**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 14 (1919)

**Artikel:** Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelterer Versicherungsformen

**Autor:** Koeppler, Hans

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-550736

# Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelterer Versicherungsformen.

Von **Hans Koeppler**, Berlin.

## Einleitung.

Während das fernere Risiko jener Versicherungsarten, die nur auf den Todes- oder Erlebensfall je einer Person abgeschlossen werden, eine verhältnismässig häufige Bearbeitung gefunden hat, wurde dem ferneren Risiko verwickelterer Versicherungsformen bisher eine viel geringere Beachtung gewidmet. Wird nun der Theorie des Risikos überhaupt eine grössere Bedeutung beigemessen, so ist dieser Umstand zweifelsohne merkwürdig. Gerade verwickeltere Versicherungsformen, wie es beispielsweise Invaliditäts-, Heiratsaussteuer-, Ledigenversicherungen usw. sind, lassen infolge der meist noch mangelhaften Rechnungsgrundlagen Verluste befürchten, während der Betrieb der grossen Lebensversicherung unter normalen Verhältnissen stets gewinnbringend verläuft.

Von den wenigen, auf verwickeltere Versicherungsarten Bezug nehmenden Darstellungen, die dem Verfasser bekannt geworden sind, erweisen sich einige nur als Annäherungen, keine einzige derselben aber wird analytisch begründet.

Um diese Darstellungen kurz anzuführen, erinnern wir uns zunächst der bekannten Abhandlung Hausdorffs „Das Risiko bei Zufallsspielen“, in welcher man zwei Entwicklungen der gedachten Art vorfindet. Die eine, auf einer allgemeinen Fassung des Problems fussend, führt zu einer beachtenswerten Näherungsformel, deren Brauchbarkeit wohl aber nur vereinzelt gutgeheissen werden dürfte. Die andere Berechnung beschäftigt sich mit der vor einigen Jahren in den Vordergrund gerückten Lebensversicherung bei Berücksichtigung der voraussichtlichen Rückkäufe, kann aber leider nicht als einwandfrei bezeichnet werden.

Der mittlere Gewinn oder Verlust von Witwen- und Studienrenten, welcher, wie sich zeigen lässt, gleich ist dem durchschnittlichen Risiko, wurde von dem Holländer Peek berechnet. Die Peeksche Arbeit, die diese Berechnungen enthält, stellt übrigens keinen Beitrag zur Theorie des Risikos selbst dar, sondern sucht die Aufgabe zu lösen, wie man zu einem Verfahren der rationellen Bemessung der Prämienzuschläge gelangen könne. Entsprechend diesem Ziele trägt die im zweiten Bande der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft (1902) veröffentlichte Abhandlung daher auch die Überschrift „Über eine rationelle Methode der Bestimmung des Zuschlags“.

Ferner hat Küttner das fernere Risiko einer Invaliditätsrente mit Rückgewähr zu ermitteln angestrebt, indem er die Lösung auf jene einfacher Versicherungsarten zurückzuführen versucht hat. Enthalten ist diese Darstellung in der Küttnerschen Sonderschrift „Das Risiko der Lebensversicherungsanstalten und -Unterstützungskassen“, welche als Heft VII der Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft erschienen ist.

Auch „Die Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten" weisen eine grössere Untersuchung auf, die sich vornehmlich mit dem ferneren Risiko schwierigerer Versicherungsarten beschäftigt. Die im dritten Hefte des zweiten Bandes neuer Folge der Mitteilungen enthaltene Abhandlung (1906) trägt die Überschrift „Studien zur Theorie des Zufallrisikos in der Personenversicherung" und ist von A. Spitz verfasst worden. So umfangreich und eingehend diese Arbeit in mancherlei Hinsicht auch ist, trifft sie doch auch der Vorwurf, die analytische Darstellung hintanzusetzen.

Schliesslich bemerken wir noch in der Kongressabhandlung Aranys (Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des Sechsten Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien, 1909) eine elementare Berechnung des mittleren ferneren Risikos der Witwenrente und der Studienbörsenversicherung.

Hinsichtlich der Invaliditätsversicherung und ähnlich berechneter Versicherungsarten hat sich der Verfasser bereits mehrmals mit der Theorie des ferneren Risikos beschäftigt. Die vorliegende Abhandlung, welche diskrete Prämienberechnung voraussetzt, stellt eine Zusammenfassung, Verallgemeinerung und Vervollständigung der nachstehenden Arbeiten dar:

1. Der mittlere Gewinn oder Verlust bei der Invaliditätsversicherung. (Österreichische Versicherungszeitung; Wien, 1909 und 1910.)
2. Die Darstellung des Risikos einer Rente auf den Invaliditätsfall bei kontinuierlicher Prämienberechnung. (Assekuranzjahrbuch; 36. Band, Wien, 1915.)

3. Zur Theorie des ferneren Risikos einer Invaliditätsrente. (Sonderabdruck aus dem 41. Jahrgange der Österreichischen Revue; Wien, 1916.)
4. Die Darstellung des ferneren Risikos einer lebenslänglichen Invaliditätsrente. (Der Versicherungsfreund und Volkswirtschaftliche Post; Wien, Nr. 1/2, 1917.)
5. Das mittlere fernere Risiko der Lebensversicherungen bei Berücksichtigung der Rückkäufe. (Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift; Uppsala, 1917.)
6. Die Berechnung des Risikos der Invaliditätsrenten. (Archief voor de Verzekeringswetenschap, Deel XVII, Afl. 4 und 5, *s*-Gravenhage 1919.)
7. Zum mathematischen Risiko der Brautaussteuerversicherungen. (Archief voor de Verzekeringswetenschap, infolge des Krieges noch nicht erschienen.)
8. Zur Darstellung der Wahrscheinlichkeit der Abweichungen eines vermöge Beobachtungen dargestellten Erwartungswertes. (Nyt Tidsskrift for Mathematik, Kopenhagen 1919.)
9. Bemerkungen zur Darstellung des mathematischen Risikos der Witwenpension bei Berücksichtigung der Aktivität und Invalidität des Ehegatten. (Infolge der widrigen Verhältnisse ist über die Veröffentlichung im Archief voor de Verzekeringswetenschap noch nicht entschieden.)

# Erstes Kapitel.

## Das Risiko des einzelnen Vertrages.

### A. Mittlerer Gewinn oder Verlust oder durchschnittliches Risiko.

Zwei Personen spielen ein Spiel von begrenzter Dauer, welches in gleiche Abschnitte geteilt ist.

Es stelle $C_k$ den gegenwärtigen Wert des Preises vor, welchen der Spieler vom Spielhalter empfängt, wenn das zum Gegenstande des Abkommens gemachte Ereignis im $k^{\text{ten}}$ Spielabschnitte stattfinden sollte. Fernerhin bezeichne $E_k$ den gegenwärtigen Wert der bis zum Ablaufe des $k^{\text{ten}}$ Spielabschnittes vertragsmässig zu leistenden Einzahlungen, welche mit Zinsen und Zinseszinsen anzusammeln sind.

Sodann beträgt die mathematische Gewinnerwartung des Spielers

$$H_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} \, C_k, \tag{1}$$

während sich die mathematische Gewinnerwartung des Spielhalters auf

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} \, E_k + \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} \, E_k \tag{2}$$

belaufen kann.

In diesen Ausdrücken bezeichnet $p_{k-1}^{(1)}$ die Wahrscheinlichkeit des Spielers, dass das gewinnbringende

Ereignis im $k^{\text{ten}}$ Abschnitte der Spieldauer eintritt; und $p_{k-1}^{(2)}$ die Wahrscheinlichkeit des Spielers, dass infolge von andern verlustbringenden Ereignissen, welche das erste Ereignis ausschliessen, das Spiel im $k^{\text{ten}}$ Abschnitte aufhört, ohne dass von seiten des Spielhalters eine Leistung zu erfolgen hat.

Damit dieser Vertrag einer gerechten Wette gleichkomme, müssen die Bedingungen erfüllt werden

$$\sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} = 1$$

und

$$H_0^{(1)} = H_0^{(2)}.$$

Daraus folgt

$$R_0^{(0)} = H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} E_k = 0. \tag{3}$$

Indem man die Vereinfachung einführt

$$p_{k-1}^{(1)} + p_{k-1}^{(2)} = p_{k-1}^{(1)+(2)},$$

lässt sich die mathematische Erwartung des Versicherungsinstituts auch in der Form schreiben

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} E_k. \tag{2^a}$$

Bei Aufgaben der Praxis wird es sich vorwiegend um einen alljährlich zu entrichtenden konstanten Beitrag $E_0$ handeln, welcher einer Jahresprämie gleichkommt.

Bezeichnet man ferner durch $p_k^{(3)}$ die Wahrscheinlichkeit des Spielers nach Ablauf von $k$ Spielabschnitten noch im anfänglichen Zustande zu beharren, ohne dass eine Entscheidung stattgefunden hat, so wird man die Verlusthoffnung des Spielers auch in der Form

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(3)} v^{k-1} E_0 \tag{4}$$

darstellen können.

Um nun den Zusammenhang zwischen $E_0$ und $E_k$ festzustellen, erinnere man sich, dass stets ist (Landré):

$$p_{k-1}^{(3)} = \sum_{k=k}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} .$$

Setzt man nun diesen Wert in (4) ein, so ergibt sich

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} \left( \sum_{k=k}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} \right) v^{k-1} E_0$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} \frac{1 - v^k}{1 - v} \, . \, E_0 ,$$

daher findet man durch einen Vergleich mit der Formel ($2^a$)

$$\frac{1-v^k}{1-v} E_0 = E_k ,$$

also

$$E_0 = E_k \frac{1-v}{1-v^k} .$$

Aus der Gleichung $H_0^{(1)} = H_0^{(2)}$ folgt dann weiter

$$E_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} C_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(3)} v^{k-1}} .$$

Würde man die Verlusthoffnung des Spielers in der Form schreiben

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} v^k B_k ,$$

so ergäbe sich

$$\frac{1-v^k}{1-v} E_0 = v^k B_k ,$$

also

$$B_k = E_0 \frac{1-v^k}{v^k (1-v)} = E_0 \frac{r (r^k - 1)}{r-1} .$$

Bei dem hier betrachteten Spiele wird als mathematische Dauer derjenige Wert $m$ von $k$ bezeichnet, für welchen ist

$$C_{m+1} - E_{m+1} < 0$$

und

$$C_m - E_m > 0 .$$

Man kann daher näherungsweise annehmen

$$C_m - E_m = 0\,.$$

In der auf diese Weise entstehenden Gleichung

$$E_m = C_m$$

hat man zu setzen

$$E_m = E_0 \frac{1 - v^m}{1 - v}$$

oder

$$E_m = \mathfrak{D}_n + E_0 \frac{1 - v^m}{1 - v}\,,$$

sofern beim Ausgangspunkte der Betrachtung bereits das Deckungskapital $\mathfrak{D}_n$ als vorhanden angenommen wird (vgl. Bohlmann „Lebensversicherungsmathematik in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften").

Ähnlich den für die einfachen Vertragsarten geltenden Leitsätzen verstehen wir nun unter dem Ausdrucke

$$R_0^{(1)} = \left[\sum_{k=1}^{k=m} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - \sum_{k=1}^{k=m} p_{k-1}^{(2)} E_k\right]$$

den mittleren Verlust des Unternehmers und unter

$$R_0^{(2)} = -\left[\sum_{k=m+1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - \sum_{k=m+1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(1)} E_k\right]$$

den mittleren Verlust des Spielers.

Diese beiden Gebilde lassen sich durch eine einfache Überlegung darstellen. Solange ist $C_k > E_k$, erleidet der Spielhalter einen Verlust. Die reine Verlusthoffnung des Unternehmers beträgt hiernach innerhalb der mathematischen Dauer

$$A_0 = \sum_{k=1}^{k=m} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) .$$

Für den Verlauf der mathematischen Dauer besteht aber für den Spielhalter auch die absolute Gewinnhoffnung

$$B_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=m} p_{k-1}^{(2)} E_k ,$$

daher stellt $R_0^{(1)} = A_0 - B_0^{(1)}$ seine mittlere Verlusthoffnung dar.

Nach Ablauf der mathematischen Dauer kann der Unternehmer nur noch gewinnen, während der Spieler dementsprechend ausschliesslich verlieren würde. Die Verlusthoffnung des letzteren besteht aus den beiden Teil-Verlusthoffnungen

$$B_0^{(2)} = \sum_{k=m+1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (E_k - C_k)$$

und

$$B_0^{(3)} = \sum_{k=m+1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} E_k ,$$

mithin ist auch

$$R_0^{(2)} = B_0^{(2)} + B_0^{(3)} .$$

Als ein Kennzeichen für die Richtigkeit unserer Darstellungen ist die Erfüllung der Gleichung

$$R_0^{(1)} - R_0^{(2)} = R_0^{(0)} = 0$$

anzusehen, die auch in der Tat besteht.

Der mittlere Gewinn oder Verlust ist aber auch gleich dem durchschnittlichen Risiko, welches durch die Formel definiert wird

$$R_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} \left| p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - p_{k-1}^{(2)} E_k \right| .$$

Da nämlich die Umformungen vorgenommen werden können

$$\sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} \left| p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - p_{k-1}^{(2)} E_k \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} \left| p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - p_{k-1}^{(2)} E_k \right|$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=l_{1/2}} \left| p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - p_{k-1}^{(2)} E_k \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} \left[ p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - p_{k-1}^{(2)} E_k \right]$$

$$-\sum_{k=m+1}^{k=l_{1/2}} \left[p_{k-1}^{(1)}\left(C_k - E_k\right) - p_{k-1}^{(2)} E_k\right],$$

so findet man

$$2\, R_0 = R_0^{(1)} + R_1^{(2)} = 2\, R_0^{(1)} = 2\, R_0^{(2)}$$

woraus wiederum folgt

$$R_0^{(1)} = R_0^{(2)} = R_0 .$$

---

Wir wenden unsere Untersuchungen nunmehr an auf eine gegen Jahresprämie abgeschlossene Versicherung, bei welcher der Eintritt der mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|}p_x^{(1)}$, ${}_{1|}p_x^{(1)}$, ${}_{2|}p_x^{(1)}, \ldots,$ ${}_{l-1|}p_x^{(1)}$ zu erwartenden, sich einander ausschliessenden Ereignisse $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \ldots,$ $\mathfrak{E}_{l-1}$ die Auszahlung der Summen $S_{x+1}$, $S_{x+2}$, $S_{x+3}, \ldots,$ $S_{x+l}$ zur Folge hat.

Ist gemäss dieser Vorausschickungen

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, S_{x+k}$$

die einmalige Prämie dieser Versicherung und, in Übereinstimmung mit unseren früheren Erörterungen,

$$\mathfrak{a}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1}p_x^{(3)}\, v^{k-1}$$

der Barwert der zugehörigen Beharrungsrente, so ist

$$P_x = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathbf{a}_x}$$

die Jahresprämie dieser Versicherung.

Setzt man für die natürliche Prämie des $(x+k-1)$= Jährigen

$$p^{(1)}_{x+k-1}\, v\, S_{x+k} = \mathfrak{P}_{x+k-1}\,,$$

so kann man auch schreiben

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1}p^{(3)}_x\, v^{k-1}\, \mathfrak{P}_{x+k-1}\,.$$

Wendet man darauf auf den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdruck den Mittelwertsatz an

$$\sum_a^b \varphi(x)\,\psi(x) = \psi\,[a + \theta\,(b-a)] \sum_a^b \varphi(x)\,,$$

so folgt

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{P}_{x+\delta}\, \mathbf{a}_x\,,$$

und hieraus

$$\mathfrak{P}_{x+\delta} = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathbf{a}_x}\,.$$

Hiernach ist die Jahresprämie auch gleich der durchschnittlichen natürlichen Prämie. Diese Eigenschaft aber fördert das Verständnis für die Jahresprämie in zweckdienlichster Weise.

Da für eine Versicherung der geschilderten Art die reine Verlusthoffnung durch die Gleichung

$${}_xH^{(1)}_0 = \mathfrak{A}_x$$

gegeben ist, so stellt der Ausdruck

$$ {}_xH_0^{(2)} = P_x \left( \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} \frac{1-v^k}{1-v} + {}_lp_x^{(3)} \frac{1-v^l}{1-v} \right) $$

die reine Gewinnhoffnung des Instituts dar.

Dies geht zwar schon aus den früheren Untersuchungen hervor, doch wollen wir zunächst noch eine zweite Darstellung folgen lassen.

Da nach Voraussetzung ist

$$ \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} + {}_lp_x^{(3)} = 1 \, , $$

so lässt sich der vorstehende Ausdruck umformen in

$$ {}_xH_0^{(2)} = \frac{P_x}{1-v} \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} v^k + {}_lp_x^{(3)} v^l \right) \right] . $$

Beachtet man nun, dass man nach Wittstein setzen kann

$$ {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} = {}_{k-1}p_x^{(3)} - {}_kp_x^{(3)} \, , $$

dann erhält man

$$ {}_xH_0^{(2)} = \frac{P_x}{1-v} \left[ 1 - \left( \sum_{k=1}^{k=l} ({}_{k-1}p_x^{(3)} - {}_kp_x^{(3)}) \, v^k + {}_lp_x^{(3)} v^l \right) \right] $$

$$ = \frac{P_x}{1-v} \left[ 1 - \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(3)} v^k + \sum_{k=1}^{k=l-1} {}_kp_x^{(3)} v^k \right] . $$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(3)}\, v^{k-1} = \mathrm{a}_x\,,$$

folglich

$$\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(3)}\, v^{k} = v\, \mathrm{a}_x\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k}p_x^{(3)}\, v^{k} = \mathrm{a}_x - 1\,.$$

Es ergibt sich sohin

$${}_xH_0^{(2)} = \frac{P_x}{1-v}\,[1 - v\,\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_x - 1]$$

$$= P_x\,\mathrm{a}_x\,.$$

Führt man in dieses Ergebnis den Wert von $P_x$ ein, so findet man die Bedingung

$${}_xH_0^{(2)} = \mathfrak{A}_x = {}_xH_0^{(1)}$$

bestätigt.

Die Jahresprämie $P_x$ als unbekannt annehmend, kann man dieselbe, wie Landré gezeigt hat, auch aus der Gewinn- und Verlustgleichung

$${}_xR_0^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left(v^k\, S_{x+k} - P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, P_x\,\frac{1-v^k}{1-v} - {}_lp_x^{(3)}\, P_x\,\frac{1-v^l}{1-v} = 0$$

ermitteln. Durch einfache Umformungen bekommt man aus der letzteren mit Berücksichtigung der Formel

$$\mathfrak{a}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} \frac{1-v^k}{1-v} + {}_{l}p_x^{(3)} \frac{1-v^l}{1-v}$$

den bekannten Ausdruck

$$P_x = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{a}_x}.$$

Da die mathematische Dauer dieser Versicherung durch die Gleichung gegeben ist

$$P_x \frac{r(r^m-1)}{r-1} \backsim S_{x+m},$$

so kann man sogleich folgern, dass der mittlere Verlust des Versicherungsinstituts beträgt

$$ {}_xR_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=m} {}_{k-1|}p_x^{(1)} v^k S_{x+k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=m} \left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right) v^k P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}, \quad \text{(I)}$$

während der mittlere Gewinn desselben sich beläuft auf

$${}_xR_0^{(2)} = \sum_{k=m+1}^{k=l} \left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right) v^k P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1} +$$

$$+ {}_{l}p_x^{(3)} v^l P_x \frac{r(r^l-1)}{r-1} - \sum_{k=m+1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} v^k S_{x+k}. \quad \text{(II)}$$

Die Formeln (I) und (II) lassen sich durch einunddenselben Wert ausdrücken. Setzt man in (I)

$$\alpha) \qquad \sum_{k=1}^{k=m} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, S_{x+k} = \mathfrak{A}_x - {}_m p_x^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{A}_{x+m}$$

$$\beta) \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right) \frac{1-v^k}{1-v} =$$

$$= \mathfrak{a}_x - {}_m p_x^{(3)}\, v^m \left(\mathfrak{a}_{x+m} + \frac{r\,(r^m-1)}{r-1}\right),$$

so erhält man

$$ {}_xR_0^{(1)} = \mathfrak{A}_x - {}_m p_x^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{A}_{x+m} -$$

$$- P_x \left[\mathfrak{a}_x - {}_m p_x^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{a}_{x+m} - {}_m p_x^{(3)} \frac{1-v^m}{1-v}\right]$$

$$= \mathfrak{A}_x - P_x\, \mathfrak{a}_x + {}_m p_x^{(3)}\, v^m \left[P_x \frac{r\,(r^m-1)}{r-1} - \right.$$

$$\left. - (\mathfrak{A}_{x+m} - P_x\, \mathfrak{a}_{x+m})\right].$$

Es ist aber

$$\mathfrak{A}_x - P_x\, \mathfrak{a}_x = {}_xV_0 = 0\,,$$

$$P_x \frac{r\,(r^m-1)}{r-1} \backsim S_{x+m}\,,$$

$$\mathfrak{A}_{x+m} - P_x\, \mathfrak{a}_{x+m} = {}_xV_m\,,$$

folglich ergibt sich

$$ {}_xR_0^{(1)} = {}_m p_x^{(3)}\, v^m \left(S_{x+m} - {}_xV_m\right). \qquad \text{(III)}$$

In der Formel (II) setze man

$$\alpha)\qquad \sum_{k=m+1}^{k=l}\left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right)\frac{1-v^k}{1-v} =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{k=l}\left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right)\frac{1-v^m+v^m(1-v^{k-m})}{1-v} +$$

$$+ {}_lp_x^{(3)}\frac{1-v^l}{1-v}$$

$$= \sum_{k=m+1}^{k=l}\left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right)\frac{1-v^m}{1-v} +$$

$$+ v^m\sum_{k=m+1}^{k=l}\left({}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)}\right)\frac{1-v^{k-m}}{1-v} + {}_lp_x^{(3)}\frac{1-v^l}{1-v}$$

$$= \left({}_mp_x^{(3)} - {}_lp_x^{(3)}\right)\frac{1-v^m}{1-v} +$$

$$+ {}_mp_x^{(3)}\, v^m\left(\mathrm{a}_{x+m} - {}_{l-m}p_{x+m}^{(3)}\frac{1-v^{l-m}}{1-v}\right) + {}_lp_x^{(3)}\frac{1-v^l}{1-v}.$$

$$= {}_mp_x^{(3)}\frac{1-v^m}{1-v} + {}_mp_x^{(3)}\, v^m\,\mathrm{a}_{x+m} - {}_lp_x^{(3)}\frac{1-v^m}{1-v} -$$

$$- {}_lp_x^{(3)}\frac{v^m-v^l}{1-v} + {}_lp_x^{(3)}\frac{1-v^l}{1-v}$$

$$= {}_mp_x^{(3)}\, v^m\left(\frac{r(r^m-1)}{r-1} + \mathrm{a}_{x+m}\right),$$

$$\beta)\qquad \sum_{k=m+1}^{k=l} {}_{k-1}p_x^{(1)}\, v^k\, S_{x+k} = {}_mp_x^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{A}_{x+m}.$$

Es folgt sodann ebenfalls

$$ {}_xR_0^{(2)} = P_x\, {}_mp_x^{(3)}\, v^m \left(\frac{r(r^m - 1)}{r-1} + \mathfrak{a}_{x+m}\right) - {}_mp_x^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{A}_{x+m} $$

$$ = {}_mp_x^{(3)}\, v^m \left[P_x \frac{r(r^m - 1)}{r-1} - (\mathfrak{A}_{x+m} - P_x\, \mathfrak{a}_{x+m})\right] $$

$$ = {}_mp_x^{(3)}\, v^m\, (S_{x+m} - {}_xV_m)\,. \tag{III} $$

Wie oben nachgewiesen wurde, ist dieser Wert aber auch gleich

$$ {}_xR_0 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{k=l} v^k \left|\, {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left(S_{x+k} - P_x \frac{r(r^k - 1)}{r-1}\right) - \right.\right. $$

$$ \left.\left. - {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, P_x \frac{r(r^k - 1)}{r-1} \right| + {}_lp_x^{(3)}\, v^l\, P_x \frac{r(r^l - 1)}{r-1}\right\}. \tag{IV} $$

Besteht eine Versicherung bereits mehrere Jahre, so kann man über die Bemessung der mathematischen Dauer verschiedener Ansicht sein. Das Richtigste ist es wohl, nach Bohlmann den Begriff der „kritischen Dauer" des weiteren Versicherungsverlaufes einzuführen und sonach die neue mathematische Dauer $m$ durch die Gleichung

$$ {}_xV_n\, r^m + P_x \frac{r(r^m - 1)}{r-1} \backsim S_{x+n+m} $$

zu erklären. Geschieht dies, so beträgt die Verlusterwartung des Versicherungsinstitutes

$$ {}_xR_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=m+1} {}_{k-1}p_{x+m}^{(1)}\, v^k\, S_{x+n+k} - $$

$$-\sum_{k=1}^{k=m}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\right)\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right), \quad \text{(V)}$$

während die Gewinnerwartung den Wert hat

$${}_xR^{(2)}_n=\sum_{k=m+1}^{k=l-m}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\right)\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)+$$

$$+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)-$$

$$-\sum_{k=m+1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\,v^k\,S_{x+n+k}\,. \quad \text{(VI)}$$

Das beiden Erwartungen gleiche durchschnittliche Risiko wird sodann nach der Formel berechnet

$${}_xR_n=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{k=l-n}\left|{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\,v^k\,S_{x+n+k}-\right.\right.$$

$$\left.-\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\right)\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)\right|+$$

$$\left.+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)\right\}. \quad \text{(VII)}$$

