Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 13 (1918)

Artikel: Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen : Beiträge zu der Theorie des Einflusses einer Veränderung der Intensitäten der Sterblichkeit und der Verzinsung auf Grössen der Lebensversicherung

Autor: Friedli, Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550891

Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen.

(Beiträge zu der Theorie des Einflusses einer Veränderung der Intensitäten der Sterblichkeit und der Verzinsung auf Grössen der Lebensversicherung.)

Von Dr. **Werner Friedli,** Bern.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit zerfällt nach den zugrunde gelegten Hypothesen in zwei Teile, die grundsätzlich voneinander verschieden sind. Der I. Teil handelt von der Hypothese von *Moivre* und den aus ihr auf die Reserve gemischter Versicherungen zu ziehenden Schlüssen; Hauptzweck war, auf Grund einer ganz elementaren Hypothese den Einfluss der wichtigsten Variabeln zu untersuchen. Der II. Teil fasst mehr die tatsächlichen Verhältnisse ins Auge; Grundlage bildet das *Gompertz-Makeham*sche Gesetz; hier wird vorerst dem Barwert $\bar{a}_x$ das Hauptaugenmerk zugewendet und alsdann werden die gewonnenen Resultate zur Untersuchung anderer Versicherungswerte benützt.

Gemäss diesen zwei Hypothesen führt die mathematische Behandlung im ersten Teil auf algebraische, im zweiten Teil auf transzendente Funktionen. Die Eigenschaften der Versicherungswerte sind implicite in diesen Funktionen enthalten und werden durch Benützung der Eigenschaften dieser analytischen Funktionen schrittweise bestimmt. Beispielsweise wäre es schwierig, aus einer Tabelle der Rentenbarwerte Beziehungen zwischen den aufeinanderfolgenden $\bar{a}_x$ herauszufinden, noch schwieriger aber, Beziehungen zwischen den $\bar{a}_x$ und den Rechnungsgrundlagen aufzudecken; hier aber sind diese Zusammenhänge unschwer zu bestimmen, sie liegen in der mathematischen Formel begraben und brauchen nur herausgeholt zu werden.

Beiden vorerwähnten Teilen ist das gemeinsam, dass das Studium des Einflusses einer Veränderung der Sterblichkeitsintensität auf Grössen der Lebensversicherung in den Vordergrund gestellt wurde.

I. Teil.

§ 1.

Einleitung. Die Hypothese von Moivre.

Wenn man eine grosse Gesamtheit von neugeborenen Personen durch die ganze Dauer ihres Lebens verfolgt, so sieht man, dass diese Gesamtheit mit der Zeit abnimmt und verschwindet. Die Abnahme geht nach keinem bestimmten Gesetz vor sich; doch haben die Statistiker von jeher versucht, dieser Abnahme ein bestimmtes Gesetz unterzuschieben, um ungefähr den Verlauf des Absterbens zu *charakterisieren* und die Erscheinung der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Die einfachste Annahme, welche man treffen kann, ist diejenige von *Abraham de Moivre,* nach welcher in gleichen Zeiten gleich viele Personen sterben.

Stellt man die in jedem Alter x vorhandene Zahl der Überlebenden der Gesamtheit fest und trägt sie in eine Tabelle zusammen, so erhält man die Überlebensordnung der Gesamtheit und als graphische Darstellung derselben die Überlebenskurve. Nach der Hypothese von Moivre ist die Überlebenskurve eine *gerade Linie*. Die Gleichung dieser Geraden erhalten wir durch folgende Überlegung:

Die Lebenden des Alters x sind mit l_x bezeichnet. Während eines Jahres stirbt ein gewisser Bruchteil dieser l_x Personen, etwa $\lambda \cdot l_x$, wo $0 < \lambda < 1$, aus, so dass

$$l_{x+1} = l_x - \lambda l_x$$

Nach Moivres Hypothese sterben in gleichen Zeiten gleichviele Personen weg, also jedes Jahr $\lambda \cdot l_x$ Personen, in t Jahren somit $t \cdot \lambda l_x$, so dass

$$l_{x+t} = l_x (1 - \lambda t) \qquad (1)$$

Der positive, echte Bruch λ ist nun näher zu definieren. Bezeichnet ω das Schlussalter der Überlebensordnung, so dass $l_\omega = 0$ ist, so folgt aus (1)

$$l_\omega = l_x \big(1 - \lambda (\omega - x)\big) = 0$$

Hieraus bestimmt sich λ zu

$$\lambda = \frac{1}{\omega - x} \qquad (2)$$

Dieses Resultat erhält man auch folgendermassen: Wenn die l_x Personen vom Alter x in der Zeit $\omega - x$ gleichmässig aussterben sollen, so müssen pro Zeiteinheit (Jahr) $\frac{l_x}{\omega - x}$ Personen sterben; somit hat in der Tat λ den in (2) angegebenen Wert.

Aus untenstehender Figur ergibt sich noch die geometrische Deutung des Parameters λ

$$\frac{l_x}{\omega - x} = tg\,\varphi,$$

so dass

$$\lambda = \frac{1}{l_x} \cdot tg\,\varphi \tag{2a}$$

Bezeichnen wir die Lebenden des Alters 0, also l_0, mit H, so gilt die Beziehung

$$\frac{H}{\omega} = \frac{l_x}{\omega - x} = \text{konstant},$$

woraus

$$l_x = \frac{\omega - x}{\omega} \cdot H \tag{3}$$

Dies ist die Gleichung der Überlebensgeraden. A. de Moivre setzte speziell $\omega = 86$ und nannte $\omega - x$ die „Lebensergänzung" des x-jährigen (vgl. Böschenstein, Mitteil. schweiz. Versicherungsmathematiker, 3. Heft).

Die Intensität der Sterblichkeit des Alters $x + t$ ist definiert durch

$$\mu_{x+t} = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$$

wo l'_{x+t} den Differentialquotienten von l_{x+t} nach t bedeutet; im vorliegenden Fall bestimmt sie sich zu

$$\mu_{x+t} = \frac{\lambda}{1 - \lambda t} \tag{4}$$

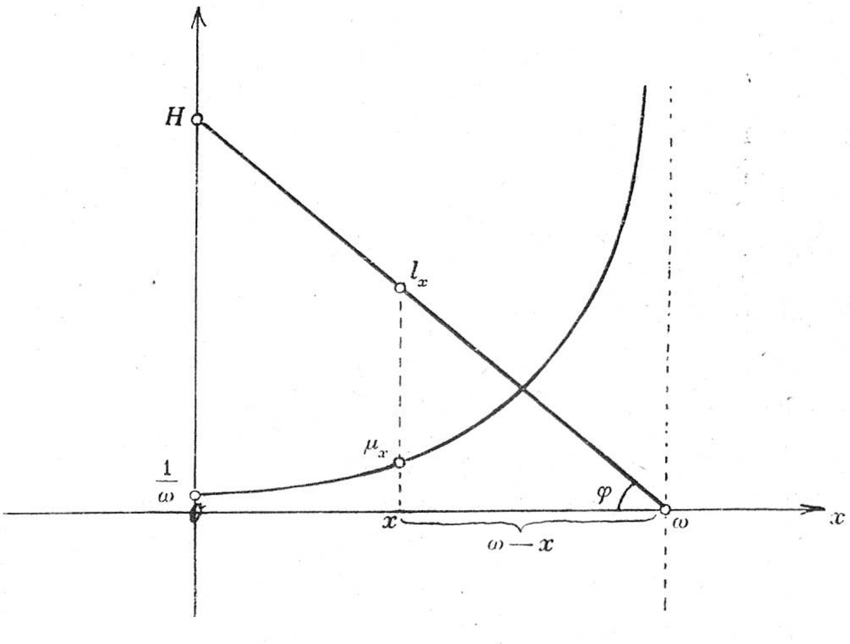
d. h. wenn die Kurve der Überlebenden eine gerade Linie ist, so ist die Kurve, welche die Intensitätsfunktion der Sterblichkeit darstellt, eine *Hyperbel* mit der reellen Asymptote $t = \frac{1}{\lambda}$ bzw. $x + t = x + \frac{1}{\lambda} = \omega$.

Aus (4) folgt für $t = 0$

$$\mu_x = \lambda \tag{4a}$$

Der Parameter λ ist somit nichts anderes als die Intensität der Sterblichkeit des Alters x. Wir haben somit für λ folgende Ausdrücke zur Verfügung

$$\lambda = \frac{1}{\omega - x} = \frac{1}{l_x} \cdot tg\,\varphi = \mu_x.$$



Ferner sei hier beigefügt, dass unter Zugrundelegung der Hypothese von Moivre q_{x+t} und μ_{x+t} identisch sind.

* * *

In der Wirklichkeit liegen nun die Verhältnisse so, dass das Absterben einer Gesamtheit nicht gleichmässig, sondern in den verschiedenen Lebensaltern verschieden intensiv erfolgt. Die Überlebenskurve ist nicht eine Gerade, sondern eine Kurve mit Wendepunkten. Greift man einen bestimmten Punkt (x, l_x) dieser Kurve heraus und zieht in ihm die Tangente an diese, so schneidet sie die Abszissenachse in einem Punkt mit der Abszisse $x + \frac{1}{\mu_x}$, denn die Subtangente im Punkt (x, l_x) ist gleich der reziproken μ-Funktion [1]. Die Gleichung der Tangente lautet nach (1)

$$y = l'_{x+t} = l_x(1 - \mu_x \cdot t).$$

Der Akzent soll dartun, dass sich diese Zahl y von der wirklichen Anzahl der Lebenden des Alters $x + t$ unterscheidet. Je nachdem nun der Verlauf der Kurve der Lebenden im Punkt (x, l_x) nahezu geradlinig ist oder nicht, wird der Unterschied zwischen l'_{x+t} und l_{x+t} klein oder gross sein; hierdurch erhält man einen Anhaltspunkt, inwieweit es in einer gewissen Altersperiode zulässig ist, für die Kurve der l_x eine Gerade zu substituieren.

Wenn man in jedem Punkt der Kurve die Moivresche Gerade in der skizzierten Art konstruiert, so stellt sich diese Kurve als Enveloppe aller Moivreschen Geraden dar. Beim Betrachten einer solchen Figur kommt man auf folgenden Vergleich:

Wirken auf einen Körper zwei Kräfte ein, eine translatorische und eine Zentripetalkraft, so wird er eine krummlinige Bahn durchlaufen; hört die Wirkung

---

[1] Siehe „Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion", von Prof. Dr. *Ch. Moser,* Mitteilungen schweiz. Versicherungsmathematiker, 1. Heft.

der Zentripetalkraft plötzlich auf, so fliegt der Körper *tangential* an die Bahnkurve weiter.

Ganz analog kann man sich die Sterblichkeitskraft, die auf eine Gesamtheit wirkt, aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken; die eine Komponente, die translatorische, wirkt für alle Alter gleich stark und bewirkt eine gleichmässige Abnahme der Gesamtheit (geradlinige Bahn); die zweite, veränderliche Komponente bedingt den krummlinigen Verlauf. Fällt in einem gewissen Punkt x diese Wirkung des zunehmenden Alters weg, so macht sich der weitere Verlauf des Absterbens tangential an die Absterbekurve in gerader Linie. Die Hypothese von Moivre läuft somit auf eine Vernachlässigung der veränderlichen „Zentripetalkomponente" hinaus; sie gibt infolgedessen nur ein grobes Bild des Vorganges.

Immerhin ist deswegen das Vorgehen des Mathematikers Moivre nicht gering einzuschätzen. Es war für die damalige Zeit ein kühner Gedanke, das Absterben einer grossen Gesamtheit von gleichaltrigen Personen durch eine mathematische Formel charakterisieren zu wollen; diese wissenschaftliche Tat Moivres bedeutete einen bahnbrechenden Schritt für die spätern Forschungen im Gebiet der Sterblichkeitsmessung.

§ 2.

Die Reserve einer gemischten Versicherung bei Vernachlässigung der Verzinsung.

Die Reserve einer gemischten Versicherung im Betrage 1, die im Alter x auf die Dauer von n Jahren abgeschlossen wurde, beträgt nach t Jahren:

$$ {}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{\overline{a}_{x+t\,\overline{n-t}|}}{\overline{a}_{x\,\overline{n}|}} = 1 - \frac{\frac{1}{l_{x+t}}\int\limits_t^n v^{\tau-t}\cdot l_{x+\tau}\cdot d\tau}{\frac{1}{l_x}\int\limits_0^n v^{\tau}\cdot l_{x+\tau}\cdot d\tau} \qquad (5) $$

Durch spezielle Annahmen über den Verlauf von $l_{x+\tau}$ gelingt es, diese Integrale zu berechnen und eine zu Berechnungszwecken geeignete Formel aufzustellen. In unserm Fall ist die Integration leicht durchführbar. Wir machen jedoch vorerst die weitere vereinfachende Voraussetzung, dass die Verzinsung gleich 0 sei, dass also

$$ v = 1 \qquad (a) $$

sei. Dadurch verliert die Untersuchung natürlich noch mehr den Charakter der Allgemeinheit; dafür werden die gewonnenen Resultate, was den Einfluss der wichtigsten Variabeln, der *Sterblichkeit,* auf die Reserve anbetrifft, um so deutlicher. Wir werden in § 5 zeigen, dass diese letztere vereinfachende Annahme für unsern Zweck gestattet ist.

Unter Berücksichtigung von (a) und

$$ l_{x+\tau} = l_x\,(1-\lambda\tau) \qquad (b) $$

geht (5) über in

$$ {}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{\frac{1}{l_x(1-\lambda t)}\int\limits_t^n l_x(1-\lambda\tau)\,d\tau}{\frac{1}{l_x}\int\limits_0^n l_x(1-\lambda\tau)\,d\tau} $$

oder

$$ {}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{n-t}{n}\cdot\frac{1-\lambda\frac{n+t}{2}}{(1-\lambda t)\cdot\left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)} \qquad (6) $$

Wenn man hierin λ und n als **Konstante** ansieht und t als die unabhängige Variable, so stellt diese Gleichung eine *Hyperbel* dar mit der einen Asymptote $t = \frac{1}{\lambda} = \omega - x$. Die Reserve ${}_t V_x$ und die Intensitätsfunktion μ_{x+t} sind also Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptote, nämlich der im Schlussalter ω errichteten Ordinate. ${}_0\bar{V}_{x\,\overline{n}|} = 0$; ${}_n\bar{V}_{x\,\overline{n}|} = 1$.

Naturgemäss ist stets $n \leqq \omega - x$, somit $\frac{1}{n} \geqq \frac{1}{\omega - x}$, d. h. es ist stets

$$0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{n} \tag{7}$$

Für den Spezialfall $\lambda = 0$, wo die Überlebenskurve eine zur Altersachse parallele Gerade ist, wird

$${}_t\bar{V} = 1 - \frac{n-t}{n} = \frac{t}{n}.$$

In diesem Fall degeneriert somit die Hyperbel zu einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden. Und so muss es auch sein; denn wenn keine Sterbefälle eintreten ($\lambda = 0$), so hat die Reservenbildung einzig darin zu bestehen, dass im Verlauf von n Jahren die Summe 1 angesammelt wird. ${}_0\bar{V} = 0$; ${}_n\bar{V} = 1$.

*　　*
*

Unter Zuhülfenahme der μ-Funktion können wir Formel (6) etwas umformen. Aus

$$\mu_{x+t} = \frac{\lambda}{1-\lambda t} \text{ folgt: } \left.\begin{aligned} 1-\lambda t &= \frac{\lambda}{\mu_{x+t}} = \frac{\mu_x}{\mu_{x+t}} \\ \text{analog } 1-\lambda\frac{n}{2} &= \frac{\mu_x}{\mu_{x+\frac{n}{2}}} \\ 1-\lambda\frac{n+t}{2} &= \frac{\mu_x}{\mu_{x+\frac{n+t}{2}}} \end{aligned}\right\}$$

folglich

$$_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{n-t}{n} \cdot \frac{\mu_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu_{x+t}}{\mu_x \cdot \mu_{x+\frac{n+t}{2}}} \tag{6^a}$$

Die Formel ist deswegen beachtenswert, weil nur Intensitätsfunktionen vorkommen.

Ersetzen wir in (6) λ durch den in Formel (2) angegebenen Wert, so kommt

$$_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{n-t}{n} \cdot \frac{\omega-x}{\omega-(x+t)} \cdot \frac{2(\omega-x)-(n+t)}{2(\omega-x)-n} \tag{6^b}$$

Über diese Funktion (6^b) könnte man nun 4 verschiedene Untersuchungen anstellen:

1. Die Variable ist $\underline{t}$, während ω, x, n konstant sind.

2. Die Variable ist $\underline{x}$, das Eintrittsalter, während t, n und ω konstant sind.

3. Die Variable ist $\underline{n}$, die abgemachte Versicherungsdauer. ω, t, x konstant.

4. Die Variable ist $\underline{\omega}$. t, x, n konstant. Dies kommt darauf hinaus, das Verhalten der Reserve $_t\overline{V}$ bei Veränderung der Sterblichkeit zu studieren; denn eine Verschiebung des Schnittpunktes ω auf der Altersachse hat eine Drehung der Überlebensgeraden um den Schnittpunkt H auf der Ordinatenachse zur Folge.

Der Behandlung von Fall (4) sind die folgenden Ausführungen im wesentlichen gewidmet; nur wählen wir statt ω $\lambda = \frac{1}{\omega - x}$ als unabhängige Variable.

Aber auch die Untersuchung der Fälle (1), (2), (3) wäre nicht ohne Interesse; wie bereits bemerkt wurde, führt Fall (1) auf eine Hyperbel, während die Fälle (2) und (3) auf Kurven dritten Grades führen würden.

§ 3.

Einfluss einer Veränderung der Sterblichkeitsintensität auf die Höhe der Reserve.

Es handelt sich darum, zu untersuchen, welchen Einfluss eine Veränderung der Sterblichkeitsintensität auf die Grösse der Reserve in jedem Zeitpunkt während der versicherten Dauer hat. Eine solche Untersuchung stösst bei sich dem wirklichen Verlauf der Absterbeordnung und bei Mitberücksichtigung der Verzinsung sehr bald auf beträchtliche mathematische Hindernisse; man ist daher vorläufig gezwungen, bescheiden anzufangen und den Berechnungen ganz elementare Annahmen zugrunde zu legen, um so wenigstens einiges Licht in das Dunkel dringen zu lassen.

Wir gehen aus von der Formel

$$_t\overline{V}_{\overline{x\,n|}} = {}_t\overline{V}(\lambda) = 1 - \frac{n-t}{n} \, \frac{1 - \lambda \frac{n+t}{2}}{(1 - \lambda t) \cdot \left(1 - \lambda \frac{n}{2}\right)} \tag{6}$$

Hierin soll λ die Rolle der unabhängigen Variabeln übernehmen, während x, n, t Konstante sein sollen. Die Kurve, welche der Abhängigkeit $y = {}_t\overline{V}(\lambda)$ entspricht, ist vom dritten Grade; sie besitzt die drei reellen Asymptoten $\lambda = \frac{1}{t}$, $\lambda = \frac{2}{n}$, ferner $y = {}_tV = 1$, denn

$$\lim_{\lambda = \infty} {}_tV(\lambda) = \lim_{\lambda = -\infty} {}_tV(\lambda) = +1.$$

Die Kurve besitzt also das Maximum der für eine Kurve dritten Grades möglichen Asymptoten (siehe Fig. 1 hinten).

Die praktischen Grenzen der Variabeln λ sind (vgl. (7)) $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{n}$. An diesen beiden Grenzen hat unsere Funktion die Werte

$${}_tV(0) = {}_tV\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{t}{n} \tag{8}$$

Wie ist nun der Verlauf der Funktion im zwischenliegenden Intervall? Wir bilden

$$\frac{d\,{}_t\overline{V}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n-t}{n} \frac{1}{(1-\lambda t)^2 \cdot \left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)^2}$$

$$\left\{(1-\lambda t)\left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)\frac{n+t}{2} - \left(1-\lambda\frac{n+t}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+t-\lambda nt\right)\right\}$$

Den Klammerausdruck ordnen wir nach Potenzen von λ; es folgt

$$\frac{d\,{}_tV}{d\lambda} = -\frac{(n-t)\,t}{4n} \cdot \frac{1}{(1-\lambda t)^2 \cdot \left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)^2} \cdot$$

$$\left\{(n+t)\,n\,\lambda^2 - 4n\,\lambda + 2\right\} \tag{9}$$

Hieraus ergibt sich das Steigungsmass der Kurve im Punkte $\left(\lambda = 0,\ {}_t\overline{V} = \frac{t}{n}\right)$, nämlich

$$\left(\frac{d_t V}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = -\frac{n-t}{n}\,\frac{t}{2} < 0 \tag{9^a}$$

d. h. im Punkte $\left(0,\ \frac{t}{n}\right)$ sinkt die Kurve $y = {}_tV(\lambda)$ gegen die positive Abszissenachse ab; wegen der Relation (8) besitzt die Kurve daher im Intervall $0 < \lambda < \frac{1}{n}$ ein *Minimum,* da sie in diesem Intervall stetig verläuft.

Dies können wir rechnerisch nachweisen und überdies die Abszisse λ bestimmen, für welche das Minimum eintritt. Aus (9) ergibt sich, dass die Funktion ${}_tV(\lambda)$ einen extremen Wert erreicht, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$(n+t)\,n\,\lambda^2 - 4n\,\lambda + 2 = 0 \tag{10}$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die zwei Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2n - \sqrt{2n\,(n-t)}}{n\,(n+t)} \\ \lambda_2 &= \frac{2n + \sqrt{2n\,(n-t)}}{n\,(n+t)} \end{aligned}\right\} \tag{10^a}$$

welche wegen $t \leqq n$ beide reell und positiv sind; die Funktion ${}_tV(\lambda)$ besitzt demnach zwei extreme Werte.

Nun ist

$$\sqrt{2n\,(n-t)} = \sqrt{n^2 - 2nt + n^2} > \sqrt{n^2 - 2nt + t^2}$$
$$> (n-t)$$

$$2n - \sqrt{2n\,(n-t)} < n + t\,,$$

somit

$$\lambda_1 = \frac{2n - \sqrt{2n(n-t)}}{n(n+t)} < \frac{1}{n} \tag{α}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\lambda_1} = n(n+t) \frac{1}{2n - \sqrt{2n(n-t)}} =$$

$$= n(n+t) \frac{2n + \sqrt{2n(n-t)}}{2n(n+t)} = \frac{n(n+t)}{2} \cdot \lambda_2 ,$$

daher ist wegen der Ungleichung (α):

$$\lambda_2 > \frac{2}{n(n+t)} n \quad \text{oder}$$

$$\lambda_2 > \frac{2}{n+t} > \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} ,$$

d. h.

$$\lambda_2 > \frac{1}{n} \tag{β}$$

Aus (α) und (β) folgt, dass die Funktion ${}_tV(\lambda)$ im Intervall $0 < \lambda < \frac{1}{n}$ einen einzigen extremen Wert besitzt, nämlich im Punkte λ_1; dass dieser extreme Wert ein Minimum sei, folgt aus

$$\frac{d^2\,{}_tV}{d\lambda^2} = \frac{t(t-n)}{4n} \frac{1}{(1-\lambda t)^4 \left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)^4}$$

$$\Big\{ (1-\lambda t)^2 \left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)^2 \left[2(n+t)n\lambda - 4n\right]$$

$$- \underbrace{\left[(n+t)n\lambda^2 - 4n\lambda + 2\right]}_{} \frac{d}{d\lambda} \left[(1-\lambda t)^2 \cdot \left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)^2\right] \Big\}$$

Wegen (10) ist nämlich

$$\left(\frac{d^2\,{}_tV}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_1} = \frac{-t(n-t)}{2n} \cdot \left(\frac{n(n+t)\lambda - 2n}{(1-\lambda t)^2 \cdot (1-\lambda\frac{n}{2})^2}\right)_{\lambda=\lambda_1} =$$

$$= \frac{-t(n-t)}{2n} \cdot \frac{-\sqrt{2n(n-t)}}{(1-\lambda_1 t)^2 \cdot (1-\lambda_1\frac{n}{2})^2} > 0\,.$$

Dagegen bezeichnet der ausserhalb unseres Intervalles liegende Wert λ_2 ein Maximum der Funktion; denn

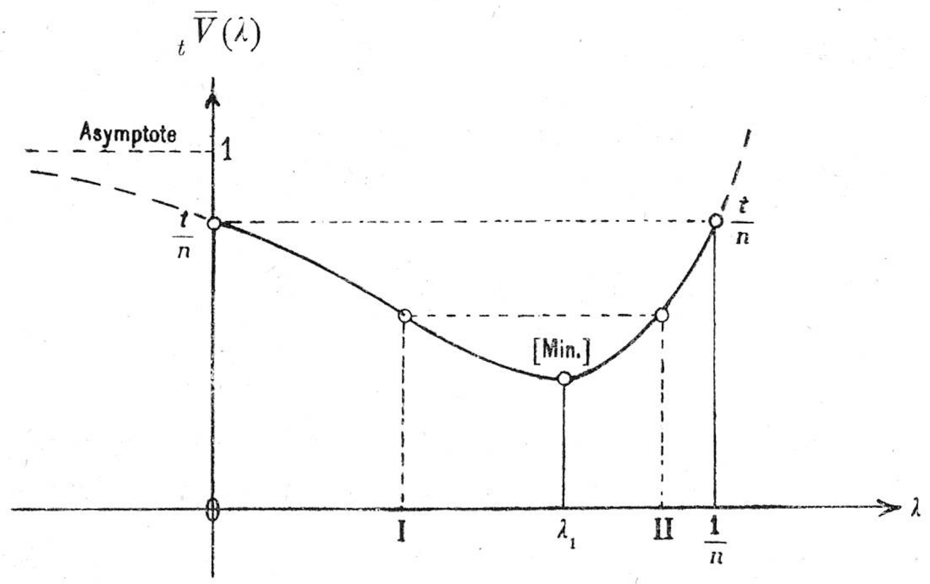
$$\left(\frac{d^2\,{}_tV}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_2} = -\frac{t(n-t)}{2n} \cdot \frac{+\sqrt{2n(n-t)}}{(1-\lambda_2 t)^2 \cdot (1-\lambda_2\frac{n}{2})^2} < 0\,.$$

Wir haben nun ein genaues Bild über die Funktion ${}_tV_{(\lambda)}$, d. h. über die Abhängigkeit der Höhe der Reserve von der Sterblichkeit erhalten; wir fassen unsere Ergebnisse im Satz zusammen:

Wenn die Sterblichkeitsintensität λ zunimmt von 0 *bis zu* $\frac{1}{n}$, *so nimmt die Reserve* ${}_tV$ *vorerst ab bis zu einem Minimum, welches erreicht wird beim Wert*

$$\lambda_1 = \frac{2n - \sqrt{2n(n-t)}}{n(n+t)}\,,$$

und dann wieder zu bis zum Ausgangswert $\frac{t}{n}$ (vgl. nachstehende Figur).



