \int_{\infty}^t \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_0^x \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}} \right); 0 < x < t; \quad (7b)$$

$$\text{da } w_{\beta} = 0 \text{ ist, so muss: } \frac{1}{l_a} \int_{\infty}^0 \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_0^x \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}} = 1 \text{ sein;}$$

(7b) geht darum über in:

$$w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t} \cdot e^{-\int_0^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}}{l_a \cdot l_{\beta}} \int_0^t \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_0^x \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}}. \quad (7c)$$

Zwischen der Sterblichkeit der Verheirateten und Verwitweten wurde dabei *kein* Unterschied gemacht⁷; will man diesen berücksichtigen, so bezeichne man mit dem Buchstaben l^v die Zahl der Lebenden in der Tafel der Verheirateten und mit l^w die Zahl der Lebenden in der Tafel der Verwitweten, so ergibt sich für diesen Fall leicht:

$$w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}^w}{l_a^v \cdot l_{\beta}^v} \int_0^t l_{a+x}^v \cdot \frac{l_{\beta+x}^v}{l_{\beta+x}^w} \cdot e_x^{-\int_0^t \eta_{\beta+\xi}} \cdot d\xi \cdot dx. \quad (7d)$$

Diese Formel weicht nur formell von derjenigen ab, welche J. Karup in der „Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät am 31. XII. 1890“, S. 103, gegeben hat.

Andere Ableitung von (7c) und (7d).

Zur Zeit x sind nach den gemachten Vereinbarungen: ${}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta}$ Ehepaare vorhanden, am Ende der darauffolgenden Zeit Δ überleben: ${}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta} \cdot {}_{\Delta} p_{\beta+x} \cdot {}_{\Delta} q_{a+x}$ Witwen, wovon heiraten und am Ende der Zeit $x + 2\Delta$ überleben:

$${}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta} \cdot {}_{\Delta} p_{\beta+x} \cdot {}_{\Delta} q_{a+x} \cdot \eta_{\beta+x+\Delta} \cdot \Delta,$$

so dass zur Zeit $x + 2\Delta$ an unverheirateten Witwen vorhanden sind:

$$\begin{aligned} & {}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta} \cdot {}_{\Delta} p_{\beta+x} \cdot {}_{\Delta} q_{a+x} \left({}_{\Delta} p_{\beta+x+\Delta} - \eta_{\beta+x+\Delta} \cdot \Delta \right) \\ &= {}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta} \cdot {}_{\Delta} p_{\beta+x} \cdot {}_{\Delta} q_{a+x} \cdot {}_{\Delta} p_{\beta+x+\Delta} \left(1 - \eta_{\beta+x+\Delta} \cdot \Delta \right), \end{aligned}$$

wenn unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung neben endlichen weggelassen werden. Fährt man so fort, so findet man leicht, dass zur Zeit t von den ${}_x p_a \cdot {}_x p_{\beta}$ Ehepaaren an unverheirateten Witwen überleben:

$$- \frac{\Delta \cdot l_{a+x}^v}{l_a^v} \cdot {}_t p_{\beta} \cdot e_x^{-\int_x^t \Delta \cdot \eta_{\beta+\xi}}.$$

Lässt man x wandern von 0 bis t , so bekommt man für die Gesamtzahl der im Zeitpunkt t unver-

heirateten Witwen wiederum (7c) und mit Berücksichtigung des Zivilstandes (7d). Diese Ableitung der Gleichung (7c) gestattet auch unmittelbar den Übergang zur Wartezeit, die wir auf 1 Jahr abrunden wollen. Man bekommt für die Zahl ${}^r w_{\beta+t}$ der unter dem Heiratsrisiko stehenden Witwen:

$${}^r w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}}{l_a \cdot l_{\beta}} \int_0^{t-1} l'_{a+x} \cdot e^{-\int_{x+1}^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot d\xi. \quad (8)$$