Mit Berücksichtigung der Formel

$$\sum_{k=1}^{k=m}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\right)=1-{}_mp^{(3)}_{x+n}$$

folgt aus (V)

$$
\begin{aligned}
{}_xR_n^{(1)} &= \mathfrak{A}_{x+n} - {}_mp_{x+n}^{(3)} v^m \mathfrak{A}_{x+n+m} - \left(1 - {}_mp_{x+n}^{(3)}\right) {}_xV_n - \\
&\quad - P_x \left[\mathsf{a}_{x+n} - {}_mp_{x+n}^{(3)} v^m \left(\mathsf{a}_{x+n+m} + \frac{r(r^m - 1)}{r-1}\right)\right] \\
&= \left[\left(\mathfrak{A}_{x+n} - P_x \mathsf{a}_{x+n}\right) - {}_xV_n\right] + \\
&\quad + {}_mp_{x+n}^{(3)} v^m \left[{}_xV_n r^m + P_x \frac{r(r^m - 1)}{r-1} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\mathfrak{A}_{x+n+m} - P_x \mathsf{a}_{x+n+m}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Es ist aber

$$\mathfrak{A}_{x+n} - P_x \mathsf{a}_{x+n} = {}_xV_n$$

$${}_xV_n r^m + P_x \frac{r(r^m - 1)}{r-1} \backsim S_{x+n+m}$$

$$\mathfrak{A}_{x+n+m} - P_x \mathsf{a}_{x+n+m} = {}_xV_{n+m},$$

mithin ergibt sich

$${}_xR_n^{(1)} = {}_mp_{x+n}^{(3)} v^m \left(S_{x+n+m} - {}_xV_{n+m}\right). \qquad \text{(VIII)}$$

Denselben Wert findet man aber auch aus (VI) mit Berücksichtigung der Beziehung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{k=l-n} \left({}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} + {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)}\right) + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} = \\
&= \left({}_mp_{x+n}^{(3)} - {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\right) + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} = {}_mp_{x+n}^{(3)},
\end{aligned}
$$

deren Anwendung zu der Darstellung führt

$$
{}_xR_n^{(2)} = {}_m p_{x+n}^{(3)}\, v^m\, P_x \left[ \mathfrak{a}_{x+n+m} + \frac{r\,(r^m - 1)}{r-1} \right] +
$$

$$
+ {}_m p_{x+n}^{(3)}\, v^m \left( {}_x V_n\, r^m \right) - {}_m p_{x+n}^{(3)}\, v^m\, \mathfrak{A}_{x+n+m}
$$

$$
= {}_m p_{x+n}^{(3)}\, v^m \left[ \left( {}_x V_n\, r^m + P_x \frac{r\,(r^m - 1)}{r-1} \right) - \right.
$$

$$
\left. - \left( \mathfrak{A}_{x+n+m} - P_x\, \mathfrak{a}_{x+n+m} \right) \right]
$$

$$
= {}_m p_{x+n}^{(3)}\, v^m \left( S_{x+n+m} - {}_x V_{n+m} \right). \qquad \text{(VIII)}
$$

*Anmerkung 1:* Ist auch von dem Eintreffen der einander ausschliessenden Ereignisse $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots$, welche mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|}p_x^{(2)}$, ${}_{1|}p_x^{(2)}$, ${}_{2|}p_x^{(2)}, \ldots$ zu erwarten sind, die Auszahlung der Summen $S_{x+1}^{(2)}$, $S_{x+2}^{(2)}$, $S_{x+3}^{(2)}, \ldots$ abhängig, so hat die einmalige Prämie der Versicherung die Form

$$
\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, S_{x+k}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, S_{x+k}^{(2)}\,.
$$

Für eine Versicherung dieser Art gibt es keine mathematische Dauer, weil der Vertrag als eine aus den Teilversicherungen

$$
\mathfrak{A}_x^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, S_{x+k}^{(1)}
$$

und

$$
\mathfrak{A}_x^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, S_{x+k}^{(2)}
$$

zusammengesetzte Versicherung anzusehen ist.

Liegt eine Versicherung der beschriebenen Art vor, so muss man für jede Teilversicherung sowohl die mathematische Dauer, als auch den mittleren Verlust oder Gewinn gesondert ermitteln. Man findet hiernach für den mittleren Gewinn oder Verlust der ganzen Versicherung

$$
\begin{aligned}
{}_xR_0 = {}_{m_1}p_x^{(3)}\, v^{m_1}\left(S^{(1)}_{x+m_1} - {}_xV^{(1)}_{m_1}\right) + \\
+ {}_{m_2}p_x^{(3)}\, v^{m_2}\left(S^{(2)}_{x+m_2} - {}_xV^{(2)}_{m_2}\right). \qquad \text{(IX)}
\end{aligned}
$$

*Anmerkung 2:* Ersetzt man die Summen $S_{x+1}$, $S_{x+2}$, $S_{x+3}, \ldots$ durch die Rentenbarwerte $a^{(1)}_{x+1}$, $a^{(1)}_{x+2}$, $a^{(1)}_{x+3}, \ldots$, so geht die einmalige Prämie

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, S_{x+k}$$

über in

$$^{(1)|}a_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, a^{(1)}_{x+k},$$

und es handelt sich nunmehr um eine Versicherung, bei welcher das Eintreffen der einander ausschliessenden Ereignisse $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \ldots$, eine Rentenversicherung in Wirksamkeit ruft.

Um aber eine möglichst genaue Prämienberechnung ausführen zu können, hat man diesenfalls den Wahrscheinlichkeiten ${}_{k-1|}p_x^{(1)}$ und ${}_{k-1|}p_x^{(2)}$ eine erweiterte Bedeutung beizulegen.

Da nämlich die Ereignisse $\mathfrak{E}_k$ in Laufe des Jahres eintreten, der Rentengenuss jedoch erst mit Beginn des folgenden Jahres anheben soll, so muss man einerseits unter ${}_{k-1|}p_x^{(1)}$ die Wahrscheinlichkeit verstehen, im $k^{\text{ten}}$ Jahre rentengenussberechtigt zu werden und das Ende des Jahres als Rentenbezugsberechtigter zu erleben. Anderseits bedeutet dann ${}_{k-1|}p_x^{(2)}$ die Wahrscheinlichkeit, im $k^{\text{ten}}$ Jahre aus irgendwelchen Gründen auszuscheiden, ohne vorher Renten bezogen zu haben.

Bei Verträgen dieser Art könnte man nach Peek den Standpunkt vertreten, dass das aus der Rentengewährung erwachsende Risiko von vornherein in Anrechnung zu bringen ist. Peek berechnet nun den mittleren Verlust des Institutes einer derartigen Versicherung nach der Formel

$$\mathfrak{R}_x^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k \,{}_{m_k|}\mathfrak{a}_{x+k}\,, \tag{X}$$

wobei $m_k$ eine Funktion von $k$ ist, welche aus den Gleichungen

$$P_x \frac{1-v^k}{1-v} = v^k \frac{1-v^{m_k}}{1-v}$$

oder

$$P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1} = \frac{1-v^{m_k}}{1-v}$$

bestimmt werden kann.

Die Formel (X) ergibt sich durch Umformung aus dem Ansatze

$$\mathfrak{R}_x^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \sum_{k_1=m_k+1} {}_{k_1-1|}q'_{x+k} \left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v} - P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \Bigg[\Bigg(\mathfrak{a}_{x+k}^{(1)} - \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}} +$$

$$+ {}_{m_k}p'_{x+k} \frac{1-v^{m_k}}{1-v}\Bigg) - {}_{m_k}p'_{x+k}\, P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\Bigg]$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, {}_{m_k|}\mathrm{a}_{x+k}^{(1)}\,. \tag{X}$$

Um sich von der Zulässigkeit der Formel (X) zu vergewissern, hat man die entsprechende Gewinnerwartung des Institutes darzustellen, welche offenbar durch den Ausdruck gegeben ist

$$\mathfrak{R}_x^{(2)}=\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1}p_x^{(1)}\, v^k \left[\sum_{k_1=1}^{k_1=m_k} {}_{k_1-1|}q'_{x+k}\left(P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}-\frac{1-v^{k_1}}{1-v}\right)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}+{}_lp_x^{(3)}\, v^l\, P_x\frac{r(r^l-1)}{r-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \Bigg[(1-{}_{m_k}p'_{x+k})\, P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}-$$

$$-\left(\mathrm{a}_{x+k\,\overline{m_k}}^{(1)}-{}_{m_k}p'_{x+k}\frac{1-v^{m_k}}{1-v}\right)\Bigg]$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}+{}_lp_x^{(3)}\, v^l\, P_x\frac{r(r^l-1)}{r-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\left(P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}-\mathrm{a}_{x+k\,\overline{m_k|}}^{(1)}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^k\, P_x\frac{r(r^k-1)}{r-1}+{}_lp_x^{(3)}\, v^l\, P_x\frac{r(r^l-1)}{r-1}$$

$$= P_x\, \mathrm{a}_x - \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, \mathrm{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}}$$

$$= {}^{(1)}|\mathrm{a}_x - \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, \mathrm{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, {}_{m_k|}\mathrm{a}^{(1)}_{x+k}\,. \tag{X}$$

Es ist also

$$\mathfrak{R}_x^{(1)} = \mathfrak{R}_x^{(2)}\,.$$

Indessen kann man aber auch von der schon eingangs dieser Anmerkung erwähnten Ansicht ausgehen, dass durch Eintritt eines der Ereignisse $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2, \ldots$ die Hauptversicherung erlischt und der Versicherte die Mittel zur Erwerbung der Anwartschaft auf die in Aussicht genommene Rente erhält. Sodann erübrigt es sich, das von dem späteren Ableben abhängige Risiko in Erwägung zu ziehen, zumal ja nach Eintritt eines der Ereignisse $\mathfrak{E}_k$ die Versicherung einem anderen Verwaltungsbereiche überwiesen wird. Der mittlere Gewinn oder Verlust wäre also in Übereinstimmung mit den Formeln (III) und (VIII) nach den Formeln zu berechnen

$$\left.\begin{aligned} {}_xR_0 &= {}_mp_x^{(3)}\, v^m\, (\mathrm{a}^{(1)}_{x+m} - {}_xV_m) \\ {}_xR_n &= {}_mp_{x+n}^{(3)}\, v^m\, (\mathrm{a}^{(1)}_{x+n+m} - {}_xV_{n+m})\,. \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

Will man dem aus der etwaigen künftigen Rentengewährung erwachsenden Risiko ausserdem noch Rechnung tragen, so kann man den mittleren Verlust oder Gewinn der künftigen Renten gesondert nach den Formeln

$$\mathfrak{R}'_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \sum_{k_1=m_k+1} {}_{k_1-1|}q'_{x+k} \left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v} - \mathrm{a}_{x+k}^{(1)}\right) \quad (1)$$

oder

$$\mathfrak{R}''_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \sum_{k_1=1}^{k_1=m_k} {}_{k_1-1|}q'_{x+k} \left(\mathrm{a}_{x+k}^{(1)} - \frac{1-v^{k_1}}{1-v}\right) \quad (2)$$

darstellen, wobei die mittlere Rentenbezugsdauer $m_k$ durch die Gleichung

$$\mathrm{a}_{x+k}^{(1)} = \frac{1-v^{m_k}}{1-v}$$

bestimmt wird.

Der Ausdruck (1) geht vermöge der Beziehung

$$\frac{1-v^{m_k+n}}{1-v} = \frac{1-v^{m_k}}{1-v} + v^{m_k}\,\frac{1-v^n}{1-v}$$

über in

$$\mathfrak{R}'_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \left({}_{m_k}p'_{x+k}\,\frac{1-v^{m_k}}{1-v} + {}_{m_k|}\mathrm{a}_x^{(1)} - \right.$$

$$\left. - {}_{m_k}p'_{x+k}\,\mathrm{a}_{x+k}^{(1)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, {}_{m_k|}\mathrm{a}_{x+k}^{(1)} . \quad \text{(XII)}$$

Aus (2) folgt aber ebenfalls

$$\mathfrak{R}''_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \left[ (1 - {}_{m_k}p'_{x+k})\, \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k} - \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}} + \right.$$

$$\left. + {}_{m_k}p'_{x+k} \frac{1 - v^{m_k}}{1 - v} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \left( \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k} - \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k \;{}_{m_k|}\mathfrak{a}^{(1)}_{x+k}\,. \qquad \text{(XII)}$$

Wegen der Beziehung

$$_{m_k|}\mathfrak{a}^{(1)}_{x+k} = \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k} - \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}}$$

kann man aber dem mittleren Gewinn oder Verlust aus der künftigen Rentengewährung auch die Form geben

$$\mathfrak{R}_x = {}^{(1)}|\mathfrak{a}_x - \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k\, \mathfrak{a}^{(1)}_{x+k\,\overline{m_k|}}\,.$$

## B. Mittleres Risiko.

Die Untersuchungen des vorigen Abschnittes führen zu der Erkenntnis, dass dem durchschnittlichen Risiko der ferneren Dauer zufolge der mit der Praxis nicht im Einklang stehenden Bewertung der von Jahr zu Jahr in Anrechnung zu bringenden Deckungsmittel nur eine geringe praktische Bedeutung beizumessen ist. Da man bei der Berechnung des ferneren mittleren Risikos, wie es Bremicker und Wittstein einst dargestellt haben, von denselben Voraussetzungen ausgeht, so scheint es, als wenn man dieser Risikoart auch nur einen wissenschaftlichen Wert zuerkennen darf. In dieser Anschauung wird man übrigens bestärkt durch die Ausführungen in Professor Landrés „Mathematisch-Technischen Kapiteln zur Lebensversicherung" am Ende des Abschnittes „Prämie und Reserve, abgeleitet aus dem Barwerte des Gewinnes". Lässt man sich aber durch diese äusserlichen Eigenschaften des ferneren Risikos nicht beirren, so wird man bald einen andern Standpunkt zur Methode einnehmen. Durch eingehende Untersuchungen gelingt es, einige Eigenschaften des ferneren Risikos aufzudecken, die seine Brauchbarkeit und Anwendungsfähigkeit ausser jeden Zweifel stellen. Da das mittlere Risiko verwickelter Versicherungsformen bisher auch nur vereinzelt besprochen wurde, so verlohnt sich ein allgemein gehaltener Versuch einer begründenden Darstellung auch noch aus diesem Grunde.

Wie vordem betrage die mit der einmaligen Prämie übereinstimmende absolute Gewinnerwartung des Spielers

$$H_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} C_k,$$

während auch hier der Ausdruck

$$H_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} E_k$$

die absolute Gewinnerwartung des Unternehmers darstelle.

Ein durch die vorstehenden Gewinn- und Verlusthoffnungen beschriebener Vertrag ist, wie wir sahen, als ein gerechter anzusehen, wenn die Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} = 1$$

$$R_0^{(0)} = H_0^{(1)} - H_0^{(2)} = 0$$

erfüllt werden. Die letztere derselben können wir in den Formen schreiben

$$\left.\begin{aligned} R_0^{(0)} &= \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) - \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} E_k = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) + \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} (-E_k) = 0 \end{aligned}\right\}. \quad \text{(I)}$$

Quadrieren wir darauf die Beträge $(C_k - E_k)$ und $(-E_k)$, so verstehen wir unter dem Ausdrucke

$$M_0^2 = \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k)^2 + \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} (E_k)^2 \quad \text{(II)}$$

das Quadrat des mittleren Risikos. Dasselbe hat beispielsweise die Eigenschaft, in bezug auf die absolute Gewinnhoffnung ein Minimum zu sein; denn man erhält aus den ersten Differentialquotienten

$$\sum_{k=1}^{k=l_2} \frac{\delta M_0^2}{\delta E_k} = -2 \sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} (C_k - E_k) + 2 \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)} E_k = 0,$$

also

$$\sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} C_k = \sum_{k=1}^{k=l_{1/2}} p_{k-1}^{(1)+(2)} E_k,$$

während aus der Summe der zweiten Differentialquotienten folgt

$$\sum_{k=1}^{k=l_2} \frac{\delta^2 M_0}{\delta E_k^2} = 2\left(\sum_{k=1}^{k=l_1} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l_2} p_{k-1}^{(2)}\right) = 2\,,$$

also

$$\sum_{k=1}^{k=l_2} \frac{\delta^2 M_0^2}{\delta (E_k)^2} > 0\,.$$

Diese Art der Minimumbestimmung scheint gegen die übliche zu verstossen, doch vergegenwärtige man sich, dass man die absoluten Erwartungen zum Zwecke der Risikoberechnung in ihre Bestandteile aufzulösen hat und daher nur das Extremum bestimmen kann, indem man jede der beiden Erwartungen als Funktion ihrer Teilerwartungen betrachtet.

Handelt es sich wieder um eine Versicherung, deren einmalige Prämie den Wert hat

$$\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^k S_{x+k}\,,$$

und welche gegen die Jahresprämie

$$P_x = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathrm{a}_x}$$

$$\left(\mathrm{a}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} \frac{1-v^k}{1-v} + {}_l p_x^{(3)} \frac{1-v^l}{1-v}\right)$$

abgeschlossen ist, so findet man für das Risikoquadrat den Ausdruck

$$
{}_xM_0^2 = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)}\, v^{2k} \left(S_{x+k} - P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\right)^2 +
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)}\, v^{2k} \left(P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\right)^2 +
$$

$$
+ {}_lp_x^{(3)}\, v^{2l} \left(P_x \frac{r(r^l-1)}{r-1}\right)^2. \qquad \text{(III)}
$$

Hiernach hat Küttner das Risiko der einfachen temporären Todesfallversicherungen, welche allgemein unter dem Namen „Risikoversicherungen" bekannt sind, in richtiger Weise behandelt, während die allgemeine Erklärung für das Risiko dieser Versicherungsarten in der Broggischen „Versicherungsmathematik" als unzutreffend bezeichnet werden muss. Vor diesem nur beiläufig erwähnten Irrtume bewahren übrigens auch die vortrefflichen Ausführungen in der Czuberschen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der Ausdruck (III) lässt sich auf eine einfachere, für die numerische Berechnung geeignetere Form bringen.

Setzt man nämlich

$$
v^{2k} \left(S_{x+k} - P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\right)^2 =
$$

$$
= \left[v^{2k} S_{x+k}^2 - \frac{P_x}{1-v} S_{x+k}(v^k - v^{2k}) + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 (1 - 2v^k + v^{2k})\right],
$$

$$
v^{2k} \left(P_x \frac{r(r^k-1)}{r-1}\right)^2 = \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 [1 - 2v^k + v^{2k}],
$$

so erhält man

$$
{}_xM_0^2 = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} (v^k S_{x+k})^2 - 2 \frac{P_x}{1-v} \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} (v^k S_{x+k}) +
$$

$$
+ 2 \frac{P_x}{1-v} \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} v^k (v^k S_{x+k})
$$

$$
+ \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(2)} + {}_lp_x^{(3)}\right]
$$

$$
- 2 \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} v^k + {}_lp_x^{(3)} v^l\right]
$$

$$
+ \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} v^{2k} + {}_lp_x^{(3)} v^{2l}\right].
$$

Führt man darauf die abkürzenden Bezeichnungen ein

$$
\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} (v^k S_{x+k})^2 = \mathfrak{A}_x^{(2)},
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)} v^k (v^k S_{x+k}) = \mathfrak{A}_x^{(1)},
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)} (v^k S_{x+k}) = \mathfrak{A}_x = P_x \mathfrak{a}_x,
$$

$$\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1}p_x^{(1)+(2)}\, v^k + {}_l p_x^{(3)}\, v^l = A_x = 1 - (1 - v)\,\mathrm{a}_x\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_x^{(1)+(2)}\, v^{2k} + {}_l p_x^{(3)}\, v^{2l} = A_x^{(2)} = 1 - (1 - v^2)\,\mathrm{a}_x^{(2)}\,,$$

so ergibt sich des weitern

$${}_xM_0^2 = \mathfrak{A}_x^{(2)} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}_x^{(1)} + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 +$$

$$-2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}_x\, 2\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left(1 - (1-v)\,\mathrm{a}_x\right) + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 A_x^{(2)}.$$

Durch Vereinfachung und Zusammenfassung findet man hieraus die endgültige Formel

$${}_xM_0 = \sqrt{\mathfrak{A}_x^{(2)} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}_x^{(1)} - \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 (1 - A_x^{(2)})} \qquad \text{(IV)}$$

$$= \sqrt{\mathfrak{A}_x^{(2)} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}_x^{(1)} - \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 (1-v^2)\,\mathrm{a}_x^{(2)}}\,. \qquad \text{(IV}^{\text{a}}\text{)}$$

Fügt man zu dem Radikanden des Ausdruckes (IV) das Korrekturglied

$$(\mathfrak{A}_x - P_x\,\mathrm{a}_x)^2 = 0$$

hinzu, welches man umformen kann in

$$-(\mathfrak{A}_x)^2 + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[1 - (A_x)^2\right] - 2\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 A_x (1 - A_x) = 0$$

oder in

$$-(\mathfrak{A}_x)^2 - 2\frac{P_x}{1-v}\mathfrak{A}_x A_x + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[1-(A_x)^2\right],$$

so erhält man die Formel

$$_xM_0 = \sqrt{\left\{\left[\mathfrak{A}_x^{(2)} - (\mathfrak{A}_x)^2\right] + 2\frac{P_x}{1-v}\left(\mathfrak{A}_x^{(1)} - \mathfrak{A}_x A_x\right) + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left[A_x^{(2)} - (A_x)^2\right]\right\}}. \qquad (\mathrm{IV^b})$$

Diese besitzt, wie uns spätere Untersuchungen zeigen werden, die grösste Anwendungsfähigkeit.

Für den Fall, dass

$$S_{x+1} = S_{x+2} = S_{x+3} = \text{— — —} = S$$

ist, wird

$$\mathfrak{A}_x^{(2)} = S^2 \mathcal{A}_x^{(2)}$$

$$\mathfrak{A}_x^{(1)} = S\mathcal{A}_x^{(2)},$$

und man erhält aus (IV)

$$_xM_0^2 = \left(S^2 + \frac{2P_x S}{1-v}\right)\mathcal{A}_x^{(2)} - \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left(1 - A_x^{(2)}\right) \qquad (\mathrm{IV^c})$$

Wie noch bemerkt werde, lässt sich der Ausdruck (III) durch Anwendung des Kunstgriffes

$$v^k S_{x+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} = v^k\left(S_{x+k} + \frac{P_x}{1-v}\right) - \frac{P_x}{1-v}$$

auf die weniger brauchbare Form bringen

$$
{}_xM_0^2 = \left\{ \sum_{k=1}^{k=l} \left[ {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left( S_{x+k} + \frac{P_x}{1-v} \right)^2 + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 \right] v^{2k} + {}_{l}p_x^{(3)} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 v^{2l} \right\}
$$

$$
- \left\{ \sum_{k=1}^{k=l} \left[ {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left( S_{x+k} + \frac{P_x}{1-v} \right) + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \frac{P_x}{1-v} \right] v^k + {}_{l}p_x^{(3)} \frac{P_x}{1-v} v^l \right\}^2, \qquad \text{(V)}
$$

welche als die Hausdorffsche bezeichnet werden mag.