Aus der Figur kann man ferner schliessen: In jedem Zeitpunkt t (t kann irgendeinen Zeitpunkt zwischen 0 und n bedeuten) lassen sich stets Wertepaare λ angeben, welche auf dieselbe Reserve führen, nämlich ein Wert I vor dem Minimum und ein Wert II nach dem Minimum; wir werden auf diese Tatsache in § 7 eingehend zu sprechen kommen.

* * *

Wie gezeigt wurde, ist der Wert von λ, für welchen $_tV(\lambda)$ ein Minimum erreicht, abhängig von t; daher ist auch die Grösse des Minimums selber, $_tV(\lambda_1)$, abhängig von t; in jedem Punkt t kann die Reserve nur schwanken zwischen den Grenzen $\frac{t}{n}$ und $_tV(\lambda_1)$; in der nachfolgenden kleinen Tabelle sind für einige Werte von t diese beiden Grenzen, sowie die Schwankung

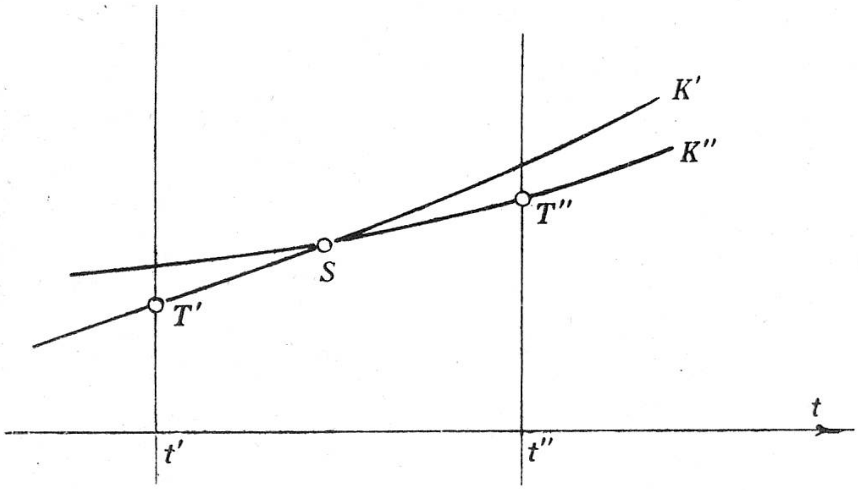
$$\triangle = \frac{t}{n} - {}_tV(\lambda_1)$$

angegeben.

t	λ_1	${}_tV(\lambda_1)$	$\frac{t}{n}$	$\triangle$
0	$0{,}5858 \cdot \frac{1}{n}$	0,00000	0,00000	0,00000
$\frac{n}{4}$	$0{,}6202 \cdot \frac{1}{n}$	0,20696	0,25000	0,04304
$\frac{n}{2}$	$0{,}6667 \cdot \frac{1}{n}$	0,43750	0,50000	0,06250
$\frac{3n}{4}$	$0{,}7388 \cdot \frac{1}{n}$	0,68566	0,75000	0,06434
n	$1{,}0000 \cdot \frac{1}{n}$	1,00000	1,00000	0,00000

Wenn man nun t *variiert* und in jedem Punkt t dieses Minimum ${}_tV(\lambda_1)$ als Ordinate aufträgt, so erhält man als geometrischen Ort aller Punkte $[t, {}_tV(\lambda_1)]$ eine gewisse Kurve, welche wir die „Grenzkurve" nennen wollen. Ihre Gleichung lässt sich, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, leicht finden.

Vorerst wollen wir noch zeigen, dass eine solche Grenzkurve überhaupt existiert. Es bezeichne λ_1' den einem bestimmten Zeitpunkt t' entsprechenden „Minimalwert" λ_1, wie er sich aus (10^a) ergibt; setzen wir diesen Wert λ_1' in die Reservengleichung (6) an Stelle von λ ein und *lassen alsdann t variieren* und zeichnen die entsprechende Reservekurve (Hyperbel), so wollen wir diese mit K' bezeichnen; sie trifft die in t' errichtete Ordinate in einem Punkt T', dem „Minimalpunkt". Einem andern, sagen wir spätern Zeitpunkt t'' entspreche der Minimalwert λ_1'', die Kurve K'' und der Minimalpunkt T''. Die Kurve K'' muss nun die im Punkt t' errichtete Ordinate *oberhalb* T' treffen, da T' das Minimum der Reserve im Punkt t' darstellt; ebenso muss die Kurve K' die im Punkt t'' errichtete Ordinate *oberhalb* T'' treffen aus dem gleichen Grunde. Hieraus folgt nun: *Die zwei Kurven K' und K'' schneiden sich zwischen t' und t''.* Da dies für zwei



beliebige Punkte t' und t'', also auch für zwei unendlich benachbarte gilt, so sehen wir ein, dass die Aufeinanderfolge aller dieser Schnittpunkte eine gewisse Kurve stetig erfüllt; diese Kurve ist nichts anderes als die Aufeinanderfolge aller Minimalpunkte; sie ist identisch mit der *Enveloppe* der Kurven ${}_tV(\lambda)$, wo t die unabhängige Variable ist und λ als veränderlicher Kurvenparameter aufgefasst wird (vgl. § 4).

§ 4.

Die Grenzkurve.

Die Gleichung der Grenzkurve, welche als der geometrische Ort der Minimalpunkte definiert wurde, wird gefunden, indem man in der Ausgangsformel für die Reserve

$$ {}_tV = 1 - \frac{n-t}{n} \frac{1 - \lambda \frac{n+t}{2}}{(1-\lambda t)(1-\lambda \frac{n}{2})} $$

den Wert

$$ \lambda_1 = \frac{2n - \sqrt{2n(n-t)}}{n(n+t)} $$

einsetzt. Es wird

$$ {}_tV^g = 1 - \frac{n-t}{n} \cdot f(t, n) \qquad (11) $$

wo nun $f(t, n)$ bestimmt werden soll.

$$ f(t, n) = \frac{(n+t)^2 \sqrt{2n(n-t)}}{4nt(n-t) + \left[n(n-t) + 2t^2\right] \cdot \sqrt{2n(n-t)}} = $$

$$ = \frac{(n+t)^2 \sqrt{2n(n-t)} \left\{4nt(n-t) - \left[n(n-t) + 2t^2\right] \cdot \sqrt{2n(n-t)}\right\}}{\left[4nt(n-t)\right]^2 - \left[n(n-t) + 2t^2\right]^2 \cdot \left[2n(n-t)\right]} = $$

$$ = \frac{2t(n+t)^2 \sqrt{2n(n-t)} - (n+t)^2 \left[n(n-t) + 2t^2\right]}{8nt^2(n-t) - \left[n(n-t) + 2t^2\right]^2} $$

Dieser Ausdruck lässt sich überführen in ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$ f(t, n) = \left[\frac{n+t}{\sqrt{n(n-t)} + \sqrt{2} \cdot t}\right]^2, $$

wo beide Wurzeln im Nenner das *positive* Vorzeichen besitzen; dies setzen wir in (11) ein und erhalten die gesuchte Gleichung der *Grenzkurve*

$$ {}_tV^g = 1 - \frac{n-t}{n}\left[\frac{n+t}{\sqrt{n(n-t)}+\sqrt{2}\cdot t}\right]^2 \qquad (12)$$

Spezielle Punkte der Kurve sind:

$$t = 0\,; \quad {}_0V^g = 0$$

$$t = 1\,; \quad {}_nV^g = 1\,.$$

Aus (12) ist ersichtlich, dass alle Kurvenpunkte, für welche $t > n$ ist, imaginär sind; den Punkt $t = n$ werden wir daher noch etwas näher untersuchen müssen; für negative Werte von t dagegen wird der Ausdruck (12) reell.

* * *

Einfacher erhalten wir die Gleichung der Grenzkurve, wenn wir sie als Enveloppe der durch die Gleichung (6) dargestellten Hyperbelschar auffassen. Wir ersetzen der bessern Übersichtlichkeit wegen ${}_tV$ durch y und t durch x, so dass die Gleichung lautet

$$y = 1 - \frac{n-x}{n}\,\frac{1-\lambda\frac{n+x}{2}}{(1-\lambda x)\left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)}$$

oder

$$n\left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)(1-\lambda x)(y-1)+(n-x)\left(1-\lambda\frac{n+x}{2}\right)=0 \qquad (13)$$

Wir ordnen die linke Seite nach Potenzen des Kurvenparameters λ; die Koeffizienten von λ^2, λ, λ^0 bezeichnen wir kurz mit $[\lambda^2]$, $[\lambda]$, $[\lambda^0]$ und finden:

$$\left.\begin{aligned} [\lambda^2] &= n(y-1)\frac{n}{2}x && = a \\ [\lambda] &= -n(y-1)\left(\frac{n}{2}+x\right) - \frac{n^2-x^2}{2} && = 2b \\ [\lambda^0] &= n(y-1)+n-x && = c \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

so dass

$$f(x, y, \lambda) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{15}$$

Die Bedeutung von a, b, c ist aus (14) ersichtlich. Aus (15) folgt:

$$\frac{\delta f(x, y, \lambda)}{\delta \lambda} = 2(a\lambda + b) = 0 \tag{16}$$

Nach der Theorie der ebenen Kurven ergibt sich nun die Gleichung der Enveloppe, indem man aus den zwei Gleichungen

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

$$\frac{\delta f(x, y, \lambda)}{\delta \lambda} = 0$$

den veränderlichen Kurvenparameter λ eliminiert; das Resultat der Elimination, eine Gleichung in x, y allein, stellt die Enveloppe dar. In unserm Falle ist diese Elimination sehr einfach; aus (16) folgt

$$\lambda = -\frac{b}{a}$$

und wenn man diesen Wert in (15) einsetzt, erhält man als *Gleichung der Enveloppe*

$$b^2 - ac = 0$$

oder nach Einsetzung der Ausdrücke (14):

$$\left[n(n+2x)(y-1)+n^2-x^2\right]^2-8n^2x(y-1)\left[n(y-1)+n-x\right]=0 \quad (17)$$

Die Enveloppe ist somit eine Kurve vierten Grades.

Bedenkt man nun, dass die Einsetzung der Wurzeln der Gleichung $\frac{dV(\lambda)}{d\lambda}=0$ in die Gleichung (6) identisch ist mit der Elimination des Parameters λ, so müssen die Gleichungen (12) und (17) die gleiche Kurve darstellen. Nur ist zu bedenken, dass wir oben bloss die eine Wurzel λ_1 der Gleichung $\frac{dV}{d\lambda}=0$ berücksichtigt haben; daher kommt es, dass die Gleichung (12) nur den einen Zweig der Enveloppe (17) darstellt. Dieser Zusammenhang zwischen (12) und (17) soll noch kurz gezeigt werden.

Wir ordnen in (17) die linke Seite nach Potenzen von $y-1$; die Koeffizienten werden

$$\left[(y-1)^2\right]=n^2(n-2x)^2$$

$$\left[(y-1)\right]=2n(n-x)\left[(n+2x)(n+x)-4nx\right]$$

$$\left[(y-1)^0\right]=(n+x)^2\cdot(n-x)^2$$

Lösen wir die in $(y-1)$ quadratische Gleichung auf, so kommt

$$y-1=\frac{-n(n-x)\left[(n+2x)(n+x)-4nx\right]\pm\sqrt{D}}{n^2(n-2x)^2}.$$

Für die Diskriminante D erhalten wir nach einigen Umformungen

$$D=n^2(n-x)^2\,4x^2\,2n(n-x).$$

Daher folgt, wenn wir den Bruch rechts etwas vereinfachen

$$y-1=$$

$$-\frac{n(n-x)}{n^2}\cdot\frac{(n+2x)(n+x)-4nx\mp 2x\sqrt{2n(n-x)}}{(n-2x)^2}$$

Den zweiten Faktor verwandelt man in ein vollständiges Quadrat und findet

$$y-1=-\frac{(n-x)}{n}\left[\frac{\sqrt{2}\cdot x\mp\sqrt{n(n-x)}}{n-2x}\right]^2$$

so dass schliesslich

$$y=1-\frac{n-x}{n}\left(\frac{n+x}{\sqrt{2}\cdot x\pm\sqrt{n(n-x)}}\right)^2 \tag{18}$$

Abgesehen vom doppelten Vorzeichen im Nenner, stimmt diese Formel vollständig mit (12) überein; die Formel (12) stellt somit in der Tat nur den einen Zweig der Enveloppe (17) bzw. (18) dar.

Um die Kurve konstruieren zu können, gehen wir zu einer kurzen Diskussion der Kurvengleichung (17) über. Sie lautet, wenn sie nach dem Grad der Glieder geordnet wird:

$$x^2[2ny-x]^2-2nx[2n^2y^2+nxy-2x^2]-$$

$$-n^2[4x^2-4nxy-n^2y^2]=0 \tag{19}$$

Da die Gleichung erst mit Gliedern zweiten Grades beginnt, so besitzt die Kurve den Nullpunkt als Doppelpunkt; die Gleichungen der Doppelpunktstangenten lauten

$$y = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{n} x$$

und

$$y = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{n} x$$

Ihre Konstruktion liefert uns den Verlauf der Kurve in der Nähe des Nullpunktes.

Wegen der an Gleichung (12) angeknüpften Bemerkung interessiert uns noch speziell der Punkt ($x = n$, $y = 1$); durch Koordinatentransformation machen wir ihn zum Nullpunkt und finden, dass er eine *Spitze* der Kurve ist; die Gleichung der Spitzentangente lautet

$$y = \frac{2}{n} x - 1,$$

diese Gerade schneidet somit die x-Achse im Punkt $x = \frac{n}{2}$.

Die Kurve besitzt in der zur Ordinaten-Achse parallelen Geraden $x = \frac{n}{2}$ zwei zusammenfallende Asymptotenrichtungen; im unendlich fernen Punkt dieser Richtung berührt unsere Kurve die unendlich ferne Gerade.

Die durch das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel in (18) gekennzeichneten zwei Zweige der Kurve tendieren beide mit sehr grossem negativem x gegen $-\infty$, denn aus (18) folgt für $x = -\infty$, $y = -\infty$.

Die Kurve ist in Figur 2 hinten dargestellt für die Annahme $n = 20$.

§ 5.

Die Reserve bei Berücksichtigung der Verzinsung.

Wir gehen wieder aus von der allgemeinen Formel

$$ {}_t\overline{V} = 1 - \frac{\dfrac{1}{v^t \cdot l_{x+t}} \displaystyle\int_t^n v^\tau\, l_{x+\tau} \cdot d\tau}{\dfrac{1}{l_x} \displaystyle\int_0^n v^\tau \cdot l_{x+\tau}\, d\tau} $$

Setzen wir hierin $v^\tau = e^{-\delta\tau}$, so bedeutet $\delta = \mathrm{Log}\,(1+i) = -\mathrm{Log}\, v$ die Verzinsungsintensität. Auf Grund unserer Hypothese ist $l_{x+\tau} = l_x (1 - \mu_x \tau) = l_x (1 - \lambda \tau)$ zu setzen.

$$ {}_t\overline{V} = 1 - \frac{e^{\delta t}}{1 - \lambda t} \frac{\displaystyle\int_t^n e^{-\delta\tau} \cdot (1 - \lambda\tau) \cdot d\tau}{\displaystyle\int_0^n e^{-\delta\tau} \cdot (1 - \lambda\tau) \cdot d\tau} \tag{20} $$

Das unbestimmte Integral $J = \int e^{-\delta\tau} \cdot (1 - \lambda\tau) \cdot d\tau$ ergibt sich zu

$$ J = \frac{e^{-\delta\tau} (\delta - \lambda) - \lambda\delta\tau\, e^{-\delta\tau}}{-\delta^2}, $$

folglich ist

$$ {}_t\overline{V} = 1 - \frac{1}{1 - \lambda t} \frac{(\delta - \lambda)\left(e^{-\delta(n-t)} - 1\right) - \delta\lambda\left(n\, e^{-\delta(n-t)} - t\right)}{(\delta - \lambda)\left(e^{-\delta n} - 1\right) - \delta\lambda n\, e^{-\delta n}} \tag{21} $$

Von dieser Formel werden wir später noch Gebrauch machen. Für jetzt bemerken wir, dass

$$e^{-\delta(n-t)} - 1 = v^{n-t} - 1$$

und

$$e^{-\delta n} - 1 = v^n - 1$$

negative Grössen sind; wir drehen daher im Zähler und Nenner von (21) das Vorzeichen um und finden

$$_tV = 1 - \frac{1}{1 - \lambda t} \frac{\delta\lambda(n\,v^{n-t} - t) + (\delta - \lambda)(1 - v^{n-t})}{\delta\lambda\, n\, v^n + (\delta - \lambda)(1 - v^n)} \tag{22}$$

Von dieser Reservenformel wollen wir nun ausgehen und wiederum die Funktion $_tV(\lambda)$, d. h. die Abhängigkeit der Reserve von der Sterblichkeit untersuchen. Das geometrische Bild dieser Funktion ist wiederum eine Kurve dritten Grades mit den drei reellen Asymptoten

$$\lambda_I = \frac{1}{t},\ \lambda_{II} = \frac{\delta(1 - v^n)}{1 - v^n - \delta\, n\, v^n},\ y = {}_tV(\lambda) = +1.$$

Die zwei Pole λ_I und λ_{II} der Funktion $_tV(\lambda)$ sind — wie es auch in der Natur der Sache liegt — beide grösser als $\frac{1}{n}$; für λ_I sieht man dies ohne weiteres ein und für λ_{II} resultiert dies z. B. aus der kleinen Zusammenstellung

n	$\frac{1}{n}$	λ_{II}		
		$i = 0.03$	$i = 0.035$	$i = 0.04$
20	0.05	0.111	0.112	0.115
25	0.04	0.091	0.093	0.095
30	0.033	0.078	0.080	0.082
40	0.025	0.062	0.064	0.067
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Uns interessiert nun wieder am meisten das Intervall $0 < \lambda < \frac{1}{n}$; wie verläuft die Funktion ${}_tV(\lambda)$ in diesem?

Vorerst die Werte an den Grenzen des Intervalls:

$$ {}_tV(0) = 1 - \frac{1 - v^{n-t}}{1 - v^n} = \frac{v^{n-t} - v^n}{1 - v^n} \qquad (22^a) $$

$$ {}_tV\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{n}{n-t} \cdot \frac{1 - v^{n-t} - \delta(n-t)}{1 - v^n - \delta \cdot n} \qquad (22^b) $$

Durch Subtraktion folgt

$$ {}_tV\left(\frac{1}{n}\right) - {}_tV(0) = $$

$$ = \frac{n(n-t)\,\delta\,(v^{n-t} - v^n) - t\,(1 - v^n)\,(1 - v^{n-t})}{(n-t)(1 - v^n)(1 - v^n - \delta n)} \qquad (23) $$

Mittelst Reihenentwicklung wollen wir nun zeigen, dass diese Differenz *positiv* ist. Vorerst betrachten wir den *Nenner;* die Faktoren $(n - t)$ und $(1 - v^n)$ sind beide positiv; wie steht es mit dem dritten Faktor?

$$ 1 - v^n - \delta n = 1 - (1 + i)^{-n} - n \operatorname{Log}(1 + i), \quad \text{wo } 0 < i < 1, $$

$$ = 1 - \left[1 - ni + n(n+1)\frac{i^2}{2!} - + \cdots\right] - n\left[\frac{i}{1} - \frac{i^2}{2} + \cdots\right] $$

$$ = -n\left\{\frac{i^2}{2!}(n + 1 - 1\,!) - \frac{i^3}{3!}\left[(n+1)(n+2) - 2\,!\right] + - \cdots\right\} $$

Die Konvergenz der Reihe in der geschweiften Klammer lässt sich leicht nachweisen. — Die Glieder dieser Reihe sind abwechselnd positiv und von Anfang an ist jedes Glied grösser als das unmittelbar nachfolgende; wenn wir uns daher auf die ersten Glieder beschränken, so folgt:

$$1 - v^n - \delta n \backsim - n \left\{ n \frac{i^2}{2!} - \frac{i^3}{3!} (n^2 + 3n) \right\}$$

$$\backsim - n^2 \frac{i^2}{2!} \left\{ 1 - \frac{i}{3} (n + 3) \right\}$$

Da für alle praktisch vorkommenden Fälle

$$i \leqq 0 \cdot 045$$

vorausgesetzt werden darf, so ist für alle $n \leqq 63$ die geschweifte Klammer sicher ein *positiver* echter Bruch; daraus folgt, dass

$$1 - v^n - \delta n < 0$$

ist; somit ist der *Nenner* des Bruches in (23) *negativ.*

Den Zähler formen wir ebenfalls durch Entwicklung von $\delta = \mathrm{Log}\,(1 + i)$, v^{n-t}, v^n in absolut konvergente unendliche Reihen und nachherige gliedweise Multiplikation dieser Reihen in eine ebenfalls konvergente unendliche Reihe um, welche nach Potenzen von i fortschreitet; die Koeffizienten dieser Reihe sind allerdings nicht sehr einfach, doch findet man, wenn man nur die zwei ersten Glieder der Entwicklung berücksichtigt, dass der Zähler sich auf die Form bringen lässt:

$$n(n - t)\,\delta\,(v^{n-t} - v^n) - t\,(1 - v^n)\,(1 - v^{n-t}) \backsim$$

$$- \frac{n^2\, t\,(n - t)^2\, i^4}{12}$$

d. h. auch der *Zähler* ist *negativ.*

Aus dieser Betrachtungsweise ergibt sich nun, dass die durch Gleichung (23) dargestellte Differenz einen positiven Wert hat; daraus folgt

$$ {}_tV\left(\frac{1}{n}\right) > {}_tV(0) \tag{23^a} $$

*   *
*

Wir bestimmen weiter den Differentialquotienten $\frac{d\,{}_tV(\lambda)}{d\lambda}$, um mit seiner Hülfe den Richtungskoeffizienten der Kurve ${}_tV(\lambda)$ im Punkte $[0, {}_tV(0)]$ anzugeben. Wir ordnen in (22) Zähler und Nenner nach λ und differenzieren; es ergibt sich, wenn wir den Zähler des Differentialquotienten auch wieder nach Potenzen von λ ordnen:

$$ \frac{d\,{}_tV(\lambda)}{d\lambda} = $$

$$ -\frac{[\lambda^2]\cdot\lambda^2+[\lambda]\cdot\lambda\cdot+[\lambda^0]\cdot\lambda^0}{(1-\lambda t)^2\cdot\left\{\lambda[\delta n v^n-1+v^n]+\delta(1-v^n)\right\}^2} \tag{24} $$

Die drei Koeffizienten haben folgende Werte:

$$ [\lambda^2] = t[\delta n v^{n-t}-\delta t-1+v^{n-t}][\delta n v^n-1+v^n] $$

$$ [\lambda] = 2\delta t[1-v^{n-t}][\delta n v^n-1+v^n] $$

$$ [\lambda^0] = \delta^2[v^{n-t}\cdot(n-t)-v^n\cdot(n-t v^{n-t})] $$

Daher ist

$$ \left(\frac{d\,{}_tV(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = -\frac{[\lambda^0]}{\delta^2\cdot(1-v^n)^2} $$

$$ = -\frac{v^{n-t}\cdot(n-t)-v^n(n-t v^{n-t})}{(1-v^n)^2} \tag{25} $$

Der Zähler dieses Bruches ist eine positive Grösse; dies lässt sich folgendermassen nachweisen:

Damit

$$v^{n-t} \cdot (n-t) - v^n (n - t v^{n-t}) > 0$$

sei, muss

$$v^{n-t} \cdot (n-t) > v^n (n - t v^{n-t})$$

sein oder

$$n v^t - t v^n < n - t \tag{α}$$

Dies ist in der Tat der Fall! Denn

$$n v^t = n \left[1 - t i + t(t+1)\frac{i^2}{2!} - t(t+1)(t+2)\frac{i^3}{3!} + - \cdots\right]$$

$$t v^n = t \left[1 - n i + n(n+1)\frac{i^2}{2!} - n(n+1)(n+2)\frac{i^3}{3!} + - \cdots\right]$$

und durch Subtraktion

$$\begin{aligned} n v^t - t v^n = (n-t) + n t \left[(t+1) - (n+1)\right]\frac{i^2}{2!} - \\ - n t \left[(t+1)(t+2) - \right. \\ \left. - (n+1)(n+2)\right]\frac{i^3}{3!} + - \cdots \end{aligned}$$

$$= (n-t)\left[1 - n t \frac{i^2}{2!} + n t (n+t+3)\frac{i^3}{3!} - + \cdots\right]$$

$$= (n-t)\left[1 - n t \frac{i^2}{2!} \underbrace{\left(1 - \frac{n+t+3}{3} i + - \cdots\right)}_{\varepsilon}\right]$$

$$= (n-t)\left[1 - n t \frac{i^2}{2!}\varepsilon\right], \quad \text{wo } 0 < \varepsilon < 1,$$

$$n v^t - t v^n = (n-t) \cdot \triangle \tag{β}$$

wo $\triangle = 1 - nt\frac{i^2}{2!}\varepsilon$ einen positiven *echten Bruch* bedeutet; aus *β)* ist ersichtlich, dass Ungleichung *α)* erfüllt ist. Damit ist bewiesen, dass

$$\left(\frac{d\,{}_tV(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} < 0$$

in Worten: *Die Kurve* ${}_tV(\lambda)$ *fällt im Nullpunkt gegen die positive Abszissenachse ab.*

Halten wir dieses Resultat mit der Ungleichung (23[a]) zusammen und berücksichtigen wir ferner, dass naturgemäss ${}_tV(\lambda)$ im Intervall $0 < \lambda < \frac{1}{n}$ nie gleich 0 werden kann (es sei denn $t = 0$), so ist bewiesen, dass die Funktion ${}_tV(\lambda)$ im Intervall $0 < \lambda < \frac{1}{n}$ (mindestens) ein Minimum besitzt. Wir haben also den *Satz:*

Wenn die Sterblichkeitsintensität $\lambda = \mu_x$ *von* 0 *bis* $\frac{1}{n}$ *wächst, so nimmt die durch Gleichung (22) dargestellte Reserve vorerst ab bis zu einem Minimum und dann wieder zu.*

§ 6.