Die Zahl der Witwen ${}^0 w_{\beta+t}$, welche zur Zeit t nicht unter Risiko stehen, ist einfach gleich der Zahl der Witwen, die im Zeitraum $t-1$ auf t entstehen und zur Zeit t noch leben, also:

$$\begin{aligned} {}^0 w_{\beta+t} &= {}_{t-1}p_a \cdot {}_{t-1}p_{\beta} \cdot p_{\beta+t-1} \cdot q_{a+t-1} = \\ &= \frac{l_{a+t-1}}{l_a} \cdot \frac{l_{\beta+t-1}}{l_{\beta}} \cdot \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta+t-1}} \left(1 - \frac{l_{a+t}}{l_{a+t-1}} \right) \quad (9) \\ \text{oder } {}^0 w_{\beta+t} &= \frac{l_{a+t-1} - l_{a+t}}{l_a} \cdot \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}}. \end{aligned}$$

Die Totalzahl $w_{\beta+t}$ der Witwen ist somit:

$$\begin{aligned} w_{\beta+t} &= {}^r w_{\beta+t} + {}^0 w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}}{l_a \cdot l_{\beta}} \int_0^{t-1} l'_{a+x} \cdot e^{-\int_{x+1}^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot \\ &\quad \cdot dx + \frac{l_{a+t-1} - l_{a+t}}{l_a} \cdot \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}}. \quad (10) \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung des Zivilstandes ist:

$${}^r w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}^w}{l_a^v \cdot l_{\beta}^v} \int_0^{t-1} l_{\alpha+x}^v \cdot \frac{l_{\beta+x}^v}{l_{\beta+x}^w} \cdot e^{-\int_{x+1}^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot dx \quad (11)$$

und

$${}^0 w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}^w}{l_a^v \cdot l_{\beta}^v} \int_t^t l_{\alpha+x}^v \cdot \frac{l_{\beta+x}^v}{l_{\beta+x}^w} \cdot dx. \quad (12)$$

Auch für den Fall der Karenzzeit kann eine Differentialgleichung wie folgt aufgestellt werden (Karenzzeit abgerundet 1 Jahr):

$$\begin{aligned} {}^r w_{\beta+t+\Delta} = {}^r w_{\beta+t} (\Delta p_{\beta+t} - \eta_{\beta+t} \cdot \Delta) + {}_{t-1} p_{\beta} \cdot {}_{t-1} p_{\alpha} \cdot \\ \cdot \Delta p_{\beta+t-1} \cdot \Delta q_{\alpha+t-1} \cdot p_{\beta+t-1+\Delta}, \end{aligned}$$

oder nach Anwendung der Taylorschen Entwicklung und Reduktion:

$${}^r w'_{\beta+t} - {}^r w_{\beta+t} \left(\frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t} \right) + \frac{l'_{\alpha+t-1} \cdot l_{\beta+t}}{l_a \cdot l_{\beta}} = 0. \quad (13)$$

Analog wie für (6a), bekommt man für (13) die Lösung:

$${}^r w_{\beta+t} = l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt} \left(C - \frac{1}{l_a \cdot l_{\beta}} \int \frac{l'_{\alpha+t-1} \cdot dt}{e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}} \right)$$

$$\text{für } t=1 \text{ ist } {}^r w_{\beta+1} = 0, \text{ also } {}^r w_{\beta+1} = l_{\beta+1} \left(C - \frac{l_a}{l_a \cdot l_{\beta}} \right) = 0$$

und $C = \frac{1}{l_{\beta}}$, denn für $t=1$ ist $\int \eta_{\beta+t} \cdot dt = 0$; somit ist:

$${}^r w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t} \cdot e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}}{l_{\beta}} \left(1 - \frac{1}{l_a} \int \frac{l'_{a+t-1} \cdot dt}{e^{-\int \eta_{\beta+t} \cdot dt}} \right);$$

verwandelt man analog wie bei (7) die unbestimmten Integrale in bestimmte, so findet man:

$${}^r w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \cdot e^{-\int_1^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \left(1 - \frac{1}{l_a} \int_{\infty}^t \frac{l'_{a+x-1} \cdot dx}{e^{-\int_1^x \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}} \right); 0 < x < t$$

oder wenn man die Variable x durch $x+1$ ersetzt und dafür die Integrationsgrenzen um 1 verkleinert:

$${}^r w_{\beta+t} = \frac{l_{\beta+t}}{l_{\beta}} \cdot e^{-\int_1^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \left(1 - \frac{1}{l_a} \int_{\infty}^{t-1} \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_1^{x+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}} \right).$$

$$\text{oder wegen } 1 = \frac{1}{l_a} \int_{\infty}^0 \frac{l'_{a+x} \cdot dx}{e^{-\int_1^{x+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}}$$

$${}^r w_{\beta+t} = - \frac{l_{\beta+t}}{l_a \cdot l_{\beta}} \int_0^{t-1} l'_{a+x} \cdot e^{-\int_1^{x+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot dx \text{ identisch mit (8)}$$