Weil aber ist

$$
\sum_{k=1}^{k=l} \left[ {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left( S_{x+k} + \frac{P_x}{1-v} \right) + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \frac{P_x}{1-v} \right] v^k +
$$

$$
+ {}_{l}p_x^{(3)} \frac{P_x}{1-v} v^l = \mathfrak{A}_x - P_x \mathfrak{a}_x + \frac{P_x}{1-v} = \frac{P_x}{1-v},
$$

so könnte man auch setzen

$$
{}_xM_0^2 = \left\{ \sum_{k=1}^{k=l} \left[ {}_{k-1|}p_x^{(1)} \left( S_{x+k} + \frac{P_x}{1-v} \right)^2 + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 \right] v^{2k} + {}_{l}p_x^{(3)} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 v^{2l} - \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 \right\}. \qquad \text{(V}^{\text{a}}\text{)}
$$

Im Falle die zur Auszahlung kommenden Summen einander gleich sind, geht die vorstehende Formel über in

$$ {}_xM_0^2 = \left(S+\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^{k=l} \left( {}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)^2 \right) v^{2k} + \right. \right. $$

$$ \left. + {}_lp_x^{(3)} \left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)^2 v^{2l} \right] $$

$$ - \left[ \sum_{k=1}^{k=l} \left( {}_{k-1|}p_x^{(1)} + {}_{k-1|}p_x^{(2)} \left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)\right) v^k + \right. $$

$$ \left. \left. + {}_lp_x^{(3)} \left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right) v^l \right]^2 \right\}. \qquad (\mathrm{V^b}) $$

Besteht die Versicherung bereits $n$ Jahre, so kann man bei der Bestimmung des mittleren Risikos von der Reserve ${}_xV_n$ ausgehen, welche zunächst in der einfachen Form erscheint

$$ {}_xV_n = \mathfrak{A}_{x+n} - P_x\, \mathfrak{a}_{x+n}\,. $$

Führt man nun in diese die bekannten Werte ein

$$ \mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^k\, S_{x+n+k} $$

$$ \mathfrak{a}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)} \frac{1-v^k}{1-v} + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\,, $$

so verwandelt sie sich in

$$ {}_xV_n = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) - $$

$$ - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} P_x \frac{1-v^k}{1-v} - {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} . $$

Aus dieser Formel geht nun die Null betragende Gewinn- und Verlustgleichung hervor

$$ {}_xR_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) + $$

$$ + \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left( - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) + $$

$$ + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \left( - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right) = 0 . \qquad \text{(VI)} $$

Zu dieser kommt man aber auch, sofern man als Gegenstück der absoluten Verlusthoffnung

$$ {}_xH_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^k S_{x+n+k} $$

den Ausdruck

$$ {}_xH_n^{(2)} = {}_xV_n + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)} P_x \frac{1-v^k}{1-v} + $$

$$ + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} $$

als die absolute Gewinnhoffnung hinstellt und die Bestimmung trifft, dass stets die Gleichung

$$ {}_{x}H_{n}^{(1)} = {}_{x}H_{n}^{(2)} $$

erfüllt werde, deren Umformung wiederum auf (VI) führt. Quadriert man die Beträge

$$ v^{k}\, S_{x+n+k} - {}_{x}V_{n} - P_{x} \frac{1-v^{k}}{1-v} $$

und

$$ - {}_{x}V_{n} - P_{x} \frac{1-v^{k}}{1-v}\,, $$

so erhält man das als mittleres Risikoquadrat zu bezeichnende Gebilde

$$ ({}_{x}M_{n})^{2} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^{k}\, S_{x+n+k} - {}_{x}V_{n} - P_{x} \frac{1-v^{k}}{1-v} \right)^{2} + $$

$$ + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left( {}_{x}V_{n} + P_{x} \frac{1-v^{k}}{1-v} \right)^{2} + $$

$$ + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \left( {}_{x}V_{n} + P_{x} \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^{2}. \qquad \text{(VII)} $$

Dasselbe hat die Eigenschaft in Bezug auf ${}_{x}V_{n}$ ein Minimum zu sein; denn aus

$$ \frac{d\,({}_{x}M_{n})^{2}}{d\,{}_{x}V_{n}} = -2 \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^{k}\, S_{x+n+k} - {}_{x}V_{n} - P_{x} \frac{1-v^{k}}{1-v} \right) $$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) +$$

$$+ 2\, {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right) = 0$$

folgt

$${}_xH^{(1)}_n - {}_xH^{(2)}_n = 0\,.$$

Differentiert man nochmals nach ${}_xV_n$, so ergibt sich

$$\frac{d^2\,({}_xM_n)^2}{d\,({}_xV_n)^2} =$$

$$= 2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \right) = 2\,,$$

also das Kriterium des Minimums

$$\frac{d^2\,({}_xM_n)^2}{d\,({}_xV_n)^2} > 0\,.$$

Ferner führe man die Bezeichnung ein

$${}_xV^{(k)}_n = v^k\, S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\,.$$

Man kann die Reserve dann auch in der Form schreiben:

$$
{}_xV_n = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, {}_xV^{(k)}_n +
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left({}_xV^{(k)}_n - v^k S_{x+n+k}\right) +
$$

$$
+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left({}_xV^{(l-n)}_n - v^{(l-n)} S_{x+l}\right).
$$

Berechnet man nun mit genauer Beobachtung der Zusammensetzung des vorstehenden Ausdruckes die mittlere Abweichung der Reserve ${}_xV_n$ von den Grössen ${}_xV^{(k)}_n$ und den Grössen ${}_xV^{(k)}_n - v^k S_{x+n+k}$, so findet man

$$
\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left({}_xV^{(k)}_n - {}_xV_n\right)^2 +
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left({}_xV^{(k)}_x - v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n\right)^2 +
$$

$$
+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left({}_xV^{(l-n)}_n - v^{l-n} S_{x+l} - {}_xV_n\right)^2, \qquad \text{(VIII)}
$$

und dieser Ausdruck ist wiederum nichts anderes als das mittlere Risiko der Versicherung nach $n$ jährigem Bestehen.

Diese Darstellung führt zu einer neuen Auffassung des Risikos und hat auch den Vorzug, den bereits mehrfach erwähnten Fehler, welcher bei der Bewertung der anzurechnenden Deckungsmittel begangen wird, weniger augenscheinlich zu machen.

Um den Ausdruck (VII) auf eine möglichst leicht anwendbare Form zu bringen, führe man die angedeutete Potenzierung mit 2 aus. Man bekommt so

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left[ (v^k S_{x+n+k})^2 - 2\, v^k S_{x+n+k} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{k+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} (v^k S_{x+n+k})^2 -$$

$$- 2 \left( {}_xV_n + \frac{P_x}{1-v} \right) \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^k S_{x+n+k} +$$

$$+ 2 \frac{P_x}{1-v} \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^{2k} S_{x+n+k} +$$

$$+ \left( {}_xV_n + \frac{P_x}{1-v} \right)^2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)+(2)}_{x+n} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \right) -$$

$$-2\,\frac{P_x}{1-v}\left({}_xV_n+\frac{P_x}{1-v}\right)\left(\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\,v^k+{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\,v^{l-n}\right)+$$

$$+\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\,v^{2k}+{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\,v^{2(l-n)}\right).$$

Setzt man nun, wie im vorhergehenden Falle

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\,(v^k\,S_{x+n+k})^2=\mathfrak{A}_{x+n}^{(2)},$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\,v^k\,(v^k\,S_{x+n+k})=\mathfrak{A}_{x+n}^{(1)},$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x-n}^{(1)}\,v^k\,S_{x+n+k}=\mathfrak{A}_{x+n},$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\,v^k+{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\,v^{l-n}=$$

$$=A_{x+n}=1-(1-v)\,\mathrm{a}_{x+n},$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\,v^{2k}+{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\,v^{2(l-n)}=$$

$$=A_{x+n}^{(2)}=1-(1-v^2)\,\mathrm{a}_{x+n}^{(2)},$$

so ergibt sich

$$({}_xM_n)^2 = \mathfrak{A}^{(2)}_{x+n} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} -$$

$$-2\left({}_xV_n + \frac{P_x}{1-v}\right)\left(\mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v}\,A_{x+n}\right) +$$

$$+\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 A^{(2)}_{x+n} + \left({}_xV_n + \frac{P_x}{1-v}\right)^2.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v}\,A_{x+n} = \mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v} - P_x\,\mathfrak{a}_{x+n} =$$

$$= {}_xV_n + \frac{P_x}{1-v},$$

daher erhält man die endgültige Formel

$$ {}_xM_n = \sqrt{\left[\mathfrak{A}^{(2)}_{x+n} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 A^{(2)}_{x+n} - \left({}_xV_n + \frac{P_x}{1-v}\right)^2\right]}, \qquad \text{(IX)}$$

die sich auch umformen lässt in

$$ {}_xM_n = \sqrt{\left[\mathfrak{A}^{(2)}_{x+n} + 2\,\frac{P_x}{1-v}\,\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} - \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 (1 - A^{(2)}_{x+n}) - {}_xV_n\left({}_xV_n + 2\,\frac{P_x}{1-v}\right)\right]}. \qquad \text{(IX}^{\text{a}}\text{)}$$

Will man aus der Formel (IX) die Reserve ${}_xV_n$ entfernen, so bilde man auf Grund der Formel

$$ {}_xV_n = \mathfrak{A}_{x+n} - P_x\, \mathrm{a}_{x+n} $$

die Beziehung

$$ \left({}_xV_n + \frac{P_x}{1-v}\right)^2 = \left(\mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v} A_{x+n}\right)^2 = (\mathfrak{A}_{x+n})^2 + $$
$$ + 2\frac{P_x}{1-v} \mathfrak{A}_{x+n} A_{x+n} + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 (A_{x+n})^2. $$

Führt man nun diese in den Ausdruck (IX) ein, so lässt sich der letztere umgestalten in

$$ {}_xM_n = \sqrt{\left[\left(\mathfrak{A}^{(2)}_{x+n} - (\mathfrak{A}_{x+n})^2\right) + 2\frac{P_x}{1-v}\left(\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} - \mathfrak{A}_{x+n} A_{x+n}\right) + \right.} $$
$$ \left. + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left(A^{(2)}_{x+n} - (A_{x+n})^2\right)\right]. \qquad \text{(IX}^b\text{)} $$

Diese Formel zeigt eine vollkommene Übereinstimmung mit jener einfacherer Versicherungsarten. Das erste Glied des Radikanden $\left(\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} - (\mathfrak{A}_{x+n})^2\right)$ stellt das Risiko bei einmaliger Prämie dar, während die beiden folgenden Glieder die durch die jährliche Prämienzahlung erwachsende Steigerung des Risikos ausdrücken.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass man zu derselben auch gelangen würde, sofern man von dem Ansatze ausgeht

$$ ({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left[(v^k S_{x+n+k} - \mathfrak{A}_{x+n}) + \right. $$
$$ \left. + P_x\left(\mathrm{a}_{x+n} - \frac{1-v^k}{1-v}\right)\right]^2 $$

$$+\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left[-\mathfrak{A}_{x+n}+P_x\left(\mathrm{a}_{x+n}-\frac{1-v^k}{1-v}\right)\right]^2+$$

$$+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left[-\mathfrak{A}_{x+n}+P_x\left(\mathrm{a}_{x+n}-\frac{1-v^k}{1-v}\right)\right]^2, \quad (\mathrm{VII^a})$$

welcher aus (VII) durch Auflösung der Reserve hervorgeht.

Da man aber auch setzen kann

$${}_xV_n=A_{x+n}-P_x\frac{1-A_{x+n}}{1-v}=\mathfrak{A}_{x+n}+$$

$$+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}-\frac{P_x}{1-v},$$

so folgt ferner

$$v^kS_{x+n+k}-{}_xV_n-P_x\frac{1-v^k}{1-v}=v^k\left(S_{x+n+k}+\frac{P_x}{1-v}\right)-$$

$$-\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}\right)$$

und

$${}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}=\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}\right)-v^k\frac{P_x}{1-v}.$$

Man erhält daher anderseits für das Quadrat des mittleren Risikos den Ausdruck

$$({}_xM_n)^2=\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left[v^k\left(S_{x+n+k}+\frac{P_x}{1-v}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}\right)\right]^2$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left[\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}\right)-\right.$$

$$\left.-v^k\frac{P_x}{1-v}\right]^2$$

$$(\mathrm{VII^b})$$

$$+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left[\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}A_{x+n}\right)-v^{l-n}\frac{P_x}{1-v}\right]^2.$$

Um diesem die Hausdorffsche Form zu geben, schreibe man ihn zunächst in der Form

$$({}_xM_n)^2=\left[\sum_{k=1}^{k=l-n}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(S_{x+n+k}+\frac{P_x}{1-v}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\right)v^{2k}+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2v^{2(l-n)}\right]$$

$$+\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}\right)^2-$$

$$-2\left(\mathfrak{A}_{x+n}+\frac{P_x}{1-v}\right)\left[\sum_{k=1}^{k=l-n}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(S_{x+n+k}+\frac{P_x}{1-v}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\frac{P_x}{1-v}\right)v^k+{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\frac{P_x}{1-v}v^{l-n}\right].$$

Beachtet man nun ferner, dass ist

$$\mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v} A_{x+n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} \left( {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( S_{x+n+k} + \frac{P_x}{1-v} \right) + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} \right) v^k +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} v^{l-n}$$

so erhält man die endgültige Formel

$$({}_xM_n)^2 = \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} \left( {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( S_{x+n+k} + \frac{P_x}{1-v} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 \right) v^{2k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( \frac{P_x}{1-v} \right)^2 v^{2(l-n)} \right]$$

$$- \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} \left( {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( S_{x+n+k} + \frac{P_x}{1-v} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} \right) v^k + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} v^{l-n} \right]^2, \quad \text{(X)}$$

in welcher man aber auch umgekehrt setzen könnte

$$\left\{ \sum_{k=1}^{k=l-n} \left( {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( S_{x+n+k} + \frac{P_x}{1-v} \right) + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} \right) v^k + \right.$$

$$\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \frac{P_x}{1-v} v^{l-n} \right\}^2 = \left( \mathfrak{A}_{x+n} + \frac{P_x}{1-v} A_{x+n} \right)^2.$$

Für den Fall

$$S_{x+n+1} = S_{x+n+2} = S_{x+n+3} = - - - - = S$$

verwandelt sich die Formel (IX) vermöge der Substitutionen

$$\mathfrak{A}^{(2)}_{x+n} = S^2 \mathcal{A}^{(2)}_{x+n}$$

$$\mathfrak{A}^{(1)}_{x+n} = S \mathcal{A}^{(2)}_{x+n}$$

in

$$ {}_xM_n = \sqrt{\left[\left(S^2 + \frac{S P_x}{1-v}\right) \mathcal{A}^{(2)}_{x+n} + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 A^{(2)}_{x+n} - \right.} $$

$$ \left. - \left({}_xV_n + \frac{P_x}{1-v}\right)^2\right], $$

während der Ausdruck (X) übergeht in

$$ {}_xM_n = \left(S + \frac{P_x}{1-v}\right) $$

$$ \sqrt{\left\{\left[\sum_{k=1}^{k=l-n}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)^2\right) v^{2k} + \right.\right.} $$

$$ \left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)^2 v^{2(l-n)}\right] $$

$$ - \left[\sum_{k=1}^{k=l-n}\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right)\right) v^k + \right. $$

$$ \left.\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(\frac{P_x}{S(1-v)+P_x}\right) v^{l-n}\right]^2\right\}. $$

*Anmerkung 1:* Werden auch auf das Eintreffen der einander ausschliessenden Ereignisse $\mathfrak{J}_i$ die Summen $S^{(2)}_{x+i}$ versichert, so beträgt die einmalige Prämie für den $x+n$-jährigen Versicherten

$$\mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^k\, S^{(1)}_{x+n+k} + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^k\, S^{(2)}_{x+n+k}.$$

Das mittlere Risiko nach $n$-jährigem Bestehen der Versicherung ist alsdann nach der Formel zu berechnen

$$\begin{aligned} {}_xM_n = \sqrt{\left\{ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( v^k S^{(1)}_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 + \right.} \\ + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( v^k S^{(2)}_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 \\ \left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^2 \right\}. \qquad \text{(XI)} \end{aligned}$$

Soll dem Versicherten bei Erreichung des Alters $x+l$ die Summe $S^{(3)}_{x+l}$ ausgezahlt werden, so beläuft sich die einmalige Prämie nach Verlauf von $n$ Jahren auf

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^k\, S^{(1)}_{x+n+k} + \\ + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^k\, S^{(2)}_{x+n+k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\, v^{l-n}\, S^{(3)}_{x+l}, \end{aligned}$$

und das mittlere Risiko wird daher durch die Formel dargestellt

$$
{}_xM_n = \sqrt{\left\{ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( v^k S^{(1)}_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 \right.}
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( v^k S^{(2)}_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2
$$

$$
\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( v^{l-n} S^{(3)}_{x+l} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^2 \right\}. \qquad \text{(XII)}
$$

*Anmerkung 2:* Werden in den Prämien

$$
\mathfrak{A}_x = \sum_{k=1}^{k=l} {}_{k-1|}p^{(1)}_x \, v^k \, S_{x+k},
$$

bzw.

$$
\mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \, v^k \, S_{x+n+k}
$$

an die Stelle der Summen $S_{x+m}$ die Barwerte lebenslänglicher Renten $\mathfrak{a}^{(1)}_{x+m}$ gesetzt und den vorkommenden Wahrscheinlichkeiten die im Abschnitte A, Anmerkung 2 erläuterten Eigenschaften beigelegt, so dass es sich also um unbestimmt aufgeschobene Rentenversicherungen handelt, deren Gewährung von dem Eintritte der Ereignisse $\mathfrak{E}_m$ abhängt, so kann man wiederum zwei Anschauungen vertreten.

Erstlich lässt sich der mit der Versicherungspraxis übereinstimmende Standpunkt einnehmen, dass das vornehmliche Risiko in der durch den Eintritt des Schadenfalles bedingten Zurückstellung der Reserven $\mathfrak{a}^{(1)}_{x+m}$ besteht.

Das mittlere Risiko wäre sodann in Übereinstimmung mit der Formel (VII) nach der Formel

$$
{}_xM_n = \sqrt{\left\{ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( v^k \mathfrak{a}^{(1)}_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 + \right.}
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2
$$

$$
\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^2 \right\} \tag{XIII}
$$

zu ermitteln.

Um aber auch jenen Fachleuten gerecht zu werden, welche die Ansicht vertreten, dass man von vornherein das durch die etwaige Rentenzahlung erwachsende Risiko berücksichtigen müsse, erkläre man das Quadrat des mittleren ferneren Risikos des $(x+n)$ jährigen Versicherten mit Verwendung der Formel

$$
{}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+m} = \sum_{k=1}^{k=l-m} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+m}\, v^k \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+m+k} \frac{1-v^{k_1}}{1-v}
$$

durch den Ausdruck

$$
({}_xM^{(1)}_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left( v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} - \right.
$$

$$
\left. - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2
$$

$$
+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 +
$$

$$
+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)^2, \tag{XIV}
$$

welcher durch Auflösung der Reserve übergeht in

$$({}_xM_n^{(1)})^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left[\left(v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} - {}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\right) + \right.$$

$$\left. + P_x\left(\mathfrak{a}_{x+n} - \frac{1-v^k}{1-v}\right)\right]^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left[- {}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n} + P_x\left(\mathfrak{a}_{x+n} - \frac{1-v^k}{1-v}\right)\right]^2$$

$$+ {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \left[- {}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n} + P_x\left(\mathfrak{a}_{x+n} - \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)\right]^2. \qquad \text{(XV)}$$

Weiterhin die Quadrate entwickelnd, erhält man zuvörderst

$$({}_xM_n^{(1)})^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left(v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} - {}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\right)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\right) \left({}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\right)^2$$

$$+ 2P_x \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k}\, v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} \left(\mathfrak{a}_{x+n} - \frac{1-v^k}{1-v}\right)$$

$$-2\,P_x{}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\left(\mathfrak{a}_{x+n}-\frac{1-v^k}{1-v}\right)+\right.$$

$$\left.+\,{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\left(\mathfrak{a}_{x+n}-\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)\right]$$

$$+\,(P_x)^2\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)+(2)}\left(\mathfrak{a}_{x+n}-\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\,{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\left(\mathfrak{a}_{x+n}-\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2\right]$$

und hieraus

$$({}_xM_n^{(1)})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\;v^{2k}\sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k}\left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v}\right)^2-({}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n})^2$$

$$+\,2\,P_x\left[{}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\,\mathfrak{a}_{x+n}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\;v^k\sum_{k=1} {}_{k-1|}q'_{x+n+k}\,\frac{(1-v^k)\,(1-v^{k_1})}{(1-v)^2}\right]$$

$$+\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\left[1-2\,A_{n+n}+A_{x+n}^{(2)}-(1-A_{x+n})^2\right].$$

Den Wert

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{2k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q_{x+n+k} \left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v}\right)^2$$

kann man umformen in

$${}^{(1)}|\tilde{a}_{x+n}^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{2k} A_{x+n+k}^{(2)},$$

wobei ist

$$A_{x+n+k}^{(2)} = \frac{1}{(1-v)^2}\left[1-2\,A_{x+n+k}^{(1)} + A_{x+n+k}^{(1),(2)}\right].$$

Für den Ausdruck

$$2\,P_x\Bigg(a_{x+n}\, {}^{(1)}|a_{x+n} -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k}\, \frac{(1-v^k)(1-v^{k_1})}{(1-v)^2}\Bigg)$$

findet man

$$2\,P_x\Bigg[{}^{(1)}|a_{x+n}\, \frac{1-A_{x+n}}{1-v} -$$

$$-\frac{1}{1-v}\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k}\, \frac{1-v^{k_1}}{1-v} +$$

$$+\frac{1}{1-v}\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{2k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k}\, \frac{1-v^{k_1}}{1-v}\Bigg]$$

$$= \frac{2\,P_x}{1-v}\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{2k}\, \mathrm{a}_{x+n+k}^{(1)} + {}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n}(1-A_{x+n}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^{k}\, \mathrm{a}_{x+n+k}^{(1)}\right]$$

$$= \frac{2\,P_x}{1-v}\left[{}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n}^{(1)} - {}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n}\, A_{x+n}\right].$$

Das letzte Glied

$$\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\left[1-2\,A_{x+n}+A_{x+n}^{(2)}-(1-A_{x+n})^2\right]$$

lässt sich auf die bekannte Form bringen

$$\left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\left[A_{x+n}^{(2)}-(A_{x+n})^2\right].$$

Mithin ergibt sich für das fernere Risiko bei Berücksichtigung der voraussichtlichen Rentenzahlungen die Formel

$$({}_xM_n^{(1)})^2 = \sqrt{\left[\left({}^{(1)}|\tilde{\mathrm{a}}_{x+n}^{(2)} - ({}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n})^2\right) + \right.}$$

$$+ \frac{2\,P_x}{1-v}\left({}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n}^{(1)} - {}^{(1)}|\mathrm{a}_{x+n}\, A_{x+n}\right)$$

$$\left. + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2\left(A_{x+n}^{(2)} - (A_{x+n})^2\right)\right], \qquad \text{(XVI)}$$

welche der Formel für die Witwenrente analog ist, die Arany in der bereits eingangs erwähnten Kongressarbeit mitgeteilt hat.

Da man die Formel (XIV) auch umformen kann in

$$
{}_xM_n = \sqrt{\left[\left({}^{(1)}|\mathfrak{a}^{(2)}_{x+n} - ({}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n})^2\right) + \right.}
$$

$$
+ 2\,\frac{P_x}{1-v}\left({}^{(1)}|\mathfrak{a}^{(1)}_{x+n} - {}^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n}\,A_{x+n}\right) +
$$

$$
\left. + \left(\frac{P_x}{1-v}\right)^2 \left(A^{(2)}_{x+n} - (A_{x+n})^2\right)\right], \qquad \text{(VII)}
$$

so lehrt unsere Untersuchung, dass das durch die jährliche Prämienzahlung erwachsende Mehrrisiko bei beiden Methoden das gleiche ist.

Um den Unterschied zwischen der vorstehenden Formel und der Formel (XVI) nachzuprüfen, bilde man die Differenz

$$
({}_xM^{(1)}_n)^2 - ({}_xM_n)^2 = {}^{(1)}|\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}_{x+n} - {}^{(1)}|\mathfrak{a}^{(2)}_{x+n},
$$

für die man auch schreiben kann

$$
\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{k+n}\, v^{2k}\left[A^{(2)}_{x+n+k} - (\mathfrak{a}^{(1)}_{x+n+k})^2\right].
$$

Nun war aber

$$
A^{(2)}_{x+n+k} = \frac{1}{(1-v)^2}\left[1 - 2\,A^{(1)}_{x+n+k} + A^{(1),(2)}_{x+n+k}\right],
$$

während für $(\mathfrak{a}^{(1)}_{x+n+k})^2$ gesetzt werden kann

$$
\frac{1}{(1-v)^2}\left[1 - 2\,A^{(1)}_{x+n+k} + (A^{(1)}_{x+n+k})^2\right].
$$

Man findet somit

$$({}_xM_n^{(1)})^2 - ({}_xM_n)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^{2k} \, \frac{A_{x+n+k}^{(1),(2)} - (A_{x+n+k}^{(1)})^2}{(1-v)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^{2k} \, (M_{x+n+k}^{(1)})^2,$$

ein Ergebnis, auf das bereits Spitz (s. a. a. O.) verwiesen hat.

Man könnte dasselbe auch aus dem unabhängig aufstellbaren Ausdrucke herleiten

$$({}^{(1)}_{\;x}M_n)^2 = \tag{XVIII}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^{2k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v} - \mathrm{a}_{x+n+k}^{(1)}\right)^2,$$

der sich leicht auf die Form bringen lässt

$$({}^{(1)}_{\;x}M_n)^2 = \tag{XIX}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^{2k} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left[\left(\frac{1-v^{k_1}}{1-v}\right)^2 - (\mathrm{a}_{x+n+k}^{(1)})^2\right].$$

Bildet man überdies die Differenz zwischen den Ausgangsformeln:

$$({}_xM_n^{(1)})^2 - ({}_xM_n)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left[\sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q'_{x+n+k} \left(v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2\right.$$

$$\left. - \left(v^k \, \mathrm{a}_{x+n+k}^{(1)} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2\right], \tag{XX}$$

so erhält man nach einigen einfachen Umformungen wiederum die Formel (XIX).

Aus diesen Untersuchungen ergibt sich also die merkwürdige Beziehung

$$({}_{x}M_{n}^{(1)})^2 = ({}_{x}M_{n})^2 + ({}^{(1)}_{x}M_{n})^2,$$

welche besagt, dass das der Formel (XV) entsprechende Risikoquadrat grösser ist als das der Formel (XIII) zugrundegelegte Risikoquadrat. Der Unterschied ist gleich dem Quadrat des Risikos der etwaigen künftigen Rentenzahlungen, wenn entsprechend der Prämienberechnung bei Eintritt des Schadenfalls die Auffüllung der Reserve zu dem Rentenbarwerte vorgenommen wird.

## C. Das mittlere Risiko der ferneren Dauer, abgeleitet aus dem Quadrat des Risikos des kommenden $k^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres.

Betrachtet werde wiederum ein Vertrag, dessen einmalige Prämie sich nach der Formel

$$\mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^k\, S_{x+n+k}$$

berechnen lässt.