Einfluss des Zinsfusses auf die Höhe der Reserve.

Ausgehend von Formel (21) bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{d\,{}_tV}{d\delta} = -\frac{1}{1-\lambda t}\,\frac{[\delta^2]\cdot\delta^2 + [\delta]\cdot\delta + [\delta^0]\cdot\delta^0}{[(\delta-\lambda)(e^{\delta n}-1) - \delta\lambda n e^{\delta n}]^2} \qquad (\alpha)$$

Die Koeffizienten haben die Werte

$$[\delta^2] = (1 - \lambda n)\left[n(v^{n-t} - v^n) + \lambda n t v^n (1 - v^{n-t}) - \right.$$
$$\left. - t v^{n-t}(1 - v^n)\right]$$

$$[\delta] = (2 - \lambda n)\left[\lambda t v^{n-t} \cdot (1 - v^n) - \lambda n (v^{n-t} - v^n)\right] -$$
$$- \lambda n \cdot \lambda t \cdot v^n \cdot (1 - v^{n-t})$$

$$[\delta^0] = o^2 t (1 - v^n)(1 - v^{n-t}) > 0\,.$$

Ist nun der Zähler des Bruches in (α) positiv, so ist

$$\frac{d\,{}_tV}{d\,\delta} < 0\,. \tag{β}$$

Für $\delta = 0$ ist diese Ungleichung erfüllt, weil der Zähler sich auf $[\delta^0] > 0$ reduziert [1]; wir wissen somit, dass

$$\left|\frac{d\,{}_tV}{d\,\delta}\right|_{\delta=0} < 0 \tag{γ}$$

Diese Ungleichung besagt, dass die Kurve ${}_tV(\delta)$ im Punkte $\delta = 0$ gegen die positive Abszissenachse *abfallend* ist.

Da ferner der Zähler von *α)* eine stetige Funktion ist, so ist zum vornherein gewiss, dass die Ungleichung *β)* nicht nur für $\delta = 0$, sondern auch in einer Umgebung von $\delta = 0$ erfüllt ist; da nun δ für die gebräuchlichen Zinsfüsse sehr nahe bei 0 liegt, so darf man folgenden Satz aussprechen:

Mit wachsendem Zinsfuss nimmt bei Zugrundelegung der Hypothese von Moivre die Reserve ab.

---

[1]) Man hat allerdings vor dem Grenzübergang mit $(1 - v^n) \cdot (1 - v^{n-t})$ wegzudividieren.

Beispiel.

i	δ	${}_5V(\delta)$ $(n=20)$			
		$\lambda=0$		$\lambda=0.025$	
			Abnahme		Abnahme
0	0	0.250		0.214	
			0.018		0.015
0.01	0.00995	0.232		0.199	
			0.018		0.015
0.02	0.01980	0.214		0.184	
			0.008		0.007
0.025	0.02468	0.206		0.177	
			0.008		0.007
0.03	0.02956	0.198		0.170	
			0.008		0.007
0.035	0.03440	0.190		0.163	
			0.008		0.006
0.04	0.03921	0.182		0.157	

Aus diesem Beispiel ersehen wir, dass die im letzten Satz ausgesprochene *Abnahme* sehr regelmässig vor sich geht und um so kleiner wird, je grösser δ ausfällt. Die durch Gleichung (21) dargestellte Funktion ${}_tV(\delta)$ besitzt nämlich die positive Abszissenachse zur Asymptote. Dies zeigen wir, indem wir in (21) den Bruch mit δ kürzen und ausgehend von

$$ {}_t\overline{V}(\delta) = 1 - \frac{1}{1-\lambda t} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\delta}\right)\left(e^{-\delta(n-t)}-1\right)-\lambda\left(n\,e^{-\delta(n-t)}-t\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\delta}\right)\left(e^{-\delta n}-1\right)-\lambda\, n\, e^{-\delta n}} \qquad (\varepsilon) $$

den Limes bilden

$$ \lim_{\delta=\infty} {}_t\overline{V}(\delta) = 1 - \frac{1-\lambda t}{1-\lambda t} = 0 $$

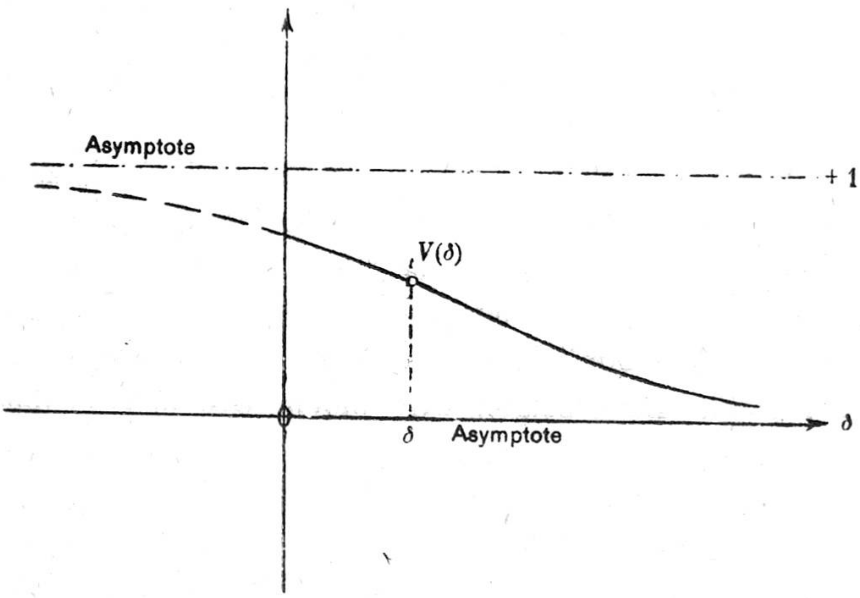
Kürzen wir in (ε) mit $e^{-\delta n}$, so wird

$$
{}_t\overline{V}(\delta) = 1 - \frac{1}{1 - \lambda t} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right)\left(e^{\delta t} - e^{\delta n}\right) - \lambda\left(n\, e^{\delta t} - t\, e^{\delta n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right)\left(1 - e^{\delta n}\right) - \lambda n}
$$

Hieraus ergibt sich der andere Grenzwert

$$
\lim_{\delta = -\infty} {}_t\overline{V}(\delta) = 1 - \frac{1}{1 - \lambda t} \cdot \frac{0}{1 - \lambda n} = +1
$$

Auch die zur negativen Abszissenachse im Abstand $+1$ gezogene Parallele ist somit eine Asymptote der Kurve ${}_tV(\delta)$; wir können also die Abhängigkeit der Reserve von der Verzinsung durch folgende Figur veranschaulichen.



* * *

Gleich wie wir oben (§§ 2 und 3) bei der Untersuchung des Einflusses der Sterblichkeit auf die Höhe der Reserve die Verzinsung gleich 0 setzten, könnten wir hier, wo es sich um den Einfluss des Zinsfusses handelt, die Sterblichkeitsintensität λ vernachlässigen. Setzt man in (22) $\lambda = 0$, so erhält man die Reservenformel

$$ {}_t\overline{V} = 1 - \frac{1 - v^{n-t}}{1 - v^n} = \frac{v^{n-t} - v^n}{1 - v^n} \tag{26} $$

Für diesen Fall hat Herr Prof. Moser für den oben aufgestellten Satz einen exakten Beweis aufgestellt (Vorlesungen über Reservenrechnung, W. S. 1914/15). Der Beweis lässt sich aber auch mit Hülfe der im § 5 verwendeten Reihen durchführen. Wir schreiben zu diesem Behufe bequemer

$$ {}_t\overline{V} = 1 - \frac{1 - e^{-\delta(n-t)}}{1 - e^{-\delta n}} \tag{26a} $$

Diesen Ausdruck leiten wir nach δ ab und finden:

$$ \frac{d\,{}_tV(\delta)}{d\,\delta} = - \frac{e^{-\delta(n-t)}}{(1 - e^{-\delta n})^2} \left[n(1 - v^t) - t(1 - v^n) \right] \tag{26b} $$

Entwickeln wir $v^t = (1 + i)^{-t}$ und $v^n = (1 + i)^{-n}$ in Binomialreihen, so geht die eckige Klammer über in

$$ n(1 - v^t) - t(1 - v^n) = n\,t(n - t)\frac{i^2}{2!}\left\{1 - \frac{n+t+3}{3}\,i + - \cdots\right\} $$

$$ = n\,t\,(n - t)\,\frac{i^2}{2!}\,\varepsilon\,, $$

wo abkürzend $\varepsilon = 1 - \frac{n + t + 3}{3}\,i + \cdots$ gesetzt ist; für alle gebräuchlichen Werte von n und i ist $0 < \varepsilon < 1$; mithin ist

$$ n\,(1 - v^t) - t\,(1 - v^n) > 0\,. $$

Der durch Gleichung (26^b) ausgedrückte Differentialquotient ist somit *negativ.*

Mit wachsender Verzinsungsintensität nimmt die durch (26) bzw. (26^a) dargestellte Reserve ab.

Auch in diesem Spezialfall ist übrigens

$$\lim_{\delta = +\infty} {}_tV(\delta) = 0$$

$$\lim_{\delta = -\infty} {}_tV(\delta) = +1 ,$$

wie sich ohne weiteres aus (26^a) ergibt.

* * *

Aus den durchgeführten Beispielen lässt sich schliessen, dass es gestattet ist, beim Studium der Abhängigkeit der Reserve von der Sterblichkeit die Wirkung der Verzinsung zu vernachlässigen, aber auch, wenn man nur den Einfluss der Verzinsung nachprüfen will, die Sterblichkeit als nicht vorhanden vorauszusetzen. Man darf somit die Wirkungen aus beiden Veränderlichen für sich betrachten, ohne falsche Schlüsse zu ziehen.

Diese Tatsache wird vielleicht für andere Fälle und für kompliziertere Annahmen über den Verlauf der Überlebensordnung mit Nutzen verwendet werden können.

§ 7.

Der Zeichenwechselsatz.

Herr Prof. *Moser* beweist im 9. Heft der „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker" den folgenden allgemeinen Satz:

„Wird die Reserve einer gemischten Versicherung nach zwei Überlebensordnungen gerechnet, von denen die eine für ein im Verlaufe der Versicherung gelegenes Intervall eine grössere Sterblichkeitsintensität angibt als die andere, so weist die Reservendifferenz in jenem Intervall stets einen Zeichenwechsel auf.“

Man nennt diesen Satz den Zeichenwechselsatz.

Im folgenden soll dargetan werden, dass dieser Satz, allerdings unter einer gewissen Bedingung, auch dann gilt, wenn für die ganze Versicherungsdauer (und nicht nur für ein im Verlauf der Versicherung gelegenes Intervall) die eine Überlebensordnung eine grössere Sterblichkeitsintensität angibt als die andere. Vorausgesetzt bleibt auch hier ein geradliniger Verlauf der Überlebensordnung.

Wir gehen aus von der Formel (6), § 2.

$$ {}_t\overline{V}_{xn} = 1 - \frac{n-t}{n} \frac{1-\lambda \frac{n+t}{2}}{(1-\lambda t)\left(1-\lambda \frac{n}{2}\right)} \qquad (a) $$

Nun wollen wir die Reserve für die nämliche Versicherung berechnen, wenn eine Überlebensordnung zugrunde gelegt wird, bei welcher während des ganzen Intervalls $0 < t < n$

$$ \mu'_{x+t} > \mu_{x+t} $$

ist. Der Akzent soll angeben, dass sich die Grösse auf die zweite Überlebensordnung bezieht. Letztere Ungleichung ist identisch mit

$$ \frac{\lambda'}{1-\lambda' t} > \frac{\lambda}{1-\lambda t} $$

oder

$$ \lambda' > \lambda . $$

Die Reserve nach dieser zweiten Überlebensordnung beträgt

$$ {}_t\overline{V}'_{\overline{xn}|} = 1 - \frac{n-t}{n} \frac{1-\lambda'\frac{n+t}{2}}{(1-\lambda' t)\left(1-\lambda'\frac{n}{2}\right)} \tag{b} $$

Die *Differenz* zwischen den zwei Reserven lässt sich für jeden Zeitpunkt t innerhalb der Versicherungsdauer bestimmen:

$$ {}_t\overline{V} - {}_t\overline{V}' = \left(\frac{1-\lambda'\frac{n+t}{2}}{(1-\lambda' t)\left(1-\lambda'\frac{n}{2}\right)} - \frac{1-\lambda\frac{n+t}{2}}{(1-\lambda t)\left(1-\lambda\frac{n}{2}\right)}\right)\frac{n-t}{n} \tag{27} $$

Dies ist eine gebrochene rationale Funktion von t; wir wollen ihre Nullstellen bestimmen, bzw. die Wurzeln der Gleichung ${}_t\overline{V} - {}_t\overline{V}' = 0$.

Vorerst formen wir (27) etwas um, indem wir beide Brüche auf gemeinsamen Nenner bringen und im Zähler nach Potenzen von t ordnen; es kommt:

$$ {}_t\overline{V} - {}_t\overline{V}' = \frac{n-t}{n} \cdot \frac{[t^2]\,t^2 + [t]\cdot t + [t^0]}{(1-\lambda' t)(1-\lambda t)\left(1-\lambda'\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{n}{2}\right)} \tag{27a} $$

wo

$$ \left.\begin{aligned} [t^2] &= \frac{n\lambda\lambda'}{4}(\lambda'-\lambda) \\ [t] &= (\lambda'-\lambda)\left[\frac{1}{2} - (\lambda'+\lambda)\frac{n}{2} + \lambda\lambda'\frac{n^2}{4}\right] \\ [t^0] &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27b} $$

Aus (27^a) und (27^b) folgt unmittelbar:

Die Gleichung ${}_t\overline{V} - {}_t\overline{V}' = 0$ *besitzt die reellen Wurzeln*

$$t = 0\,,$$

$$t = n\,,$$

$$t = \frac{2n(\lambda' + \lambda) - n^2\lambda\lambda' - 2}{n\lambda\lambda'} = t_s \tag{28}$$

Dass die Wurzeln $t = 0$ und $t = n$ auftreten, ist selbstverständlich, denn

$$ {}_0V = {}_0V' = 0$$

$$ {}_nV = {}_nV' = 1\,.$$

Anders verhält es sich mit der dritten Wurzel, welche wir mit t_s bezeichnen wollen und welche in (28) angegeben ist. Liegt diese Wurzel innerhalb des Intervalls $0 < t < n$ oder anders gefragt: unter welchen Bedingungen ist dies der Fall?

Vorerst die Ungleichung $\underline{t_s < n}$ ist stets erfüllt; sie lässt sich nämlich umformen in

$$\frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{n\lambda'} - \frac{1}{n\lambda} \cdot \frac{1}{n\lambda'} < 1 \tag{29}$$

Da aber sowohl λ als auch λ' kleiner als $\dfrac{1}{n}$ ist, so ist

$$\frac{1}{\lambda} > n$$

$$\frac{1}{\lambda'} > n\,,$$

folglich, wenn $\triangle_1$ und $\triangle_2$ zwei *positive* Grössen bezeichnen,

$$\frac{1}{n\lambda} = 1 + \Delta_1$$

$$\frac{1}{n\lambda'} = 1 + \Delta_2$$

Daraus kommt

$$\frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{n\lambda'} - \frac{1}{n\lambda} \cdot \frac{1}{n\lambda'} = 1 - \Delta_1 \Delta_2$$
$$< 1$$

Die Bedingung (29) ist somit stets erfüllt, es ist also stets

$$t_s \leqq n\,.$$

Die zweite Bedingung, dass $t_s > 0$ sei, also

$$\frac{2n(\lambda' + \lambda) - n^2\lambda\lambda' - 2}{n\lambda\lambda'} > 0$$

ist wegen $n\lambda\lambda' > 0$ äquivalent mit

$$2n(\lambda' + \lambda) - n^2\lambda\lambda' - 2 > 0 \qquad (30^a)$$

Diese Ungleichung (30^a) besagt, dass zwischen den drei Grössen λ, λ' und n eine gewisse Bedingung erfüllt sein muss, wenn die zwei Reservekurven ${}_tV$ und ${}_tV'$ östlich der Ordinatenachse einen Schnittpunkt besitzen sollen. Wir lösen diese Ungleichung nach λ' auf; es folgt

$$\lambda' > \frac{1}{n}\,\frac{2 - 2n\lambda}{2 - n\lambda} \qquad (30^b)$$

oder

$$\mu'_x > \frac{1}{n}\,\frac{2 - 2n\mu_x}{2 - n\mu_x}$$

Der Faktor $\frac{2-2n\lambda}{2-n\lambda}$ ist wegen $\lambda < \frac{1}{n}$ sicher ein positiver *echter* Bruch. Wenn somit λ bestimmt gegeben ist, so kann λ' nur das Intervall

$$\frac{1}{n} > \lambda' > \frac{1}{n}\,\frac{2-2n\lambda}{2-n\lambda}$$

durchlaufen, wenn die Funktion ${}_tV - {}_tV'$ im Intervall $0 < t < n$ eine Nullstelle besitzen soll. Wir kleiden das gefundene Resultat in den Satz:

Die Reservendifferenz ${}_tV - {}_tV'$ erleidet im Intervall $0 < t < n$ stets einen Zeichenwechsel, wenn die Sterblichkeitsintensität nach der zweiten Überlebensordnung der Bedingung (30^b) genügt.

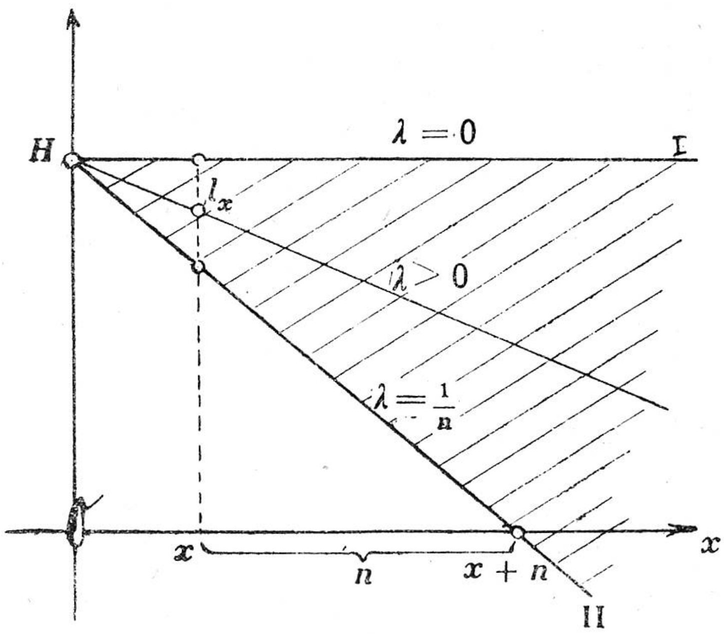
Wenn $\lambda' = \frac{1}{n}\,\frac{2-2n\lambda}{2-n\lambda}$ ist, so fällt der Ort des Zeichenwechsels in den Punkt $t_s = 0$; wenn $\lambda' < \frac{1}{n}\,\frac{2-2n\lambda}{2-n\lambda}$ ist, so findet der Zeichenwechsel links vom Nullpunkt statt. Ist $\lambda' = \frac{1}{n}$, so findet der Zeichenwechsel im Punkt $t_s = n$ statt; ist $\lambda' > \frac{1}{n}$, so fällt der Schnittpunkt t_s ausserhalb des Intervalls, rechts von $t = n$.

Beispiel zum Zeichenwechselsatz.

$$\left.\begin{aligned} n &= 25 \\ \lambda &= \frac{1}{50} \\ \lambda' &= \frac{1}{30} \end{aligned}\right\} t_s = 15$$

t	${}_t\overline{V}$	${}_t\overline{V}'$	${}_t\overline{V} - {}_t\overline{V}'$
0	0	0	0
1	0.03347	0.03527	— 0.00180
2	06722	07061	— 0.00339
3	10128	10603	— 0.00475
4	13565	14154	— 0.00589
5	17037	17714	— 0.00677
6	20545	21286	— 0.00741
7	24093	24870	— 0.00777
8	27683	28468	— 0.00785
9	31317	32082	— 0.00765
10	35000	35714	— 0.00714
11	38735	39368	— 0.00633
12	42526	43048	— 0.00522
13	46378	46756	— 0.00378
14	50296	50500	— 0.00204
15	54286	54286	0
16	58353	58122	+ 0.00231
17	62505	62022	+ 0.00483
18	66750	66000	+ 0.00750
19	71097	70078	+ 0.01019
20	75556	74286	+ 0.01270
21	80138	78667	+ 0.01471
22	84857	83286	+ 0.01571
23	89728	88245	+ 0.01483
24	94769	93714	+ 0.01055
25	1.00000	1.00000	0

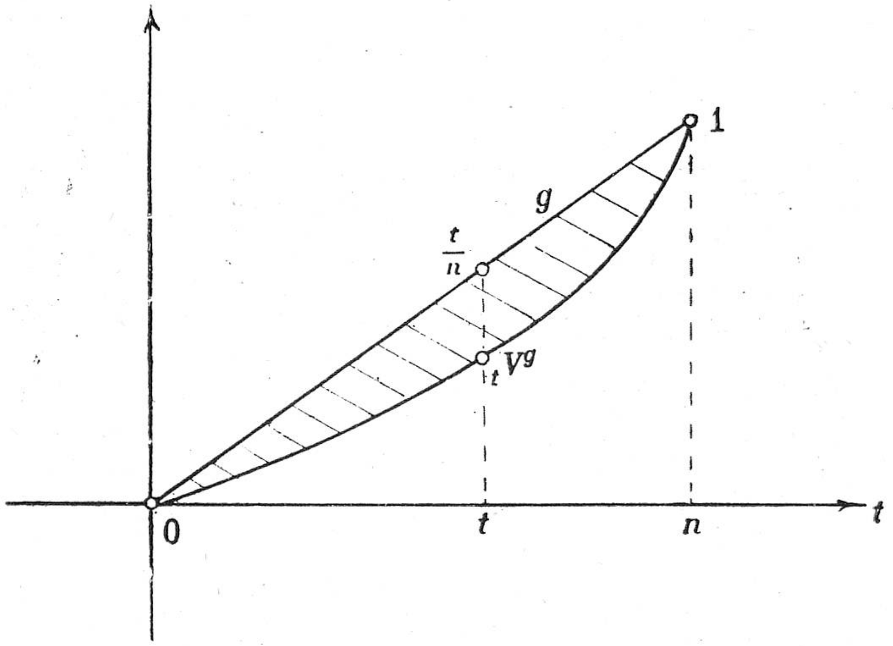
Wir fassen die gefundenen Resultate über die Zusammenhänge zwischen der Sterblichkeitsintensität und der Höhe der Reserve noch kurz zusammen: Der Sterblichkeitsparameter λ kann variieren zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{n}$; dann bewegt sich die



Überlebensgerade in nebenstehender Figur im schraffierten Intervall. Jeder Lage der Geraden entspricht eine bestimmte Reservekurve, und zwar lehrt die Untersuchung, dass, wenn λ zunimmt von 0 bis $\frac{1}{n}$, dann nicht etwa die Reserve ${}_tV$ beständig abnimmt, sondern nur bis zu einem Minimum, das erreicht wird für eine bestimmte Lage der l_x-Geraden, und hierauf wieder zunimmt. Zwei bestimmte Lagen der l_x-Geraden (d. h. zwei verschiedene Werte von λ, λ und λ') führen in einem bestimmten Punkt t auf die gleiche Reserve, wenn

$$\frac{2n(\lambda' + \lambda) - n^2 \lambda \lambda' - 2}{n \lambda \lambda'} = t \quad \text{ist}^{1)}.$$

Wenn die Gerade, welche die Überlebensordnung darstellt, sich zwischen den Lagen I und II (vgl. die letzte Figur) hinbewegt, so schwankt in jedem Punkt



t die Reserve zwischen den zwei Grenzen $\frac{t}{n}$ und $_tV^g$ hin und her; $_tV^g$ bedeutet die in § 4 behandelte Grenzfunktion. Sämtliche Reservekurven verlaufen also *zwischen* der Geraden g und der Grenzkurve $_tV^g$.