übereinstimmend. Wird der Zivilstand berücksichtigt, so tritt an Stelle von (13):

$${}^r w'_{\beta+t} - {}^r w_{\beta+t} \left(\frac{l^w_{\beta+t}}{l^w_{\beta+t}} - \eta_{\beta+t} \right) + \frac{l^v_{\beta+t-1} \cdot l^v_{a+t-1} \cdot l^w_{\beta+t}}{l^v_a \cdot l^v_{\beta} \cdot l^w_{\beta+t-1}} = 0. \quad (13a)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt (11), wie es sein soll.

Der Vollständigkeit halber kann ${}^0w_{\beta+t}$ auch aus einer Differentialgleichung bestimmt werden; denn man hat:

$$\begin{aligned} {}^0w_{\beta+t+\Delta} &= {}^0w_{\beta+t} \cdot {}^{\Delta}p_{\beta+t} - {}^{t-1}p_{\alpha} \cdot {}^{t-1}p_{\beta} \cdot {}^{\Delta}p_{\beta+t-1} \\ &\quad + {}^{\Delta}q_{\alpha+t-1} \cdot p_{\beta+t-1} + {}^tp_{\alpha} \cdot {}^tp_{\beta} \cdot {}^{\Delta}p_{\beta+t} \cdot {}^{\Delta}q_{\alpha+t}; \end{aligned}$$

(überlebende Witwen — denjenigen, die ins Risiko eintreten, + denjenigen, welche neu entstehen), oder nach Reduktion:

$${}^0w'_{\beta+t} - {}^0w_{\beta+t} \cdot \frac{l'_{\beta+t}}{l_{\beta+t}} + \frac{l'_{\alpha+t} \cdot l_{\beta+t} - l'_{\alpha+t-1} \cdot l_{\beta+t}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} = 0. \quad (14)$$

Diese Gleichung wird durch (9) erfüllt, wie es sein soll. Mit Berücksichtigung des Zivilstandes ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} {}^0w'_{\beta+t} - {}^0w_{\beta+t} \cdot \frac{l'^w_{\beta+t}}{l^w_{\beta+t}} + \\ + \frac{l'^v_{\alpha+t} \cdot l^v_{\beta+t} \cdot l^w_{\beta+t-1} - l'^v_{\alpha+t-1} \cdot l^w_{\beta+t} \cdot l^v_{\beta+t-1}}{l^v_{\alpha} \cdot l^v_{\beta} \cdot l^w_{\beta+t-1}} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

in der Tat wird diese Gleichung durch (12) erfüllt.

Rekursionsformeln.

Nach Gleichung (7c) hat man:

$$w_{\beta+t+1} = - \frac{l_{\beta+t+1}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} \int_0^{t+1} l'_{\alpha+x} \cdot e^{-\int_x^{t+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{l_{\beta+t+1}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} \left[\int_0^t l'_{\alpha+x} \cdot e^{-\int_x^t \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot e^{-\int_t^{t+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \right. \\
 &\quad \left. \cdot dx + \int_t^{t+1} l'_{\alpha+x} \cdot e^{-\int_x^{t+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi} \cdot dx \right] = \\
 &= -\frac{l_{\beta+t+1}}{l_{\beta+t}} \cdot w_{\beta+t} (1 - \bar{h}_{\beta+t}) - \frac{l_{\beta+t+1}}{l_{\alpha} \cdot l_{\beta}} \left(1 - \frac{\bar{h}_{\beta+t}}{2} \right) (l_{\alpha+t+1} - l_{\alpha+t}).
 \end{aligned}$$

$1 - \frac{\bar{h}_{\beta+t}}{2}$ stellt denjenigen Mittelwert von $e^{-\int_x^{t+1} \eta_{\beta+\xi} \cdot d\xi}$

dar, welchen man erhält, indem man für x das eine Mal t und das andere Mal $t+1$ setzt und aus den erhaltenen Werten das arithmetische Mittel nimmt; man erhält also:

$$w_{\beta+t+1} = w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t} (1 - \bar{h}_{\beta+t}) + {}_t p_{\alpha} \cdot {}_t p_{\beta} \cdot p_{\beta+t} \cdot q_{\alpha+t} \left(1 - \frac{\bar{h}_{\beta+t}}{2} \right).$$