Um den Wert des Risikos des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres nach Ablauf der $n$ ersten Versicherungsjahre berechnen zu können, stelle man folgende, von Rothauge („Das technische Zufallrisiko“ in Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VI. Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien 1909, Band I) auf einfache Lebensversicherungen angewandte Überlegung an:

Bei einem $(x+n)$-jährigen, welcher bereits $n$ Jahre versichert ist, kann die Gesellschaft während des $(n+k)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres mit der Wahrscheinlichkeit

$$
\begin{array}{lll}
{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} & \text{den Verlust} & v^k\,(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\,{}_x\Pi_{n+k})\,, \\
{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} & \text{den Gewinn} & v^k\,({}_xV_{n+k} + r\,{}_x\Pi_{n+k})\,, \\
{}_kp^{(3)}_{x+n} & \text{den Gewinn} & v^k\,(r\,{}_x\Pi_{n+k})
\end{array}
$$

erwarten.

Hierbei bezeichnet ${}_xV_{n+k}$ die Reserve für das Ende des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres und ${}_x\Pi_{n+k}$ die Risikoprämie des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres. Unter Berücksichtigung der aufgeführten Verlust- und Gewinnmöglichkeiten beträgt die Gewinn- und Verlustgleichung für das $(n+k)^{\text{te}}$ Jahr, bezogen auf den Anfang des $(n+1)^{\text{ten}}$ Jahres

$$
\begin{aligned}
&{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\,v^k\,(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\,{}_x\Pi_{n+k}) + \\
&\quad + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\,v^k\left[-({}_xV_{n+k} + r\,{}_x\Pi_{n+k})\right] \\
&\quad + {}_kp^{(3)}_{x+n}\,v^k\,[-r\,{}_x\Pi_{n+k}] = \\
&= {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\,v^{k-1}\,({}_x\Pi_{n+k} - {}_x\Pi_{n+k}) = 0. \qquad \text{(I)}
\end{aligned}
$$

Man erhält daher das mittlere Risiko des kommenden $n+k^{\text{ten}}$ Jahres, wenn man die Beträge

$$
\begin{gathered}
v^k\,[S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\,{}_x\Pi_{n+k}]\,, \\
v^k\left[-({}_xV_{n+k} + r\,{}_x\Pi_{n+k})\right], \\
v^k\,[-r\,{}_x\Pi_{n+k}]
\end{gathered}
$$

quadriert. Bezeichnet man den Wert des Risikos des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres nach Verlauf von $n$ Jahren durch ${}_{k-1|x}M_n$, so bekommt man also

$$\begin{aligned}({}_{k-1|x}M_n)^2 &= {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^{2k} (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\Pi_{n+k})^2 \\ &\quad + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_xV_{n+k} + r\, {}_x\Pi_{n+k})^2 \\ &\quad + {}_kp^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} (r\, {}_x\Pi_{n+k})^2 \\ &= {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_xm_{n+k})^2 . \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $({}_xm_{n+k})^2$ das Quadrat des Risikos des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres, mit dem sich der Verfasser im 11. Hefte der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker („Die Berechnung des jährlichen Risikos schwierigerer Versicherungsarten“) eingehend befasst hatte.

Um nun das Risiko der ferneren Dauer aus den Risikoquadraten sämtlicher kommenden Jahre herzuleiten, erinnere man sich des folgenden Satzes aus der Planimetrie:

Ein Quadrat ist ebenso gross wie die Gesamtheit mehrerer gegebenen Quadrate, wenn es gleich ist der Summe dieser Quadrate.

Hiernach ist das Quadrat des Risikos der ferneren Dauer gleich der Summe der Quadrate der Risiken der kommenden Jahre, bezogen auf den Ausgangspunkt der Betrachtung. Es ergibt sich also

$$({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} ({}_{k-1|x}M_n)^2 , \qquad \text{(III)} .$$

woraus folgt

$$ {}_xM_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_x m_{n+k})^2} \cdot \qquad \text{(IV)} \qquad ({}_0p^{(3)}_{x+n} = 1) $$

Diese Form des Risikos wurde zuerst von Hattendorff aufgefunden und später von Spitz (s. a. a. O.) und von Rothauge („Die formale Ausgestaltung des Zufallrisikos in der Lebensversicherung", Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten, neue Folge, 6. Band, 1. Heft) näher untersucht. Wie man sieht, stellt sie das Quadrat des Risikos der ferneren Dauer als die Summe der Hoffnungswerte der Quadrate der mittleren jährlichen Risiken dar. Es bleibt daher der Nachweis zu erbringen, dass das Hattendorffsche Risiko gleich ist dem Risiko, wie es von Bremicker, Wittstein, Haudorff u. a. dargestellt wurde. Zu diesem Behufe setze man zunächst für $({}_x m_{n+k})^2$ die Werte, wodurch sich ergibt

$$ ({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2(k-1)} \Big[ p^{(1)}_{x+n+k-1} (v\, S_{x+n+k} - $$
$$ - v\, {}_xV_{n+k} - {}_x\Pi_{n+k})^2 $$
$$ + p^{(2)}_{x+n+k-1} (v\, {}_xV_{n+k} + {}_x\Pi_{n+k})^2 + p^{(3)}_{x+n+k-1} ({}_x\Pi_{n+k})^2 \Big] . $$

Nun erinnere man sich der Beziehung

$$ v^k\, {}_xV_{n+k} = {}_xV_n + P_x \frac{1 - v^k}{1 - v} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} , $$

durch deren Anwendung unsere Risikoformel übergeht in

$$({}_xM_n)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \Bigg[ p^{(1)}_{x+n+k-1} \Bigg( v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} \Bigg)^2$$

$$+ p^{(2)}_{x+n+k-1} \Bigg( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} \Bigg)^2 +$$

$$+ p^{(3)}_{x+n+k-1} (v^{k-1} {}_x\Pi_{n+k})^2 \Bigg]$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left( v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 \right\} + R_{l-n}; \qquad \text{(V)}$$

dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$R_{l-n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} ({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}) \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_kp^{(3)}_{x+n} (v^{k-1} {}_x\Pi_{n+k})^2$$

$$+2\sum_{k=1}^{k=l-n}\Bigg[{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^k S_{x+n+k}-{}_xV_n-P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)-$$

$$-{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)\Bigg]\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right).$$

Weil nun aber ist

$${}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}=v^k\,{}_xV_{n+k}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa},$$

so folgt

$$2\sum_{k=1}^{k=l-n}\Bigg[{}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^k S_{x+n+k}-{}_xV_n-P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)-$$

$$-{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n+P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)\Bigg]\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{k=l-n}\Bigg[{}_kp^{(3)}_{x+n}\left(v^{k-1}\,{}_x\Pi_{n+k}\right)-$$

$$-\left({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}+{}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\right)\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)\Bigg]\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right).$$

Es ergibt sich daher

$$R_{l-n}=\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_kp^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n}{}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1}v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2.$$

Wegen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=0} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa} = 0$$

ist aber

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2,$$

daher findet man

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2 =$$

$$= {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)^2.$$

Erinnert man sich nochmals der Beziehung

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa} = {}_xV_n + P_x\frac{1-v^{l-n}}{1-v} - v^{l-n}\,{}_xV_l$$

und beachtet dabei, dass ist

$${}_xV_l = 0,$$

so erhält man

$$R_{l-n} = {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2. \qquad \text{(VI)}$$

Somit gelingt es in der Tat, das Hattendorffsche Risiko in das Bremickersche oder Wittsteinsche Risiko

$$({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2$$

überzuleiten.

Wie beiläufig bemerkt werde, legt uns diese Untersuchung den Gedanken nahe, das Risiko der $m$ ersten Versicherungsjahre einer Versicherung von $l$-jähriger Dauer zu berechnen. Bezeichnet man dieses Risiko durch ${}_xM_{(0,\,m)}$, so erhält man durch eine einfache Überlegung die Formel

$$({}_xM_{(0,\,m)})^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} {}_{k-1|}p^{(1)}_x\left(v^k S_{x+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 + \qquad \text{(VII)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m} {}_{k-1|}p^{(2)}_x\left(P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 + {}_mp^{(3)}_x\left(P_x \frac{1-v^m}{1-v} - v^m\,{}_xV_m\right)^2.$$

Rothauge hat den umgekehrten Weg eingeschlagen und gezeigt, dass sich das Bremickersche Risiko in das Hattendorffsche Risiko überführen lässt. Seiner Untersuchung schickt er übrigens noch den Nachweis voraus, dass der von uns als Gewinn- und Verlusthoffnung bezeichnete Ausdruck

$$
{}_xR_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left[ v^k S_{x+n+k} - \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) \right] -
$$

$$
- \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)
$$

$$
- {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right)
$$

in der Tat Null beträgt. Um dies entsprechend dem Rothaugeschen Entwicklungsgange darzutun, setze man

$$
{}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} = v^k\, {}_xV_{n+k} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa};
$$

man findet sodann

$$
{}_xR_n^{(0)} =
$$

$$
= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - v^k\, {}_xV_{n+k} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)
$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(2)}_{x+n}\left(v^k\,{}_xV_{n+k}+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)-$$

$$-\,{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} {}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_kp^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right).$$

Weil aber, wegen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=0} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}=0,$$

ist

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_kp^{(3)}_{x+n}\left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\,{}_x\Pi_{n+\varkappa}\right),$$

so ergibt sich die von uns schon auf einfachere Weise bewiesene Gleichung

$${}_xR^{(0)}_n=0.$$

Um sodann aus dem dem mittleren Risiko entsprechenden Ausdrucke

$$({}_xM_n)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left[ v^k (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right]^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( v^k\, {}_xV_{n+k} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+\varkappa} \right)^2 +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+\varkappa} \right)^2$$

das Hattendorffsche Risiko abzuleiten, betrachtet Rothauge das kommende $(n+k)^{\text{te}}$ Jahr. Will man seinem Vorgange folgen, so setze man

$${}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left[ v^k (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+\varkappa} \right]^2 +$$

$$+ {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left( v^k\, {}_xV_{n+k} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+\varkappa} \right)^2$$

$$= {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \Big\{ p^{(1)}_{x+n+k-1}\, v^{2k} (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+k})^2 +$$

$$+ p^{(2)}_{x+n+k-1}\, v^{2k} ({}_xV_{n+k} + r\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+k})^2$$

$$- 2\, v^k \big[ p^{(1)}_{x+n+k-1} (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+k}) -$$

$$- p^{(2)}_{x+n+k-1} ({}_xV_{n+k} + r\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+k}) \big] \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\, {}_x\boldsymbol{\Pi}_{n+\varkappa} \right)$$

$$+ (p^{(1)}_{x+n+k-1} + p^{(2)}_{x+n+k-1}) \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2 \Bigg\}$$

$$= {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \Big[ p^{(1)}_{x+n+k-1} \, v^{2k} (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r \, {}_x\Pi_{n+k})^2 +$$

$$+ p^{(2)}_{x+n+k-1} \, v^{2k} ({}_xV_{n+k} + r \, {}_x\Pi_{n+k})^2$$

$$- 2 \, p^{(3)}_{x+n+k-1} (v^{k-1} \, {}_x\Pi_{n+k}) \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right) +$$

$$+ (1 - p^{(3)}_{x+n+k-1}) \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2 \Big].$$

Darauf noch das Korrekturglied

$$p^{(3)}_{x+n+k-1} \, v^{k-1} ({}_x\Pi_{n+k} - {}_x\Pi_{n+k}) = 0$$

hinzufügend, findet man

$${}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \, v^{2k} \big[ p^{(1)}_{x+n+k-1} (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r_x \Pi_{n+k})^2 +$$

$$+ p^{(2)}_{x+n+k-1} ({}_xV_{n+k} + r \, {}_x\Pi_{n+k})^2 + p^{(3)}_{x+n+k-1} (r \, {}_x\Pi_{n+k})^2 \big]$$

$$- {}_kp^{(3)}_{x+n} \Big[ v^{k-1} \, {}_x\Pi_{n+k} + 2 (v^{k-1} \, {}_x\Pi_{n+k}) \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right) +$$

$$+ \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2 \Big] + {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} \, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2$$

$$= {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_x m_{n+k})^2 - {}_k p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2 +$$

$$+ {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2. \qquad \text{(VIII)}$$

Nunmehr erteile man dem Zeiger $k$ alle Werte von 1 bis $l-n$, so folgt

$$({}_x M_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_x m_{n+k})^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_k p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2 +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2. \qquad \text{(IX)}$$

Es ist aber

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_k p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_k p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x \Pi_{n+\varkappa} \right)^2,$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_k p^{(3)}_{x+n} \left( \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right)^2,$$

daher bekommt man in Übereinstimmung mit Hattendorff

$$({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} ({}_xm_{n+k})^2.$$

Aus der vorstehenden Formel kann man durch eine einfache Überlegung die Formel

$$({}_xM_n)^2 = (v\, {}_xm_{n+1})^2 + p^{(3)}_{x+n}\, v^2 ({}_xM_{n+1})^2$$

ableiten, die zuerst Spitz dargestellt hatte, indem er die Differenz umgestaltete

$$({}_xM_n)^2 - (v\, {}_xm_{n+1})^2,$$

in welcher $({}_xM_n)^2$ das Risikoquadrat nach Bremicker und Wittstein bedeutet.

Hier werde eine Herleitung dieser Rekursionsformel in der Voraussetzung gegeben, dass man einen Zusammenhang zwischen dem jährlichen Risiko und dem Risiko der ferneren Dauer zunächst nicht kennt.

Zum Ausgangspunkte der anzustellenden Untersuchungen diene daher wieder die Formel

$$({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \left(v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right)^2$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2.$$

Durch gesondertes Anschreiben der auf das erste der folgenden Jahre Bezug nehmenden Glieder erhält man

$$({}_xM_n)^2 = p^{(1)}_{x+n} (v\, S_{x+n+1} - {}_xV_n - P_x)^2 + p^{(2)}_{x+n} ({}_xV_n + P_x)^2$$

$$+ p^{(3)}_{x+n} \Bigg[ \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1} \left(v^{k-1} S_{x+n+k+1} - {}_xV_n - \right.$$

$$\left. - P_x \frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ {}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2 \Bigg]. \quad \text{(XI)}$$

Weil nun einerseits

$$\frac{1-v^{k+1}}{1-v} = 1 + v\, \frac{1-v^k}{1-v}$$

und anderseits

$$ {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{k+1}}{1-v} = {}_xV_n + P_x + v\,P_x \frac{1-v^k}{1-v}, $$

so folgt weiter

$$ ({}_xM_n)^2 = $$

$$ = p^{(1)}_{x+n} (v\,S_{x+n+1} - v\,{}_xV_{n+1} - {}_x\Pi_{n+1})^2 + $$

$$ + p^{(2)}_{x+n} (v\,{}_xV_{n+1} + {}_x\Pi_{n+1})^2 $$

$$ + p^{(3)}_{x+n} \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1} \left( v^{k+1} S_{x+n+k+1} - v\,{}_xV_{n+1} - \right.\right. $$

$$ \left. - {}_x\Pi_{n+1} - v\,P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 $$

$$ + \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1} \left( v\,{}_xV_{n+1} + {}_x\Pi_{n+1} + v\,P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 $$

$$ \left. + {}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1} \left( v\,{}_xV_{n+1} + {}_x\Pi_{n+1} + v\,P_x \frac{1-v^{l-n-1}}{1-v} \right)^2 \right]. $$

Fernerhin findet man durch zweckentsprechendes Auflösen der Quadrate

$$ \sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1} \left[ \left( v^{k+1} S_{x+n+k+1} - v\,{}_xV_{n+1} - v\,P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right)^2 - \right. $$

$$ - 2 \left( v^{k+1} S_{x+n+k+1} - v\,{}_xV_{n+1} - \right. $$

$$ \left. \left. - v\,P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) {}_x\Pi_{n+1} + ({}_x\Pi_{n+1})^2 \right] $$

$$+\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1}\left[\left(v\,{}_xV_{n+1}+v\,P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left(v\,{}_xV_{n+1}+v\,P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right){}_x\Pi_{n+1}+({}_x\Pi_{n+1})^2\right]$$

$$+{}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1}\left[\left(v\,{}_xV_{n+1}+v\,P_x\,\frac{1-v^{l-n-1}}{1-v}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left(v\,{}_xV_{n+1}+v\,P_x\,\frac{1-v^{l-n-1}}{1-v}\right){}_x\Pi_{n+1}+({}_x\Pi_{n+1})^2\right].$$

Es ist aber

$$({}_xM_{n+1})^2=\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1}\left(v^k S_{x+n+k+1}-{}_xV_{n+1}-P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1}\left({}_xV_{n+1}+P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2$$

$$+{}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1}\left({}_xV_{n+1}+P_x\,\frac{1-v^{l-n-1}}{1-v}\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1}\left(v^k S_{x+n+k+1}-{}_xV_{n+1}-P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n-1} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1}\left({}_xV_{n+1}+P_x\,\frac{1-v^k}{1-v}\right)-$$

$$-{}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1}\left({}_xV_{n+1}+P_x\,\frac{1-v^{l-n-1}}{1-v}\right)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n-1} ({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n+1} + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n+1}) + {}_{l-n-1}p^{(3)}_{x+n+1} = 1,$$

und daher bekommt man

$$({}_xM_n)^2 = p^{(1)}_{x+n}(v\,S_{x+n+1} - v\,{}_xV_{n+1} - {}_x\Pi_{n+1})^2 +$$

$$+ p^{(2)}_{x+n}(v\,{}_xV_{n+1} + {}_x\Pi_{n+1})^2 + p^{(3)}_{x+n}({}_x\Pi_{n+1})^2 +$$

$$+ p^{(3)}_{x+n}\,v^2({}_xM_{n+1})^2. \qquad \text{(XII)}$$

Weil aber ist

$$p^{(1)}_{x+n}(v\,S_{x+n+1} - v\,{}_xV_{n+1} - {}_x\Pi_{n+1})^2 +$$

$$+ p^{(2)}_{x+n}(v\,{}_xV_{n+1} + {}_x\Pi_{n+1})^2 + p^{(3)}_{x+n}({}_x\Pi_{n+1})^2 = (v\,{}_xm_{n+1})^2,$$

so findet man auch auf diesem Wege die Formel

$$({}_xM_n)^2 = (v\,{}_xm_{n+1})^2 + p^{(3)}_{x+n}\,v^2({}_xM_{n+1})^2.$$

Indem man vermöge dieser Formel die Summe von Gleichungen bildet

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}\Big[{}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\,v^{2k}({}_xM_{n+k-1})^2 = {}_kp^{(3)}_{x+n}\,v^{2k}({}_xm_{n+k})^2 +$$

$$+ {}_kp^{(3)}_{x+n}\,v^{2k}({}_xM_{n+k})^2\Big],$$

findet man wiederum die Hattendorffsche Formel

$$({}_xM_n)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\,v^{2k}({}_xm_{n+k})^2.$$

## D. Herleitung beider Risikoformen aus den genauen Hoffnungswerten.

Bei fortlaufender Berücksichtigung der alljährlichen Veränderungen, welcher die Reserven unterliegen, kann man die Gewinnhoffnung des Versicherten in bezug auf die ganze Versicherungsdauer erklären durch

$$ {}_x\mathfrak{H}_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^k \left(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\,{}_x\Pi_{n+k}\right). \quad \text{(I)} $$

Die Verlusthoffnung des Versicherten für die ganze Dauer muss dann heissen

$$ {}_x\mathfrak{H}_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)}\, v^k \left({}_xV_{n+k} + r\,{}_x\Pi_{n+k}\right) + $$

$$ + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_kp_{x+n}^{(3)}\, v^k \left(r\,{}_x\Pi_{n+k}\right). \quad \text{(II)} $$

Diese Hoffnungswerte haben den Vorteil, sich der Verwaltung der Versicherungen genau anzupassen. Um ihre Übereinstimmung zu zeigen, schreibe man (I) in der Form

$$ {}_x\mathfrak{H}_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^k \left(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}\right) - $$

$$ - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}\, v^k \left(r\,{}_x\Pi_{n+k}\right) \quad \text{(I}^{a}\text{)} $$

und setze in (II)

$$ {}_{k}p^{(3)}_{x+n} = {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} - {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n} \,. $$

Die Verlusthoffnung lässt sich sodann umformen in

$$ {}_{x}\mathfrak{H}^{(2)}_{n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^{k}\, {}_{x}V_{n+k} + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{k}\,(r\, {}_{x}\Pi_{n+k}) - $$

$$ - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^{k}\,(r\, {}_{x}\Pi_{n+k}) \,. \tag{IIᵃ} $$

Bildet man nun die Gleichung

$$ {}_{x}\mathfrak{H}^{(1)}_{n} = {}_{x}\mathfrak{H}^{(2)}_{n} \,, \tag{III} $$

so kann man diese auf die Form bringen

$$ {}_{x}J_{n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^{k}\,(S_{x+n+k} - {}_{x}V_{n+k}) - $$

$$ - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^{k}\, {}_{x}V_{n+k} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(3)}_{x+n}\, v^{k}\,(r\, {}_{x}\Pi_{n+k}) \,. \tag{IV} $$

Hiermit ist aber die Gleichheit der Hoffnungswerte dargetan; denn es ergibt sich auf beiden Seiten der Versicherungswert von Wright. (Siehe Bohlmann, Lebensversicherungsmathematik, 10. Sonstige Prämien.)

Wenn man, wie noch beiläufig bemerkt werden möge, jede der Beharrungswahrscheinlichkeiten ${}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}$ mit der entsprechenden Summe von Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=l-n-k} ({}_{\varkappa|}p^{(1)}_{x+n+k-1} + {}_{\varkappa|}p^{(2)}_{x+n+k-1}) + {}_{l-n-k+1}p^{(3)}_{x+n+k-1} = 1$$

multipliziert, so kann man den Wrightschen Versicherungswert auch in der bemerkenswerten Form darstellen

$$ {}_xJ_n = \sum_{k=1}^{k=l-n} ({}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} + {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}) \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} . \qquad \text{(V)}$$

Da man für die Gewinn- und Verlustgleichung

$$ {}_xR^{(0)}_n = {}_x\mathfrak{H}^{(1)}_n - {}_x\mathfrak{H}^{(2)}_n = {}_x\mathfrak{G}_n = 0 \qquad \text{(VI)}$$

auch schreiben kann

$$ {}_xR^{(0)}_n = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, v^k (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\Pi_{n+k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, v^k (- {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\Pi_{n+k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_kp^{(3)}_{x+n}\, v^k (- r\, {}_x\Pi_{n+k}) = 0 ,$$

so erhält man durch Quadrieren der Gewinn- und Verlustbeträge die Hattendorffsche Form des Risikos.

Wendet man denselben Kunstgriff, der zur Herleitung der Formel (V) diente, auf die Formel (II^a) an, so lässt sich diese umgestalten in

$$
\begin{aligned}
{}_x\mathfrak{S}_n^{(2)} = & \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)}\, v^k \left({}_x V_{n+k} + r\, {}_x\Pi_{n+k}\right) + \\
& + \sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} + {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)}\right) \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k-1} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} + \\
& + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} .
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{II^b})
$$

Durch Einführung der Ausdrücke (I) und (II^b) in die Gleichung (VI) geht die letztere nach zweckdienlicher Zusammenfassung über in

$$
\begin{aligned}
{}_xR_n^{(0)} = & \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - v^k\, {}_xV_{n+k} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left( - v^k\, {}_xV_{n+k} - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right) + \\
& + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \left( - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-n} v^{\varkappa-1}\, {}_x\Pi_{n+\varkappa} \right) = 0 .
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{VIII})
$$

Macht man nun abermals von der schon mehrfach angewendeten Beziehung

$$v^k {}_xV_{n+k} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} v^{\varkappa-1} {}_x\Pi_{n+\varkappa} = {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}$$

Gebrauch, so nimmt die Gewinn- und Verlusthoffnung wieder die bekannte Form an, von der Bremicker und Wittstein ausgegangen sind.

## E. Die Differenzengleichung des Risikoquadrats.

Die der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegte diskrete Berechnungsweise der Prämien eignet sich nicht sonderlich, auch auf die Darstellung der Differentialgleichung des Risikoquadrats einzugehen, die hier nur innerhalb der Zeiträume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Altern Gültigkeit haben würde. Wohl aber mag eine kurze Besprechung der Differenzengleichung des Risikoquadrats an dieser Stelle Platz finden.

Aus der früher aufgestellten Beziehung

$$({}_xM_n)^2 = (v_x\, m_{n+1})^2 + p^{(3)}_{x+n}\, v^2 ({}_xM_{n+1})^2 \qquad \text{(I)}$$

kann man durch Umformung die lineare Differenzengleichung

$$({}_xM_{n+1})^2 - \frac{r^2}{p^{(3)}_{x+n}} ({}_xM_n)^2 = - \frac{({}_xm_{n+1})^2}{p^{(3)}_{x+n}} \qquad \text{(II)}$$

herleiten, die als die Differenzengleichung des Risikos anzusehen ist.

Wird nun einerseits die Entstehung der Gleichung (II) aus der Gleichung (I) und andererseits auch die rekursive Eigenschaft der Gleichung (I) als unbekannt vorausgesetzt, so stellt die Gleichung (II) die Aufgabe, eine Auflösung in Bezug auf $({}_xM_n)^2$ nach den Regeln der Differenzenrechnung anzustreben.