Die Untersuchung zeigt uns somit, dass — trotz der elementaren Voraussetzung über die Rechnungsgrundlagen — die Reserve eine recht komplizierte Funktion der Sterblichkeit ist; eine Änderung der Überlebensordnung kann auf eine grössere, aber eventuell auch auf eine kleinere Reserve führen. Die Be-

---

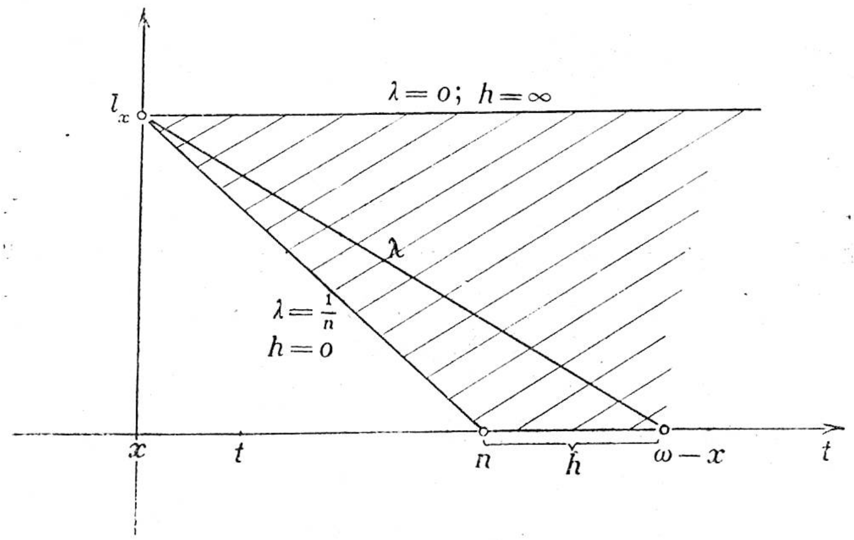
[1]) Vgl. hierzu die erste Figur in § 3; die Werte *I* und *II* sind zwei solche Werte λ und λ', welche dieser Gleichung genügen.

urteilung der Höhe der Reserve nach einer Änderung der Rechnungsgrundlagen erfordert also stets grosse Vorsicht.

§ 8.

Einführung eines andern Sterblichkeitsparameters.

Die Hypothese von Moivre hat die Annehmlichkeit, dass wir nur einen einzigen Sterblichkeitsparameter zu berücksichtigen haben. Der in unsern bisherigen Formeln verwendete Parameter, der im endlichen Intervall 0 bis $\frac{1}{n}$ variieren kann, lässt sich nun wie folgt durch einen in einem unendlich grossen Intervall variierenden Parameter ersetzen.



Die Überlebensordnung bewegt sich bei Veränderung von λ im schraffierten Gebiet [1]). Setzen wir nun

$$n + h = \omega - x \qquad (a)$$

---

[1]) Der Einfachheit halber gehen wir in dieser Figur nicht von H Personen, sondern von l_x Personen aus.

so hat h die in der Figur angegebene geometrische Bedeutung. Aus α) ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen λ und h, nämlich

$$\frac{1}{\omega - x} = \lambda = \frac{1}{n + h} \tag{β}$$

und umgekehrt

$$h = \frac{1 - n\lambda}{\lambda} \tag{γ}$$

Die Grenzen von h sind somit, wie man schon aus der Figur erkennt, ∞ und 0. Führen wir diesen neuen Sterblichkeitsparameter h in unsere frühere Formel (6) ein, so wird diese zu

$${}_t\overline{V} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)\left(1 - \frac{t}{n + 2h}\right)}{\left(1 - \frac{t}{n + h}\right)} \tag{31}$$

Diese einfache Reservenformel eignet sich sehr gut, um alle unsere frühern Schlüsse zu verifizieren. Wir wollen uns hier enthalten, dies zu tun, und nur bemerken, dass der in § 7 gefundene Zeitpunkt t_s, welcher den Schnitt von zwei Reservekurven bezeichnet, unter Benützung des Parameters h die einfache Gestalt annimmt

$$t_s = n - \frac{2hh'}{n}$$

II. Teil.

§ 1.

Einleitung. Das Gompertz-Makehamsche Gesetz [1]).

In Wirklichkeit lässt sich, wie eingehendere Untersuchungen gezeigt haben, das Absterben einer Gesamtheit von Personen nicht durch einen einzigen Parameter (Moivre) charakterisieren. Die Sterblichkeit ist vielmehr eine komplizierte Funktion mehrerer Parameter. Die Erfahrung lehrt vorerst, dass — abgesehen vom Kindesalter — mit wachsendem Alter die Sterblichkeit beständig zunimmt. Dieser Tatsache muss man bei der mathematischen Formulierung Rechnung tragen; dies kann man mit der Annahme, dass sich die Sterblichkeitskraft (Intensität der Sterblichkeit) jedes Alters in zwei Teile, einen konstanten und einen mit dem Alter wachsenden Teil, zerlegen lasse

$$\mu(x) = A + Y(x),$$

wobei der variable Teil $Y(x)$ in gleicher Weise wachse, wie ein Kapital durch Zins und Zinseszins; wir sagen: Die Einheit von $Y(x)$ nimmt in gleichen Zeiten um gleichviel zu (Hypothese von der konstanten Aufzinsung der Sterblichkeitskraft).

Angenommen nämlich, die Einheit wachse in $\frac{1}{m}$ der Zeiteinheit um $\frac{\delta}{m}$, also an auf $1 + \frac{\delta}{m}$. Dann

---

[1]) Wir folgen in der Ableitung dieses Gesetzes dem Gedankengang von Prof. Dr. *Moser* (Vorlesungen S. S. 1914: Die Konstanten der Makehamschen Überlebensordnung).

wächst $1+\frac{\delta}{m}$ in $\frac{1}{m}$ der Zeiteinheit an auf $\left(1+\frac{\delta}{m}\right)\cdot$ $\cdot\left(1+\frac{\delta}{m}\right)=\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^2$. Nach der Zeit $n\cdot\frac{1}{m}$ ist somit die Einheit angewachsen auf

$$\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^n.$$

Gehen wir nun von einem Zeitnullpunkt x_0 aus; in der Zeit $x-x_0=m(x-x_0)\frac{1}{m}$ ist $Y(x)$ angewachsen vom Anfangswert $Y(x_0)$ auf

$$Y(x)=Y(x_0)\cdot\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^{m(x-x_0)}$$

Lassen wir m sehr gross werden, also die Zeitteilchen sehr klein, so wird, wenn wir zur Grenze $m=\infty$ übergehen,

$$Y(x)=Y(x_0)\cdot e^{\delta(x-x_0)}$$

Bezeichnen wir abkürzend den konstanten Faktor $Y(x_0)\cdot e^{-\delta x_0}$ mit B, ferner e^{δ} mit c, so wird

$$Y(x)=B\,c^x,\quad\text{so dass}\quad \mu(x)=A+B\,c^x.$$

Da aber

$$l_x=k\cdot e^{-\int\mu(x)\cdot dx}=k\cdot e^{-Ax-\frac{Bc^x}{\operatorname{Log} c}}$$

so wird, wenn gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} s&=e^{-A}\\ g&=e^{-\frac{B}{\operatorname{Log} c}}\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

$$l_x=k\,s^x\,g^{c^x}\qquad(1)$$

Diese Formel heisst das *Gompertz-Makehamsche Gesetz*. Die Erfahrung hat gezeigt, dass dieses Gesetz mit grosser Treue die Resultate der Beobachtung wiederzugeben vermag; daher seine häufige Anwendung zur analytischen Ausgleichung von Sterbetafeln und zu theoretischen Betrachtungen.

Aus *a)* folgt umgekehrt

$$A = \operatorname{Log} \frac{1}{s}, \quad B = \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c$$

und daher

$$\mu(x) = \operatorname{Log} \frac{1}{s} + c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log} \frac{1}{g} \tag{1^a}$$

Es treten drei Parameter s, g, c auf, welche gewöhnlich den Bedingungen genügen [1]:

$$\left.\begin{array}{r} 0 < s < 1 \\ 0 < g < 1 \\ c > 1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

* *
*

Will man nun den Einfluss einer Veränderung der Intensitätsfunktion μ_x auf Grössen der Lebensversicherung analog wie im I. Teil dieser Arbeit untersuchen, so kann man dies dadurch, dass man sich die Veränderung der μ-Funktion als durch Variation jedes der drei Parameter s, g, c entstanden denkt, und demnach *in den auf Grund des Makehamschen Gesetzes aufgestellten Formeln für die Versicherungswerte der Reihe*

---

[1]) Es sei hier bemerkt, dass das Makehamsche Gesetz auch dann einen Sinn beibehält, wenn statt (2) die Bedingungen erfüllt sind: $c < 1$, $s < 1$, während $g \gtreqless 1$ sein kann. Vgl. Vorlesungen von Prof. Dr. *Moser* im W.-S. 1916/17.

nach jeden der drei Parameter s, g, c variiert und den Einfluss dieser Variationen untersucht.

Bis jetzt nahm man an, dass für fast alle Absterbeordnungen der Parameter c, bzw. dessen Logarithmus, einen beinahe unveränderlichen Wert besitzt, nämlich $\overset{10}{\log}\, c \backsim 0{,}04$ [1]). Schon *Makeham* hat auf diese Eigentümlichkeit der Konstanten c hingewiesen; er schreibt z. B. im J. I. A. [2]), Bd. XIII, S. 347: „... that this important constant (c) differs from the others in the formula in being independent of the conditions which determine the mortality in different classes of individuals. ...“ Ähnlich äussert er sich im Bd. XVI, S. 345: „In my paper ‚The Law of Mortality‘ J stated that J had found the constant q [3]), in the formula above quoted, to be nearly the same in different observations. The average value of the common logarithm of q in the best observations appears to be $0 \cdot 04$, very nearly. ...“ Dann weiter unten: „I may add that Mr. Woolhouse, in constructing his Mortality-Table according to the formula above mentioned, takes log $q = \cdot 04$ as a sufficient approximation to the true value. ...“

Die Ergebnisse neuerer Sterblichkeitsmessungen lassen jedoch darauf schliessen, dass es mit dieser Konstanz von $\overset{10}{\log}\, c$ doch nicht so weit her ist. Man sehe z. B. die Zusammenstellung der Konstanten s, g, c für 30 verschiedene Absterbeordnungen im Aufsatz von *Blaschke:* „Die Todesursachen bei österreichischen Ver-

---

[1]) Vgl. z. B. *Jörgensen,* Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung (1913), p. 71.

[2]) Diese Abkürzung soll verwendet werden für „Journal of the Institute of Actuaries“.

[3]) Makeham verwendet statt c den Buchstaben q.

sicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraume von 1876—1900" in den österreichischen versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen [9. Bd., erstes Heft (1914), S. 33]. Dieser Zusammenstellung entnehme ich folgende Werte:

	$\overset{10}{\log} c$	Abweichung von 0,04
Österreichische Tafel F_N^S	0,045 9954	$+0{,}0059954 = 15\,\%$
Österr.-ungarische Tafel $A\,H_{G(10)}^M$	0,028 1115	$-0{,}0118885 = -30\,\%$

Auch für viele andere Tafeln erreicht die Abweichung vom hypothetischen Wert 0,04 beträchtliche Werte. Die von Makeham ausgesprochene Vermutung, dass die Konstante c „unabhängig sei von den Bedingungen, welche die Sterblichkeit in verschiedenen Klassen von Personen bestimmen", wird somit durch diese neuen Sterblichkeitsmessungen *widerlegt*. Es ginge daher nicht an, kurzerhand $\log c = 0{,}04$ zu setzen, wie es dieser Autor vorgeschlagen hat.

Diese Tatsache bewog mich, im nachfolgenden nicht nur die Variationen der Parameter s und g, sondern auch diejenigen des ebenso wichtigen Parameters c in ihren Wirkungen auf die Versicherungswerte zu verfolgen.

§ 2.

Der Barwert der kontinuierlichen Leibrente, ausgedrückt durch die unvollständige Gammafunktion.

Der Barwert der kontinuierlichen Leibrente 1, d. h. einer Leibrente, die in unendlich vielen gleichmässig über das ganze Jahr verteilten Terminen mit unendlich kleinen Raten bezahlt wird, ergibt sich aus der Formel

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty v^\tau \cdot l_{x+\tau} \cdot d\tau \tag{3}$$

Für das Folgende ist es vorteilhaft, die Intensitätsfunktionen der Verzinsung und der Sterblichkeit einzuführen.

$$v = e^{-\delta}$$

$$v^\tau = e^{-\delta\tau} = e^{-\int_0^\tau \delta \cdot dt} \tag{α}$$

Ferner ist

$$\frac{dl_{x+t}}{l_{x+t} \cdot dt} = -\mu_{x+t}$$

oder

$$d \operatorname{Log} l_{x+t} = -\mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\operatorname{Log} \frac{l_{x+\tau}}{l_x} = -\int_0^\tau \mu_{x+t} \cdot dt$$

folglich

$$\frac{l_{x+\tau}}{l_x} = e^{-\int_0^\tau \mu_{x+t} \cdot dt} \tag{β}$$

Führt man die Substitutionen (α) und (β) in (3) ein, so wird

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta) \cdot dt} \cdot d\tau \text{ [1]} \tag{4}$$

Analog ist der Barwert der temporären Leibrente

[1]) *Jörgensen,* Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung (1913), p. 138.

$$\overline{a}_{\overline{xn}|} = \int_0^n e^{-\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \, . \, d\tau \qquad (4^a)$$

Aus (4) und (4ᵃ) ist ersichtlich, dass sowohl $\overline{a}_x$ *als auch* $\overline{a}_{\overline{xn}|}$ ***bei wachsendem Zinsfuss sowohl als auch bei wachsender Sterblichkeitsintensität abnehmen.***

Wir gehen nun daran, für die Absterbeordnung einen bestimmten, analytischen Ausdruck, das oben angegebene Gompertz-Makehamsche Gesetz, zu setzen, und werden zeigen, dass sich alsdann $\overline{a}_x$ durch eine bekannte transzendente Funktion ausdrücken lässt. Wir gehen aus von Formel (4).

Nach Makeham ist

$$\mu_{x+t} = \operatorname{Log}\frac{1}{s} + c^{x+t}\operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g}$$

$$\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt = \left(\operatorname{Log}\frac{1}{s}+\delta\right)\tau + c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g}\frac{c^\tau - 1}{\operatorname{Log} c}$$

$$= - c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g} + \left(\operatorname{Log}\frac{1}{s}+\delta\right)\cdot\tau$$

$$+ c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g}\cdot c^\tau$$

Wir setzen nun abkürzend

$$\text{I.} \quad c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g} = \lambda > 0$$

und erhalten demnach aus (4):

$$\overline{a}_x = e^\lambda \int_0^\infty e^{-\left(\operatorname{Log}\frac{1}{s}+\delta\right)\cdot\tau - \lambda c^\tau} \cdot d\tau$$

$$\text{II.} \quad \lambda c^{\tau} = u ,$$

so dass

$$\tau = \frac{\operatorname{Log} u - \operatorname{Log} \lambda}{\operatorname{Log} c}$$

$$d\tau = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \cdot \frac{du}{u}$$

Grenzen:

τ	u
0	λ
∞	∞

$$\overline{a}_x = \frac{e^{\lambda}}{\operatorname{Log} c} \int\limits_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c}(\operatorname{Log} u - \operatorname{Log} \lambda)} \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{u}$$

$$\text{III.} \quad -\frac{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c} = k ,$$

wo wegen $\delta > 0 , \frac{1}{s} > 1 , c > 1$ stets $k < 0$.

Es ergibt sich somit folgender Ausdruck für den Barwert $\overline{a}_x$

$$\overline{a}_x = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{k} \cdot \operatorname{Log} c} \int\limits_{\lambda}^{\infty} e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du \qquad (5)$$

Diese Formel wurde zuerst von *Makeham* aufgestellt [1]). Sie wurde ferner von *Clintock* [2]), *Blaschke* [3]) und andern verwendet.

Das Integral in (5) hat die Form des Eulerschen Integrals II. Art. Führen wir nun mit Hülfe der Definitionsgleichung

[1]) J. I. A., XIII und XVII.

[2]) J. I. A., XVIII.

[3]) Mitteilungen der österreichisch-ungarischen Versicherungstechniker, Jahrgang 1902, ferner Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, 9. Bd., 1. Heft, Wien 1914.

$$\int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du = \int_0^\lambda e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du + \int_\lambda^\infty e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

oder

$$\Gamma(k) = P_\lambda(k) + Q_\lambda(k) \tag{6}$$

wo $\lambda > 0$, zwei Funktionen

$$\begin{cases} P_\lambda(k) = \int_0^\lambda e^{-u} u^{k-1} du \\ Q_\lambda(k) = \int_\lambda^\infty e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du \end{cases}$$

ein, welche wir im Gegensatz zu $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-u} u^{k-1} \cdot du$ (Gammafunktion) *unvollständige Gammafunktionen* nennen, so geht (5) in die geschlossene Form über

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} Q_\lambda(k) \tag{7}$$

Damit ist der Barwert der kontinuierlichen Leibrente mit Hülfe einer in k ganzen transzendenten Funktion $Q_\lambda(k)$ ausgedrückt[1]; und zwar haben im vorliegenden Fall die untere Grenze λ und das Argument k die in I und III gegebene Bedeutung

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} > 0 \\ k &= -\frac{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c} < 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1]) Diese Funktion wird auch etwa die *Prymsche* Funktion genannt.

Die Funktion $\overline{a}_x$ wurde in der Form (7) zum ersten Male von *Blaschke*[1]) gegeben; er berechnete für die Grösse k folgende Werte:

Tafel	k	
	$i = 0$	$i = 0.05$
R. F.	— 0.05865	— 0.57013
A. F.	— 0.05340	— 0.61340
H^M	— 0.06784	— 0.60227
30 Am.	— 0.06638	— 0.57970
Gotha	— 0.04494	— 0.57992
Carlisle	— 0.08949	— 0.62979
M^I	— 0.06055	— 0.67743

Aus dieser Tabelle und aus den Resultaten anderer Ausgleichungen ist ersichtlich, dass für alle gebräuchlichen Absterbeordnungen und Zinsfüsse die Beziehung besteht

$$-1 < k < 0 \tag{9}$$

Die Formel (7) war für Blaschke der Ausgangspunkt zu sehr interessanten Untersuchungen. Diese Formel enthält nämlich nur noch drei Bestimmungsstücke λ, k, c, währenddem die Formel für die Lebenden eines bestimmten Alters allein vier Konstante und das Alter, also fünf Bestimmungsstücke enthält und

[1]) „Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz-Makeham“, von Prof. Dr. *E. Blaschke,* Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker, Wien 1902. Blaschke verwendet statt $Q_\lambda(k)$ das Zeichen $\Gamma_\lambda(k)$.

in die Formel für die Leibrente noch ein sechstes Bestimmungsstück, der Zinsfuss, hinzutritt. Blaschke verwendet diese Tatsache zur Konstruktion eines *vollständigen Leibrentensystems,* d. h. einer Tabelle, welche gestattet, die Leibrentenwerte für eine beliebige, nach Makeham ausgeglichene Tafel und für einen beliebigen Zinsfuss zwischen 0.1 % und 5.5 % für alle Alter von 25—100 zu entnehmen; als Grundlage für dieses „Standardsystem" wählte Blaschke die Tafel H^M.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, hier auf die Ergebnisse der sehr interessanten Untersuchungen Blaschkes einzutreten.

Doch sei hier auf die Tatsache aufmerksam gemacht, dass der kürzlich verstorbene dänische Mathematiker *J. P. Gram,* ohne die Arbeit von Blaschke zu kennen, auf dasselbe Verfahren verfallen ist [1]), d. h. mit Hülfe einer sogenannten Universaltafel die Leibrentenbarwerte für eine beliebige, nach Makeham ausgeglichene Tafel und für jeden beliebigen Zinsfuss direkt zu bestimmen; die beiden Autoren kommen unabhängig voneinander im wesentlichen auf dasselbe Resultat; allerdings ist das Verfahren von *Gram* als das allgemeinere zu bezeichnen, weil seine Formeln für die *temporäre* Leibrente gelten, während Blaschke mehr die lebenslängliche Rente ins Auge fasst.

* * *

Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass man eine zu $\overline{a}_x$ ganz analoge Formel für die gewöhnliche post-

[1]) Die sehr interessante Arbeit Grams, betitelt „Om Makehams Dødelighedsformel og dens Anvendelse paa ikke normale Liv" ist veröffentlicht in der Zeitschrift „Aktuaren", I. Heft, 1904.

numerando zahlbare Leibrente a_x erhalten kann. Setzt man nämlich in

$$a_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$$

das Makehamsche Gesetz $l_x = k\, s^x g^{c^x}$ ein und verwendet die Abkürzungen $h = -\operatorname{Log}(vs)$, $\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}$ so wird

$$\left.\begin{aligned} a_x &= e^{\lambda} \sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} \bar{e}^{(\tau h + \lambda c^{\tau})} \\ \text{während} \qquad & \\ \bar{a}_x &= e^{\lambda} \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \bar{e}^{(\tau h + \lambda c^{\tau})} \cdot d\tau \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Damit ist sowohl a_x als auch $\bar{a}_x$ mit der in der ganzen Mathematik so überaus wichtigen Exponentialfunktion e^z in Zusammenhang gebracht.

§ 3.

Einige Beziehungen aus der Theorie der Gammafunktion. Darstellung des Barwertes $\bar{a}_x$ durch Kettenbruchentwicklungen.

Da wir uns im folgenden mit der durch Gleichung (7) ausgedrückten Beziehung, in welcher die Gammafunktion auftritt, zu beschäftigen haben werden, wollen wir in einem besondern Paragraphen die für unsere Ableitung in Betracht fallenden Relationen aus der Theorie dieser Transzendenten zusammenstellen. Wir stützen uns dabei in erster Linie auf die beiden Werke von Dr. *N. Nielsen:* „Handbuch einer Theorie der

Gammafunktion“ [1]) und „Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten“ [1]).

Aus den Definitionsgleichungen

$$P_\lambda(k) = \int_0^\lambda e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

$$Q_\lambda(k) = \int_\lambda^\infty e^{-u} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

$$P_\lambda(k) + Q_\lambda(k) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{k-1} \cdot du = \Gamma(k)$$

ist ersichtlich, dass die Funktionen P und Q von zwei Veränderlichen k und λ abhangen. Betrachtet man λ als einen Parameter und k *als die unabhängige Variable,* so erhält man die gewöhnliche unvollständige Gammafunktion; ihre Theorie ist von vielen Autoren aufgebaut worden; eine ziemlich ausführliche Darstellung findet sich z. B. bei Dr. *H. Bieri* (Dissertation, Bern 1912).

Sieht man dagegen k als einen Parameter und λ *als die unabhängige Variable* an, so stösst man auf eine besondere Klasse von Funktionen, welche den Integrallogarithmus

$$li(e^{-x}) = -\int_x^\infty e^{-u} \cdot \frac{du}{u}$$

und die Krampsche Transzendente

$$L(x) = \int_x^\infty e^{-u^2} \cdot du$$

---

[1]) Leipzig, 1906.

als Spezialfälle enthält; es ist das Verdienst der Mathematiker *Schlömilch* und *Nielsen,* diese Zusammenhänge aufgedeckt zu haben; es sei besonders erwähnt das schon zitierte interessante Werk von Nielsen über den Integrallogarithmus.

I. Wir setzen vorerst λ als konstant voraus, so dass k die unabhängige Variable bedeutet. Durch Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Potenzreihe und nachherige gliedweise Integration folgt

$$P_\lambda(k) = \int_0^\lambda \overline{e}^u \cdot u^{k-1} \cdot du = \frac{\lambda^k}{k} - \frac{\lambda^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2!} \frac{\lambda^{k+2}}{k+2} - + \cdots$$

$$P_\lambda(k) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\lambda^{k+s}}{k+s} \tag{11}$$

Daraus folgt, dass die P-Funktion die Punkte 0, -1, $-2, \cdots -n, \cdots$ zu einfachen Polen hat, mit den Residuen $\frac{(-1)^n}{n!}$ (wo $n = 0, 1, 2, \cdots$). Da auch die Funktion $\Gamma(k)$ die nämlichen Pole mit den nämlichen Residuen besitzt, so folgt, dass die Funktion

$$Q_\lambda(k) = \Gamma(k) - P_\lambda(k) \tag{a}$$

eine in k *ganze, transzendente Funktion* ist.

Aus (11) ergibt sich

$$P_\lambda(k+1) + \overline{e}^\lambda \cdot \lambda^k = k \cdot P_\lambda(k) \tag{12}$$

analog wegen (a)

$$Q_\lambda(k+1) - \overline{e}^\lambda \cdot \lambda^k = k\, Q_\lambda(k) \tag{12^a}$$

Die Funktion $P_\lambda(k)$ lässt sich in folgende, von *Legendre* gefundene Fakultätenreihe entwickeln

$$P_\lambda(k) = \overline{e}^{\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\lambda^{k+s}}{k(k+1)\cdots(k+s)} \tag{13}$$

II. Setzt man dagegen k als Parameter und λ als unabhängige Variable voraus, so gelangt man zu Funktionen von der Form

$$P(\lambda, k) = \int_0^\lambda \overline{e}^{u} \cdot u^{k-1} \cdot du$$

$$Q(\lambda, k) = \int_\lambda^\infty \overline{e}^{u}\, u^{k-1} \cdot du$$

Wegen (α) folgt:

$$\frac{d\,Q(\lambda, k)}{d\,\lambda} = - \frac{d\,P(\lambda, k)}{d\,\lambda} \tag{14}$$

Bezeichnen wir mit $f(u)$ den Integranden $u^{k-1} \cdot \overline{e}^{u}$, so folgt

$$\frac{d\,Q}{d\,\lambda} = \frac{d}{d\,\lambda} \int_\lambda^\infty f(u) \cdot du = -f(\lambda)$$

$$= -\lambda^{k-1} \cdot \overline{e}^{\lambda} \tag{15}$$

Von diesem Differentialquotienten werden wir in den folgenden Paragraphen Gebrauch zu machen haben; wir können ihn auch wie folgt erhalten:

Aus (13) folgt

$$\frac{dP_\lambda}{d\lambda} = \overline{e}^\lambda \sum_1^\infty {}_s \frac{\lambda^{k+s-1} \cdot (k+s)}{k(k+1)\cdots(k+s-1)(k+s)}$$

$$- \overline{e}^\lambda \sum_0^\infty {}_s \frac{\lambda^{k+s}}{k(k+1)\cdots(k+s)}$$

$$= (k-1)\overline{e}^\lambda \underbrace{\sum_0^\infty {}_s \frac{\lambda^{k-1+s}}{(k-1)k(k+1)\cdots(k-1+s)}} - P_\lambda$$

d. h.

$$\frac{dP(\lambda, k)}{d\lambda} = (k-1) \cdot P(\lambda, k-1) - P_\lambda(k)$$

und unter Anwendung der Rekursionsformel (12):

$$\frac{dP(\lambda, k)}{d\lambda} = \overline{e}^\lambda \cdot \lambda^{k-1},$$

folglich wegen (14):

$$\frac{dQ(\lambda, k)}{d\lambda} = -\overline{e}^\lambda \cdot \lambda^{k-1},$$

wie oben.