(16)

Formel (4) lässt sich mit Vernachlässigung 2. und höherer Potenzen von $q_{\beta+t}$ in die Form überführen:

$$\begin{aligned}
 w_{\beta+t+1} &= w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t} \left[1 - h_{\beta+t} \left(1 + \frac{q_{\beta+t}}{2} \right) \right] + {}_t p_{\alpha} \cdot \\
 &\quad \cdot {}_t p_{\beta} \cdot p_{\beta+t} \cdot q_{\alpha+t} \left[1 - \frac{h_{\beta+t}}{2} \left(1 + \frac{q_{\beta+t}}{2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

welche mit (16) identisch wird, sobald man setzt:

$$\bar{h}_{\beta+t} = h_{\beta+t} \left(1 + \frac{q_{\beta+t}}{2} \right).$$

Nach den gebräuchlichen Hypothesen findet diese Relation wirklich auch statt und darum auch identische Übereinstimmung zwischen (16) und (4).

Durch analoge Behandlung von (7d) erhält man leicht:

$$\begin{aligned} w_{\beta+t+1} = & w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t}^w (1 - \bar{h}_{\beta+t}) + {}_t p_a^v \cdot {}_{t+1/2} p_{\beta+t+1/2}^w \cdot {}_{t+1/2} p_{\beta}^v \cdot \\ & \cdot q_{a+t}^v \left(1 - \frac{\bar{h}_{\beta+t}}{2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

und aus (10), d. h. mit Berücksichtigung der Wartezeit:

$$\begin{aligned} w_{\beta+t+1} = & w_{\beta+t} \cdot p_{\beta+t} (1 - \bar{h}_{\beta+t}) + {}_t p_a \cdot {}_{t+1} p_{\beta} \cdot \\ & \cdot q_{a+t} \left(1 + \frac{\bar{h}_{\beta+t}}{2} \cdot \frac{q_{a+t-1}}{q_{a+t}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Nach J. Karup lassen sich die Heiratswahrscheinlichkeiten, abgeleitet aus allgemeinen Bevölkerungsstatistiken, kaum auf Pensionskassen anwenden; am besten ist es, dieselben aus den Erfahrungen derjenigen Kassen abzuleiten, für welche die Barwerte von Witwenrenten berechnet werden sollen. In England ist man so weit gegangen, an Stelle der Heiratswahrscheinlichkeit ausschliesslich mit der Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins zu rechnen⁸. J. Karup hat zur Bestimmung des Einflusses der Wiederverheiratungen auf den Barwert der Witwenrenten in seiner zitierten „Finanzlage . . .“ viel Zahlenmaterial veröffentlicht. Wir be-

gnügen uns hier, an Hand von neuern Zahlen den Einfluss der Wiederverheiratungen zu illustrieren. Als Grundlage diene die schweizerische Sterbetafel für die Jahre 1901—1910⁹, sowie die von Martin für die Witwen der preussisch-hessischen Eisenbahnarbeiter abgeleiteten unabhängigen Heiratswahrscheinlichkeiten, die den für die Schweiz gefundenen nahe stehen¹⁰. Die Zahlen von Martin sind nachstehend wiedergegeben:

Alter	\overline{h}	Alter	\overline{h}	Alter	\overline{h}	Alter	\overline{h}
20	0,078	35	0,060	50	0,012	65	0,0007
21	0,113	36	0,055	51	0,010	66	0,0006
22	0,123	37	0,050	52	0,009	67	0,0005
23	0,131	38	0,046	53	0,008	68	0,0004
24	0,137	39	0,042	54	0,007	69	0,0003
25	0,141	40	0,038	55	0,006	70	0,0001
26	0,142	41	0,035	56	0,005	71	—
27	0,142	42	0,031	57	0,004	72	—
28	0,134	43	0,028	58	0,0032	73	—
29	0,112	44	0,024	59	0,0026	74	—
30	0,090	45	0,022	60	0,0024		
31	0,085	46	0,020	61	0,0022		
32	0,078	47	0,018	62	0,0019		
33	0,070	48	0,016	63	0,0015		
34	0,065	49	0,014	64	0,0011		

Der Barwert der Witwenpension 1, unter Annahme einer Verzinsung zu 4 % und jährlicher Zahlungen, ergibt mit diesen Grundlagen das folgende, zur Illustration berechnete Täfelchen.