Setzt man

$$({}_xM_n)^2 = Y_n^2\, Z_n^2$$

und

$$Z_{n+1}^2 = Z_n^2 + \Delta\, Z_n^2\,,$$

so folgt aus

$$Y_{n+1}^2\, Z_{n+1}^2 - \frac{r^2}{p_{x+n}^{(3)}}\, Y_n^2\, Z_n^2 = -\frac{({}_xm_{n+1})^2}{p_{x+n}^{(3)}}$$

durch Umformung

$$Y_{n+1}^2\,(Z_n^2 + \Delta\, Z_n^2) - \frac{r^2}{p_{x+n}^{(3)}}\, Y_n^2\, Z_n^2 = -\frac{({}_xm_{n+1})^2}{p_{x+n}^{(3)}}$$

oder

$$\left(Y_{x+1}^2 - \frac{r^2}{p_{x+n}^{(3)}}\, Y_n^2\right) Z_n^2 + Y_{n+1}^2\, \Delta\, Z_n^2 = -\frac{({}_xm_{n+1})^2}{p_{x+n}^{(3)}}\,. \qquad \text{(III)}$$

Angenommen nur, $Y_n^2$ ist eine partikuläre Lösung der vorstehenden Differenzengleichung, so muss $Y_n^2$ die homogene lineare Differenzengleichung

$$Y_{n+1}^2 - \frac{r^2}{p_{x+n}^{(3)}}\, Y_n^2 = 0$$

befriedigen. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt aber

$$Y^2_{n+k+1} = \frac{r^{2(k+1)}}{\prod\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=k} p^{(3)}_{x+n+\varkappa}} Y^2_n = \frac{r^{2(k+1)}}{{}_{k+1}p^{(3)}_{x+n}} Y^2_n .$$

Es bleibt jetzt noch die Gleichung

$$Y^2_{n+1} \Delta Z^2_n = -\frac{({}_x m_{n+1})^2}{p^{(3)}_{x+n}}$$

übrig, aus der $Z^2_n$ bestimmt werden kann.

Da man für $Z^2_n$ findet

$$Z^2_n = \sum_{k=0}^{k=l-n-1} \frac{({}_x m_{n+k+1})^2}{p^{(3)}_{x+n+k}\, Y^2_{n+k+1}} ,$$

so erhält man

$$({}_x M_n)^2 = Z^2_n\, Y^2_n = Y^2_n \sum_{k=0}^{k=l-n-1} \frac{({}_x m_{n+k+1})^2}{p^{(3)}_{x+n+k}\, Y^2_{n+k+1}} .$$

In dieses Ergebnis braucht man aber nur noch den oben gefundenen Wert von $Y^2_{n+k+1}$ einzuführen, um zu erhalten

$$({}_x M_n)^2 = \sum_{k=0}^{k=l-n-1} {}_k p^{(3)}_{x+n}\, v^{2(k+1)} ({}_x m_{n+k+1})^2 .$$

# Zweites Kapitel.

## Das Risiko $s$ gleichartiger Verträge.

### A. Durchschnittliches Risiko.

Angenommen, es gäbe eine hinreichend grosse Zahl von Versicherten, welche sämtlich, im gleichen Alter stehend, zu dem nämlichen Zeitpunkte vor $n$ Jahren Verträge gegen Jahresprämien abgeschlossen haben, damit ihnen beim etwaigen Eintritte der mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|}p_x^{(1)}, {}_{1|}p_x^{(1)}, {}_{2|}p_x^{(1)}, \ldots$ zu erwartenden, einander ausschliessenden Ereignisse $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ die Summen $S_{x+1}, S_{x+2}, S_{x+3}, \ldots$ ausgezahlt werden.

In der Voraussetzung, dass die Reserve des einzelnen Versicherten wiederum ${}_xV_n$ beträgt, und dass ein Bestand von $s$ Versicherten vorhanden sei, beläuft sich die Gewinn- und Verlustgleichung der künftigen Dauer, die gemäss unserer früheren Bezeichnungsweise durch $(s\,{}_xR_n^{(0)})$ auszudrücken wäre, künftig aber mit $(s\,{}_xG_n)$ bezeichnet werden soll, auf

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} s\,{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left(v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} s\,{}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) -$$

$$- s\,{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}\, P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} = 0\,. \qquad \text{(I)}$$

Bezeichnet man nun die rechnungsmässigen Ereigniszahlen $s\,{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)}$, $s\,{}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)}$ durch ${}_0m_{k-1}^{(1)}$, ${}_0m_{k-1}^{(2)}$, die rechnungsmässige Zahl der das $x + l^{\text{te}}$ Altersjahr Erlebenden $s\,{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}$ mit ${}_0m^{(3)}_{l-n}$, so kann man die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_0m^{(1)}_{k-1} \left( v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_0m^{(2)}_{k-1} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) -$$

$$- {}_0m^{(3)}_{l-n} \left( {}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right) = 0 \,.$$

Zur Abkürzung für die Wahrscheinlichkeiten ${}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}$, ${}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}$ und ${}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}$ die früher verwendeten Zeichen $p^{(1)}_{k-1}$, $p^{(2)}_{k-1}$, und $p^{(3)}_{l-n}$ wieder in Anwendung bringend, findet man für die Wahrscheinlichkeit der vorstehenden Gleichung den Ausdruck

$$P_{(0)} = \frac{s!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} ({}_0m^{(1)}_{k-1}!) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} ({}_0m^{(2)}_{k-1}!) ({}_0m^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \left(p^{(1)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(1)}_{k-1}} \prod_{k=1}^{k=l-n} \left(p^{(2)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(2)}_{k-1}} \left(p^{(3)}_{l-n}\right)^{{}_0m^{(3)}_{l-n}}, \qquad \text{(II)}$$

welcher bekanntlich das grösste Glied der Polynomialentwicklung

$$\left( \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1} + p^{(3)}_{l-n} \right)^s \qquad \text{(III)}$$

darstellt.

Wie aber die Erfahrungen lehren, pflegen nicht die Zahlen ${}_0m^{(1)}_{k-1}$, ${}_0m^{(2)}_{k-1}$ und ${}_0m^{(3)}_{l-n}$, sondern irgendwelche anderen Werte $m^{(1)}_{k-1}$, $m^{(2)}_{k-1}$ und $m^{(3)}_{l-n}$ in Erscheinung zu treten, denen die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{s!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(m^{(1)}_{k-1}!)\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(m^{(2)}_{k-1}!)\,(m^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)\;m^{(1)}_{k-1}}_{k-1} \prod_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)\;m^{(2)}_{k-1}}_{k-1}\; p^{(3)\;m^{(3)}_{l-n}}_{l-n}$$

zukommt.

Diese Wahrscheinlichkeit entspricht daher der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(1)}_{k-1}\left(v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(2)}_{k-1}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right) -$$

$$- m^{(3)}_{l-n}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right) \lesseqgtr 0\,.$$

Setzt man in derselben

$$v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^k}{1-v} = C^{(V)}_k$$

und

$$ {}_xV_n + P_x\frac{1-v^k}{1-v} = E^{(V)}_k\,,$$

so beträgt der Erwartungswert ihrer absoluten Beträge

$$\Sigma P \left| \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} E_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)} \right| . \qquad \text{(IV)}$$

Durchläuft $P$ alle Werte der Polynomialentwicklung, so kann man, wie sich später zeigen wird, leicht nachweisen, dass stets ist

$$\Sigma P \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)} \right) = 0 , \qquad \text{(V)}$$

und daher darf man den Ausdruck

$$s\, {}_x R_n = \qquad \text{(VI)}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma P \left| \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)} \right|$$

als das durchschnittliche Risiko der künftigen Dauer hinstellen.

Setzt man nun wiederum für $C_k^{(V)}$, $E_k^{(V)}$ und $E_{l-n}^{(V)}$ die Werte, so erhält man zunächst

$$s\, {}_x R_n = \frac{1}{2} \Sigma P \left| \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - {}_x V_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} \left( {}_x V_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) -$$

$$\left. - m_{l-n}^{(3)} \left( {}_x V_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} \right) \right| . \qquad \text{(VII)}$$

Da aber stets ist

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} + m_{l-n}^{(3)} = s\,,$$

so findet man weiterhin

$$\begin{gathered} {}_s{}_xR_n = \frac{1}{2}\Sigma P \left| \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} P_x \frac{1-v^k}{1-v} - m_{l-n}^{(3)} P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v} - {}_s{}_xV_n \right| . \end{gathered} \tag{VIII}$$

Dieses Ergebnis lässt aber noch eine besondere Deutung zu.

Überlegt man nämlich, dass man die gegenwärtige $n^{\text{te}}$ Reserve des vorhandenen Bestandes der $s$ Versicherten in der Form schreiben kann

$$\begin{gathered} {}_s{}_xV_n = \sum_{k=1}^{k=l-n} s_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) - \\ - \sum_{k=1}^{k=l-n} s_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} P_x \frac{1-v^k}{1-v} - s_{l-n}p_{x+n}^{(3)} P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\,, \end{gathered} \tag{IX}$$

so ist die Folgerung zulässig, dass der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} \left( v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1-v^k}{1-v} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} P_x \frac{1-v^k}{1-v} - m_{l-n}^{(3)} P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}$$

irgendeine andere Reserve vorstellt, im Falle statt der rechnungsmässigen Ereigniszahlen die durch die Zeichen $m_{k-1}^{(1)}$, $m_{k-1}^{(2)}$, $m_{l-n}^{(3)}$ angedeuteten in Erscheinung treten würden.

Bezeichnet man die diesen Ereigniszahlen entsprechende Reserve mit $(s_x V_n)^{(\lambda)}$ und die Wahrscheinlichkeit der letzteren mit $P_{(\lambda)}$, so kann man für (VIII) auch schreiben

$$s_x R_n = \frac{1}{2} \Sigma P_{(\lambda)} \left| (s_x V_n)^{(\lambda)} - (s_x V_n) \right| . \qquad \text{(X)}$$

Hieraus folgt aber der bedeutsame Satz, dass das durchschnittliche fernere Risiko gleich ist der durchschnittlichen Abweichung der rechnungsmässigen Reserve. Hinsichtlich des mittleren Risikos hatte bereits Bohlmann (Lebensversicherungsmathematik; 23. Die Stabilität) diese Tatsache erkannt und somit eine einwandfreiere Darstellung des mittleren ferneren Risikos aufgefunden.

Da es zweifellos recht mühselig ist, die Beträge

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)}$$

in positive und negative zu scheiden, so ist die Darstellung des durchschnittlichen ferneren Risikos einer grösseren Zahl Versicherten in einer leicht berechenbaren Form als eine recht schwierige Aufgabe anzusehen, deren Lösung man bisher nur mit Hülfe des mittleren ferneren Risikos annähernd zu erreichen vermochte.

Beiläufig werde noch erwähnt, dass sich die in der Formel (X) auftretenden Differenzen

$$\Delta\,(s\,{}_xV_n) = (s\,{}_xV_n)' - (s\,{}_xV_n)$$

durch eine besondere Formel darstellen lassen, auf die man durch die Wolffschen Untersuchungen (Über die Abhängigkeit der Prämien und Prämienreserven von Zinsfuss und Sterbetafel, Band XI der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 1911) geführt wird.

Offenbar besteht für den vorgelegten Versicherungsbestand die Beziehung

$${}_0m_{k-1}^{(1)}\, v\, S_{x+n+k} + {}_0m_k^{(3)}\, v\, {}_xV_{n+k} - {}_0m_{k-1}^{(3)}\,({}_xV_{n+k-1} + P_x) = 0\,,$$

wenn

$${}_0m_{k-1}^{(1)} = s\,{}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} = s\,{}_{k-1}p_{x+n}^{(3)}\, p_{x+n+k-1}^{(1)}$$

$${}_0m_k^{(3)} = s\,{}_kp_{x+n}^{(3)} = s\,{}_{k-1}p_{x+n}^{(3)}\, p_{x+n+k-1}^{(3)}$$

und

$$p_{x+n+k-1}^{(3)} = 1 - p_{x+n+k-1}^{(1)} - p_{x+n+k-1}^{(3)}$$

gesetzt wird. Es ergibt sich alsdann die Identität

$$p_{x+n+k-1}^{(1)}\, v\,(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) - p_{x+n+k-1}^{(2)}\, v\, {}_xV_{n+k} =$$

$$= {}_xV_{n+k-1} + P_x - v\, {}_xV_{n+k}\,.$$

Treten nun aber an die Stelle der erwartungsmässigen Zahlen

$${}_0m_{k-1}^{(1)}\,,\quad {}_0m_{k-1}^{(2)}\,,\quad {}_0m_{k-1}^{(3)}$$

die abweichenden Ereigniszahlen

$$m_{k-1}^{(1)}, \; m_{k-1}^{(2)}, \; m_{k-1}^{(3)},$$

so folgt, wenn

$$m_{k-1}^{(1)} = m_{k-1}^{(3)} \; p_{x+n+k-1}^{(1)} + \varepsilon_{k-1}^{(1)}$$

$$m_{k-1}^{(2)} = m_{k-1}^{(3)} \; p_{x+n+k-1}^{(2)} + \varepsilon_{k-1}^{(2)}$$

$$m_{k}^{(3)} = m_{k-1}^{(3)} \; p_{x+n+k-1}^{(3)} + \varepsilon_{k-1}^{(3)}$$

$$\varepsilon_{k-1}^{(1)} + \varepsilon_{k-1}^{(2)} + \varepsilon_{k-1}^{(3)} = 0$$

gesetzt wird,

$$m_{k-1}^{(1)} \, v \, S_{x+n+k} + m_k^{(3)} \, v \, {}_xV_{n+k} - m_{k-1}^{(3)} \left({}_xV_{n+k-1} + P_x\right) = \\ = \varepsilon_{k-1}^{(1)} \, v \left(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}\right) - \varepsilon_{k-1}^{(2)} \, v \, {}_xV_{n+k}. \qquad \text{(XI)}$$

Vermöge dieser Gleichung bilde man die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} \, v^k \, S_{x+n+k} + \sum_{k=1}^{k=l-n} m_k^{(3)} \, v^k \, {}_xV_{n+k} - \\ - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(3)} \, v^{k-1} \left({}_xV_{n+k-1} + P_x\right) = \\ = \sum_{k=1}^{k=l-n} \varepsilon_{k-1}^{(1)} \, v^k \left(S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}\right) - \\ - \sum_{k=1}^{k=l-n} \varepsilon_{k-1}^{(2)} \, v^k \, {}_xV_{n+k}. \qquad \text{(XII)}$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_k^{(3)} v^k {}_x V_{n+k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(3)} v^{k-1} {}_x V_{n+k-1} = - m_0 {}_x V_n = - s {}_x V_n ,$$

ferner

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} v^k S_{x+n+k} = s \mathfrak{A}'_{x+n}$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(3)} v^{k-1} = s \cdot \mathsf{a}'_{x+n} ,$$

wobei die Zeichen $\mathfrak{A}'_{x+n}$ und $\mathsf{a}'_{x+n}$ die Prämienwerte darstellen, die man in Ansatz bringen müsste, wenn man den Verlauf der Ereignisse im voraus kennen würde. Da aber unter diesen Voraussetzungen

$$s (\mathfrak{A}'_{x+n} - P_x \mathsf{a}'_{x+n}) = (s {}_x V_n)'$$

die wahre, jedoch unbekannte Prämienreserve darstellt, so findet man auch

$$\Delta (s {}_x V_n) = \sum_{k=1}^{k=l-n} \varepsilon_{k-1}^{(1)} v^k (S_{x+n+k} - {}_x V_{n+k}) - \sum_{k=1}^{k=l-n} \varepsilon_{k-1}^{(2)} v^k {}_x V_{n+k} \tag{XIII}$$

Die Abweichung der Reserve veranschaulicht also das Ergebnis der Barwerte der Gewinne und Verluste, die durch den unregelmässigen Verlauf der versicherten Ereignisse entstehen.

## B. Mittleres Risiko.

Das fernere mittlere Risiko $s$ gleicher Verträge wird ähnlich berechnet wie die mittlere Abweichung von dem wahrscheinlichsten Werte einer Ereigniszahl (vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 96) oder wie die mittlere Abweichung aller nur möglichen Einzelwerte von ihrem arithmetischen Mittel (vgl. G. F. Lipps „Die psychischen Massmethoden", Abschnitt 15: Die Mittelwerte der Beobachtungsreihen).

Bildet man die Quadrate der Beträge

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n} E_{l-n}^{(V)},$$

multipliziert sie darauf mit den ihnen zukommenden Wahrscheinlichkeiten $P$, und lässt nun die Produkte

$$P\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)}\right)^2$$

alle nur möglichen Werte durchlaufen, so stellt, wenn dieser Summationsprozess durch $\Sigma$ angedeutet wird,

$$(s\,{}_x M_n)^2 = \Sigma P \left(\sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)}\right)^2 \qquad \text{(I)}$$

das Quadrat des ferneren mittleren Risikos dar.

Um demselben eine leicht berechenbare Form zu geben, führe man die Potenzierung mit 2 aus, wodurch man erhält

$$(s_x M_n)^2 = \Sigma P \left[ \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} \right)^2 + \right.$$

$$+ (m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)})^2 - 2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} \right) \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} \right) -$$

$$-2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} \right) (m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)}) +$$

$$\left. +2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} \right) (m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)}) \right]. \qquad \text{(II)}$$

Vermöge der in den soeben angeführten Werken und wohl auch in anderen Schriften erläuterten Kunstgriffe

$$\Sigma P m_{k-1}^{(a)} = s p_{k-1}^{(a)}$$

$$\Sigma P (m_{k-1}^{(a)})^2 = s(s-1)(p_{k-1}^{(a)})^2 + s p_{k-1}^{(a)}$$

$$\Sigma P m_{k_1-1}^{(a)} \cdot m_{k_2-1}^{(b)} = s(s-1) p_{k_1-1}^{(a)} p_{k_2-1}^{(b)}$$

$$\Sigma P m_{k_1-1}^{(a)} m_{k_2-1}^{(a)} = s(s-1) p_{k_1-1}^{(a)} p_{k_2-1}^{(a)},$$

zu deren Auffindung bereits Laplace beigetragen hatte, findet man nun

$$
\begin{aligned}
&(s\,{}_xM_n)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{k=l-n} \left[ s(s-1)\,(p_{k-1}^{(1)})^2 + s\,p_{k-1}^{(1)} \right] (C_k^{(V)})^2 + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=l-n} \left[ s(s-1)\,(p_{k-1}^{(2)})^2 + s\,p_{k-1}^{(2)} \right] (E_k^{(V)})^2 + \\
&\quad + \left[ s(s-1)\,(p_{l-n}^{(3)})^2 + s\,p_{l-n}^{(3)} \right] (E_{l_1-n}^{(V)})^2 + \\
&\quad + 2\,s(s-1) \sum_{k_1 \gtrless k_2 = 1}^{k_1 \gtrless k_2 = l-n} p_{k_1-1}^{(1)}\, p_{k_2-1}^{(2)}\, C_{k_1}^{(V)}\, C_{k_2}^{(V)} + \\
&\quad + 2\,s(s-1) \sum_{k_1 \gtrless k_2 = 1}^{k_1 \gtrless k_2 = l-n} p_{k_1-1}^{(2)}\, p_{k_2-1}^{(2)}\, E_{k_1}^{(V)}\, E_{k_2}^{(V)} - \\
&\quad - 2\,s(s-1) \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^{(V)} \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^{(V)} - \\
&\quad - 2\,s(s-1) \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^{(V)}\, p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^{(V)} + \\
&\quad + 2\,s(s-1) \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, p_{l-n}^{(2)}\, E_k^{(V)}\, E_{l-n}^{(V)}\,. \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} s\,p_{k-1}^{(1)}\,(C_k^{(V)})^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} s\,p_{k-1}^{(2)}\,(E_k^{(V)})^2 + s\,p_{l-n}^{(3)}\,(E_{l-n}^{(V)})^2 \right] + \\
&\quad + s(s-1) \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^{(V)} - p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^{(V)} \right]^2 . \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Nun ist aber in Übereinstimmung mit der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_0m^{(1)}_{k-1}\, C^{(V)}_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_0m^{(2)}_{k-1}\, E^{(V)}_k - {}_0m^{(3)}_{l-n}\, E^{(V)}_{l-n} = 0$$

auch

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C^{(V)}_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E^{(V)}_k - p^{(3)}_{l-n}\, E^{(V)}_{l-n} = 0\,,$$

daher ergibt sich

$$(s\,{}_xM_n)^2 = s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\,(C^{(V)}_k)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\,(E^{(V)}_k)^2 + p^{(3)}_{l-n}\,(E^{(V)}_{l-n})^2\right]. \qquad \text{(IV)}$$

Setzt man für die Zeichen $p^{(1)}_{k-1}$, $p^{(2)}_{k-1}$, $p^{(3)}_{l-n}$, $C^{(V)}_k$, $E^{(V)}_k$, $E^{(V)}_{l-n}$ die Werte, so erhält man die Formel

$$s\,{}_xM_n = \sqrt{s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^k S_{x+n+k} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 + \right.}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 +$$

$$\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right)^2\right], \qquad \text{(V)}$$

welche der Formel (VII) des Abschnittes B des ersten Kapitels entspricht.

Aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes folgt, dass die Formel (V) auch die mittlere Abweichung von der rechnungsmässigen Reserve darstellt. Da aber diese Eigenschaft der mittleren Reserveabweichung von grösster Bedeutung ist, indem sie uns ein Mittel an die Hand gibt, den Fehler zu umgehen, welcher bei der Anrechnung der gar nicht mehr in voller Höhe vorhandenen Deckungsmittel ${}_xV_n r^k + P_x \frac{r(r^k - 1)}{r - 1}$ auf die auszuzahlende Summe $S_{x+n+k}$ scheinbar begangen wird, so folge noch die unmittelbare Berechnung der mittleren Abweichung der Reserve.

Da die letztere durch den Ausdruck dargestellt wird

$$(s\,{}_xM_n)^2 = \Sigma P_\lambda \left((s\,{}_xV_n)^{(\lambda)} - (s\,{}_xV_n)\right)^2 = \tag{VI}$$

$$= \Sigma P \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(1)}_{k-1} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(2)}_{k-1} E_k - m^{(3)}_{l-n} E_{l-n} - s\,{}_xV_n \right)^2,$$

in welchem gesetzt wurde

$$v^k S_{x+n+k} - P_x \frac{1 - v^k}{1 - v} = C_k$$

und

$$P_x \frac{1 - v^k}{1 - v} = E_k\,,$$

so handelt es sich um eine der vorangehenden Entwicklung ganz ähnliche. Durch Auflösen der Quadrate erhält man zunächst

$$(s\,{}_xM_n)^2 =$$

$$= \Sigma P \left[ \left( \sum_{k=1}^{k=l_1-n} m_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n} \right)^2 \right.$$

$$- 2 \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{n-1}^{(2)} E_k - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n} \right) (s\,{}_xV_n) +$$

$$\left. + (s\,{}_xV_n)^2 \right].$$

Nun findet man aber durch Berücksichtigung der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} E_k - p_{l-n}^{(3)} E_{l-n} = {}_xV_n$$

erstens

$$\Sigma P \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n} \right)^2$$

$$= s \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} E_k^2 + p_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^2 \right]$$

$$+ s\,(s-1) \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} E_k - p_{l-n}^{(3)} E_{l-n} \right]^2$$

$$= s \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} E_k^2 + p_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^2 \right] + s\,(s-1)\,({}_xV_n)^2$$

und zweitens

$$2\sum P\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(1)}_{k-1}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(2)}_{k-1}\, E_k - m^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}\right)(s\,{}_x V_n)$$

$$= 2s\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E_k - p^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}\right)(s\,{}_x V_n)$$

$$= 2\,(s\,{}_x V_n)^2\,.$$

Drittens folgt

$$\sum P\,(s\,{}_x V_n)^2 = (s\,{}_x V_n)^2.$$

Daher gelangt man zu dem Ergebnisse

$$(s\,{}_x M_n)^2 = s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E_k^2 + p^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}^2\right]$$

$$+\, s\,(s-1)\,({}_x V_n)^2 - 2\,(s\,{}_x V_n)^2 + (s\,{}_x V_n)^2$$

oder

$$(s\,{}_x M_n)^2 = \tag{VII}$$

$$= s\left[\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E_k^2 + p^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}^2\right) - ({}_x V_n)^2\right].$$

Hiernach liegt aber die wahre Gesamtreserve innerhalb der Grenzen

$$({s}\,{}_xV_n)' = s\,{}_xV_n \pm \qquad \text{(VIII)}$$

$$\pm \sqrt{s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C^2_k + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E^2_k + p^{(3)}_{l-n}\, E^2_{l-n} - ({}_xV_n)^2\right]}.$$

Weiterhin hat man umgekehrt zu zeigen, dass die mittlere Abweichung der Reserve gleich dem mittleren Risiko ist. Zu diesem Zwecke braucht man aber nur die Umformung vorzunehmen

$$(s\,{}_xM_n)^2 = s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C^2_k + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E^2_k + p^{(3)}_{l-n}\, E^2_{l-n} - \right.$$

$$\left. - 2\,({}_xV_n)^2 + ({}_xV_n)^2\right]$$

$$= s\left\{\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C^2_k + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E^2_k + p^{(3)}_{l-n}\, E^2_{l-n}\right]\right.$$

$$-2\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E_k - p^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}\right] {}_xV_n$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1} + p^{(3)}_{l-n}\right) ({}_xV_n)^2\right\}$$

$$= s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\left(C^2_k - 2\,C_k\,{}_xV_n + ({}_xV_n)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\left(E^2_k + 2\,E_k\,{}_xV_n + ({}_xV_n)^2\right)\right]$$

$$+p^{(3)}_{l-n}\left[E^2_{l-n}-2\,E_{l-n\;x}V_n+({}_xV_n)^2\right]$$

$$=s\left[\sum_{k=1}^{k=l-n}p^{(1)}_{k-1}(C_k-{}_xV_n)^2+\sum_{k=1}^{k=l-n}p^{(2)}_{k-1}(E_k+{}_xV_n)^2+\right.$$

$$\left.+p^{(3)}_{l-n}(E_{l-n}+{}_xV_n)^2\right]. \qquad \text{(IX)}$$

Führt man abermals für die Zeichen $p^{(1)}_{k-1}$, $p^{(2)}_{k-1}$, $p^{(3)}_{l-n}$, $C_k$, $E_k$, $E_{l-n}$ die dem Vertrage eigentümlichen Grössen ein, so erhält man wiederum die Formel (V).