Für den Spezialfall $k = 0$ erhalten wir die Funktion

$$Q(\lambda, 0) = \int_\lambda^\infty \overline{e}^u \frac{du}{u};$$

ihren entgegengesetzten Wert bezeichnet man als den „Integrallogarithmus von $\overline{e}^\lambda$",

$$li(e^{-\lambda}) = -Q(\lambda, 0) = -\int_\lambda^\infty \overline{e}^u \cdot \frac{du}{u} \tag{16}$$

Auf weitere Einzelheiten aus der Theorie dieser Funktionenklasse brauchen wir hier nicht einzutreten; dem Integrallogarithmus speziell werden wir in §§ 6 und 10 wieder begegnen.

* * *

In diesem Zusammenhang sei jedoch erwähnt, dass für die Funktion $Q(x, \nu)$ einige interessante Kettenbruchentwicklungen existieren, welche man Legendre und Nielsen verdankt und die uns gestatten, den Barwert $\bar{a}_x$ in einen konvergenten Kettenbruch zu entwickeln. In dem schon erwähnten Werk von Nielsen finden wir nämlich folgende Kettenbrüche:

$$\text{(I)}\quad Q(x,\nu) = \cfrac{e^{-x} x^{\nu}}{x + \cfrac{1-\nu}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\nu}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-\nu}{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\text{(II)}\quad \frac{e^{-x} x^{\nu-1}}{Q(x,\nu)} = 1 + \cfrac{\frac{1-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cdots}}}}$$

(III) $Q(x, \nu) =$

$$= \cfrac{\overline{e}^{x} \cdot x^{\nu}}{x + 1 - \nu - \cfrac{1(1-\nu)}{x + 3 - \nu - \cfrac{2(2-\nu)}{x + 5 - \nu - \cfrac{3(3-\nu)}{x + 7 - \nu - \cdots}}}}$$

(IV) $Q(x, \nu) =$

$$= \cfrac{\overline{e}^{x} \cdot x^{\nu}}{x + \cfrac{(1-\nu)x}{x + 1 - \cfrac{1(2-\nu)}{x + 2 - \nu - \cfrac{2(3-\nu)}{x + 4 - \nu - \cfrac{3(4-\nu)}{x + 6 - \nu - \cdots}}}}}$$

Die Entwicklungen (I) und (II) rühren von *Legendre,* die Entwicklungen (III) und (IV) dagegen von *Nielsen* her; sie gelten für positives x und reelles ν.

Nun fanden wir

$$\overline{a}_{x} = \frac{e^{\lambda} \lambda^{-k} Q(\lambda, k)}{\operatorname{Log} c},$$

so dass beispielsweise aus (I) folgt:

$$(\mathrm{I^a}) \quad \overline{a}_{x} = \frac{1}{\operatorname{Loc} c} \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1-k}{1 + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{2-k}{1 + \cfrac{2}{\lambda + \cfrac{3-k}{1 + \cdots}}}}}}$$

wo

$$\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} > 0, \quad k = -\frac{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c} < 0.$$

Der reziproke Wert $\frac{1}{\bar{a}_x}$ ist mit Hülfe der Entwicklung (II) durch den Kettenbruch darstellbar:

$$(\mathrm{II^a}) \quad \frac{1}{\bar{a}_x} = \lambda \operatorname{Log} c \left[1 + \cfrac{\frac{1-k}{\lambda}}{1 + \cfrac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \cfrac{\frac{2-k}{\lambda}}{1 + \cfrac{\frac{2}{\lambda}}{1 + \cdots}}}}\right]$$

Beispielsweise folgt noch aus (III) die Entwicklung:

$$(\mathrm{III^a}) \quad \bar{a}_x = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \cfrac{1}{\lambda + 1 - k - \cfrac{1(1-k)}{\lambda + 3 - k - \cfrac{2(2-k)}{\lambda + 5 - k - \cfrac{3(3-k)}{\lambda + 7 - k - \cdots}}}}$$

welche zur weitern Verwendung geeignet zu sein scheint, während ($\mathrm{I^a}$) und ($\mathrm{II^a}$) hierfür nicht sehr taugen, da λ im allgemeinen kleiner als 1 ist und diese Entwicklungen daher nur langsam konvergieren.

§ 4.

Der Barwert der kontinuierlichen Leibrente, ausgedrückt mit Hülfe einer hypergeometrischen Reihe. Zusammenhang zwischen unvollständiger Gammafunktion und hypergeometrischer Reihe. Eine lineare Differentialgleichung II. Ordnung für die unvollständige Gammafunktion.

H. Poterin du Motel erwähnt in seinem Aufsatz „Technique de l'assurance sur la vie" in der französischen Ausgabe der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften [1]) folgende von *H. A. van der Belt* [2]) herrührende Formel für den Barwert der kontinuierlichen Leibrente, bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes:

$$\bar{a}_x = \frac{F(-k, \lambda)}{-k \operatorname{Log} c} - \frac{\lambda^{-k} \cdot e^{\lambda} \Gamma(1+k)}{-k \operatorname{Log} c} \tag{17}$$

wobei $F(-k, \lambda)$ die Summe der speziellen hypergeometrischen Reihe

$$1 + \frac{\lambda}{1+k} + \frac{\lambda^2}{(1+k)(2+k)} + \cdots +$$

$$+ \frac{\lambda^i}{(1+k)(2+k)\cdots(i+k)} + \cdots$$

bedeutet, welche man erhält, wenn man in der allgemeinen hypergeometrischen Reihe

---

[1]) Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome I, volume 4, p. 531.

[2]) Archief voor de Verzekerings-Wetenschap 8 (1906).

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$\beta = 1$, $\gamma = 1 + k$, $x = \frac{\lambda}{\alpha}$ setzt und alsdann α gegen ∞ streben lässt. k und λ haben die oben, in § 2 angegebene Bedeutung.

Es darf jedoch nicht übersehen werden, dass *Mc. Clintock* die nämliche Formel, wenn auch in etwas weniger eleganter Gestalt, schon viel früher gegeben hat [1]).

Eine andere Bemerkung betrifft die Grössenordnung von λ; an der betreffenden Stelle [2]) der Enzyklopädie wird behauptet, dass λ stets ein positiver echter Bruch sei; es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass λ nur so lange kleiner als 1 ist, als das Alter x der Bedingung genügt

$$x < \frac{-\log\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)}{\log c}$$

beispielsweise für die Tafel M^I nur so lange $x < 71$. —

Wir hatten nun für $\bar{a}_x$ die Formel aufgestellt

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c}\, Q_\lambda(k)$$

Diese muss mit der soeben zitierten Formel (17) identisch sein, d. h. es muss zwischen der unvollständigen Gammafunktion und der hypergeometrischen Reihe ein direkter Zusammenhang bestehen. Um diesen Zusammenhang zu finden und die Identität der zwei Barwertformeln nachzuweisen, gehen wir direkt von der *hypergeome-*

---

[1]) J. I. A., 18 (1875), p. 245.

[2]) pag. 532.

trischen Funktion aus, und zwar einerseits von der hypergeometrischen Reihe, anderseits vom hypergeometrischen Integral.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\,\beta}{\gamma}\,\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 s^{\beta-1} \cdot (1-s)^{\gamma-\beta-1} \cdot (1-s\,x)^{-\alpha} \cdot ds$$

Das *Integral* konvergiert für alle Werte von x, vorausgesetzt, dass die reellen Teile von β und $\gamma - \beta$ positiv sind, also

$$\Re(\beta) > 0$$

$$\Re(\gamma - \beta) > 0\,;$$

die *Reihe* konvergiert nur, wenn $|x| < 1$ ist.

Für $\beta = 1$ und durch die Substitution $x = \frac{x_1}{\alpha}$ gehen die Ausdrücke, wenn der Index 1 gleich wieder weggelassen wird, über in:

$$F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{\gamma}\,x + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\,x^2 + \cdots$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-1)}\int_0^1 (1-s)^{\gamma-2} \cdot \left(1 - \frac{s\,x}{\alpha}\right)^{-\alpha} \cdot ds$$

Die *Reihe* konvergiert für $|x| < |\alpha|$, das *Integral* für alle Werte von x, vorausgesetzt, dass $\Re(\gamma - 1) > 0$.

Lassen wir nun α der Grenze ∞ zustreben, so wird die Konvergenzbedingung für die *Reihe*

$$|x| < \infty\,,$$

d. h. diese konvergiert nun für jeden endlichen Wert von x.

$$\lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

$$= \lim_{\alpha=\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-1)} \int_0^1 (1-s)^{\gamma-2} \cdot \left(1 - \frac{sx}{\alpha}\right)^{-\alpha} \cdot ds, \ \Re(\gamma) > 1.$$

Nun ist aber

$$\lim_{\alpha=\infty} \left(1 - \frac{sx}{\alpha}\right)^{-\alpha} = e^{sx},$$

daher

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_0^1 (1-s)^{\gamma-2} \cdot \left(1 - \frac{sx}{\alpha}\right)^{-\alpha} \cdot ds =$$

$$= \int_0^1 (1-s)^{\gamma-2} \cdot e^{sx} \cdot ds;$$

im letztern Integral setzen wir $1 - s = u$, so dass es übergeht in

$$e^x \int_0^1 u^{\gamma-2} \cdot \bar{e}^{xu} \cdot du, \cdots ux = v$$

$$du = \frac{dv}{x}$$

$$= \frac{e^x}{x^{\gamma-1}} \underbrace{\int_0^x v^{\gamma-2} \cdot \bar{e}^{v} \cdot dv}$$

$$= e^x x^{1-\gamma} \cdot P_x(\gamma - 1), \ \Re(\gamma) > 1 \ ^{1)}$$

---

[1]) Diese Bedingung ist hier identisch mit *der*, dass γ nicht gleich 1 oder 0 oder einer negativen ganzen Zahl sein darf.

Wenn noch berücksichtigt wird, dass $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-1)} =$ $= \gamma - 1$ ist, so folgt schliesslich aus diesem Grenzübergang:

$$\operatorname*{Limes}_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

$$= (\gamma - 1)\, e^x x^{1-\gamma} P_x(\gamma - 1) \quad (18)$$

womit der Zusammenhang der unendlichen Reihe mit der unvollständigen Gammafunktion gezeigt ist; dieser Zusammenhang lässt sich auch ohne Verwendung des hypergeometrischen *Integrals* zeigen, wenn man bedenkt, dass die Reihe die Form der Legendreschen Fakultätenreihe (13) hat.

Setzen wir nun speziell $x = \lambda$, $\gamma - 1 = k$, so erhalten wir aus (18):

$$F(-k, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{k+1} + \frac{\lambda^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots$$
$$= k e^\lambda \cdot \lambda^{-k} \cdot P_\lambda(k);$$

setzen wir dies in der eingangs gegebenen Formel (17) ein, so kommt

$$\bar{a}_x = \frac{1}{k \operatorname{Log} c} \left\{ \frac{e^\lambda \Gamma(1+k)}{\lambda^k} - \frac{k e^\lambda}{\lambda^k} P_\lambda(k) \right\}$$

$$= \frac{e^\lambda}{\lambda^k \cdot k \operatorname{Log} c} \left\{ k\, \Gamma(k) - k\, P_\lambda(k) \right\}$$

$$= \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \left\{ \overbrace{\Gamma(k) - P_\lambda(k)}^{Q_\lambda(k)} \right\}$$

und damit ist die Identität der beiden Formeln (7) und (17) nachgewiesen.

Mit Hülfe des gefundenen Zusammenhangs zwischen der Funktion $P_x(\gamma - 1)$ und der hypergeometrischen Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

$$(\gamma - 1) \cdot e^x x^{1-\gamma} \cdot P_x(\gamma - 1) = \operatorname*{limes}_{\substack{\alpha=\infty \\ \beta=1}} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right)$$

muss es möglich sein, eine lineare Differentialgleichung II. Ordnung für die unvollständige Gammafunktion herzuleiten.

Die Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist ein partikuläres Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\text{(I)} \quad x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

welche man auch schreiben kann

$$\text{(I}^{\text{a}}\text{)} \quad (1-x)\frac{d^2 y}{d \log x^2} + [\gamma - 1 - (\alpha + \beta)x]\frac{dy}{d \log x} - \\ - \alpha\beta x y = 0$$ [1])

Denn es gelten die Differential-Relationen

$$(\mu) \qquad \frac{dy}{d \log x} = x\frac{dy}{dx}$$

$$(\nu) \qquad \frac{d^2 y}{d \log^2 x} = \frac{d\left(\frac{dy}{d \log x}\right)}{d \log x} = x\frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

---

[1]) *Heinrich Weber,* Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik (1912), Bd. II, p. 12.

Aus (μ) und (ν) ist ersichtlich, dass

$$\frac{dy}{d\log\frac{x}{a}} = \frac{dy}{d\log x} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d\log^2\frac{x}{a}} = \frac{d^2 y}{d\log^2 x}.$$

Man erhält daher aus (I^a) für $\beta = 1$ und wenn x durch $\frac{x}{a}$ ersetzt wird:

$$\text{(II)} \qquad \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{d^2 y}{d\log^2 x} + \left[\gamma - 1 - \left(1+\frac{1}{a}\right)x\right]\frac{dy}{d\log x} - x\,y = 0$$

Diese Differentialgleichung besitzt als partikuläres Integral die spezielle hypergeometrische Reihe

$$\text{(II}^a\text{)} \qquad F\left(a, 1, \gamma, \frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{\left(1+\frac{1}{a}\right)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

Wir lassen nun a der Grenze ∞ zustreben; dann geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2 y}{d\log^2 x} + [\gamma - 1 - x]\frac{dy}{d\log x} - x\,y = 0$$

oder wegen den Beziehungen (μ) und (ν)

$$\text{(III)} \qquad x\frac{d^2 y}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dy}{dx} - y = 0\,.$$

Ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung ist

$$y = \lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

$$= (\gamma - 1) \cdot e^x \cdot x^{1-\gamma} \cdot P_x(\gamma - 1)$$

oder, weil es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt:

$$\text{(III}^{\text{a}}\text{)} \qquad y = e^x x^{1-\gamma} \cdot P_x(\gamma - 1)$$

Das *allgemeine Integral* der Differentialgleichung (III) lautet

$$\text{(III}^{\text{b}}\text{)} \qquad y = e^x x^{1-\gamma}\left(C_1 \cdot P_x(\gamma - 1) + C_2\right)$$ [1]

wo C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten bedeuten; dieses gilt in der ganzen Ebene, vorausgesetzt, dass γ nicht gleich 1, 0, oder gleich einer negativen ganzen Zahl wird.

Wir betrachten nun speziell das partikuläre Integral (III$^{\text{a}}$), nämlich

$$y = e^x x^{1-\gamma} \cdot P_x(\gamma - 1),$$

woraus

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x x^{1-\gamma} \frac{dP_x}{dx} + x^{-\gamma} \cdot e^x \cdot (1 - \gamma + x) \cdot P_x$$

---

[1] Die Differentialgleichung (III) ist nämlich ein Spezialfall der Differentialgleichung $x y'' + (\gamma - x) y' - \alpha y = 0$, deren allgemeines Integral darstellbar ist durch $y = C_1 \cdot G(\alpha, \gamma, x) + C_2 \cdot x^{1-\gamma} \cdot G(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$, wobei $G(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{1!\,\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$. Siehe *E. Goursat*, Cours d'analyse mathématique (1911), tome II, page 464. — Setzt man hierin $\alpha = 1$, so erhält man unschwer den Ausdruck (III$^{\text{b}}$).

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = e^x x^{1-\gamma} \cdot \frac{d^2 P_x}{dx^2} + 2 e^x x^{-\gamma} (1 - \gamma + x) \frac{d P_x}{dx} +$$

$$+ e^x x^{-\gamma} \left[1 + (1 - \gamma + x)\left(1 - \frac{\gamma}{x}\right) \right] P_x$$

y, y', y'' enthalten alle drei das Produkt $e^x x^{-\gamma}$ als Faktor; dieses können wir daher beim Einsetzen in (III) absondern und die Differentialgleichung lautet demnach, wenn wir ordnen nach dem Grad der Glieder:

$$\text{(IV)} \qquad x \frac{d^2 P_x}{dx^2} + (2 - \gamma + x) \cdot \frac{d P_x}{dx} = 0$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung der P_x-Funktion. Wir erhalten somit aus einer Spezialisierung der hypergeometrischen Differentialgleichung den Satz:

Die unvollständige Gammafunktion $y = P_x(\gamma - 1)$ genügt der linearen Differentialgleichung II. Ordnung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (2 - \gamma + x) \frac{dy}{dx} = 0$$

Weil die Q_x-Funktion sich von der P_x-Funktion nur durch eine Konstante, nämlich $\Gamma(\gamma - 1)$, unterscheidet, so gilt dieser Satz ohne weiteres auch für $y = Q_x(\gamma - 1)$.

Ersetzen wir für später $\gamma - 1$ durch k, so lautet die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x + 1 - k) \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (19)$$

welche $y = P(x, k)$ bzw. $y = Q(x, k)$ als partikuläres Integral enthält [1]).

[1]) Der direkte Nachweis ergibt sich übrigens ohne weiteres aus der Integraldarstellung dieser Funktionen.

Die mit diesen eng verwandte Funktion

$$y = L(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} Q\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$$

ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

§ 5.

Variierung der Konstanten g des Makehamschen Gesetzes.

Nach diesen mehr mathematischen Betrachtungen, die wir an die Barwertformel (7) anschlossen, können wir zu unserm eigentlichen Thema übergehen.

Aus der Formel (4) des § 2 ist sofort ersichtlich, dass $\bar{a}_x$ *wächst*, wenn μ abnimmt, also z. B., wenn beim Makehamschen Gesetz der *Parameter g erhöht* wird [vgl. (1ᵃ) in § 1]. Damit ist jedoch nur der Sinn der Veränderung von $\bar{a}_x$ bei Veränderung von g, d. h. nur das Vorzeichen des Differentialquotienten

$$\frac{d\,\bar{a}_x(g)}{d\,g}$$

bestimmt; wir können aber den Wert dieses Differentialquotienten selbst berechnen und damit die Funktion $\bar{a}_x(g)$ näher untersuchen.

Der Parameter g bewegt sich zwischen den Grenzen 0 und 1 und liegt gewöhnlich nahe bei 1; ist $g = 0$, so ist $\lambda = \infty$; ist $g = 1$, so ist $\lambda = 0$.

Daher

$$(\bar{a}_x)_{g=0} = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{e^{\lambda} Q_{\lambda}(k)}{\lambda^k} \qquad (\alpha)$$

$$(\bar{a}_x)_{g=1} = \frac{1}{\operatorname{Log} c} \operatorname*{Limes}_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda} Q_{\lambda} k}{\lambda^k} \qquad (\beta)$$

Wir werden zeigen, dass diese Grenzwerte in der Tat existieren. Vorerst nehmen wir

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{e^{\lambda} Q_{\lambda}(k)}{\lambda^k} = \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{Q_{\lambda}(k)}{\overline{e}^{\lambda} \lambda^k}$$

Wegen $k < 0$, $\lambda > 0$ wird der Nenner beim Grenzübergang gleich 0, der Zähler wird gleich dem Grenzwert

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} Q_{\lambda}(k) = \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \int_{\lambda}^{\infty} \overline{e}^{u} u^{k-1} \cdot du = 0 \text{ [1]}.$$

Wir erhalten demnach die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, deren wahren Wert wir nach der bekannten Regel finden.

$$\frac{0}{0} = \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{\frac{d Q_{\lambda}}{d \lambda}}{\frac{d}{d \lambda}(\overline{e}^{\lambda} \cdot \lambda^k)},$$

somit nach Formel 15, § 3:

$$\frac{0}{0} = \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{-\lambda^{k-1} \cdot \overline{e}^{\lambda}}{-\lambda^k \overline{e}^{\lambda} + \overline{e}^{\lambda} k \lambda^{k-1}}$$

$$= \operatorname*{Limes}_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda - k} = 0$$

---

[1]) Denn beim Grenzübergang fällt die untere Integralgrenze mit der obern zusammen und der Integrand verschwindet an der obern Grenze.

folglich aus (α):

$$(\bar{a}_x)_{y=0} = 0 \tag{20}$$

Nun bestimmen wir den in (β) enthaltenen Grenzwert. Die unvollständige Gammafunktion ist nur für $\lambda \neq 0$ definiert und wir werden sogleich sehen, dass $Q_\lambda(k)$ für $\lambda = 0$ unstetig wird. Setzt man nämlich in

$Q_\lambda(k) = \int\limits_\lambda^\infty \bar{e}^u \cdot u^{k-1} \cdot du$ direkt $\lambda = 0$, so resultiert

$$Q_0(k) = \Gamma(k)$$

Diese Schlussweise wäre jedoch falsch; es ist nämlich

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=0} Q_\lambda(k) = \Gamma(k) - \operatorname*{Limes}_{\lambda=0} P_\lambda(k)$$

Die P-Funktion ist definiert durch

$$P_\lambda(k) = \int\limits_0^\lambda u^{k-1}\,\bar{e}^u\,du$$

Wenn $\lambda = 0$ wird, so fallen beide Integralgrenzen zusammen, allein es existiert kein endlicher Grenzwert

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=0} P_\lambda(k)\,,$$

da $k < 0$ vorausgesetzt ist und der Integrand an der untern Grenze sich verhält wie

$$u^{k-1} \cdot \bar{e}^u \Big|_{u=0} = \frac{1}{u^{1-k}}\Big|_{u=0} = \infty\,,$$

und das Integral selbst wie

$$\int u^{k-1} \cdot du = \frac{u^k}{k}\Big|_{u=0} = -\infty\,.$$

Somit ist für $k < 0$

$$Q_0(k) = \Gamma(k) + \infty .$$

Dagegen existiert $\operatorname*{Limes}_{\lambda=0} \frac{Q_\lambda(k)}{\lambda^k}$, denn dieser ist gleich

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=0} \frac{\Gamma(k) - P_\lambda(k)}{\lambda^k} = \frac{+\infty}{\infty}$$

$$= \operatorname*{Limes}_{\lambda=0} \frac{-\lambda^{k-1} \cdot \overset{-\lambda}{e}}{k\,\lambda^{k-1}}$$

$$= -\frac{1}{k} > 0 .$$

Wir haben also das Resultat, $k < 0$ vorausgesetzt:

$$\operatorname*{Limes}_{\lambda=0} \frac{-k\,Q_\lambda(k)}{\lambda^k} = 1 \tag{21}$$

Demnach resultiert, falls (21) in (β) eingesetzt wird:

$$(\bar{a}_x)_{g=1} = -\frac{1}{k \operatorname{Log} c}$$

Aber wegen Beziehung (8), § 2 ist

$$-k \operatorname{Log} c = \delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}$$

$$= \delta + \mu ,$$

Denn für $g = 1$ ist $\mu_x = \mu = \operatorname{Log} \frac{1}{s} =$ konstant; daher schliesslich

$$(\bar{a}_x)_{g=1} = \frac{1}{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}} = \frac{1}{\delta + \mu} \tag{22}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man leicht nachprüfen, indem man direkt in der allgemeinen Formel (4), § 2 den Wert $\mu_{x+\tau}$ durch $\text{Log}\,\frac{1}{s} =$ konstant ersetzt.

Die Formel (22) besagt, dass, wenn die Überlebensordnung durch die Form

$$l_x = C s^x$$ [1])

dargestellt wird, die Zahlen der Lebenden also eine geometrische Reihe bilden, *der Barwert der Leibrente unabhängig vom Eintrittsalter, also konstant ist*[2]). In dem Werk „Actuarial Theory“ von *W. A. Robertson* und *F. A. Ross*[3]) ist dieser Spezialfall besprochen und gezeigt, dass dann auch die Funktion $\mathring{e}_x$, die „vollständige Lebenserwartung“ des x-jährigen, zu einer Konstanten degeneriert. In der Tat!

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+\tau}}{l_x} \cdot d\tau = \int_0^\infty s^\tau \cdot d\tau = \frac{1}{\text{Log}\,\frac{1}{s}} = \text{konst.}$$

Wir zeigen nun weiter, dass $(\overline{a}_x)_{g=1}$ den grösstmöglichen Wert von $\overline{a}_x(g)$ darstellt, d. h. dass diese Funktion mit g monoton wächst.

Weil $\lambda = c^x\,\text{Log}\,\frac{1}{g}$, so ist

---

[1]) Formel von *Dormoy;* sie ist ein Spezialfall der Makehamschen Formel, nämlich der Fall, wo $g = 1$ gesetzt ist.

[2]) Dies trifft auch zu für die gewöhnliche Leibrente, $a_x = \dfrac{1}{1 - v s}$.