Alters- kombination	Barwert der Witwenpension 1, ohne Wieder- verheiraten	Barwert der Witwenpension 1, mit Wieder- verheiraten
30,25	3,267	2,642
40,35	3,796	3,465
50,45	4,127	4,007
60,55	3,992	3,967
70,65	3,363	3,361
80,75	2,476	2,476
90,85	1,536	1,536

Gerechnet wurde nach den Formeln (1) und (18). Um sich ein Urteil über den Einfluss der Karenzzeit bilden zu können, wurde für die Alterskombination 30,25 der Barwert der Witwenpension 1 auch nach Formel (16) berechnet, d. h. ohne Rücksicht auf die Karenzzeit; man erhielt an Stelle des Wertes 2,642 . . . 2,549. Der Einfluss der Karenzzeit darf also nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Von einem etwas allgemeineren Gesichtspunkt aus wäre es von Interesse, die Abhängigkeit der Heiratsfrequenz von der Dauer des Witwenstandes statistisch zu erfassen.

Literaturnachweise.

¹ *Karup*, Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät am 31. Dez. 1890, Dresden 1893, S. 42 u. ff.

² *Woolhouse*, On an improved Theory of Annuities and Assurances, Journ. of the Institute of Actuaries, Vol. XV, p. 95 u. ff. — Juli 1869.

³ *Karup*, op. c.

⁴ *Kaan*, Die mathematischen Rechnungen bei Pensionsinstituten der Eisenbahnbeamten, Wien 1864.

⁵ *Karup*, op. c.

Spangenberg, Die zahlenmässige Berechnung der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen“ und der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „unabhängigen“, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 10. Heft, S. 25 u. ff.

Spangenberg, Die Karup'sche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, 20. Heft der Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft.

⁶ *Sprague*, On the Rate of Re-Marriage among widows and spinsters, Journ. XXII, 270; On the Probability, that there will hereafter be issue of a Marriage hitherto childless, Journ. XXII, 117; On the Probability, that a Marriage entered into by a Man above Forty will be fruitful, Journ. XXII, 359; On the Calculation of the value of benefits, that depend of the death without issue of One ore More Persons, Journ. XXIV, 327; On the Probability, that a Marriage entered into at any age will be fruitful, and that, if a Marriage has been childless for several years, it will afterwards become fruitful, Journ. XXV, 160.

⁷ Über Wahrscheinlichkeiten, welche vom Zivilstand abhängen, siehe die Arbeit von Prof. Riethmann: „Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben“ im 3. Heft der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, S. 89 u. ff.

⁸ S. Report by Mr. George King, F. J. A., F. F. A., on cost of insurance, against sickness, unemployment, &c. to the Royal Commission on the Poor Laws and Relief of Distress, London 1908.

⁹ Schweizerische Statistik, 204. Lieferung.

¹⁰ Amtmann und Pfaffenberger, Zur Mathematik der Pensionsversicherung, Jena 1907, S. 187.

Über Heiratsstatistik s. „Ehestatistik“, herausgegeben von Westergaard und M. Rubin, 1890; ferner „Theorie der

Statistik“ von Westergaard, 2. Ausgabe, dänisch 1915, und A. Knibbs, *The Mathematical Theory of Population*, Melbourne 1917 (Census of the Commonwealth of Australia, Appendix A, Vol. 1); verwiesen sei auch auf: Dr. M. Ney, *Détermination de la probabilité de mariage, de divorce et de décès d'après les classes d'état civil de la population suisse, pour la période 1901 à 1910*, Bulletin de l'association des actuaires suisses, fascicule 12; ferner finden sich Angaben über die Dauer der Ehelosigkeit nach Zivilständen und Altersklassen im statistischen Jahrbuch der Stadt Berlin 1884, aus welchen hervorgeht, dass für die Witwen eine Karenzzeit eingehalten wird.

Wertvolle Bemerkungen und Literaturnachweise finden sich bei W. Küttner H. R.: Beiträge zur Theorie der sozialen Witwenversicherung im 9. Heft der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, S. 181 u. ff.