## C. Die Herleitung der Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes auf kombinatorischer Grundlage.

### *1. Das Risiko auf Grund der Wahrscheinlichkeiten a priori.*

Eine Abweichung von der Gewinn- und Verlustgleichung

$$(s\,{}_xG_n)=0$$

findet man, indem man in der Gleichung

$$(s\,{}_xG_n)'=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=l-n}m^{(1)}_{k-1}\,C^{(V)}_k-\sum_{k=1}^{k=l-n}m^{(2)}_{k-1}\,E^{(V)}_k-m^{(3)}_{l-n}\,E^{(V)}_{l-n}\gtrless 0 \quad (1)$$

setzt

$$m^{(1)}_{k-1}=s\,p^{(1)}_{k-1}+u^{(1)}_{k-1},\; m^{(2)}_{k-1}=s\,p^{(2)}_{k-1}+u^{(2)}_{k-1},$$

$$m^{(3)}_{l-n}=s\,p^{(3)}_{l-n}+u^{(3)}_{l-n} \qquad (2)$$

und darauf die Gleichung

$$({}_{s}{}_{x}G_{n}) =$$

$$= s\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C^{(V)}_{k} - s\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E^{(V)}_{k} - s\, p^{(3)}_{l-n}\, E^{(V)}_{l-n} = 0 \quad (3)$$

abzieht, es ergibt sich sodann

$$K_1 = ({}_{s}{}_{x}G_{n})' - ({}_{s}{}_{x}G_{n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} u^{(1)}_{k-1}\, C^{(V)}_{k} - \sum_{k=1}^{k=l-n} u^{(2)}_{k-1}\, E^{(V)}_{k} - u^{(3)}_{l-n}\, E^{(V)}_{l-n}\,. \quad \text{(I)}$$

Anderseits gelangt man zu einer Beziehung der Abweichung von der rechnungsmässigen Reserve, indem man von der abweichenden Reserve

$$({}_{s}{}_{x}V_{n})' = \sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(1)}_{k-1}\, C_{k} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m^{(2)}_{k-1}\, E_{k} - m^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n} \quad (4)$$

die rechnungsmässige Reserve

$$({}_{s}{}_{x}V_{n}) = s\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1}\, C_{k} - s\sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1}\, E_{k} - s\, p^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n} \quad (5)$$

unter Beachtung der Gleichungen (2) abzieht. Man erhält auf diese Weise

$$K_2 = ({}_{s}{}_{x}V_{n})' - ({}_{s}{}_{x}V_{n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=l-n} u^{(1)}_{k-1}\, C_{k} - \sum_{k=1}^{k=l-n} u^{(2)}_{k-1}\, E_{k} - u^{(3)}_{l-n}\, E_{l-n}\,. \quad \text{(II)}$$

Beachtet man weiterhin, dass die Beziehungen stattfinden

$$C_k^{(V)} = C_k - {}_xV_n\,,\ E_k^{(V)} = E_k + {}_xV_n\,,\ E_{l-n}^{(V)} = E_{l-n} + {}_xV_n\,;$$

und dass wegen

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} + \sum\limits_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} + m_{l-n}^{(3)} = s \\ \text{und} \\ s\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + s\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + s\,p_{l-n}^{(3)} = s \end{array}\right\} \tag{6}$$

stets sein muss

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} + u_{l-n}^{(3)} = 0\,, \tag{III}$$

so findet man, dass immer die Gleichung besteht

$$K_1 = K_2 = K. \tag{IV}$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit der Abweichung $K$ zu finden, gehe man von der Wahrscheinlichkeit aus

$$P = \frac{s!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(m_{k-1}^{(1)}!)\ \prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(m_{k-1}^{(2)}!)\ (m_{l-n}^{(3)}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} {p_{k-1}^{(1)}}^{m_{k-1}^{(1)}} \prod_{k=1}^{k=l-n} {p_{k-1}^{(2)}}^{m_{k-1}^{(2)}}\, {p_{l-n}^{(3)}}^{m_{l-n}^{(3)}} \tag{V}$$

und setze in derselben

$$m_{k-1}^{(a)} = s\,p_{k-1}^{(a)} + u_{k-1}^{(a)}\,,$$

so ergibt sich

$$P(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{l-n}^{(3)}) =$$

$$= s! \prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\left(p_{k-1}^{(1)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)}}{\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)!} \prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\left(p_{k-1}^{(2)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)}}{\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)!}$$

$$\frac{\left(p_{l-n}^{(3)}\right)^{\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}}{\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)!}.$$

Wie beim einfachen Bernoullischen Theoreme verfahrend, wende man zunächst die vereinfachte Stirlingsche Formel

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^x\, e^{-x}$$

an und beachte, dass stets ist

$$e^{-s} = e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=l-n}\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)-\sum\limits_{k=1}^{k=l-n}\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)-\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}.$$

Man bekommt sodann

$$P(u_0^{(1)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{l-n}^{(3)}) =$$

$$= \sqrt{2\pi s} \prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\left(sp_{k-1}^{(1)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)}}{\sqrt{2\pi\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)}\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\left(sp_{k-1}^{(2)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)}}{\sqrt{2\pi\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)}\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)^{\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)}}$$

$$\frac{\left(sp_{l-n}^{(3)}\right)^{\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}}{\sqrt{2\pi\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(2)}\right)^{\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}}.$$

Weiterhin entwickle man die leicht darstellbare Reihe

$$\sqrt{\frac{s\,p_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right)+$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right)^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right)^3+\ldots$$

Nimmt man darauf an, dass die Abweichungen $u_{k-1}^{(a)}$ von der Ordnung $\sqrt{s}$ sind, so kann man in der Voraussetzung, dass $s$ eine sehr grosse Zahl ist, setzen

$$\sqrt{\frac{s\,p_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}}}=1\,,\text{ und mithin }\frac{1}{\sqrt{s\,p_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s\,p_{k-1}^{(a)}}}\,.$$

Es ergibt sich somit

$$P\left(u_0^{(1)},\,u_1^{(1)},\ldots,\,u_0^{(2)},\,u_1^{(2)},\ldots,\,u_{l-n}^{(3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi s}\right)^{2(l-n)}\sqrt{p_0^{(1)}\,p_1^{(1)}\ldots p_0^{(2)}\,p_1^{(2)}\ldots p_{l-n}^{(3)}}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(1+\frac{u_{k-1}^{(1)}}{s\,p_{k-1}^{(1)}}\right)^{-\left(sp_{k-1}^{(1)}+u_{k-1}^{(1)}\right)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(1+\frac{u_{k-1}^{(2)}}{s\,p_{k-1}^{(2)}}\right)^{-\left(sp_{k-1}^{(2)}+u_{k-1}^{(2)}\right)}\left(1+\frac{u_{l-n}^{(3)}}{s\,p_{l-n}^{(3)}}\right)^{-\left(sp_{l-n}^{(3)}+u_{l-n}^{(3)}\right)}.$$

In dieser Entwicklung setze man zuvörderst

$$\left(1+\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right)^{-\left(sp_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}\right)} = e^{-\left(sp_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}\right)\,ln\left(1+\frac{u_{k-1}^{(a)}}{sp_{k-1}^{(a)}}\right)}.$$

Weil nun aber näherungsweise ist

$$-\left(s\,p_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}\right) ln\left(1+\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right) \doteq$$

$$= -\left(s\,p_{k-1}^{(a)}+u_{k-1}^{(a)}\right)\left(\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{k-1}^{(a)}}{s\,p_{k-1}^{(a)}}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= -u_{k-1}^{(a)}-\frac{\left(u_{k-1}^{(a)}\right)^2}{2\,s\,p_{k-1}^{(a)}},$$

so erhält man mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)}+\sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)}+u_{l-n}^{(3)}=0$$

den Ausdruck

$$P\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{l-n}^{(3)}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi s}\right)^{2(l-n)}\sqrt{p_0^{(1)}\,p_1^{(1)}\ldots p_0^{(2)}\,p_1^{(2)}\ldots p_{l-n}^{(3)}}}$$

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=l-n}\frac{\left(u_{k-1}^{(1)}\right)^2}{2sp_{k-1}^{(1)}}-\sum\limits_{k=1}^{k=l-n}\frac{\left(u_{k-1}^{(2)}\right)^2}{2sp_{k-1}^{(2)}}-\frac{\left(u_{l-n}^{(3)}\right)^2}{2sp_{l-n}^{(3)}}}, \qquad \text{(VI)}$$

welcher zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Abweichung

$$K = \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} E_k - u_{l-n}^{(3)} E_{l-n}$$

jedoch nur verwendet werden kann, indem man zur Vereinfachung setzt

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} + u_{l-n}^{(3)} = \sum_{k=1}^{k=\nu} z_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + p_{l-n}^{(3)} = \sum_{k=1}^{k=\nu} w_k = 1$$

und

$$K = \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} E_k - u_{l-n}^{(3)} E_{l-n} = \sum_{k=1}^{k=\nu} z_k c_k .$$

Durch eine Reihe bekannter Berechnungsvorgänge, auf die der Verfasser infolge ihrer Weitläufigkeit hier nicht eingehen möchte, findet man alsdann für die Wahrscheinlichkeit der Abweichung $K$ das bekannte Exponentialgesetz

$$P(K) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 K^2},$$

in welchem die Präzision $H$ den Wert hat

$$H = \frac{1}{\sqrt{2s\left[\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k\right)^2\right]}} .$$

Die Funktion $K$ als beständig veränderlich betrachtend, kann man nun mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

annehmen, dass $K$ innerhalb der Grenzen liege

$$\pm\, \gamma \sqrt{2\, s \left[ \sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k^2 - \left( \sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k \right)^2 \right]}. \qquad \text{(VII)}$$

Dieser Ausdruck heisse fortan „Ferneres Risiko“. Bereits von Laplace aufgefunden, hat er zunächst Laurent und später auch Hausdorff zum Ausgangspunkte ihrer Untersuchungen gedient.

Im vorliegenden Falle tritt an die Stelle der Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k^2$$

der Wert

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^2 + p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^2 = {}_x\mathcal{M}_n^2,$$

während man für

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k$$

zu setzen hat

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k - p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n} = {}_x V_n\,.$$

Man erhält also wiederum

$$s\,{}_xM_n = \pm \sqrt{s\left[({}_x\mathcal{M}_n)^2 - ({}_xV_n)^2\right]}$$

und daher

$$(s\,{}_xG_n)' = \pm\,\gamma\sqrt{2\,s}\,{}_xM_n \quad ({}_xG_n = 0)$$

oder

$$(s\,{}_xV_n)' = (s\,{}_xV_n) \pm \gamma\sqrt{2\,s}\,{}_xM_n\,.$$

## 2. *Das Risiko auf Grund der Wahrscheinlichkeiten a posteriori* [1]).

Zur Darstellung der Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes bei Anwendung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* ist es zunächst erforderlich, die bekannte Formel von Condorcet zu verallgemeinern.

In der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse $x^{(1)}_{k-1}$, $x^{(2)}_{k-1}$, $x^{(3)}_{l-n}$ bekannt seien, würde die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben sein durch den Ausdruck

$$P = \frac{s!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} ({}_0m^{(1)}_{k-1}!)\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} ({}_0m^{(2)}_{k-1}!)\,({}_0m^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x^{(1)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(1)}_{k-1}} \prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x^{(2)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(2)}_{k-1}} \left(x^{(3)}_{l-n}\right)^{{}_0m^{(3)}_{l-n}}.$$

---

[1]) Siehe hierzu auch: *E. Blaschke,* Vorlesungen über mathematische Statistik, § 46. Die Versicherungsprämie.

Da nun aber die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse entgegen der zunächst gemachten Annahme unbekannt sind, so hat man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Kombination $({}_0m_0^{(1)}, {}_0m_1^{(1)}, \ldots, {}_0m_0^{(2)}, {}_0m_1^{(2)}, \ldots, {}_0m_{l-n}^{(3)})$ stattgefunden hat, während den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse die vorausgesetzten Werte zukamen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt nach der Lehre von der wahrscheinlichsten Hypothese

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(1)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(1)}} \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(2)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(2)}} \left(x_{l-n}^{(3)}\right)^{{}_0m_{l-n}^{(3)}}}{\int\limits_0^1 \!\!\!\!\!{}_{2(l-n)+1} \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(1)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(1)}} \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(2)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(2)}} \left(x_{l-n}^{(3)}\right)^{{}_0m_{l-n}^{(3)}} \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} dx_{k-1}^{(1)} \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} dx_{k-1}^{(2)}\, dx}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)} = 1\right)$$

denn der Faktor

$$\frac{s!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(1)}!\right) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(2)}!\right) \left({}_0m_{l-n}^{(3)}!\right)}$$

kann aus dem Zähler und dem Nenner durch Heben entfernt werden. Um die Integration des Nenners in möglichst einfacher Weise zu bewirken, suche man zunächst nach dem Ausdrucke, welcher die Bedingung

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)} \leqq \xi$$

befriedigt.

Zu diesem Zwecke multipliziere man das den Nenner an Grösse zweifellos übertreffende Integralprodukt

$$J = \prod_{k=1}^{k=l-n} \int_0^\infty \left(x_{k-1}^{(1)}\right)^{0^{m_{k-1}^{(1)}}} d\,x_{k-1}^{(1)} \prod_{k=1}^{k=l-n} \int_0^\infty \left(x_{k-1}^{(2)}\right)^{0^{m_{k-1}^{(2)}}} d\,x_{k-1}^{(2)}$$

$$\int_0^\infty \left(x_{l-n}^{(3)}\right)^{0^{m_{l-n}^{(3)}}} d\,x_{l-n}^{(3)}$$

in Anlehnung an Natani (Die höhere Analysis, Berlin, 1866) mit dem Diskontinuitätsfaktor

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum\limits_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)}\right) zi} \frac{\sin \xi z}{z} d z,$$

welcher den Wert 1 hat, solange die obige Bedingung erfüllt wird, und zu Null wird, sofern die Ungleichung besteht

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)} > \xi\,.$$

Nach Ausführung der Multiplikation hat man

$$J(0,\xi)=\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{k=l-n}\int_0^\infty (x_{k-1}^{(1)})^{{}_0m_{k-1}^{(1)}}\, e^{-x_{k-1}^{(1)}zi}\, d\,x_{k-1}^{(1)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n}\int_0^\infty (x_{k-1}^{(2)})^{{}_0m_{k-1}^{(2)}}\, e^{-x_{k-1}^{(2)}zi}\, d\,x_{k-1}^{(2)}$$

$$\int_0^\infty (x_{l-n}^{(3)})^{{}_0m_{l-n}^{(3)}}\, e^{-x_{l-n}^{(3)}zi}\, d\,x_{l-n}^{(3)}\int_0^\infty \frac{\sin\xi z}{z}\, d\,z,$$

und da bekanntlich ist

$$\int_0^\infty x^m\, e^{-xzi}\, d\,x=\frac{m\,!}{(z\,i)^{m+1}},$$

so folgt ferner

$$J(0,\xi)=\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{k=l-n}({}_0m_{k-1}^{(1)}!)\prod_{k=1}^{k=l-n}({}_0m_{k-1}^{(2)}!)\,({}_0m_{l-n}^{(3)}!)$$

$$\int_0^\infty (z\,i)^{-[s+2(l-n)+1]}\,\frac{\sin\xi z}{z}\, d\,z.$$

Um das noch vorhandene Integral zu entfernen, wende man die Methode des Diskontinuitäsfaktors auf das einfache Integral an

$$U=\int_0^h x^{k-1}\, d\,x=\frac{1}{k}\, h^k.$$

Es ergibt sich sodann

$$\frac{1}{k}\, h^k = \int_0^\infty x^{k-1}\, d\,x\, \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-xzi}\, \frac{\sin h\, z}{z}\, d\,z =$$

$$= \int_0^\infty x^{k-1}\, e^{-xzi}\, d\,x\, \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin h\, z}{z}\, d\,z$$

$$= \frac{(k-1)\,!}{(z\,i)^k}\, \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin h\, z}{z}\, d\,z\,,$$

woraus folgt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty (z\,i)^{-k}\, \frac{\sin h\, z}{z}\, d\,z = \frac{h^k}{k\,!}\,.$$

Mit Benutzung dieser Formel erhält man aber den Integralwert

$$J(0,\xi) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0 m^{(1)}_{k-1}\,!\right) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0 m^{(2)}_{k-1}\,!\right) \left({}_0 m^{(3)}_{l-n}\,!\right)}{[s+2(l-n)+1]\,!}\; \xi^{[s+2(l-n)+1]}\,.$$

Da jedoch nicht nach dem Integrale gesucht wird, welches der Summe

$$0 < \sum_{k=1}^{k=l-n} x^{(1)}_{k-1} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x^{(2)}_{k-1} + x^{(3)}_{l-n} < 1$$

entspricht, sondern nach dem Ausdrucke, welcher der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)} = 1$$

genügt, so muss man noch nach $\xi$ differenzieren. Es ergibt sich dadurch der Wert

$$J(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(1)}!\right) \prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(2)}!\right) \left({}_0m_{l-n}^{(3)}!\right)}{[s+2(l-n)]!} \, \xi^{[s+2(l-n)]},$$

welcher die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} x_{k-1}^{(2)} + x_{l-n}^{(3)} = \xi$$

befriedigt. Setzt man daher noch $\xi = 1$, so ergibt sich der gesuchte Ausdruck

$$J(1) = \frac{\prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(1)}!\right) \prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(2)}!\right) \left({}_0m_{l-n}^{(3)}!\right)}{[s+2(l-n)]!},$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit hat somit den Wert

$$\frac{[s+2(l-n)]!}{\prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(1)}!\right) \prod_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m_{k-1}^{(2)}!\right) \left({}_0m_{l-n}^{(3)}!\right)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(1)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(1)}} \prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x_{k-1}^{(2)}\right)^{{}_0m_{k-1}^{(2)}} \left(x_{l-n}^{(3)}\right)^{{}_0m_{l-n}^{(3)}}.$$

Bei Vorausschickung der Wahrscheinlichkeiten $x^{(1)}_{k-1}$, $x^{(2)}_{k-1}$, $x^{(3)}_{l-n}$ beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die in Frage kommenden Ereignisse bei $\varsigma$ weiteren Versuchen beziehungsweise $\mu^{(1)}_{k-1}$, $\mu^{(2)}_{k-1}$, $\mu^{(3)}_{l-n}$ mal in beliebiger Reihenfolge eintreten werden

$$\frac{\varsigma!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(\mu^{(1)}_{k-1}!)\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(\mu^{(2)}_{k-1}!)(\mu^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(x^{(1)}_{k-1}\right)^{\mu^{(1)}_{k-1}}\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(x^{(2)}_{k-1}\right)^{\mu^{(2)}_{k-1}}\left(x^{(3)}_{l-n}\right)^{\mu^{(3)}_{l-n}}.$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit der nacheinander stattfindenden Erscheinungen beträgt somit

$$\frac{[s+2(l-n)]!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l_1-n}({}_0m^{(1)}_{k-1}!)\prod\limits_{k=1}^{k=l_1-n}({}_0m^{(2)}_{k-1}!)({}_0m^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\frac{\varsigma!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(\mu^{(1)}_{k-1}!)\prod\limits_{k=1}^{k=l-n}(\mu^{(2)}_{k-1}!)(\mu^{(3)}_{l-n}!)}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(x^{(1)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(1)}_{k-1}+\mu^{(1)}_{k-1}}\prod_{k=1}^{k=l-n}\left(x^{(2)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(2)}_{k-1}+\mu^{(2)}_{k-1}}\left(x^{(3)}_{l-n}\right)^{{}_0m^{(3)}_{k-1}+\mu^{(3)}_{l-n}}.$$

Da man aber die Wahrscheinlichkeiten $x^{(1)}_{k-1}$, $x^{(2)}_{k-1}$, $x^{(3)}_{l-n}$ nicht kennt, so hat man diesen Wahrscheinlichkeiten alle nur möglichen Werte zu erteilen, welche der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n}x^{(1)}_{k-1}+\sum_{k=1}^{k=l-n}x^{(2)}_{k-1}+x^{(3)}_{l-n}=1$$

genügen. Um die dadurch erforderlich werdenden Integrationen auszuführen, braucht man nur die bereits vor Augen geführten Berechnungen zu wiederholen. In Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnisse findet man sodann

$$\overline{\underline{\int \cdots \int}} \prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x^{(1)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(1)}_{k-1}+\mu^{(1)}_{k-1}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \left(x^{(2)}_{k-1}\right)^{{}_0m^{(2)}_{k-1}+\mu^{(2)}_{k-1}} \left(x^{(3)}_{l-n}\right)^{{}_0m^{(3)}_{l-n}+\mu^{(3)}_{l-n}} \cdot$$

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} d\,x^{(1)}_{k-1} \prod_{k=1}^{k=l-n} d\,x^{(2)}_{k-1}\, d\,x^{(3)}_{l-n}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(1)}_{k-1}+\mu^{(1)}_{k-1}\right)! \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(2)}_{k-1}+\mu^{(2)}_{k-1}\right)! \left({}_0m^{(3)}_{l-n}+\mu^{(3)}_{l-n}\right)!}{[s+\varsigma+2(l-n)]!}.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich also der Ausdruck

$$W = \frac{[s+2(l-n)]!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(1)}_{k-1}!\right) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(2)}_{k-1}!\right) \left({}_0m^{(3)}_{l-n}!\right)}.$$

$$\cdot \frac{\varsigma!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(\mu^{(1)}_{k-1}!\right) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left(\mu^{(2)}_{k-1}!\right) \left(\mu^{(3)}_{l-n}!\right)} \cdot$$

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(1)}_{k-1}+\mu^{(1)}_{k-1}\right)! \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left({}_0m^{(2)}_{k-1}+\mu^{(2)}_{k-1}\right)! \left({}_0m^{(3)}_{l-n}+\mu^{(3)}_{l-n}\right)!}{[s+\varsigma+2(l-n)]!}. \tag{I}$$

Zwischen den Zahlen ${}_0m^{(1)}_{k-1}$, ${}_0m^{(2)}_{k-1}$, ${}_0m^{(3)}_{l-n}$ einerseits und $s$ andererseits bestehen dabei die bekannten Beziehungen

$$ {}_0m^{(1)}_{k-1} = s p^{(1)}_{k-1},\quad {}_0m^{(2)}_{k-1} = s p^{(2)}_{k-1},\quad {}_0m^{(3)}_{l-n} = s p^{(3)}_{l-n}, \tag{a} $$

während man zwischen den Zahlen $\mu^{(1)}_{k-1}$, $\mu^{(2)}_{k-1}$, $\mu^{(3)}_{l-n}$ einerseits und $\varsigma$ andererseits die Beziehungen zu bilden hat

$$ \left.\begin{aligned} \mu^{(1)}_{k-1} &= {}_0\mu^{(1)}_{k-1} + u^{(1)}_{k-1} = \varsigma p^{(1)}_{k-1} + u^{(1)}_{k-1} \\ \mu^{(2)}_{k-1} &= {}_0\mu^{(2)}_{k-1} + u^{(2)}_{k-1} = \varsigma p^{(2)}_{k-1} + u^{(2)}_{k-1} \\ \mu^{(3)}_{l-n} &= {}_0\mu^{(3)}_{l-n} + u^{(3)}_{l-n} = \varsigma p^{(3)}_{l-n} + u^{(3)}_{l-n} \end{aligned}\right\}. \tag{b} $$

Setzt man die Werte (a) und (b) in die Formel (I) ein, so erhält man die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen $u^{(1)}_{k-1}$, $u^{(2)}_{k-1}$, $u^{(3)}_{l-n}$

$$ W = \frac{[s+2(l-n)]!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} (s p^{(1)}_{k-1}!) \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} (s p^{(2)}_{k-1}!)\,(s p^{(3)}_{l-n}!)} $$

$$ \frac{\varsigma!}{[s+\varsigma+2(l-n)]!} $$

$$ \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left[(s+\varsigma) p^{(1)}_{k-1} + u^{(1)}_{k-1}\right]! \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} \left[(s+\varsigma) p^{(2)}_{k-1} + u^{(2)}_{k-1}\right]!}{\prod\limits_{k=1}^{k=l-n} (\varsigma p^{(1)}_{k-1} + u^{(1)}_{k-1})! \prod\limits_{k=1}^{k=l-n} (\varsigma p^{(2)}_{k-1} + u^{(2)}_{k-1})!} $$

$$ \frac{\left[(s+\varsigma) p^{(3)}_{l-n} + u^{(3)}_{l-n}\right]!}{(\varsigma p^{(3)}_{l-n} + u^{(3)}_{l-n})!} $$

Um diesen Ausdruck in einen für die Integration geeigneten Näherungsausdruck umzuwandeln, hat man auf sämtliche Fakultäten die Stirlingsche Näherungsformel anzuwenden und darauf wie bei der Darstellung des einfachen Bernoullischen Theorems zu verfahren. Nach Vornahme mehrfacher Vereinfachungen findet man sodann für die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen $u_{k-1}^{(1)}$, $u_{k-1}^{(2)}$, $u_{l-n}^{(3)}$ das Gebilde

$$W\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_{l-n}^{(3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left[2\pi\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)\right]^{l-n} \sqrt{p_0^{(1)} p_1^{(1)} \ldots p_0^{(2)} p_1^{(2)} \ldots p_{l-n}^{(3)}}}$$

$$e^{-\frac{1}{\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)}\left(\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} \frac{\left(u_{k-1}^{(1)}\right)^2}{2p_{k-1}^{(1)}} + \sum\limits_{h=1}^{k=l-n} \frac{\left(u_{k-1}^{(2)}\right)^2}{2p_{k-1}^{(1)}} + \frac{\left(u_{l-n}^{(3)}\right)^2}{2p_{l-n}^{(3)}}\right)}, \quad \text{(III)}$$

welches eine grosse Ähnlichkeit mit dem Ausdrucke (VI) des vorangehenden Abschnittes aufweist.