[3]) Verlag Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1907.

$$\frac{d\lambda}{dg} = -\frac{c^x}{g} = -\frac{\lambda}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g}}$$

und daher

$$\frac{d\,\overline{a}_x(g)}{dg} = \frac{d\,\overline{a}_x}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dg} = -\frac{\lambda}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g}} \frac{d\,\overline{a}_x}{d\lambda}$$

Aus

$$\overline{a}_x = \frac{e^{\lambda}\lambda^{-k} Q(\lambda, k)}{\operatorname{Log} c}$$

folgt

$$\operatorname{Log} \overline{a}_x = \lambda - k \operatorname{Log} \lambda + \operatorname{Log} Q(\lambda, k) - \operatorname{Log} (\operatorname{Log} c)$$

woraus durch Differenziation nach λ folgt:

$$\frac{1}{\overline{a}_x} \cdot \frac{d\,\overline{a}_x}{d\lambda} = 1 - \frac{k}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{Q(\lambda, k)}$$

$$= \frac{1}{\lambda \operatorname{Log} c} \left\{ (\lambda - k) \operatorname{Log} c - \frac{\operatorname{Log} c}{e^{\lambda}\lambda^{-k} Q(\lambda, k)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda \operatorname{Log} c} \left\{ (\lambda - k) \operatorname{Log} c - \frac{1}{\overline{a}_x} \right\}$$

Aber

$$(\lambda - k) \operatorname{Log} c = c^x \cdot \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c + \operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta$$

$$= \mu_x + \delta,$$

folglich

$$\frac{d\,\overline{a}_x}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda \operatorname{Log} c} \left\{ (\mu_x + \delta) \cdot \overline{a}_x - 1 \right\} \tag{23}$$

und hieraus

$$\frac{d\,\overline{a}_x(g)}{dg} = \frac{1 - \overline{a}_x(\mu_x + \delta)}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \tag{24}$$

Nun gilt ganz allgemein die Formel

$$\frac{d\,\overline{a}_x}{dx} = \overline{a}_x(\mu_x + \delta) - 1 \tag{25}$$

Diese lässt sich auf elegante Art beweisen, wenn man direkt von der Formel ausgeht

$$\overline{a}_x = \int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot d\tau\,,$$

aus welcher folgt:

$$\frac{d\,\overline{a}_x}{dx} = \int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot \left(-\int_0^\tau \frac{d}{dx}(\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt\right)\cdot d\tau\,;$$

aber

$$\frac{d}{dx}(\mu_{x+t}+\delta) = \frac{d}{dt}(\mu_{x+t}+\delta)\,,$$

so dass

$$\frac{d\,\overline{a}_x}{dx} = \int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot (-\mu_{x+t}-\delta)_{t=0}^{t=\tau} \cdot d\tau$$

$$= (\mu_x+\delta)\int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot d\tau -$$

$$- \int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot (\mu_{x+\tau}+\delta)\cdot d\tau$$

$$= (\mu_x+\delta)\cdot \overline{a}_x - J\,,$$

wo

$$J = \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot (\mu_{x+\tau} + \delta) \cdot d\tau ,$$

oder wenn substituiert wird

$$u = \int_0^\tau (\mu_{x+t} + \delta) \cdot dt = \int_0^\tau f(t) \cdot dt$$

$$\frac{du}{d\tau} = \Big| f(t) \Big|_{t=\tau} = (\mu_{x+\tau} + \delta) ,$$

$$J = \int_0^\infty e^{-u} \cdot \frac{du}{d\tau} \cdot d\tau = 1 ,$$

woraus folgt

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_x - 1 ,$$

was zu beweisen war [1]).

Unter Berücksichtigung dieser ganz allgemeinen Formel ergibt sich nun, wenn wir der Deutlichkeit halber die partiellen Differentialquotienten setzen:

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} = - \frac{\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \qquad (25^a)$$

Da der Nenner des Quotienten rechts positiv ist, so besagt diese Gleichung folgendes:

Ein Anwachsen des Parameters g hat auf den Rentenbarwert $\bar{a}_x$ den entgegengesetzten Einfluss wie eine Erhöhung des Eintrittsalters (Satz I).

---

[1]) Andere Beweise dieser Formel findet man bei *Robertson* and *Ross*, p. 216, und *N. R. Jörgensen*, p. 147 und 148.

Dieser Satz bestätigt uns unsere Vermutung; da nämlich bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes die Rentenbarwerte bei wachsendem Alter x stets *abnehmen*[1]), wie wir noch an einer spätern Stelle (§ 9) näher ausführen werden, so muss nach diesem Satz ein Anwachsen des Parameters g eine *Erhöhung* des Rentenbarwertes zur Folge haben; es ist daher wirklich

$$\frac{d\,\bar{a}_x(g)}{d\,g} > 0 \tag{26}$$

Der oben hervorgehobene Satz lässt sich auch aus einer von *Robertson* and *Ross* durchgeführten Betrachtung[2]) ableiten:

Eine Erhöhung von B im Makehamschen Ausdruck

$$\mu_x = A + B\,c^x$$

hat den gleichen Einfluss wie eine Erhöhung des Alters; sei nämlich

$$\mu'_x = A + B' \cdot c^x, \quad \text{wo } B' > B,$$

so lässt sich stets eine Grösse h so bestimmen, dass

$$B' = B\,c^h,$$

woraus

$$\mu'_x = A + B\,c^{x+h} = \mu^{x+h}, \quad \text{wo } x + h > x.$$

Dieses Resultat sprechen die beiden englischen Autoren in dem Satze aus: „An increase in the constant B has the same effect as increasing the age."

Nun kann aber die Erhöhung von

$$B = \operatorname{Log} c \cdot \operatorname{Log} \frac{1}{g}$$

---

[1]) Es handelt sich hier stets nur um *erwachsene* Personen, das Kindesalter wird vom Makehamschen Gesetz nicht umfasst.

[2]) Op. cit., pag. 233.

nur herrühren von einer Verkleinerung des Parameters g. Daraus folgt unmittelbar der allgemeinere Satz:

Ein Anwachsen des Parameters g hat auf die Intensitätsfunktion der Sterblichkeit und also auch auf alle Versicherungswerte den gleichen Einfluss wie eine Herabsetzung des Alters x (Satz II).

In diesem Satz ist der als Satz I ausgesprochene spezielle Fall der Leibrente $\overline{a}_x$ inbegriffen.

Kennt man demnach für alle Versicherungswerte den Einfluss der Variationen von g, so kennt man damit auch den Einfluss einer Herabsetzung (bzw. Erhöhung) des Eintrittsalters x und umgekehrt!

* * *

Da die Relation gilt

$$\overline{A}_x = 1 - \delta \overline{a}_x ,$$

so kann man setzen

$$1 - (\mu_x + \delta) \overline{a}_x = \overline{A}'_x ,$$

d. h. der Ausdruck links ist nichts anderes als die einmalige Prämie für die Todesfallversicherung 1 des x-jährigen, wobei statt der Zinsintensität δ die grössere Zinsintensität $\delta' = \mu_x + \delta$ genommen ist; $\overline{A}'_x$ ist naturgemäss wie $\overline{A}_x$ *positiv*, woraus wegen

$$\frac{d \overline{a}_x}{d g} = \frac{\overline{A}'_x}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c}$$

wiederum Ungleichung (26) folgt.

Ferner ist

$$\frac{d \overline{A}_x(g)}{d g} = - \delta \frac{d \overline{a}_x(g)}{d g} < 0$$

und

$$\frac{d\bar{P}_x(g)}{dg} = -\frac{1}{(\bar{a}_x)^2} \cdot \frac{d\bar{a}_x(g)}{dg} < 0 .$$

* * *

Da für jeden Wert von g zwischen 0 und 1 die Ungleichung (26) besteht, so folgt

$$1 > (\mu_x + \delta) \cdot \bar{a}_x ,$$

d. h.

$$\bar{a}_x < \frac{1}{\mu_x + \delta} \tag{27^a}$$

Diese Ungleichung gilt für jeden Wert von g; einzig für $g = 0$ $(\mu_x = \infty)$ und $g = 1$ $\left(\mu_x = \mu = \operatorname{Log}\frac{1}{s}\right)$ geht sie in eine Gleichung über.

Ähnliche Ungleichungen lassen sich für $\bar{P}_x$ und $\bar{A}_x$ aufstellen; aus

$$\frac{1}{\bar{a}_x} > \mu_x + \delta$$

folgt nämlich unmittelbar

$$\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta > \mu_x ,$$

d. h.

$$\bar{P}_x > \mu_x \text{ [1]} \tag{27^b}$$

Ferner aus (27ᵃ):

$$-\delta \bar{a}_x > -\frac{\delta}{\mu_x + \delta}$$

---

[1]) Wegen $a_x < \bar{a}_x$ und $d < \delta$ gilt $P_x > \bar{P}_x$ und daher um so mehr $P_x > \mu_x$.

$$1 - \delta \overline{a}_x > 1 - \frac{\delta}{\mu_x + \delta},$$

d. h.

$$\overline{A}_x > \frac{\mu_x}{\mu_x + \delta} \tag{27^c}$$

Einzig für $g = 0$ und $g = 1$ gehen diese Ungleichungen in Gleichungen über.

Zusammenstellung.

g	μ_x	$\overline{a}_x$	$\overline{A}_x$	$\overline{P}_x$
0	∞	0	1	∞
1	$\mathrm{Log}\,\frac{1}{s} = \mu$	$\frac{1}{\mu + \delta}$	$\frac{\mu}{\mu + \delta}$	μ [1])

* * *

Der Nachweis, dass $\overline{a}_x$ stets wächst, wenn der Parameter g vergrössert wird, lässt sich noch auf einem andern Wege leisten. Wir geben auch noch diesen Beweis an, und zwar deshalb, weil wir in § 10 von diesem nämlichen Verfahren, das nun entwickelt werden soll, Gebrauch machen werden.

Wir setzen

$$f(g) = \frac{1}{\mu_x + \delta}$$

---

[1]) Dieser Fall besagt speziell, dass, wenn die Zahlen der Lebenden eine *geometrische Reihe* bilden (Dormoy), die Prämie $\overline{P}_x$ konstant und *gleich der Intensität der Sterblichkeit* wird.

$$f(g) = \frac{1}{c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c + \delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}},$$

so dass wegen (24)

$$\frac{d\bar{a}_x(g)}{dg} = \frac{\mu_x + \delta}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \cdot \left[f(g) - \bar{a}_x(g) \right]$$

Aus dieser Formel schliesst man, dass $\bar{a}_x(g)$ nur dann einen *extremen Wert* haben könnte, wenn

$$\bar{a}_x(g) = f(g)$$

würde; ist $f(g) > \bar{a}_x(g)$, so ist $\bar{a}_x(g)$ eine wachsende Funktion.

$$g = 0\,;\; f(0) = 0 = \bar{a}_x(0)$$

$$g = 1\,;\; f(1) = \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta} = \bar{a}_x(1)$$

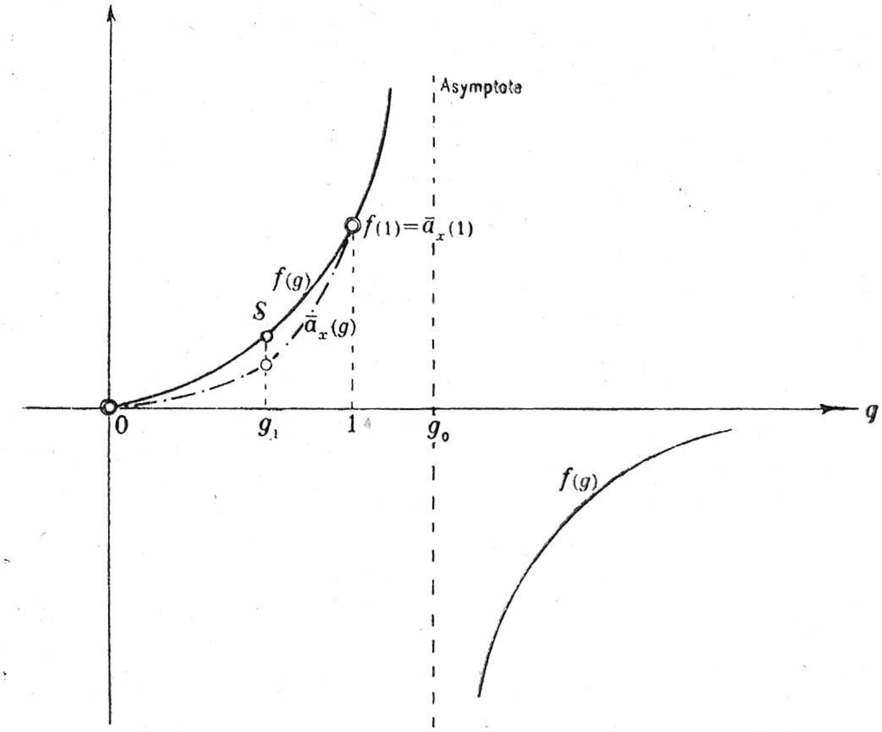
$$g = g_0 = e^{\frac{\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta}{c^x \operatorname{Log} c}}\,;\; f(g_0) = \pm \infty$$

$$g = \infty\,;\; f(\infty) = -0\,.$$

Abgesehen vom Punkte g_0 ist $f(g)$ eine stetige und wegen

$$\frac{d f(g)}{dg} = \frac{c^x \operatorname{Log} c}{g\,(\mu_x + \delta)^2} > 0$$

eine *monoton wachsende Funktion* (siehe Figur).



Diese Funktion $f(g)$ dient uns nun in sehr anschaulicher Weise dazu, das Verhalten von $\bar{a}_x(g)$ zu untersuchen. Bis jetzt wissen wir

$$f(0)=\bar{a}_x(0)$$

$$f(1)=\bar{a}_x(1)\,.$$

Würden zwischen $g=0$ und $g=1$ noch andere Stellen existieren, wo $f(g)=\bar{a}_x(g)$ würde, so müsste $\bar{a}_x(g)$ an diesen Stellen extreme Werte besitzen. Solche sind aber nicht möglich, und zwar aus folgendem Grunde:

Angenommen, es existiere eine solche Extremstelle g_1 von $\bar{a}_x(g)$, und zwar charakterisiere sie ein *Maximum;* demnach müsste $\bar{a}_x(g_1)=f(g_1)$ sein (Schnittpunkt S). Da aber unmittelbar nach dem Maximum die Funktion $\bar{a}_x(g)$ *abnehmen* muss, jedoch für $g=1$ wieder mit $f(g)$ zusammenfällt, so muss $\bar{a}_x(g)$ bei dieser

Annahme im Intervall $g_1 < g < 1$ noch ein *Minimum* besitzen; dieses müsste aber auch von der Form

$$\frac{1}{\mu_x + \delta} = f(g)$$

sein, d. h. in diesem Punkte würden die Kurven $\overline{a}_x(g)$ und $f(g)$ sich schneiden; letzteres ist aber unmöglich, da, wie soeben bewiesen worden ist, $f(g)$ eine mit g monoton *wachsende* Funktion ist. —

Damit ist nachgewiesen, *dass die Funktion* $\overline{a}_x(g)$ *im Intervall* $0 < g < 1$ *weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt.*

Denn ganz analog kann man zeigen: Wenn $\overline{a}_x$ vorerst ein Minimum hat, so schneiden sich an dieser Stelle die $\overline{a}_x$- und f-Kurve; da aber für $g = 0$ $\overline{a}_x$ und f übereinstimmen und $\overline{a}_x$ stets positiv ist, so müsste vor dieser Minimalstelle die Funktion $\overline{a}_x$ noch ein Maximum haben, welches auch auf f liegen müsste; um von diesem Maximalpunkt zu dem hypothetischen Minimalpunkt zu gelangen, müsste man aber, da $f(g)$ monoton wächst, *aufsteigen;* dies ist aber widersinnig. Die Unmöglichkeit extremer Werte der Funktion $\overline{a}_x(g)$ ist damit erwiesen.

Wir schliessen hieraus: Da die $\overline{a}_x$-Funktion im betrachteten Intervall weder ein Minimum noch ein Maximum noch eine Unstetigkeit aufweist, ist zu schliessen, dass $\overline{a}_x(g)$ *selbst eine stetige monoton wachsende Funktion ist* $\left(\text{denn } \overline{a}_x(1) > \overline{a}_x(0)\right)$. Daraus folgt, wie oben:

$$\frac{d\overline{a}_x}{dg} > 0,$$

was zur Folge hat, dass $f(g) > \overline{a}_x(g)$, d. h. die $\overline{a}$-Kurve verläuft stets unter der f-Kurve (vgl. die Figur oben); diese Feststellung ist aber identisch mit der Ungleichung (27[a]):

$$\frac{1}{\mu_x + \delta} > \overline{a}_x .$$

Dieses Verfahren, *eine komplizierte Funktion in einem gewissen Intervall mit Hülfe einer einfachern Funktion, welche mit dieser in den Grenzpunkten übereinstimmt, zu untersuchen,* werden wir in einem andern Fall (Reserve, § 10) gut verwenden können.

Die temporäre Leibrente.

Die auf $\overline{a}_x(g)$ angewendete Methode lässt sich verallgemeinern und auf den Barwert der temporären Leibrente anwenden. Ist nämlich die Rente nicht lebenslänglich, sondern nur n Jahre zahlbar, so erhalten wir den Barwert

$$\overline{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \int_0^n v^\tau \, l_{x+\tau} \cdot d\tau$$

und bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes

$$\overline{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \cdot \operatorname{Log} c} \int_\lambda^{\lambda c^n} u^{k-1} \cdot e^{-u} \cdot du$$

$$= \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \left\{ \int_\lambda^\infty u^{k-1} \cdot e^{-u} \cdot du - \int_{\lambda c^n}^\infty u^{k-1} \cdot e^{-u} \cdot du \right\}$$

oder

$$\overline{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \left\{ Q_\lambda(k) - Q_{\lambda c^n}(k) \right\} \qquad (28)$$

Für $n = \infty$ geht $\bar{a}_{x\,\overline{n}|}$ in $\bar{a}_x$ über, denn $Q_{\lambda c^n}$ wird beim Grenzübergang gleich 0.

Wir finden folgende spezielle Werte:

$$\left.\begin{aligned} g = 0;\ \bar{a}_{x\,\overline{n}|}(g) &= 0 \\ g = 1;\ \bar{a}_{x\,\overline{n}|}(g) &= \frac{1-(s\,v)^n}{\delta+\mu} \end{aligned}\right\} \qquad (28^a)$$

Ferner ergibt sich der Differentialquotient

$$\frac{d\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}(g)}{d\,g} = \frac{1 - e^{-\lambda(c^n-1)} \cdot (s\,v)^n - (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \qquad (28^b)$$

Diesen kann man ersetzen durch

$$\frac{d\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}(g)}{d\,g} = \frac{1 - v^n \cdot {}_n p_x - (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \text{ [1]}$$

$$= \frac{1 - \bar{E}_{x\,\overline{n}|} - (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c}$$

oder schliesslich

$$\frac{d\,\bar{a}_{x\,\overline{n}|}(g)}{d\,g} = \frac{\bar{A}_{x\,\overline{n}|} - (\bar{E}_{x\,\overline{n}|} + \mu_x \cdot \bar{a}_{x\,\overline{n}|})}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c}. \qquad (28^c)$$

Der Zähler enthält lauter bekannte Versicherungswerte. Von diesem Differentialquotienten beweist man mit Hülfe einer Funktion

---

[1]) Denn $(s\,v)^n e^{-\lambda(c^n-1)} = v^n \cdot s^n\, g^{c^x(c^n-1)} = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_n p_x = \bar{E}_{x\,\overline{n}|}$.

$$f(g) = \frac{1 - e^{-\lambda(c^n - 1)} \cdot (s\,v)^n}{\mu_x + \delta}$$ [1])

oder auf anderm Wege, dass er *positiv* ist. Dies hat eine Reihe von Ungleichungen zur Folge, z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A}_{x\,\overline{n}|} &> \bar{E}_{x\,\overline{n}|} + \mu_x \cdot \bar{a}_{x\,\overline{n}|} \\
\bar{a}_{x\,\overline{n}|} &< \frac{1 - E_{x\,\overline{n}|}}{\mu_x + \delta} \\
\bar{A}_{x\,\overline{n}|} &> \frac{\mu_x + \delta \cdot E_{x\,\overline{n}|}}{\mu_x + \delta} \\
\bar{P}_{x\,\overline{n}|} &> \frac{\mu_x + \delta \cdot E_{x\,\overline{n}|}}{1 - E_{x\,\overline{n}|}}
\end{aligned}\right\} \qquad (28^d)$$

Diese gehen nur für $g = 0$ und $g = 1$ in Gleichungen über, so dass speziell bei Voraussetzung der Formel von *Dormoy* folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{x\,\overline{n}|} &= \frac{1 - E_{\overline{n}|}}{\mu + \delta} \\
\bar{A}_{x\,\overline{n}|} &= \frac{\mu + \delta\,E_{\overline{n}|}}{\mu + \delta} \\
&= E_{\overline{n}|} + \mu \cdot \bar{a}_{\overline{n}|} \\
P_{x\,\overline{n}|} &= \frac{\mu + \delta \cdot E_{\overline{n}|}}{1 - E_{\overline{n}|}}
\end{aligned}\right\} \qquad (28^e)$$

wo $\mu = \text{Log}\,\frac{1}{s} = \text{konst.}$, $E_{\overline{n}|} = (s\,v)^n = \text{konst.}$

---

[1]) $f(0) = \bar{a}_{x\,\overline{n}|}(0)$; $f(1) = \bar{a}_{x\,\overline{n}|}(1)$; $\frac{d\,f(g)}{d\,g} > 0$.

§ 6.

Variierung der Konstanten *s* des Makehamschen Gesetzes. Die Transzendente $S(x, k)$ und ihr Zusammenhang mit dem Integrallogarithmus.

Der Einfluss der Variationen des Parameters s des Makehamschen Gesetzes

$$\mu(x) = \operatorname{Log}\frac{1}{s} + c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g}$$

ist im allgemeinen leicht zu untersuchen, wie sich schon schliessen lässt aus der Formel für μ_x, wo $\operatorname{Log}\frac{1}{s}$ als vereinzeltes Glied auftritt. Zudem ist eine Erhöhung von s äquivalent einer Herabsetzung des Zinsfusses (vgl. § 9 hiernach); schon hieraus folgt:

$$\frac{d\,\bar{a}_x(s)}{ds} > 0\,.$$

denn

$$\frac{d\,\bar{a}_x}{d\delta} = -\int_0^\infty \tau\, e^{-\delta\tau} \cdot \frac{l_{x+\tau}}{l_x}\, d\tau < 0\,.$$

Das gleiche ersieht man aus der eingangs gegebenen Formel

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau (\mu_{x+t}+\delta)\cdot dt} \cdot d\tau.$$

Wir geben nachstehend noch den Beweis mit Hülfe der Rentenformel

$$\bar{a}_x = \frac{e^\lambda \cdot Q_\lambda(k)}{\lambda^k \operatorname{Log} c},$$

um daraus einen Spezialfall herzuleiten.

Es ist

$$\frac{d\bar{a}_x}{ds} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k} \cdot \frac{dk}{ds} = \frac{1}{s \operatorname{Log} c} \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k}$$

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial k} = \frac{e^\lambda}{\operatorname{Log} c} \left\{ \lambda^{-k} \cdot \frac{\partial Q_\lambda(k)}{\partial k} - \operatorname{Log} \lambda \cdot \lambda^{-k} \cdot Q_\lambda(k) \right\}$$

$$= \frac{e^\lambda}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \left\{ \frac{\partial Q_\lambda(k)}{\partial k} + \operatorname{Log} \frac{1}{\lambda} \cdot Q_\lambda(k) \right\}$$

Führen wir nun eine neue Funktion

$$S(\lambda, k) = \frac{\partial Q_\lambda(k)}{\partial k} + \operatorname{Log} \frac{1}{\lambda} \cdot Q_\lambda(k) \qquad (29^a)$$

ein, so wird

$$\frac{\delta \bar{a}_x}{\delta k} = \frac{e^\lambda}{\lambda^k \cdot \operatorname{Log} c} S(\lambda, k) \qquad (29^b)$$

so dass

$$\frac{d\bar{a}_x(s)}{ds} = \frac{e^\lambda}{s\, \lambda^k (\operatorname{Log} c)^2} S(\lambda, k) \qquad (29^c)$$

Die Funktion $S(\lambda, k)$ lässt sich durch ein Integral darstellen:

$$S(\lambda, k) = \frac{\partial}{\partial k} \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} u^{k-1} \cdot du + \text{Log} \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} u^{k-1} \cdot du$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} \cdot u^{k-1} \cdot \text{Log}\, u \cdot du + \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} u^{k-1} \cdot \text{Log} \frac{1}{\lambda} \cdot du$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} \cdot u^{k-1} \cdot \left(\text{Log}\, u + \text{Log} \frac{1}{\lambda}\right) \cdot du$$

so dass

$$S(\lambda, k) = \int_{\lambda}^{\infty} \bar{e}^{u} \cdot u^{k-1} \cdot \text{Log} \frac{u}{\lambda} \cdot du \qquad (30)$$

Da $\lambda > 0$ ist, so ist wegen $\frac{u}{\lambda} > 1$ auf dem ganzen Integrationsweg $\lambda < u < \infty$ der Integrand positiv, somit auch das in positivem Sinn längs der reellen Axe genommene Integral, so dass $S(\lambda, k) > 0$. Damit folgt aber aus (29^c) unmittelbar

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{a}_x(s)}{ds} > 0 \\[2ex] \dfrac{d\bar{a}_{x\,\overline{n}|}(s)}{ds} > 0 \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Ganz analog ist

Denn

$$\frac{d\bar{a}_{x\,\overline{n}|}}{ds} = \frac{e^{\lambda}}{s\,\lambda^{k} (\text{Log}\, c)^2} \int_{\lambda}^{\lambda c^n} u^{k-1} \cdot \bar{e}^{u} \cdot \text{Log} \frac{u}{\lambda} \cdot du \,.$$

Eine Vergrösserung des Parameters s im Makehamschen Gesetz hat somit stets ein Wachstum der Leibrentenbarwerte zur Folge. Dr. *Julius Graf* findet in seiner Arbeit [1]): „Welche Vorteile kann die Annahme einer analytischen Funktion für die Absterbeordnung in technischer Beziehung bieten?", für die gewöhnliche Leibrente, sowohl was das Verhalten in bezug auf den Parameter g als auch in bezug auf s anbetrifft, das gleiche Resultat. Er geht beispielsweise aus von

$$p_x = s\, g^{c^x (c-1)}$$

Für ein *grösseres* s wird, g und c konstant vorausgesetzt:

$$\overline{p}_x = \overline{s}\, g^{c^x (c-1)}$$

und daher

$$\frac{\overline{p}_x}{p_x} = \frac{\overline{s}}{s} > 1\,,$$

d. h. mit wachsendem x nimmt die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit und damit wegen

$$\mathrm{a}_x = 1 + v\, p_x + v^2\, p_x\, p_{x+1} + \cdots$$

auch der Rentenbarwert zu.