Die vorstehende Wahrscheinlichkeit kann nun ebenfalls dazu verwendet werden, die Wahrscheinlichkeit der Abweichung

$$K = \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} E_k - u_{l-n}^{(3)} E_{l-n}$$

darzustellen.

Setzt man wie im vorigen Abschnitte zur Vereinfachung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)} + u_{l-n}^{(3)} = \sum_{k=1}^{k=\nu} z_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + p_{l-n}^{(3)} = \sum_{k=1}^{k=\nu} w_k = 1\,,$$

und

$$K = \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(1)}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} u_{k-1}^{(2)}\, E_k - u_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n} = \sum_{k=1}^{k=\nu} z_k\, c_k$$

und eliminiert noch $z_\nu$ vermöge der Bedingungsgleichung $\sum_{k=1}^{k=\nu} z_k = 0$, so wird die Aufgabe wieder darauf zurückgeführt, mittels des Wahrscheinlichkeitsgesetzes

$$C e^{-\sum\limits_{k,\,i=1,\,2,\,\ldots,\,\nu-1} a_{k,\,i}\, x_k\, x_i}$$

das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Funktion

$$K = \sum_{k=1}^{k=\nu-1} (c_k - c_\nu)\, z_k$$

darzustellen.

Dieses hat aber die Form

$$P(K) = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2 K^2}\,,$$

wobei $H$ nach der Formel zu berechnen ist

$$H^2 = \frac{D_{\nu-1}}{\sum\limits_{k,\,i=1,\,2,\,\ldots,\,\nu-1} (-1)^{k+i}\, \Delta_{k,i}\, (c_k - c_\nu)\, (c_i - c_\nu)}\,. \tag{IV}$$

Hierin bedeutet $D_{\nu-1}$ die Determinante der Koeffizienten $a_{k,\,i}$, $\Delta_{k,\,k}$ die aus $D_{\nu-1}$ hervorgehende Unterdeterminante von $a_{k,\,k}$ und $\Delta_{k,\,i}$ die sich aus $D_{\nu-1}$ ergebende Unterdeterminante von $a_{k,\,i}$.

Weitere Untersuchungen ergeben, dass man im vorliegenden Falle auch setzen kann

$$H^2 = \frac{1}{2\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)\left[\sum_{k=1}^{k=\nu-1} w_k(1-w_k)(c_k-c_\nu)^2 - \sum_{k\gtrless i=1}^{k\gtrless i=\nu-1} w_k w_i (c_k-c_\nu)(c_i-c_\nu)\right]}. \tag{V}$$

Durch Entwicklung der Quadrate $(c_k - c_\nu)^2$ und der Produkte $(c_k - c_\nu)(c_i - c_\nu)$ geht aber der vorstehende Ausdruck nach zweckentsprechender Vereinigung zusammengehöriger Glieder über in

$$H^2 = \frac{1}{2\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)\left[\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k\right)^2\right]}. \tag{VI}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$$

kann man somit erwarten, dass die Abweichung $K$ innerhalb der Grenzen

$$\pm \gamma \sqrt{2\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)\left[\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k c_k\right)^2\right]} \tag{VII}$$

liegen werde.

Für die hier in erster Linie betrachtete Versicherungsart war

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^2 + p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^2 = {}_x\mathcal{M}_n^2$$

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} w_k\, c_k = \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k - p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n} = {}_xV_n,$$

daher beträgt das Risiko auf Grund der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit

$$\pm\gamma\sqrt{2\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)\left({}_x\mathcal{M}_n^2 - ({}_xV_n)^2\right)} =$$

$$= \pm\gamma\sqrt{2\varsigma\left(1+\frac{\varsigma}{s}\right)}\, {}_xM_n. \qquad \text{(VIII)}$$

Ist die Zahl $\varsigma$ im Verhältnis zu der Zahl $s$ nur klein, so wird man den Bruch $\frac{\varsigma}{s}$ vernachlässigen können. Alsdann geht aber die Formel (VIII) in die verbreitetere des Abschnittes 1 über, welche sogar ungeachtet ihrer einfacheren Entstehung als die bedeutsamere anzusehen ist, weil in der Praxis eben nur Fälle vorkommen, in denen $\varsigma$ weit kleiner als $s$ ist.

## D. Das Hattendorffsche Risiko.

*1.*

Nimmt man an, dass während der $(k-1)$ folgenden Versicherungsjahre irgendwelche Abweichungen von den wahrscheinlichen Ereigniszahlen stattfinden können, so erscheint es unstatthaft, die von $s$ im Alter $(x+n)$ vorhandenen Teilnehmern in das $(n+k)^{\text{te}}$ Versicherungsjahr Eintretenden durch die wahrscheinlichste Zahl $s_{k-1} p_{x+n}^{(3)}$ auszudrücken. Zieht man aber in Erwägung, dass die Verwaltung eines Bestandes von Versicherungen in der Weise erfolgt, dass alljährlich nur die Abweichungen von den rechnungsmässigen Ereigniszahlen betrachtet werden, ohne dass auf die Gebarungen der verflossenen Jahre zurückgegriffen wird, so genügt es zweifelsohne, auch bei Schätzungen künftiger Vorgänge, immer nur jene Abweichungen zu bewerten, welche in den grade betrachteten Versicherungsjahren stattfinden können. Diese Anschauung leitete Hattendorff bei der Herleitung des Risikos der ferneren Dauer, und es gelang ihm auf diese Weise, den nach ihm benannten Ausdruck des Risikos der ferneren Dauer herzuleiten. Folgt man dem Vorgange Hattendorffs, so kann man die Berechnung des Risikos des kommenden $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres auf die Berechnung des jährlichen Risikos zurückführen.

In seiner früheren Arbeit hatte der Verfasser bei Benutzung einer etwas einfacheren Bezeichnungsweise gezeigt, dass die Abweichungen des $(n+k)^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres einer hinreichend grossen Gruppe von $s_{x+n+k-1}$ Versicherungen der hier beschriebenen Art ein Fehlergesetz von der Gaussschen Form

$$P(\varDelta_{n+k}) = \frac{\eta_{n+k}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2_{n+k} \varDelta^2_{n+k}}$$

befolgen. Die finanzielle Abweichung des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres ergibt sich dabei aus dem Ansatze

$$\varDelta_{n+k} = (s_{x+n+k-1}\, p^{(1)}_{x+n+k-1} + \delta_1)\, v\, (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) -$$

$$- (s_{x+n+k-1}\, p^{(2)}_{x+n+k-1} + \delta_2)\, (v\, {}_xV_{n+k}) -$$

$$- (s_{x+n+k-1}\, ({}_x\Pi_{n+k})$$

$$= \delta_1\, v\, (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) - \delta_2\, (v\, {}_xV_{n+k})\,.$$

Die Präzision $\eta_{n+k}$ kann nach der Formel berechnet werden

$$\eta_{n+k} = 1 : \sqrt{2\, s_{x+n+k-1} \Big[ p^{(1)}_{x+n+k-1} (v\, S_{x+n+k} - v\, {}_xV_{n+k} - {}_x\Pi_{n+k})^2 + p^{(2)}_{x+n+k-1} (v\, {}_xV_{n+k} + {}_x\Pi_{n+k})^2 + p^{(3)}_{x+n+k-1} ({}_x\Pi_{n+k})^2 \Big]}$$

$$= 1 : \sqrt{2\, s_{x+n+k-1} (v\, {}_xm_{n+k})^2}\,.$$

Hierbei beziehen sich sämtliche Grössen auf den Beginn des $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahres.

Damit ein Ausscheiden der Versicherten im $(n+k)^{\text{ten}}$ Jahre überhaupt noch stattfinden kann, ist es Bedingung, dass ein Teil der Versicherten in das $(n+k)^{\text{te}}$ Jahr eintrete. Da man die Zahl dieser Versicherten nicht kennt, so setze man für sie ihren wahrscheinlichsten oder Mittelwert. Dieser beträgt nun

$$L_{x+n+k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, \sqrt{2\, s_{k-1}\, p^{(3)}_{x+n} (1 - {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n})}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2_{k-1}}{2\, s_{k-1} p^{(3)}_{x+n} (1 - {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n})}} (s_{k-1}\, p^{(3)}_{x+n} + \sigma_{k-1})\, d\,\sigma_{k-1} =$$

$$= s_{k-1}\, p^{(3)}_{x+n}\,.$$

Durch Einführung dieses Wertes nimmt dann die Präzision $\eta_{n+k}$ die Form an

$$\eta_{n+k} = 1 : \sqrt{2\, s\; {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} (v_x\, m_{n+k})^2}\,. \tag{I}$$

Ist aber $\varDelta_{n+k}$ die fingierte Abweichung des kommenden $k^{\text{ten}}$ Jahres bei $s\; {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}$ Versicherten, und erstreckt man die Betrachtung über die ganze Restdauer des Versicherungsstockes, so kann man den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = \sum_{k=1}^{k=l-n} v^{k-1}\, \varDelta_{n+k} \tag{II}$$

als den Barwert der fingierten Mehrausgaben oder der fingierten Ersparnisse ansehen, welche bei einer Gruppe von $s$ Versicherten gemacht werden, wenn sämtliche Versicherungen in allen Stücken einander gleich sind.

Um nun das Wahrscheinlichkeitsgesetz des unbekannten Betrages $\mathfrak{K}$ zu bestimmen, erinnere man sich, dass die Präzision des Gesetzes der homogenen Gleichung

$$u = \sum_{k=1}^{k=m} c_k\, z_k\,,$$

deren Veränderliche $z_k$ Gesetzen von der Form

$$\frac{h_k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_k^2 z_k^2}$$

unterliegen,

$$P(u) = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2 u^2} \tag{III}$$

lautet. Die Präzision dieses Gesetzes hat man nach der bekannten Formel

$$H = 1 : \sqrt{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{c_k^2}{h_k^2}} \tag{IV}$$

zu ermitteln. Bestimmt man nun die Präzision des Gesetzes der fingierten Gesamtabweichung nach der vorstehenden Formel, so ergibt sich für diese der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} H &= 1 : \sqrt{\sum_{k=1}^{k=l-n} v^{2(k-1)}\, 2\, s\; {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} \left(v\, {}_x m_{n+k}\right)^2} \\ &= 1 : \sqrt{2\, s \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2k} \left({}_x m_{n+k}\right)^2} \\ &= 1 : \sqrt{2\, s \left({}_x M_n\right)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Zu demselben Ergebnisse käme man aber auch, wenn man das Produkt von Integralen

$$\prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\eta_{n+k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2_{n+k} \Delta^2_{n+k}}\, d\, \Delta_{n+k} = 1 \tag{VI}$$

mit dem Diskontinuitätsfaktor

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} v^{k-1} \Delta_{n+k}\right) z\, i} \cdot \cos \mathfrak{K}\, z\, d\, z \tag{VII}$$

multiplizieren würde, welcher den Wert 1 annimmt, im Falle die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} v^{k-1} \varDelta_{n+k} = \Re$$

erfüllt wird, und zu Null wird, sofern die Ungleichung besteht

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} v^{k-1} \varDelta_{n+k} \gtrless \Re .$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Zustandekommens des Wertes $\Re$ ergibt sich somit der Ausdruck

$$P(\Re) = \tag{VIII}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{\eta_{n+k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2_{n+k} \varDelta^2_{n+k} + v^{k-1} \varDelta_{n+k} z i} \, d\varDelta_{n+k} \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos \Re z \, dz ,$$

aus dem man durch eine bekannte Umformung erhält

$$P(\Re) = \frac{1}{2\pi} \prod_{k=1}^{k=l-n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi_k^2} \, d\varphi_k$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=l-n} \frac{v^{2(k-1)}}{4\eta^2_{n+k}} z^2} \cos \Re z \, dz . \tag{IX}$$

Dehnt man noch die Grenzen $-2\pi$ und $+2\pi$ bis $-\infty$ und $+\infty$ aus, was bei Berücksichtigung der Eigenschaften des Integranden ohne Bedenken geschehen darf, so kommt man mit Anwendung der bekannten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos b x \, d x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

wiederum zu dem Ausdrucke

$$P(\mathfrak{K}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2 s ({}_x M_n)^2}}\, e^{-\frac{\mathfrak{K}^2}{2s({}_x M_n)^2}}. \tag{X}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der gegenwärtige, uns unbekannte Wert der während des Verlaufes der Restdauer eintretenden Abweichungen zwischen $-K$ und $+K$ liege, beträgt daher

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, d t,$$

wenn $K = \gamma \sqrt{2 s}\, {}_x M_n$ ist.

2.

Wegen ihrer Merkwürdigkeit werde noch eine andere Methode kurz erwähnt, die ebenfalls auf die Wahrscheinlichkeit der Barwerte der künftigen Gebarungen führt. Man findet diese im Abschnitte „Vermischung von Beobachtungsreihen verschiedener Genauigkeit“ des Helmertschen Werkes „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“ beschrieben.

Bildet man die Hilfsgrössen

$${}_x\mu^2_{n+k} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} (v^{\varkappa}\, {}_x m_{n+\varkappa})^2, \tag{XI}$$

so lässt sich zeigen, dass sich der einen Mittelwert darstellende Wahrscheinlichkeitsausdruck

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} \frac{{}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}}{\sqrt{2s}\,{}_{x}\mu_{n+k}} e^{-\frac{u^2}{2s\,{}_{x}\mu^2_{n+k}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{{}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}}{\sqrt{2s}\,{}_{x}\mu_{l}} e^{-\frac{u^2}{2s\,{}_{x}\mu^2_{l}}} \right) \qquad \text{(XII)}$$

durch Vornahme einiger Entwicklungen und Vereinfachungen in die gesuchte Wahrscheinlichkeit umformen lässt.

Beachtet man nämlich die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right) + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n} = 1\,,$$

$$\text{(XIII)}$$

$$({}_{x}M_{n})^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right) {}_{x}\mu^2_{n+k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\,{}_{x}\mu^2_{l}\,,$$

und setzt

$${}_{x}\mu^2_{n+k} = ({}_{x}M_{n})^2 + \delta_{n+k}\,, \qquad \text{(XIV)}$$

so kann man aus der Summe von Gleichungen

$$\left[\sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right) {}_{x}\mu^2_{n+k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\,{}_{x}\mu^2_{l}\right] =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right) + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\right] ({}_{x}M_{n})^2$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right) \delta_{n+k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\,\delta_{n+k}\right]$$

folgern

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} \left({}_{k-1}p_{x+n}^{(3)} - {}_{k}p_{x+n}^{(3)}\right) \delta_{n+k} + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \delta_l = 0. \quad \text{(XV)}$$

Den eingangs gebildeten Wahrscheinlichkeits-ausdruck forme man nun um in

$$P(u) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} \frac{{}_{k-1}p_{x+n}^{(3)} - {}_{k}p_{x+n}^{(3)}}{\sqrt{2s}\sqrt{({}_xM_n)^2 + \delta_{n+k}}} e^{-\frac{u^2}{2s\left(({}_xM_n)^2 + \delta_{n+k}\right)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}}{\sqrt{2s}\sqrt{({}_xM_n)^2 + \delta_l}} e^{-\frac{u^2}{2s\left(({}_xM_n)^2 + \delta_l\right)}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} \frac{{}_{k-1}p_{x+n}^{(3)} - {}_{k}p_{x+n}^{(3)}}{\sqrt{2s}\, {}_xM_n \sqrt{1 + \frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2}}} e^{-\frac{u^2}{2s\,({}_xM_n)^2 \left(1 + \frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2}\right)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{{}_{l-n}p_{x+n}^{(3)}}{\sqrt{2s}\, {}_xM_n \sqrt{1 + \frac{\delta_l}{({}_xM_n)^2}}} e^{-\frac{u^2}{2s\,({}_xM_n)^2 \left(1 + \frac{\delta_l}{({}_xM_n)^2}\right)}} \right).$$

Setzt man darauf näherungsweise

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2}}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2} + \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2}} = 1 - \frac{\delta_{n+k}}{({}_xM_n)^2} + \ldots,$$

so kommt man nach Ausführung einiger Vereinfachungen zu dem Näherungsausdrucke

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s({}_xM_n)^2}} e^{-\frac{u^2}{2s({}_xM_n)^2}} \Bigg[\sum_{k=1}^{k=l-n} ({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_kp^{(3)}_{x+n})$$

$$\left(1 - \frac{\delta_{n+k}}{2({}_xM_n)^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{\delta_{n+k}}{2({}_xM_n)^4} u^2 \ldots\right) +$$

$$+ {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(1 - \frac{\delta_l}{2({}_xM_n)^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{\delta_l}{2({}_xM_n)^4} u^2 - \ldots\right)\Bigg].$$

In diesem entwickle man noch die Produkte

$$\left(1 - \frac{\delta_{n+k}}{2({}_xM_n)^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{\delta_{n+k}}{2({}_xM_n)^4} u^2 - \ldots\right)$$

und vernachlässige die höheren Potenzen von $\delta_{n+k}$; es folgt alsdann

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s\left({}_xM_n\right)^2}}\, e^{-\frac{u^2}{2s\left({}_xM_n\right)^2}}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{k=l-n}\left({}_{k-1}p^{(3)}_{x+n} - {}_{k}p^{(3)}_{x+n}\right)\left(1 - \frac{\left({}_xM_n\right)^2 - u^2}{2\left({}_xM_n\right)^4}\,\delta_{n+k}\right) + \right.$$

$$\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\left(1 - \frac{\left({}_xM_n\right)^2 - u^2}{2\left({}_xM_n\right)^4}\,\delta_l\right)\right].$$

Führt man schliesslich die Summation nach $k$ aus, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung (XV) die bekannte Formel

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s\left({}_xM_n\right)^2}}\, e^{-\frac{u^2}{2s\left({}_xM_n\right)^2}},$$

wobei ${}_xM_n$, wie uns dieser Abschnitt zeigte, auch nach der Formel berechnet werden kann

$$\left({}_xM_n\right)^2 = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)+(2)}_{x+n}\; {}_x\mu^2_{n+k} + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\; {}_x\mu^2_l\,.$$

*3.*

Bemerkenswert erscheint noch, dass sich der Nachweis für die Gleichheit des Bremickerschen oder Wittsteinschen und des Hattendorffschen Risikos kaum ohne Zuhilfenahme elementarer Darstellungen führen lässt. Letztens werden wohl immer Berechnungen notwendig sein, welche gleich oder doch verwandt den im Abschnitt $C$ des ersten Kapitels gegebenen sind.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen geht hervor, dass das Wahrscheinlichkeitsgesetz des Risikos für die nächsten $k$ Jahre durch die Funktion

$$P_k(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s}\;{}_xM_{(n|k)}}\, e^{-\frac{u^2}{2s\;{}_xM_{(n|k)}^{\,2}}}$$

dargestellt wird, in der ${}_xM_{(n|k)}$ nach der Formel zu berechnen ist.

$$\left({}_xM_{(n|k)}\right)^2 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} {}_{\varkappa-1|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^{\varkappa}\,S_{x+n+\varkappa} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^{\varkappa}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} {}_{\varkappa-1|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^{\varkappa}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+\;{}_kp^{(3)}_{x+n}\left(v^k\;{}_xV_{n+k} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2.$$

Ferner werde auch noch das Wahrscheinlichkeitsgesetz des Risikos des $(n+k+1)^{\text{ten}}$ Jahres, bezogen auf den Anfang des $(n+1)^{\text{ten}}$ Jahres, als bekannt vorausgesetzt. Unter Beibehaltung der bereits besprochenen Annäherungen wird dieses durch die Formel

$$\mathfrak{P}_{k+1}(z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s\;{}_kp^{(3)}_{x+n}}\;v^{k+1}\;{}_xm_{n+k+1}}\, e^{-\frac{z^2}{2s\;{}_kp^{(3)}_{x+n}\;(v^{k+1}\;{}_xm_{n+k+1})^2}}$$

zum Ausdruck gebracht.

Vermöge dieser beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen soll versucht werden, das Wahrscheinlichkeitsgesetz der folgenden $(k+1)$ Jahre zu ermitteln.

Liefern die kommenden $(k+1)$ Jahre beispielsweise die Abweichung $u$ und das $(n+k+1)^{\text{te}}$ Jahr die Abweichung $z$, so müssen die vorhergehenden $k$ Jahre die Abweichung $u-z$ hervorgebracht haben.

Daraus folgt die Gleichung

$$P_{k+1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_k(u-z)\, \mathfrak{P}_{k+1}(z)\, dz\,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$P_k(u) = \frac{h_k}{\sqrt{\pi}} e^{-h_k^2 u^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{k+1}(z) = \frac{\eta_{k+1}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta_{k+1}^2 z^2}\,,$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$P_{k+1}(u) = \frac{h_k\, \eta_{k+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_k^2 (u-z)^2 - \eta_{k+1}^2 z^2}\, dz\,.$$

Die rechte Seite lässt sich leicht umformen. Man findet auf bekannte Weise

$$P_{k+1}(u) =$$

$$= \frac{h_k\, \eta_{k+1}}{\pi} e^{-\frac{h_k^2\, \eta_{k+1}^2}{h_k^2 + \eta_{k+1}^2} u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(h_k^2 + \eta_{k+1}^2)\left(z - \frac{h_k^2}{h_k^2 + \eta_{k+1}^2} u\right)^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{h_k\, \eta_{k+1}}{\sqrt{h_k^2 + \eta_{k+1}^2}} e^{-\frac{h_k^2\, \eta_{k+1}^2}{h_k^2 + \eta_{k+1}^2} u^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_k^2} + \frac{1}{\eta_{k+1}^2}}} e^{-\frac{1}{\frac{1}{h_k^2} + \frac{1}{\eta_{k+1}^2}} u^2}.$$

Hiernach ist die Präzision des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die folgenden $(k+1)$ Jahre gegeben durch die Formel

$$\frac{1}{h^2_{k+1}} = \frac{1}{h^2_k} + \frac{1}{\eta^2_{k+1}},$$

und es muss sonach sein

$$({}_xM_{(n|k+1)})^2 = ({}_xM_{(n|k)})^2 + {}_kp^{(3)}_{x+n}\, v^{2k}\,(v\,{}_xm_{n+k+1})^2. \quad \text{(I)}$$

Indem man $({}_xM_{(n|k)})^2$ als unbekannt ansieht und $k$ alle Werte von 0 bis $k$ durchlaufen lässt, erhält man $(k+1)$ Gleichungen, deren Addition auf die Hattendorffsche Formel führt

$$({}_xM_{(n|k+1)})^2 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k+1} {}_{\varkappa-1|}p^{(3)}_{x+n}\, v^{2\varkappa}\,({}_xm_{n+\varkappa})^2. \quad \text{(II)}$$

Hiermit ist aber nicht gleichzeitig auch die ältere Form des Risikos begründet. Zur Durchführung des vollständigen Nachweises muss die rechte Seite der Gleichung (I) umgeformt werden. Denkt man sich also für $({}_xM_{(n|k)})^2$ und für $(v\,{}_xm_{n+k+1})^2$ die Werte gesetzt, so erhält man nach zweckentsprechender Umformung

$${}_kp^{(3)}_{x+n}\left[\left(v^k\,{}_xV_{n+k} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^k}{1-v}\right)^2 + v^{2k}\,(v\,{}_xm_{n+k+1})^2\right] =$$

$$= {}_{k|}p^{(1)}_{x+n}\left(v^{k+1}\,S_{n+k+1} - {}_xV_n - P_x\frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ {}_{k|}p^{(2)}_{x+n}\left({}_xV_n + P_x\frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ {}_{k+1}p^{(3)}_{x+n} \left(v^{k+1}\,{}_xV_{n+k+1} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ 2\,{}_kp^{(3)}_{x+n}\, v^k \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v} - v^k\,{}_xV_{n+k}\right)$$

$$({}_x\Pi_{n+k+1} - {}_x\Pi_{n+k+1})\,.$$

Da aber das an letzter Stelle stehende Produkt null ist, so findet man

$$({}_xM_{(n|k+1)})^2 = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k+1} {}_{\varkappa-1|}p^{(1)}_{x+n} \left(v^\varkappa S_{x+n+\varkappa} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^\varkappa}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k+1} {}_{\varkappa-1|}p^{(2)}_{x+n} \left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^\varkappa}{1-v}\right)^2 +$$

$$+ {}_{k+1}p^{(3)}_{x+n} \left(v^{k+1}\,{}_xV_{n+k+1} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^{k+1}}{1-v}\right)^2.$$

## E. Bemerkungen zur Anwendung der Risikotheorie.

*1.*

Je nach der Wahl der Grenze der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, d\,t$$

pflegt man das Risiko in Analogie zur Fehlertheorie verschieden zu benennen.

Für $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70711$ heisse das Risiko mittleres,

„ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.56419$ „ „ „ durchschnittliches,

„ $\gamma = \quad 0.47694$ „ „ „ wahrscheinliches,

„ $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.28209$ „ „ „ mathematisches.