* * *

Aus der Definition

$$\overline{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty e^{-\delta \tau} \cdot l_{x+\tau} \cdot d\tau$$

folgt für $\delta = 0$:

$$\left(\overline{a}_x\right)_{\delta=0} = \mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty l_{x+\tau} \cdot d\tau$$

---

[1]) VI. Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft, Wien 1909, Bd. II, S. 429 ff.

welche Funktion man als die vollständige Lebenserwartung (complete expectation of life) oder *volle mittlere Lebensdauer* des x-jährigen bezeichnet. Auch diese Funktion ist bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes durch eine unvollständige Gammafunktion darstellbar, nämlich, weil k für $\delta = 0$ in

$$k_1 = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c} = \frac{\operatorname{Log} s}{\operatorname{Log} c} < 0$$

übergeht, durch

$$\mathring{e}_x = \frac{e^\lambda}{\lambda^{k_1} \cdot \operatorname{Log} c} Q_\lambda(k_1) \tag{32}$$

Was über die Funktionen $a_x(g)$ und $\bar{a}_x(s)$ gesagt wurde, gilt unverändert auch für $\mathring{e}_x(g)$ und $\mathring{e}_x(s)$, speziell

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,\mathring{e}_x(g)}{dg} = \frac{1 - \mathring{e}_x \mu_x}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c} > 0 \\ &\frac{d\,\mathring{e}_x(s)}{ds} > 0 \\ &(\mathring{e}_x)_{g=1} = \frac{1}{\operatorname{Log}\frac{1}{s}} = \frac{1}{\mu} = \text{konst.} \end{aligned}\right\} \tag{32a}$$

Analog der Ungleichung $\bar{a}_x < \frac{1}{\mu_x + \delta}$ gilt für jeden Wert von g und s zwischen 0 und 1 die Beziehung

$$\mathring{e}_x < \frac{1}{\mu_x} \tag{33}$$

d. h. die volle mittlere Lebensdauer im Alter x ist stets kleiner als die „Lebenskraft“ des betreffenden Alters. Einzig im Fall $g = 1$ (Formel von Dormoy) sind volle mittlere Lebensdauer und Lebenskraft gleich gross, nämlich für alle Alter konstant und gleich $\frac{1}{\mu}$.

Ferner gilt den Ungleichungen (32^a) zufolge:

$$\text{für jeden Wert von } g < 1 : \overset{\circ}{e}_x < \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{s}} ;$$

$$\text{für jeden Wert von } s < 1 : \overset{\circ}{e}_x < (\overset{\circ}{e}_x)_{s=1} .$$

Im Spezialfall $s = 1$ wird $k_1 = 0$ und daher wegen (32):

$$(\overset{\circ}{e}_x)_{s=1} = \frac{e^{\lambda}}{\operatorname{Log} c} Q_{\lambda}(0)$$

somit wegen Formel (16), § 3:

$$(\overset{\circ}{e}_x)_{s=1} = \frac{-e^{\lambda} \cdot li(e^{-\lambda})}{\operatorname{Log} c} \tag{34}$$

Nun führt aber diese Annahme, $s = 1$, auf das sogenannte Gompertzsche Gesetz $l_x = k g^{c^x}$. Wir finden somit den *Satz:*

Folgt die Absterbeordnung dem Gompertzschen Gesetze, so ist die volle mittlere Lebensdauer des x-jährigen durch den Integrallogarithmus darstellbar.

* * *

Wir wollen nun unser Interesse kurz der oben eingeführten Funktion

$$S(x,k)=\int_x^\infty \bar{e}^u u^{k-1} \operatorname{Log}\frac{u}{x}\,du$$

oder

$$S(x,k)=\frac{\partial Q(x,k)}{\partial k}+\operatorname{Log}\frac{1}{x}\cdot Q(x,k)$$

zuwenden. Da $Q(x, k)$ in bezug auf k eine ganze transzendente Funktion ist, so ist auch $S(x, k)$ *in bezug auf k eine ganze transzendente Funktion.* Im folgenden ist stets $x > 0$ vorausgesetzt, da der Punkt $x = 0$ für $S(x, k)$ die nämliche Singularität bedeutet wie für $\operatorname{Log} x$.

Nun ist

$$\frac{\partial Q(x,k)}{\partial k}=\Gamma'(k)-\frac{\partial P(x,k)}{\partial k},$$

und wenn wir mit *Nielsen* die Bezeichnung

$$\Psi(k)=\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)}$$

verwenden [1]), so wird

$$S(x,k)=\Gamma(k)\cdot\Psi(k)+\operatorname{Log}\frac{1}{x}Q(x,k)-\frac{\partial P(x,k)}{\partial k} \qquad (a)$$

Nun benützen wir die in § 3 erwähnte Legendresche Fakultätenreihe für $P(x, k)$,

$$P(x,k)=\bar{e}^x\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{x^{s+k}}{k(k+1)\cdots(k+s)},$$

welche in der ganzen k-Ebene, mit Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ Gültigkeit besitzt. Durch Differenzieren folgt:

---

[1]) *Ludwig Schläfli* verwendete für diese Funktion das Symbol $\Lambda(k)$.

$$\frac{\partial P(x, k)}{\partial k} = \operatorname{Log} x \cdot P(x, k) -$$

$$- \overset{-x}{e} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+s}}{k(k+1)\cdots(k+s)} x^{k+s} \qquad (\beta)$$

Bezeichnen wir mit u_n das allgemeine Glied der neuen Reihe, so folgt aus

$$u_n = \frac{\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k+n}}{k(k+1)\cdots(k+n)} x^{k+n}$$

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{k+n+1} \right| \cdot$$

$$\cdot \lim_{n=\infty} \left[1 + \frac{1}{(k+n+1)\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k+n}\right)} \right]$$

$$= 0,$$

womit die Konvergenz der Reihe nachgewiesen ist. Setzen wir (β) in (α) ein und berücksichtigen die bekannte Beziehung aus der Theorie der gewöhnlichen Gammafunktion:

$$\Gamma(k) \cdot k(k+1)\cdots(k+s) = \Gamma(k+s+1),$$

so folgt für die Transzendente $S(x, k)$ die Entwicklung

$$S(x, k) = \Gamma(k) \left\{ \Psi(k) + \operatorname{Log} \frac{1}{x} + \right.$$

$$\left. + \overset{-x}{e} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+s}}{\Gamma(k+s+1)} x^{k+s} \right\} \qquad (35)$$

Diese Formel eignet sich für unsere Zwecke sehr gut, da die unendliche Reihe wegen $\lambda \leqq 1$ (nur für die höchsten Alter wird $\lambda > 1$) und $-1 < k < 0$ ziemlich rasch konvergiert und die Werte von $\Psi(k)$ und $\Gamma(k)$ leicht zu berechnen sind oder aus Tafeln entnommen werden können.

Aus der Definitionsformel (29^a) ergibt sich die Differentialbeziehung

$$\frac{\partial S(x, k)}{\partial x} = -\frac{Q(x, k)}{x}$$

oder

$$Q(x, k) = -x \frac{\partial S(x, k)}{\partial x}$$

Unter Berücksichtigung der in § 4 aufgestellten Differentialgleichung ergibt sich dann, dass die Funktion $y = S(x, k)$ der linearen Differentialgleichung III. Ordnung genügt:

$$x^2 \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + (x + 3 - k)\, x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x + 1 - k) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{36}$$

Die Formel (35) führt auf einen interessanten Spezialfall. Setzen wir nämlich $k = 1$, so folgt:

$$S(x, 1) = \int_x^\infty \bar{e}^u \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{x} \cdot du$$

$$= \Gamma'(1) + \operatorname{Log} \frac{1}{x} + \bar{e}^x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s+1}}{1 \cdot 2 \cdots (s+1)} \cdot x^{s+1}$$

oder wenn wir nach dem Vorgang von *Nielsen* die Bezeichnung

$$\lambda(s+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s+1}$$

einführen und bedenken, dass $\Gamma'(1) = -C$ (Eulersche Konstante), so folgt

$$S(x,1) = \int_x^\infty \overline{e}^{u} \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{x} \cdot du$$

$$= -C - \operatorname{Log} x + \overline{e}^{x} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\lambda(s+1)}{(s+1)!} x^{s+1}$$

$$= -C - \operatorname{Log} x + \overline{e}^{x} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\lambda(s)}{s!} x^{s} \qquad (37^{a})$$

Nun kann man aber das Integral direkt berechnen.

Nach *Nielsen*, „Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten", p. 11, gilt die Relation:

$$\int_0^x \overline{e}^{ta} \cdot \operatorname{Log} t \cdot dt = \frac{1}{a} \left[li(\overline{e}^{ax}) - C - \overline{e}^{ax} \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a \right] \qquad (m)$$

Lässt man x unendlich gross werden, so folgt, da $a > 0$ vorausgesetzt ist:

$$\int_0^\infty \overline{e}^{ta} \cdot \operatorname{Log} t \cdot dt = \frac{1}{a} \left[-C - \operatorname{Log} a \right] \qquad (n)$$

so dass durch Subtraktion von (m) und (n) folgt:

$$\int_x^\infty \overline{e}^{ta} \cdot \operatorname{Log} t \cdot dt = -\frac{1}{a} \left[li(\overline{e}^{ax}) - e^{-ax} \cdot \operatorname{Log} x \right], \; ta = u.$$

$$\frac{1}{a} \int_{ax}^\infty \overline{e}^{u} \operatorname{Log} \frac{u}{a} \cdot du = -\frac{1}{a} \left[li(\overline{e}^{ax}) - \overline{e}^{ax} \cdot \operatorname{Log} x \right]$$

Setzt man hierin $x = 1$, so folgt:

$$\int_a^\infty \overline{e}^u \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{a} \cdot du = - li(\overline{e}^a)$$

oder wenn man statt a die Variable x setzt:

$$\int_x^\infty \overline{e}^u \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{x} \cdot du = - li(\overline{e}^x) \qquad (37^b)$$

Dies ist nichts anderes als unser Integral $S(x, 1)$.

$$S(x, 1) = - li(\overline{e}^x) \qquad (37^c)$$

Vergleicht man dies mit dem Resultat (37^a), so resultiert für den Integrallogarithmus die folgende Entwicklung:

$$li(\overline{e}^x) = C + \operatorname{Log} x - \overline{e}^x \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\lambda(s)}{s!} x^s \qquad (38)$$

Diese Formel ist aber schon längst bekannt; sie wurde zuerst von *Bessel*[1]) gefunden; *Nielsen* leitet sie in seinem Werk ab mit Hülfe des Grenzwertes

$$li(\overline{e}^x) = \operatorname*{limes}_{\nu=0} \frac{\nu P(x, \nu) - \Gamma(\nu + 1)}{\nu},$$

während wir sie hier als Spezialfall der Funktion $S(x, k)$ gefunden haben. Gleichzeitig ergibt sich aus dieser Untersuchung, dass *die Funktion*

$$y = S(x, 1) = - li(\overline{e}^x)$$

der linearen Differentialgleichung III. Ordnung genügt

[1]) Abhandlungen, Bd. II.

$$x \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + (x+2)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (39)$$

* * *

Für *grosse Werte von* x wird $S(x, k)$ sehr klein, wenn k als echter Bruch vorausgesetzt wird. Aus

$$S(x, k) = \int_x^\infty \overline{e}^{u} u^{k-1} \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{x} \cdot du$$

folgt die Ungleichung

$$S(x, k) < x^{k-1} \int_x^\infty \overline{e}^{u} \cdot \operatorname{Log} \frac{u}{x}\, du$$

oder

$$S(x, k) < - x^{k-1} \cdot li(\overline{e}^{x})$$

denn $f(x) = x^{k-1}$ stellt den grösstmöglichen Wert der Funktion $f(u) = u^{k-1}$ auf dem Wege $x < u < \infty$ dar. Beispielsweise ergibt sich

$$S(10, 0) < \frac{-li(\overline{e}^{10})}{10} \quad \text{oder} \quad S(10, 0) < 0{,}000\,0004157$$

$$S(10, -1) < \frac{-li(\overline{e}^{10})}{100} \quad \text{oder} \quad S(10, -1) < 0{,}000\,00004157$$

dagegen

$$S(10, 1) = -li(\overline{e}^{10}) \quad \text{oder} \quad S(10, 1) = 0{,}000\,004157$$ [1])

[1]) Dieser Wert wurde aus der Tabelle der Funktion $li(\overline{e}^{x})$ in den Funktionentafeln von *Jahnke* und *Emde* (Teubner, 1909) entnommen.

§ 7.

Variierung der Konstanten c des Makehamschen Gesetzes. Zusammenhang zwischen den Variationen von $\overline{a}_x$ in bezug auf alle 3 Parameter s, g, c. Einführung der „relativen Variationen". Die Gesamtvariation von $\overline{a}_x$.

Wie schon in der Einleitung zum II. Teil dieser Arbeit betont wurde, ist es nötig, auch die Variationen des Parameters c zu untersuchen, da neuere Untersuchungen ergaben, dass die Relation $\overset{10}{\log}\, c \backsim 0{,}04$ durchaus nicht für alle Absterbeordnungen zutrifft.

Aus

$$\mu_x = \operatorname{Log}\frac{1}{s} + c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g}$$

schliesst man

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial c} > 0$$

und infolgedessen wegen

$$\overline{a}_x = \int_0^\infty \overline{e}^{\int_0^\tau (\mu_x + t + \delta) \cdot dt} \cdot d\tau$$

sofort

$$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} < 0 \tag{40}$$

D. h. *wird im Makehamschen Gesetz der Parameter c vergrössert, so nehmen die Barwerte der kontinuierlichen Leibrenten aller Alter ab. Der*

Parameter c wirkt also entgegengesetzt wie die Parameter g und s [1]).

Wir wollen nun auch hier einen Differentialquotienten aufstellen und werden hierbei eine Beziehung zwischen den drei Differentialquotienten

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g}, \quad \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s}, \quad \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c}$$

finden, welche einen interessanten Einblick in die Verkettung der 3 Parameter gestattet.

Setzen wir abkürzend $f(\lambda, k) = e^{\lambda} \lambda^{-k} Q(\lambda, k)$, so lautet die Formel von Blaschke

$$\bar{a}_x = \frac{f(\lambda, k)}{\operatorname{Log} c},$$

woraus

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c} = \frac{1}{(\operatorname{Log} c)^2} \left\{ \operatorname{Log} c \cdot \frac{\partial f(\lambda, k)}{\partial c} - f(\lambda, k) \cdot \frac{1}{c} \right\} \quad (\alpha)$$

Die Konstante c kommt sowohl in k, als in λ vor;

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}; & \frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{x}{c} \lambda \\ k = -\frac{\delta + \operatorname{Log} \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c}; & \frac{\partial k}{\partial c} = -\frac{k}{c \operatorname{Log} c} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial f(\lambda, k)}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial c}$$

$$(\beta) \qquad = [\bar{a}_x(\mu_x + \delta) - 1] \frac{x}{c} + \frac{e^{\lambda} \lambda^{-k} S(\lambda, k)}{\operatorname{Log} c} \cdot \frac{-k}{c}$$

---

[1]) Das nämliche Resultat findet in seiner zitierten Arbeit Dr. *Julius Graf* für die gewöhnliche Leibrente.

Setzt man dies in (α) ein, so folgt unter Berücksichtigung der frühern Gleichungen (24), (25), (29[c]):

$$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} = \frac{1}{c \operatorname{Log} c} \left\{ x \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial x} - k s \operatorname{Log} c \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s} - \overline{a}_x \right\} \tag{41}$$

bzw.

$$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} = - \frac{1}{c \operatorname{Log} c} \left\{ g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} \cdot x + \overline{a}_x - \right.$$

$$\left. - s \left(\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta \right) \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s} \right\} \tag{41a}$$

Damit ist dargetan, dass der Differentialquotient $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c}$ aus 3 Komponenten besteht, aus 2 negativen und einer positiven

$$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

wo

$$\mathrm{I} = - \frac{g}{c} \operatorname{Log} \frac{1}{g} x \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} < 0$$

$$\mathrm{II} = - \frac{\overline{a}_x}{c \operatorname{Log} c} < 0$$

$$\mathrm{III} = \frac{s}{c} \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta}{\operatorname{Log} c} \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s} > 0$$

wobei die Komponenten I und II gegenüber III überwiegen.

Die durch Veränderung von c bewirkten Variationen des Rentenbarwertes lassen sich somit auf die Variationen in bezug auf die beiden Parameter g und s zurückführen. Die Gleichung (41^a) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$-c \operatorname{Log} c \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c} - g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c\, x \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} +$$

$$+ s \left(\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta \right) \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s} = \bar{a}_x \tag{42}$$

Diese Relation zeigt, wie seltsam die Variabeln durcheinanderspielen; sie ist gültig für jede Absterbeordnung, die nach Makeham ausgeglichen wurde, und für alle Alter und Zinsfüsse. —

Man kann hier auch die Intensität der Verzinsung hineinbringen; aus der Leibrentenformel von Blaschke kann man nämlich leicht herleiten, dass

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \delta} = - s \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s} \tag{43}$$

Weshalb man beispielsweise statt (41) schreiben kann:

$$c \operatorname{Log} c \cdot \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c} = - \left[\bar{a}_x + \left(\operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta \right) \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \delta} - x \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x} \right]$$

* * *

Wichtig ist es nun, den *relativen* Einfluss eines jeden der drei Parameter und der Zinsintensität auf die Höhe des Barwertes zu kennen, d. h. *zu wissen, wie die Einheit des Rentenbarwertes für jedes Alter durch diese Variationen beeinflusst wird;* denn dass diesen 4 „Veränderlichen" s, g, c, δ in den verschiedenen Altersstufen ungleiche Schwankungen des Barwertes $\overline{a}_x$ entsprechen werden, liegt auf der Hand.

Bezeichnen wir mit

$$\overline{\Delta g} = g_2 - g_1$$

$$\overline{\Delta s} = s_2 - s_1$$

$$\overline{\Delta c} = c_2 - c_1$$

$$\overline{\Delta \delta} = \delta_2 - \delta_1$$

die wirklichen Variationen der 4 Grössen g, s, c, δ beim Übergang von einem Leibrentensystem (I) zu einem andern (II), so ergibt sich annähernd als *„absolute Variation"* des Barwertes $\overline{a}_x$ der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\Delta a_x}(g) &= \overline{\Delta g} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} \\
\overline{\Delta a_x}(s) &= \overline{\Delta s} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s} \\
\overline{\Delta a_x}(c) &= \overline{\Delta c} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} \\
\overline{\Delta a_x}(\delta) &= \overline{\Delta \delta} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial \delta}
\end{aligned}\right\} \qquad (44^{a})$$

vorausgesetzt, dass die absoluten Beträge $\overline{\varDelta g}$, $\overline{\varDelta s}$, $\overline{\varDelta c}$, $\overline{\varDelta \delta}$ genügend klein sind. Wir definieren alsdann als *„relative Variationen“* des Rentenbarwertes, d. h. die Variationen der Einheit des Barwertes, die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_x(g) &= \frac{\overline{\varDelta a}_x(g)}{\overline{a}_x} \\ \mathfrak{V}_x(s) &= \frac{\overline{\varDelta a}_x(s)}{\overline{a}_x} \\ \mathfrak{V}_x(c) &= \frac{\overline{\varDelta a}_x(c)}{\overline{a}_x} \\ \mathfrak{V}_x(\delta) &= \frac{\overline{\varDelta a}_x(\delta)}{\overline{a}_x} \end{aligned}\right\} \tag{44^b}$$

wobei die Differentialquotienten $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g}$, $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s}$, $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c}$, $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial \delta}$ gemäss den aufgestellten Formeln und aus den Angaben der Absterbeordnung I. zu berechnen sind. Ein Zahlenbeispiel wird uns bald nähern Aufschluss geben.

Wenn wir die absoluten Variationen addieren, so erhalten wir als Ausdruck der *Gesamtvariation* des Rentenbarwertes den folgenden:

$$\overline{\varDelta a}_x = \overline{\varDelta a}_x(g) + \overline{\varDelta a}_x(s) + \overline{\varDelta a}_x(c) + \overline{\varDelta a}_x(\delta)$$

oder unter Benützung von (41[a]) und (43):

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Delta a_x} = & \left(\frac{\overline{\Delta g}}{g} - \frac{\overline{\Delta c}}{c}\operatorname{Log}\frac{1}{g}\,x\right) g\,\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} + \\ & + \left(\frac{\overline{\Delta s}}{s} - \overline{\Delta \delta} + \frac{\overline{\Delta c}}{c}\,\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta}{\operatorname{Log} c}\right) s\,\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s} \\ & - \frac{\overline{\Delta c}}{c}\,\frac{\overline{a}_x}{\operatorname{Log} c} \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

woraus man sofort auch die relative Gesamtvariation $\frac{\overline{\Delta a_x}}{\overline{a}_x}$ berechnen kann.

Aus (45) können wir beispielsweise ersehen, dass bei *gleicher Grösse von* Δs *und* $\Delta \delta$ *der Einfluss von* s *und* δ *auf den Rentenbarwert absolut genommen nahezu gleich gross ist;* denn s liegt sehr nahe an 1, daher $\frac{\overline{\Delta s}}{s} \backsim \overline{\Delta s}$. Wir haben damit eine mathematische Begründung des von *Robertson* und *Ross* auf empirischem Wege gefundenen Resultates [1]:

„It may be mentioned that an increase of 0,01 in the force of mortality is very nearly equivalent to a rise of 1 per cent. in the rate of interest."

* * *

[1]) Robertson and Ross, Actuarial Theory, pag. 232.

Ein *Beispiel* soll nun über die obwaltenden Verhältnisse orientieren. Wir nehmen als Ausgangstafel die französische *A. F.* 3 % und wollen verfolgen, wie gross für die verschiedenen Altersstufen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g}, \quad \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s}, \quad \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c}$$

ausfallen und hernach die absoluten und relativen Schwankungen der Rentenbarwerte berechnen, wenn wir jeden der 3 Parameter um eine kleine Grösse, z. B. 0,001 variieren; wir greifen die Alter 25, 50, 75, (95) heraus.

Tafel *A. F.* 3 %.

$$g = 0{,}998\,4400 \qquad \text{Log}\,\frac{1}{g} = 0{,}001\,5612$$

$$s = 0{,}994\,9930 \qquad \text{Log}\,\frac{1}{s} = 0{,}005\,0196$$

$$c = 1{,}091\,6817 \qquad \text{Log}\;c = 0{,}087\,7193$$

$$\delta = 0{,}029\,5587$$

$$k = -\,0{,}394\,1925$$

x	$\overline{a}_x$	λ	$S(\lambda, k)$ [1]
25	21,550	0,01399	14,7960
50	14,052	0,12539	2,3343
75	5,369	1,12372	0,0828
95	(1,473)	6,49499	?

a) Werte der Differentialquotienten:

x	$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g}$	$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s}$	$\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c}$
25	1669,58	364,175	— 153,797
50	2629,24	152,455	— 279,673
75	2085,20	34,835	— 266,851
(95)	803,30	?	?

Man sieht hieraus folgendes: Der Differentialquotient $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g}$ erreicht viel höhere Beträge als die beiden andern, welch letztere von gleicher Grössenordnung sind; die früher gezeichnete Kurve $\overline{a}_x(g)$ steigt somit sehr steil an, beispielsweise ist der zu $tg\,\varphi = 2629{,}24$ gehörige Winkel $\varphi \backsim 89^0\,59'$; eine sehr kleine Veränderung des Parameters g kann also schon beträchtliche Veränderungen der Rentenbarwerte nach sich ziehen.

[1]) Die Werte dieser Funktion wurden gemäss (35) berechnet; für die Funktionen $\Gamma(k)$ und $\Psi(k)$ wurden die Werte gefunden: $\Gamma(k) = -3{,}71317$; $\Psi(k) = +1{,}01733$. Für das Alter 95 wird λ schon ziemlich gross; wegen der für solche Fälle langsamen Konvergenz der Reihe (35) wurde dieser Fall nicht weitergeführt, doch ist für $x = 95$: $S(\lambda, k) < 0{,}0000\,176$. —

b) Die absoluten und relativen Variationen.

x	$\overline{\Delta g} = \overline{\Delta s} = \overline{\Delta c} = +0{,}001$							
	$\Delta \overline{a}_x$ in bezug auf:				$\mathfrak{V}_x$ in bezug auf			
	g	s	c	total	g	s	c	total
25	1,66958	0,36418	— 0,15380	+ 1,87996	0,0775	0,0169	— 0,0071	0,0872
50	2,62924	0,15246	— 0,27967	+ 2,50203	0,1871	0,0108	— 0,0199	0,1781
75	2,08520	0,03484	— 0,26685	+ 1,85319	0,3884	0,0065	— 0,0497	0,3452
(95)	0,80330				0,5454			

Aus dieser kleinen Zusammenstellung b ist ersichtlich, dass der *Parameter* s eine Sonderstellung einnimmt; bei diesem nimmt nämlich sowohl die absolute als auch die relative Variation bei zunehmendem Alter ab. Die Parameter g und c dagegen verhalten sich in dieser Beziehung anders: Bei beiden nimmt die absolute Variation des Barwertes $\overline{a}_x$ mit zunehmendem Alter vorerst zu bis zu einem Maximum und hernach ab; die relative Schwankung dagegen nimmt bei ihnen, absolut genommen, mit wachsendem Alter zu. Diese Resultate treten übrigens viel deutlicher in die Erscheinung, wenn man sie sich durch eine kleine graphische Darstellung veranschaulicht.