Um die so benannten Risikoarten zu erhalten, hat man also die absoluten Risikobeträge

$$\mathfrak{M} = \sqrt{s}\, {}_xM_n, \text{ beziehungsweise } \mathfrak{M} = \sqrt{\varsigma\left(1 + \frac{\varsigma}{s}\right)}\, {}_xM_n$$

mit den Koeffizienten

$\gamma\sqrt{2} = 1$ (mittleres Risiko)

$\gamma\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.79788$ (durchschnittliches „ )

$\gamma\sqrt{2} = 0.47694\,\sqrt{2} = 0.67449$ (wahrscheinliches „ )

$\gamma\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.39894$ (mathematisches „ )

zu multiplizieren.

Die Wahrscheinlichkeiten, die den hier angeführten Werten von $\gamma$ entsprechen, haben der Reihe nach die Grösse

$$\Phi(0.70711) = 0.68467$$

$$\Phi(0.56419) = 0.57505$$

$$\Phi(0.47694) = 0.5$$

$$\Phi(0.28209) = 0.31005.$$

Von den aufgeführten Risikoarten kann die erste dargestellt werden durch das Integral

$$M^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} x^2 \, d x = \frac{1}{2 h^2};$$

die zweite durch das Integral

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} |x| \, d x = \frac{1}{h \sqrt{\pi}};$$

die dritte durch das Integral

$$\mathfrak{W} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-g}{h}}^{\frac{g}{h}} e^{-h^2 x^2} |x| \, d x = \frac{0.47694}{h} = \frac{1}{2.09678 \cdot h},$$

worin $g$ den Wert hat 1.36624 und durch die Formel bestimmt wird

$$g = \sqrt{-\frac{\log (1 - \varrho \sqrt{\pi})}{\log e}}, \quad (\varrho = 0.47694)$$

welche sich aus der Gleichung ergibt

$$\frac{\varrho}{h} = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-g^2}\right);$$

die vierte endlich durch das Integral

$$E = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2 x^2} x \, d x = \frac{1}{2 h \sqrt{\pi}}.$$

2.

Da eine positive Abweichung von der Gewinn- und Verlustgleichung $s_x G_n = 0$ beziehungsweise von der Reserve $s_x V_n$ einem etwaigen Verluste entspricht, eine negative aber einem zu erwartenden Gewinne, so kann man folgende Sätze aufstellen:

*a)* Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden höchstens die Summe $K$ erreicht, beträgt

$$\Psi\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\, \Phi\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right).$$

Ebenso gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gewinn höchstens die Summe $K$ erreicht.

*b)* Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden grösser als die Summe $K$ ist, hat den Wert

$$\Theta_1\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right)\right].$$

Ebenso gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gewinn grösser als die Summe $K$ ist.

*c)* Rechnet man mit einem Gewinn beliebiger Grösse, gibt aber der Möglichkeit Raum, dass allenfalls ein Verlust bis zur Grösse von $K$ Mark eintreten kann, so hat man die Wahrscheinlichkeit anzuwenden

$$\Theta_2\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{K}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right)\right].$$

Erwartet man in erster Linie einen Verlust beliebiger Grösse, glaubt aber, dass auch ein Gewinn bis zur Grösse von $K$ Mark eintreten könnte, so hat man dieselbe Wahrscheinlichkeit anzuwenden.

*d)* Glaubt man annehmen zu können, dass der voraussichtliche Verlust zwischen den Summen $K_1$ und $K_2$ liegen werde, so beläuft sich die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme auf

$$\Omega\left(\frac{K_1, K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) = \int\limits_{\frac{K_1}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}}^{\frac{K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{K_1}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right)\right].$$

Von der gleichen Grösse ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein etwaiger Gewinn nicht kleiner als $K_1$ und nicht grösser als $K_2$ sein werde.

*e)* Schliesslich beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Gebarung sich innerhalb der Grenzen $-K_1$ und $+K_2$ halten werde,

$$\Omega\left(\frac{-K_1, K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) = \int\limits_{-\frac{K_1}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}}^{\frac{K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{K_2}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{K_1}{\mathfrak{M}\sqrt{2}}\right)\right],$$

und dieselbe Grösse hat auch die Wahrscheinlichkeit für die Gebarung innerhalb der Grenzen $K_1$ und $-K_2$.

## F. Die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes nach der Methode des Laplace.

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass das endgültige Versicherungsergebnis um $\pm K$ Mark von der rechnungsmässigen Schätzung

$$(s_x G_n) = 0$$

beziehungsweise von

$$(s_x V_n)$$

abweichen werde, vergegenwärtige man sich, dass eine abweichende Gewinn- und Verlustgleichung durch den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}(s_x G_n)' = \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k^{(V)} - \\ - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n}^{(V)} \\ = (s_x G_n) + K = K\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

eine abweichende Reserve aber durch den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}(s_x V_n)' = \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(1)} C_k - \sum_{k=1}^{k=l-n} m_{k-1}^{(2)} E_k - \\ - m_{l-n}^{(3)} E_{l-n} \\ = (s_x V_n) + K = \mathfrak{R}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

veranschaulicht wird.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, die diesen herausgegriffenen Werten entspricht, ist daher zweifellos in der alle möglichen Fälle umfassenden Wahrscheinlichkeitensumme enthalten, welche man durch Auflösung des Polynomen

$$\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + p_{l-n}^{(3)}\right)^s = 1$$

erhält. Daher bilde man zur Darstellung der Wahrscheinlichkeit der Gleichung (1) die erzeugende Funktion

$$X = \left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} e^{C_k^{(V)} zi} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} e^{-E_k^{(V)} zi} + p_{l-n}^{(3)} e^{-E_{l-n}^{(V)} zi}\right)^s$$

und entwickle dieselbe in eine nach Potenzen von $e$ fortschreitende Reihe. Sodann multipliziere man diese Reihe mit $e^{-Kz \cdot i}$ und denke sich die reellen konstanten Faktoren der Exponenten von $e$ auf ganze Zahlen abgerundet. Integriert man darauf jedes Glied der Reihe nach $z$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so bleibt die gesuchte, mit dem Faktor $2\pi$ behaftete Wahrscheinlichkeit übrig. Die Begründung ergibt sich aus den Beziehungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} dz = 2\pi \text{ und} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm azi} dz = \frac{2}{a} \sin a\pi = 0 .$$

Nach dieser sinnreichen, von Laplace herstammenden Methode wird daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-Kzi} dz \qquad \text{(I)}$$

dargestellt.

Um die Wahrscheinlichkeit der Gleichung (2) zu finden, bilde man die erzeugende Funktion

$$\mathfrak{X} = \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} e^{C_k z i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} e^{-E_k z i} + p_{l-n}^{(3)} e^{-E_{l-n} z i} \right)^s .$$

Verfährt man nun wie im vorhergehenden Falle, so findet man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$P(\mathfrak{K}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{X}\, e^{-\mathfrak{K} z i}\, dz . \tag{I^a}$$

Weil nun aber die Gleichungen bestehen

$$C_k^{(V)} = C_k - {}_xV_n, \quad E_k^{(V)} = E_k + {}_xV_n, \quad E_{l-n}^{(V)} = E_{l-n} + {}_xV_n,$$

sowie

$$\mathfrak{K} = s\, {}_xV_n + K,$$

so erkennt man, dass stets ist

$$X = \mathfrak{X}\, e^{-s\, {}_xV_n z i},$$

und man kann hieraus folgern

$$P(K) = P(\mathfrak{K}).$$

Zum Ausgange der Entwicklung kann man sonach stets den Ausdruck wählen

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\, e^{-K z i}\, dz ,$$

in welchem für $X$ zu setzen ist

$$X = \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}\, e^{\left(v^k S_{x+n+k} - {}_x V_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, e^{-\left({}_x V_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i} +$$

$$\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\, e^{-\left({}_x V_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right) z i} \right)^s. \qquad \text{(II)}$$

Um nun für die Wahrscheinlichkeit $P(K)$ eine leicht anwendbare Formel zu finden, hat man die erzeugende Funktion $X$ durch einen geeigneten Näherungsausdruck zu ersetzen. Zu diesem gelangt man aber, wenn man die $e$-Koeffizienten unter Voraussetzung eines sehr kleinen Wertes von $z$ zunächst in Reihen entwickelt. Man bekommt dann, sofern man alle, den zweiten Grad von $z$ übersteigenden Potenzen vernachlässigt,

$$\mathfrak{X} = \left[ \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(1)}_{k-1} \left(1 + C^{(V)}_k z i - \frac{1}{2} (C^{(V)}_k)^2 z^2 + \ldots \right) \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} p^{(2)}_{k-1} \left(1 - E^{(V)}_k z i - \frac{1}{2} (E^{(V)}_k)^2 z^2 + \ldots \right)$$

$$\left. + p^{(3)}_{l-n} \left(1 - E^{(V)}_{l-n} z i - \frac{1}{2} (E^{(V)}_{l-n})^2 z^2 + \ldots \right) \right]^s$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + p_{l-n}^{(3)}\right) + \right.$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^{(V)} - p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^{(V)}\right) z i -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} \left(C_k^{(V)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} \left(E_k^{(V)}\right)^2 + p_{l-n}^{(3)} \left(E_{l-n}^{(V)}\right)^2 \right) z^2 + \ldots \Big]^s .$$

Weil nun aber stets ist

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} + p_{l-n}^{(3)} = 1 ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)}\, C_k^{(V)} - \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)}\, E_k^{(V)} - p_{l-n}^{(3)}\, E_{l-n}^{(V)} = 0$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(1)} \left(C_k^{(V)}\right)^2 + \sum_{k=1}^{k=l-n} p_{k-1}^{(2)} \left(E_k^{(V)}\right)^2 + p_{l-n}^{(3)} \left(E_{l-n}^{(V)}\right)^2 = \left({}_xM_n\right)^2 ,$$

so findet man den Näherungsausdruck

$$X = \left(1 - \frac{1}{2}({}_xM_n)^2 z^2\right)^s,$$

aus welchem die weiteren Annäherungen folgen

$$ln\, X = -\frac{s}{2}({}_xM_n)^2 z^2$$

$$X = e^{-\frac{s}{2}({}_xM_n)^2 z^2}. \qquad \text{(III)}$$

Setzt man nun den vorstehenden Näherungsausdruck in die Formel für $P(K)$ ein, so ergibt sich

$$P(K) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{s}{2}({}_xM_n)^2 z^2 - Kzi}\, dz. \qquad \text{(IV)}$$

In der Annahme, dass der Integrand des rechtsstehenden Integrals bereits für mässige Werte von $z$ sehr klein wird, was bei grossen Werten von $s$ stets der Fall sein wird, kann man die Integralgrenzen bis $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnen. Will man vermöge der so erhaltenen Näherungsformel sogleich die Wahrscheinlichkeit herleiten, dass der etwaige Verlust zwischen $K_1$ und $K_2$ liegen werde, so hat man zu berücksichtigen, dass ist

$$\sum_{K=K_1}^{K=K_2} e^{-Kzi} = \frac{e^{-(K_1 - 1/2)zi} - e^{-(K_2 + 1/2)zi}}{e^{\frac{1}{2}zi} - e^{-\frac{1}{2}zi}}.$$

Durch Anwendung dieser Beziehung gelangt man sodann zu der Formel

$$W(K_1, K_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \sum_{K=K_1}^{K=K_2} e^{-Kzi}\, dz \tag{V}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \frac{e^{-(K_1-{}^1/_2)zi} - e^{-(K_2-{}^1/_2)zi}}{e^{\frac{1}{2}zi} - e^{-\frac{1}{2}zi}}\, dz.$$

Um diese noch weiter umzuformen, setze man

$$e^{-(K_1-{}^1/_2)zi} = \cos(K_1 - {}^1/_2)z - i\sin(K_1 - {}^1/_2)z$$

$$e^{-(K_2+{}^1/_2)zi} = \cos(K_2 + {}^1/_2)z - i\sin(K_2 + {}^1/_2)z$$

$$e^{\frac{1}{2}zi} - e^{-\frac{1}{2}zi} = 2i\sin\frac{1}{2}z,$$

so folgt

$$W(K_1, K_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \frac{\sin(K_2 + {}^1/_2)z - \sin(K_1 - {}^1/_2)z}{\sin\frac{1}{2}z}\, dz$$

$$+ \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \frac{\cos(K_2 + {}^1/_2)z - \cos(K_1 - {}^1/_2)z}{\sin\frac{1}{2}z}\, dz.$$

Wie sich zeigen lässt, verschwindet aber der imaginäre Teil der rechten Seite; denn es ist stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\frac{\cos bx}{\sin cx}\, dx = 0.$$

In dem verbleibenden Ausdrucke

$$W(K_1,\ K_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(\varkappa M_n)^2 z^2}$$

$$\frac{\sin(K_2 + {}^1/_2)z - \sin(K_1 - {}^1/_2)z}{\sin\frac{1}{2}z}\,dz \qquad \text{(VI)}$$

setze man nun

$$\sin(K_2 + {}^1/_2)\,z = \sin K_2 z \cos {}^1/_2\, z + \cos K_2 z \sin {}^1/_2\, z$$

$$\sin(K_1 - {}^1/_2)\,z = \sin K_1 z \cos {}^1/_2\, z - \cos K_1 z \sin {}^1/_2\, z\,,$$

so ergibt sich die weitere Formel

$$W(K_1,\ K_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(\varkappa M_n)^2 z^2}\,\frac{\sin K_2 z - \sin K_1 z}{tg\ {}^1/_2\, z}\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(\varkappa M_n)^2 z^2}(\cos K_1 z + \cos K_2 z)\,dz\,. \qquad \text{(VII)}$$

In der letzteren zur Vereinfachung $tg\ {}^1/_2\, z$ durch ${}^1/_2\, z$ ersetzend, wende man ferner die Formeln an

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2}\,\frac{\sin b x}{x}\,dx = 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2}\cos b x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$2\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\frac{b_2}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2}\,dt - 2\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\frac{b_1}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2}\,dt = 2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{b_1}{2\sqrt{a}}}^{\frac{b_2}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2}\,dt. \qquad (b_2 > b_1)$$

Man bekommt sodann die Näherungsformel

$$W(K_1,\ K_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{K_1}{\sqrt{2s({}_xM_n)}}}^{\frac{K_2}{\sqrt{2s({}_xM_n)}}} e^{-t^2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s({}_xM_n)^2}}\left(e^{-\frac{K_1^2}{2s({}_xM_n)^2}} + e^{-\frac{K_2^2}{2s({}_xM_n)^2}}\right). \quad \text{(VIII)}$$

Würde man in der Formel

$$P(K) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}({}_xM_n)^2 z^2 - Kzi}\,dz$$

setzen

$$e^{-Kzi} = \cos Kz - i\sin Kz,$$

so ginge dieselbe infolge der Beziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\sin bx\,dx = 0$$

über in

$$P(K) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \cos Kz\, dz, \qquad \text{(IX)}$$

und man erhielte

$$W(K_1, K_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \sum_{K=K_1}^{K=K_2} \cos Kz\, dz. \qquad \text{(IX}^{\text{a}}\text{)}$$

Nun ist aber

$$\sum_{K=K_1}^{K=K_2} \cos Kz =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(K_2+1)z\cos\frac{1}{2}K_2 z - \sin\frac{1}{2}K_1 z\cos\frac{1}{2}(K_1-1)z}{\sin\frac{1}{2}z},$$

sowie

$$\sin\frac{1}{2}(K+1)z \cdot \cos\frac{1}{2}Kz = \frac{1}{2}\left[\sin(K-{}^1\!/_2)z + \sin\frac{1}{2}z\right],$$

$$\sin\frac{1}{2}Kz \cdot \cos\frac{1}{2}(K-1)z = \frac{1}{2}\left[\sin(K-{}^1\!/_2)z + \sin\frac{1}{2}z\right].$$

Mithin ergibt sich auch

$$W(K_1, K_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(xM_n)^2 z^2} \frac{\sin(K_2+{}^1\!/_2)z - \sin(K_1-{}^1\!/_2)z}{\sin\frac{1}{2}z}\, dz. \qquad \text{(X)}$$

Weil man nun aber auch setzen kann

$$\frac{\sin (K_2 + {}^1/_2)\, z}{\sin {}^1/_2\, z} = \frac{\sin K_2 z}{tg \frac{1}{2} z} + \cos K_2 z,$$

$$\frac{\sin (K_1 - {}^1/_2)\, z}{\sin {}^1/_2\, z} = \frac{\sin K_1 z}{tg\, {}^1/_2\, z} - \cos K_1 z,$$

$$tg \frac{1}{2} z \sim \frac{1}{2} z,$$

so wird

$$W(K_1, K_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2} ({}_xM_n)^2 z^2} \frac{\sin K_2 z - \sin K_1 z}{z} dz$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2} ({}_xM_n)^2 z^2} (\cos K_1 z + \cos K_2 z)\, dz, \tag{XI}$$

woraus das bereits oben mitgeteilte Ergebnis

$$W(K_1, K_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{K_1}{\sqrt{2s}\, {}_xM_n}}^{\frac{K_2}{\sqrt{2s}\, {}_xM_n}} e^{-t^2} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2s}\, {}_xM_n} \left( e^{-\frac{K_1^2}{2s({}_xM_n)^2}} + e^{-\frac{K_2^2}{2s({}_xM_n)^2}} \right) \tag{XII}$$

folgt, welches Eggenberger und Moser durch andere Betrachtungen gefunden hatten.

Aber auch das Restglied

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2s}\,{}_xM_n}\left(e^{-\frac{K_1^2}{2s({}_xM_n)^2}}+e^{-\frac{K_2^2}{2s({}_xM_n)^2}}\right)$$

kann man bei Berechnungen der vorliegenden Art hintansetzen. In Übereinstimmung mit der oberflächlicheren Darstellungsweise findet man sodann die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\left[\Phi(\gamma_2)-\Phi(\gamma_1)\right]$, dass ein etwaiger Verlust $K$ zwischen den Beträgen

$$\gamma_1\sqrt{2s}\,{}_xM_n \text{ und } \gamma_2\sqrt{2s}\,{}_xM_n$$

liegen werde.

Indem man weiterhin $K_1 = -K_1$ setzt, kommt man auf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\left[\Phi(\gamma_1)+\Phi(\gamma_2)\right]$.

Endlich noch die absoluten Beträge von $-K_1$ und $K_2$ gleich $K$ setzend, gelangt man zu der bekannten Risikoformel

$$K \leqq \pm\,\gamma\sqrt{2s}\,{}_xM_n,$$

welche der Wahrscheinlichkeit $\Phi(\gamma)$ entspricht.

Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, zeigt aber das negative Vorzeichen einen Gewinn an. Sohin beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes $K$ bis zur Grösse $\gamma\sqrt{2s}\,{}_xM_n$ nur $\frac{1}{2}\Phi(\gamma)$.

Um nun sogleich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}\Phi(\gamma)$ eines Verlustes zwischen 0 und $K$ Mark herzuleiten, genügt es, die Summe der Wahrscheinlichkeiten

$$W(0, K) = \sum_{\Delta=0}^{\Delta=K} P_{(\Delta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(x M_n)^2 z^2} \sum_{\Delta=0}^{\Delta=K} \cos \Delta z \, dz \qquad \text{(XIII)}$$

zu bilden.

Es ist aber

$$\sum_{\Delta=0}^{\Delta=K} \cos \Delta z = \frac{\cos \frac{1}{2} K z \sin \frac{1}{2} (K+1) z}{\sin {}^1\!/_2 \, z}$$

$$= \cos^2 \frac{1}{2} K z + \frac{1}{2} \frac{\sin K z}{tg \, {}^1\!/_2 \, z},$$

und da man in der Voraussetzung, dass $z$ nur klein ist, für $tg \, {}^1\!/_2 \, z$ wiederum ${}^1\!/_2 \, z$ setzen kann, so kommt man auf die Näherungsformel

$$W(0, K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{2}(x M_n)^2 z^2} \left( \frac{\sin K z}{z} + \cos^2 \frac{1}{2} K z \right) dz. \qquad \text{(XIV)}$$

Diese geht durch Anwendung der bereits mehrfach angewendeten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} \, dx = 2 \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2} \, dt = \pi \, \Phi \left( \frac{b}{2 \sqrt{a}} \right)$$

und der wohl weniger bekannten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cos^2 \frac{1}{2} b x \, d x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(1 + e^{-\frac{b^2}{a}}\right) \qquad \text{(XV)}$$

über in

$$W(0, K) =$$

$$= \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{K}{\sqrt{2 s} \, {}_x M_n} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2 s \, ({}_x M_n)^2}} \left(1 + e^{-\frac{K^2}{2 s \, ({}_x M_n)^2}}\right).$$

Aber auch diesmal wird man das Korrekturglied vernachlässigen dürfen, wodurch man wiederum erhält

$$W(0, K) = \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{K}{\sqrt{2 s} \, {}_x M_n} \right).$$

*Anmerkung 1:* Handelt es sich um einen Bestand von gleichartigen Versicherungen, deren einmalige Prämie durchgängig nach der Formel

$$\mathfrak{A}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^k \, S_{x+n+k}^{(1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \, v^k \, S_{x+n+k}^{(2)}$$

berechnet wird, so findet man die Wahrscheinlichkeit und das Risiko aus der Formel

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y e^{-K z i} \, d z,$$

in der man zu setzen hat

$$Y = \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, e^{\left(v^k \, S_{x+n+k}^{(1)} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \, e^{\left(v^k \, S_{x+n+k}^{(2)} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i}$$

$$\left. + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \, e^{-\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right) z i} \right)^s. \qquad \text{(XIII)}$$

*Anmerkung 2:* Bei einem Bestande von gleichartigen Rentenversicherungen, deren einmalige Prämien durchweg nach der Formel

$$^{(1)}|\mathfrak{a}_{x+n} = \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, v^k \, \mathfrak{a}_{x+n+k}^{(1)}$$

berechnet werden, kann man zunächst wie im vorhergehenden Abschnitte verfahren, indem man in der allgemeinen Formel

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X \, e^{-Kzi} \, dz$$

für die generierende Funktion $X$ den Ausdruck wählt

$$X = \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(1)} \, e^{\left(v^k \, \mathfrak{a}_{x+n+k}^{(1)} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p_{x+n}^{(2)} \, e^{-\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) z i} +$$

$$\left. + {}_{l-n}p_{x+n}^{(3)} \, e^{-\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right) z i} \right)^s. \qquad \text{(XIV)}$$

Will man jedoch das durch die etwaige spätere Rentenzahlung erwachsende Risiko von vornherein berücksichtigen, so hat man in der allgemeinen Formel

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z\, e^{-Kzi}\, dz$$

der erzeugenden Funktion $Z$ die Form zu geben

$$Z = \left( \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n} \sum_{k_1=1} {}_{k_1-1|}q_{x+n+k}\, e^{\left(v^k \frac{1-v^{k_1}}{1-v} - {}_xV_n - P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) zi} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}\, e^{-\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^k}{1-v}\right) zi} +$$

$$\left. + {}_{l-n}p^{(3)}_{x+n}\, e^{-\left({}_xV_n + P_x \frac{1-v^{l-n}}{1-v}\right) zi} \right)^s. \qquad \text{(XV)}$$

Den Wahrscheinlichkeiten ${}_{k-1|}p^{(1)}_{x+n}$ und ${}_{k-1|}p^{(2)}_{x+n}$ sind dabei die erweiterten Bedeutungen des Kapitels I, Abschnitt A, Anmerkung 2, beizulegen.

*Anmerkung 3:* Will man sich auch bei der Darstellung des Hattendorffschen Risikos des Laplaceschen Verfahrens bedienen, so hat man in dem allgemeinen Ausdrucke

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\, e^{-Kzi}\, dz$$

für die Erzeugende $X$ zu setzen

$$X = \left[ \prod_{k=1}^{k=l-n} \left( p^{(1)}_{x+n+k-1}\, e^{\,v^k (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k} - r\, {}_x\Pi_{n+k}) z i} + \right.\right.$$

$$+ \, p^{(2)}_{x+n+k-1}\, e^{-v^k ({}_xV_{n+k} + r\, {}_x\Pi_{n+k}) z i} +$$

$$\left.\left. + \, p^{(3)}_{x+n+k-1}\, e^{-v^k (r\, {}_x\Pi_{n+k}) z i} \right)^{{}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}} \right]^s, \qquad \text{(XVI)}$$

oder in dem allgemeinen Ausdrucke

$$P(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y e^{-\mathfrak{K} z i}\, dz$$

für die Erzeugungsfunktion $Y$ das Gebilde

$$Y = \left[ \prod_{k=1}^{k=l-n} \left( p^{(1)}_{x+n+k-1}\, e^{\,v^k (S_{x+n+k} - {}_xV_{n+k}) z i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \, p^{(2)}_{x+n+k-1}\, e^{-v^k ({}_xV_{n+k}) z i} + p^{(3)}_{x+n+k-1} \right)^{{}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}} \right]^s \qquad \text{(XVII)}$$

einzuführen.

Die Grösse $\mathfrak{K}$ wird dabei durch die Gleichung bestimmt

$$\mathfrak{K} = s \sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{k-1}\, {}_x\Pi_{n+k} \pm K, \qquad \text{(XVIII)}$$

in welcher

$$\sum_{k=1}^{k=l-n} {}_{k-1}p^{(3)}_{x+n}\, v^{k-1}\, {}_x\Pi_{n+k} = {}_xJ_n$$

den sogenannten Versicherungswert von Wright eines jeden der $s$ untereinander gleichen Verträge darstellt.

(Schluss folgt im nächsten Heft.)