Zusammenfassend kann man sagen, dass eine Veränderung von s am stärksten die Rentenbarwerte der jungen Alter beeinflusst, während eine Veränderung von c oder g am intensivsten auf die Barwerte der höchsten Alter einwirkt.

Gerade dieses Verhalten der Variationen $\mathfrak{B}_x$ werden wir im folgenden zu weitern Untersuchungen benützen können.

§ 8.

Untersuchung der mathematischen Reserve mit Hülfe der relativen Schwankungen von $\overline{a}_x$.

Die Verfolgung des Verlaufs der relativen Variationen von $\overline{a}_x$ *bei zunehmendem Alter* gestattet einen Schluss auf das Verhalten der Reserve bei variablem Parameter g.

Nimmt nämlich in einem positiven echten Bruch sowohl der Zähler als der Nenner zu, so wird der Wert des Bruches vergrössert, wenn die relative Zunahme des Zählers grösser ist als die relative Zunahme des Nenners; denn bezeichnen wir die zwei Werte des Bruches mit α und α' derart, dass

$$\alpha = \frac{a}{b},$$

$$\alpha' = \frac{a'}{b'},$$

wo $a' > a$, $b' > b$, so ist $\alpha' > \alpha$, *wenn die Bedingung erfüllt ist:*

$$\frac{a'}{a} > 1$$

oder

$$\frac{a'}{a} > \frac{b'}{b}$$

was zu zeigen war.

Sind speziell die Brüche α und α' die folgenden

$$\alpha = \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

$$\alpha' = \frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}'_x},$$

wo die $\overline{a}'$-Werte aus der durch Variation von g entstandenen Absterbeordnung berechnet sind, so ist nach dem soeben Gesagten stets

$$\alpha' > \alpha,$$

wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}_{x+t}} > \frac{\overline{a}'_x}{\overline{a}_x} \qquad (46)$$

Nun darf — vorausgesetzt, dass die Variation $\overline{\varDelta g}$ dem absoluten Betrag nach klein ist — gesetzt werden:

$$\overline{a}'_x = \overline{a}_x + \overline{\varDelta g} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} = \overline{a}_x \left[1 + \mathfrak{V}_x(g)\right]$$

$$\overline{a}'_{x+t} = \overline{a}_{x+t} + \overline{\varDelta g} \cdot \frac{\partial \overline{a}_{x+t}}{\partial g} = \overline{a}_{x+t}\left[1 + \mathfrak{V}_{x+t}(g)\right]$$

wo $\mathfrak{V}_x$ und $\mathfrak{V}_{x+t}$ die in § 7 eingeführten relativen Variationen von $\overline{a}_x$ bedeuten. Daher geht die Ungleichung (46) über in

$$\mathfrak{V}_{x+t}(g) > \mathfrak{V}_x(g) \tag{47^a}$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}'_x} > \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

und somit dafür, dass

$${}_tV'_x < {}_tV_x \tag{47^b}$$

Hierin bedeutet ${}_tV_x$ die Reserve einer Todesfallversicherung 1 und ${}_tV'_x$ die entsprechende Reserve, aber berechnet mit Hülfe einer Absterbeordnung, welche aus der vorigen durch Erhöhung des Parameters g um den kleinen Betrag $\overline{\varDelta g}$ entstanden ist. Die Ungleichungen (47^a) und (47^b) lassen sich durch den Satz ausdrücken: „Wenn die relative Variation des Rentenbarwertes in bezug auf den Parameter g eine mit dem Alter x wachsende Funktion ist, so ist stets

$${}_tV'_x < {}_tV_x,$$

d. h. die Reserve um so kleiner, je grösser der Parameter g ist [1])."

Es soll jetzt gezeigt werden, dass in der Tat die Variation $\mathfrak{V}_x(g)$ eine mit dem Alter x wachsende Funktion ist. Zahlenmässig haben wir dies schon in § 7 an einem Beispiel bewiesen, indem nachfolgende Werte berechnet wurden (*A. F.* 3 %):

x	$\mathfrak{V}_x(g)$
25	0.0775
50	0.1871
75	0.3884
95	0.5454

Man kann diesen Nachweis aber auch etwas allgemeiner führen:

$$\mathfrak{V}_x(g) = \frac{\overline{\Delta a}_x(g)}{\bar{a}_x} = \frac{\overline{\Delta g}}{\bar{a}_x} \cdot \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g}$$

$$= \frac{\overline{\Delta g}}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \mu_x - \delta \right)$$

so dass

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_x(g)}{\partial x} = \frac{\overline{\Delta g}}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \left(-\frac{1}{(\bar{a}_x)^2} \cdot \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mu_x}{\partial x} \right)$$

---

[1]) Hierbei ist natürlich auch wieder vorausgesetzt, dass s und c, sowie δ, konstant gehalten werden.

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x(g)}{\partial x} = \tag{48}$$

$$= \frac{\overline{\Delta g}}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \left(\frac{1 - \bar{a}_x (\mu_x + \delta)}{(\bar{a}_x)^2} - c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} (\operatorname{Log} c)^2 \right)$$

Aber weil $(\operatorname{Log} c)^2$ sehr *nahe an* 0 liegt und $c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} = \lambda$, abgesehen vom Greisenalter, ein *echter Bruch* ist, so gilt

$$c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} (\operatorname{Log} c)^2 \backsim 0$$

so dass (48) nahezu identisch ist mit

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x(g)}{\partial x} = \frac{\overline{\Delta g}}{g \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c} \; \frac{1 - \bar{a}_x (\mu_x + \delta)}{(\bar{a}_x)^2} > 0 \tag{48a}$$

was zu beweisen war.

Die Differenz

$$\Delta = \frac{1 - \bar{a}_x (\mu_x + \delta)}{(\bar{a}_x)^2} - \lambda (\operatorname{Log} c)^2$$

ist übrigens auch für sehr hohe Alter *positiv,* wie man aus folgendem Beispiel (*A. F.* 3 %) erkennt:

x	Δ
25	+ 0,00028
50	+ 0,00086
75	+ 0,00124
95	+ 0,00062

womit Ungleichung (48^a) neuerdings als richtig erkannt ist. Den oben ausgesprochenen Satz können wir nun *positiv* aussprechen wie folgt:

Für eine nach Makeham ausgeglichene Absterbeordnung ist die relative Variation des Rentenbarwertes in bezug auf den Parameter g eine mit dem Alter x wachsende Funktion. Daraus folgt: *Die Reserve einer Todesfallversicherung nimmt stets ab, wenn der Parameter g wächst.*

Als Formel:

$$\frac{\partial \, {}_tV_x}{\partial g} < 0 \tag{49}$$

Wir werden versuchen, in § 10 mit Hülfe von unvollständigen Gammafunktionen einen direkten Beweis zu erbringen.

Die Untersuchung der Reserve bei Variierung von s wird zweckmässig im Zusammenhang mit der Frage der Zinsfuss-Variierung erledigt; dies soll im folgenden Paragraphen geschehen.

§ 9.

Einfluss einer Zinsfuss-Erhöhung und einer Veränderung des Parameters s auf die mathematische Reserve bei Todesfall- und gemischten Versicherungen. Der Parameter c und die Reserve der Todesfallversicherung.

I. Wenn die Absterbeordnung dem Makehamschen Gesetze folgt, so lässt sich mit aller Schärfe beweisen, dass die Reserve bei wachsendem Zinsfuss abnimmt.

Wir gehen aus von einem Satze von *W. Sutton*[1], welcher besagt, dass die Reserve um so grösser ist, je niedriger der Zinsfuss ist, vorausgesetzt, dass die Leibrentenwerte der Alter x, $x+1, \cdots$ eine monoton fallende Reihe bilden. Zum Beweis dieses Satzes geht Sutton von der Formel aus

$$ {}_tV_x = 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1}) \cdots (1 - {}_1V_{x+t-1}), \quad (\alpha) $$

aus welcher man schliesst, dass es genügt zu untersuchen, wie sich die Reserve einer *ein Jahr* dauernden Versicherung bei Veränderung des Zinsfusses verhält.

$$ {}_1V_x = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+1}}{\mathfrak{a}_x} = 1 - \frac{a_x}{v p_x (1 + a_x)} $$

oder kürzer

$$ V = 1 - \frac{a}{v\, p\, (1 + a)} $$

Nach v differenziert:

$$ \frac{dV}{dv} = -\frac{1}{p} \frac{v \dfrac{da}{dv} - a(1+a)}{v^2 (1+a)^2} \quad (50) $$

Den Zähler suchen wir durch eine Reihe auszudrücken:

$$ a = v \cdot p + v^2 \cdot {}_2p + v^3 \cdot {}_3p + \cdots + v^\lambda \cdot {}_\lambda p + \cdots $$

wobei

$$ {}_\lambda p = \frac{l_{x+\lambda}}{l_x}; $$

[1]) J. I. A. (17), 1873, pag. 227/28.

hieraus folgt

$$v \frac{d\,a}{d\,v} = v\,p + 2\,v^2\,{}_2p + 3\,v^3\,{}_3p + \cdots + \lambda\,v^\lambda\,{}_\lambda p + \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &= a_x + v\,p\,a_{x+1} + v^2\,{}_2p\,a_{x+2} + \cdots \\ a(1+a) &= a_x + v\,p\,a_x + v^2\,{}_2p\,a_x + \cdots \end{aligned}\right\}$$

woraus sich der Zähler des obigen Quotienten als die Reihe ergibt

$$v \frac{d\,a}{d\,v} - a\,(1+a) = v\,p\,(a_{x+1} - a_x) + v^2\,{}_2p\,(a_{x+2} - a_x) + \cdots$$

Wenn nun a_x grösser ist als alle folgenden Rentenbarwerte

$$\begin{gathered} a_x > a_{x+1} \\ a_x > a_{x+2} \\ \vdots \end{gathered}$$

so ist sicher dieser Zähler negativ, und $\frac{d\,V}{d\,v}$ ist alsdann positiv, d. h., wegen $v = \frac{1}{1+i}$, je niedriger der Zinsfuss, um so grösser ist die Reserve ${}_1V_x$.

Analog gilt: wenn a_{x+1} grösser ist als a_{x+2}, $a_{x+3}, \cdots$ so nimmt ${}_1V_{x+1}$ zu, wenn i abnimmt; allgemein, wenn die Leibrentenwerte der Alter x, $x+1$, $x+2, \cdots$ eine stets abnehmende Reihe bilden, so nehmen die Reservenwerte ${}_1V_x$, ${}_1V_{x+1}, \cdots$ stets zu, wenn der Zinsfuss abnimmt. Woraus wegen (a) unmittelbar folgt, dass *die Reserve* ${}_tV_x$ *wächst, wenn der Zinsfuss abnimmt.* Dieser Satz hat ohne weiteres auch Gültigkeit für die Reserve einer *gemischten* Versicherung; man braucht im Beweise einzig die Entwicklung

$$a_x = v\,p_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots$$

durch

$$a_{x\,\overline{n-1}|} = v\,p_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x$$

zu ersetzen und erhält dann als Bedingung für

$$\frac{d\,{}_tV_{x\,\overline{n}|}}{d\,v} > 0$$

an Stelle von

$$a_x > a_{x+1} > a_{x+2} > \cdots \qquad (\varphi)$$

die Bedingung

$$a_{x\,\overline{n-1}|} > a_{x+1\,\overline{n-2}|} > a_{x+2\,\overline{n-3}|} > \cdots \qquad (\Psi)$$

welche sich aber auf (φ) reduziert, wie man sofort aus

$$a_{x\,\overline{m}|} = a_x - \frac{D_{x+m}}{D_x}\,a_{x+m}$$

erkennt.

Der nächste Schritt besteht nun darin, zu zeigen, dass bei *Zugrundelegung des Makehamschen Gesetzes die Leibrentenbarwerte der aufeinanderfolgenden Alter eine monoton fallende Reihe bilden.* Am einfachsten zeigt man dies anhand von Formel (4), § 2, indem man bedenkt, dass beim Makehamschen Gesetz die μ-Funktion mit wachsendem Alter stets wächst (dies ist ja auch die Grundidee Gompertz.) Damit ist schon bewiesen, dass $\overline{a}_x > \overline{a}_{x+1} > \overline{a}_{x+2} > \cdots$, woraus wegen der Beziehung

$$a_x = \overline{a}_x - \frac{1}{2}$$

sofort auch die durch (φ) ausgedrückte Tatsache folgt. Dies erkennt man übrigens direkt aus [vgl. § 2, Formel (10)]:

$$a_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=\omega-x} e^{-[\tau h + \lambda(c^\tau - 1)]}$$

worin $\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}$, $h = \operatorname{Log} \frac{1}{v s}$; nimmt nämlich x und damit λ zu, so werden alle Summanden der Reihe und damit die ganze Summe verkleinert.

Halten wir dies mit dem Satz von Sutton zusammen, so erhellt:

Liegt der Absterbeordnung das Makehamsche Gesetz zugrunde, so gilt ohne Vorbehalt der Satz: Die Reserve der gemischten und der Todesfallversicherungen nimmt zu, wenn der Zinsfuss abnimmt.

II. *Einfluss einer Veränderung des Parameters s auf die Höhe der Reserve.* Der soeben bewiesene Satz gestattet eine interessante Anwendung, wenn wir uns vor Augen halten, dass eine *konstante Erhöhung der Sterblichkeitskraft* bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes *äquivalent* ist *mit einer Erhöhung des Zinsfusses* [1]).

Die konstante Erhöhung der Sterblichkeitskraft betrage $\operatorname{Log} \frac{1}{\varrho}$, wo ϱ ein positiver Bruch ist; dann geht

$$\mu_x = \operatorname{Log} \frac{1}{s} + \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c \, c^x$$

über in

$$\mu'_x = \operatorname{Log} \frac{1}{s \varrho} + \operatorname{Log} \frac{1}{g} \operatorname{Log} c \, c^x$$

---

[1]) Siehe *W. A. Robertson* and *F. A. Ross*, op. cit., p. 232. Vergleiche hierzu auch die in vorliegender Arbeit an Formel (45), § 7 angeschlossene Bemerkung.

woraus

$$l'_x = k s^x \varrho^x g^{c^x} = \varrho^x l_x$$

und

$${}_tp'_x = \varrho^t \cdot {}_tp_x$$

Daher wird der Barwert einer Leibrente nach der Absterbeordnung l'_x:

$$a'_x(i) = \sum v^t \cdot {}_tp'_x = \sum v^t \cdot \varrho^t \cdot {}_tp_x$$

oder

$$a'_x(i) = a_x(i')$$

wobei $a_x(i')$ den Barwert des x-jährigen nach der ursprünglichen Absterbeordnung l_x, aber zum neuen Zinsfuss i' bedeutet, wobei i' sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{1+i'} = v' = v\varrho = \frac{\varrho}{1+i}$$

bestimmt; da ϱ als positiver, echter Bruch vorausgesetzt ist, folgt hieraus

$$\frac{1}{1+i'} < \frac{1}{1+i}, \text{ d. h. } i' > i.$$

Nun kommt aber, wie man sieht, eine konstante Erhöhung von $\mu_x = A + B c^x = \mathrm{Log}\,\frac{1}{s} + B c^x$ auf nichts anderes heraus als auf eine *Verkleinerung des Parameters s;* da sie nach dem soeben Bewiesenen auch äquivalent ist einer Erhöhung des Zinsfusses, so können wir folgendes Resultat hervorheben:

Eine Erhöhung des Parameters s im Makehamschen Gesetz ist äquivalent einer Herabsetzung des Zinsfusses, *hat also genau den gleichen Einfluss auf die Höhe der Versicherungswerte wie diese.* Insbesondere folgt, gestützt auf den vorhin bewiesenen Satz: *Die Reserve nimmt zu, wenn der Parameter s zunimmt.* Als Formel ausgedrückt:

$$\frac{\partial V}{\partial s} > 0 \tag{51}$$

Diese Feststellung gilt nicht nur für Todesfall-, sondern auch für *gemischte Versicherungen.* Ist dies nicht ein Widerspruch zu dem im I. Teil dieser Arbeit zitierten Moserschen Zeichenwechselsatz? Nein! Der Zeichenwechselsatz setzt nämlich bloss eine Erhöhung von μ_x in einem gewissen *Teilbereich* innerhalb der versicherten Dauer voraus, während hier μ_x in der ganzen Absterbeordnung als erhöht gedacht ist.

Interessant ist, dass die Reserve — im Gegensatz zum Leibrentenbarwert — auf die verschiedenen Variationen der beiden Parameter s und g *verschieden* reagiert. Ein Erhöhen des Parameters g bewirkt eine *Abnahme* der Reserve, ein Erhöhen des Parameters s dagegen bewirkt eine *Zunahme* der Reserve, während beim Barwert $\bar{a}_x$ beide Variationen im nämlichen Sinn (Zunahme) erfolgen. Es ist daher nicht ganz richtig, wenn Dr. *Julius Graf* in seiner mehrfach zitierten Arbeit sagt [1]): „Die Konstante s verhält sich somit rücksichtlich ihres Einflusses auf die Überlebenswahrscheinlichkeiten, auf die wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer, auf die Leibrenten *und übrigen Versicherungswerte* analog wie die Konstante g und entgegengesetzt wie die Konstante c.“ Seinen weitern Ausführungen „· · ·, dass eine für die Absterbeordnung gutgewählte

---

[1]) S. 436.

analytische Funktion (wie es die Makehamsche Formel ist) uns in die Lage versetzt, den innern Zusammenhang zwischen Absterbeordnung und Versicherungswerten zu erkennen und aus den Veränderungen in den Konstanten der Funktionalgleichung zuverlässige Schlüsse auf die Veränderungen der Versicherungswerte zu ziehen …“ dagegen können wir uns durchaus anschliessen. —

III. *Der Parameter c und die Reserve der Todesfallversicherungen.*

Wir gehen nun den umgekehrten Weg wie im vorigen Paragraphen; dort schlossen wir vom Verlauf der Funktion $\mathfrak{B}_x(g)$ bei wachsendem x auf das Verhalten der Reserve in bezug auf g. Hier wollen wir aus dem Verhalten von ${}_tV_x$ bei variablem s auf die Funktion $\mathfrak{B}_x(s)$ ***in bezug auf*** x zurückschliessen. Wir fanden nämlich, dass die Bedingung

$$\frac{\partial\, \mathfrak{B}_x(g)}{\partial\, x} > 0$$

die Ungleichung

$$\frac{\partial\, {}_tV_x}{\partial\, g} < 0$$

nach sich zog. Ganz analog schliessen wir aus der Ungleichung (51):

$$\frac{\partial\, {}_tV_x}{\partial\, s} > 0 \qquad (\alpha)$$

dass

$$\frac{\partial\, \mathfrak{B}_x(s)}{\partial\, x} < 0 \qquad (\beta)$$

Denn aus (α) folgt für zwei Absterbeordnungen I und II (Parameter s und $s' > s$):

$$1 - \frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}'_x} > 1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

oder

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}_{x+t}} < \frac{\overline{a}'_x}{\overline{a}_x},$$

was man auch schreiben kann (vgl. die Ausführungen in § 8):

$$\mathfrak{V}_{x+t}(s) < \mathfrak{V}_x(s) \qquad (\gamma)$$

d. h. die relative Variation $\mathfrak{V}_x(s)$ nimmt ab, wenn x wächst, was man — da man sich die Veränderung von x als stetig denken kann — auch durch Ungleichung (β) ausdrücken kann [1]).

Diese Ungleichung (β) im Verein mit der Ungleichung (48^a) gestattet uns nun, das *Verhalten der Reserve bei variablem c* zu prüfen.

Wir wissen bereits, dass $\frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} < 0$. Hat man demnach zwei Absterbeordnungen I und II, für welche $c_2 = c_1 + \overline{\Delta c}$, wo $\overline{\Delta c} > 0$, so folgt, wenn wir die Barwerte nach der Absterbeordnung II mit Akzenten versehen:

$$\overline{a}'_x < \overline{a}_x, \quad \overline{a}'_{x+t} < \overline{a}_{x+t}.$$

Wie steht es dann mit ${}_tV'_x$ und ${}_tV_x$?

---

[1]) Dieses Resultat haben wir in § 7 bereits an einem Beispiel zahlenmässig nachgewiesen.

Nehmen in einem positiven echten Bruch Zähler und Nenner ab, so wird der Wert des Bruches dann *verkleinert*, wenn die relative Abnahme des Zählers grösser ist als die des Nenners, d. h. es ist

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}'_x} < \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x},$$

wenn

$$\frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}_{x+t}} < \frac{\overline{a}'_x}{\overline{a}_x};$$

oder da bei genügend kleinem $\overline{\Delta c}$

$$\overline{a}'_x = \overline{a}_x + \overline{\Delta c} \cdot \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial c} = \overline{a}_x \left(1 + \mathfrak{B}_x(c)\right)$$

$$\overline{a}'_{x+t} = \overline{a}_{x+t} + \overline{\Delta c} \cdot \frac{\partial \overline{a}_{x+t}}{\partial c} = \overline{a}_{x+t} \left(1 + \mathfrak{B}_{x+t}(c)\right)$$

so folgt, dass

$$1 - \frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}_x} > 1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

oder was dasselbe ist,

$$_tV'_x > {}_tV_x \tag{∂}$$

wenn

$$\mathfrak{B}_{x+t}(c) < \mathfrak{B}_x(c) \tag{ε}$$

Ist die Richtigkeit der Ungleichung (ε) erwiesen, so zieht diese die Ungleichung (∂) nach sich; wir haben demnach das Verhalten von $\mathfrak{B}_x(c)$ bei wachsendem x zu studieren.

Aus (41^a), (44^a) und (44^b) ergibt sich, dass

$$\mathfrak{B}_x(c) = -\frac{\overline{\Delta c}}{c \operatorname{Log} c}\left\{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c \frac{x}{\overline{\Delta g}} \frac{\overline{\Delta g}}{\overline{a}_x} \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial g} + \right.$$

$$\left. + 1 - \frac{s}{\overline{\Delta s}}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta\right) \frac{\overline{\Delta s}}{\overline{a}_x} \frac{\partial \overline{a}_x}{\partial s}\right\}$$

$$\mathfrak{B}_x(c) = -\frac{\overline{\Delta c}}{c \operatorname{Log} c}\left\{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c \frac{x}{\overline{\Delta g}} \mathfrak{B}_x(g) + 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{s}{\overline{\Delta s}}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta\right) \cdot \mathfrak{B}_x(s)\right\} \qquad (52)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{B}_x(c) \\ \mathfrak{B}_x(g) \\ \mathfrak{B}_x(s) \end{matrix}\right\} = \text{relative Variation von } \overline{a}_x \text{ in bezug auf} \left\{\begin{matrix} c, \text{ wobei } s \text{ und } g \text{ konstant.} \\ g, \text{ wobei } s \text{ und } c \text{ konstant.} \\ s, \text{ wobei } c \text{ und } g \text{ konstant.} \end{matrix}\right.$$

Aus (52) folgt, wenn x als stetige Variable angenommen wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x(c)}{\partial x} = -\frac{\overline{\Delta c}}{c \operatorname{Log} c}\left\{\frac{g}{\overline{\Delta g}} \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c \left(\mathfrak{B}_x(g) + x \frac{\partial \mathfrak{B}_x(g)}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{s}{\overline{\Delta s}}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta\right) \frac{\partial \mathfrak{B}_x(s)}{\partial x}\right\}$$

Aber weil $\mathfrak{B}_x(g)$ und $\frac{\partial \mathfrak{B}_x(g)}{\partial x}$ positiv, dagegen $\frac{\partial \mathfrak{B}_x(s)}{\partial x}$ negativ ist, so sind in der geschweiften Klammer alle Glieder positiv; daraus folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x(c)}{\partial x} < 0 \text{ [1]} \qquad (52^a)$$

Damit ist aber die Richtigkeit der Ungleichung (ε) und deshalb auch diejenige von (δ) erwiesen. In Worten ausgedrückt:

*Wenn der Parameter c des Makehamschen Gesetzes vergrössert wird, so wird auch die **Reserve** ${}_tV_x$ der lebenslänglichen Todesfallversicherung vergrössert.*

Der Einfluss des Parameters c auf die Höhe der Reserve macht sich demnach im gleichen Sinne geltend wie derjenige von s und im entgegengesetzten Sinn wie derjenige von g.

* * *

Die für die Reserve entwickelten Sätze basieren alle auf der Voraussetzung, dass $\overline{\Delta g}$, $\overline{\Delta s}$, $\overline{\Delta c}$ sehr klein seien; diese Bedingung können wir rasch beseitigen, wir brauchen bloss zu bedenken, dass wir beispielsweise, um von einem Ausgangswert g_1 des Parameters g zu einem *beträchtlich* grössern Wert g_2 zu gelangen, schrittweise von g_1 zu $g_1' = g_1 + \overline{\Delta g}$, von g_1' zu $g_1'' = g_1' + \overline{\Delta g}$, usw. bis g_2 fortschreiten können, wo stets die Bedingung $\overline{\Delta g} =$ sehr klein erfüllt ist und die Ungleichungen

---

[1]) Dieses Resultat wurde bereits in § 7 zahlenmässig festgestellt mit dem Beispiel *A. F.* 3 %, $\mathfrak{B}_{25}(c) = -0{,}0071$, $\mathfrak{B}_{50}(c) = -0{,}0199$, $\mathfrak{B}_{75}(c) = -0{,}0497$. *Absolut genommen* wächst also die Funktion $\mathfrak{B}_x(c)$ mit x; weil sie aber negatives Vorzeichen besitzt, so ergibt sich die Ungleichung (52^a).

$$
\begin{gathered}
{}_tV_x(g') < {}_tV_x(g_1) \\
{}_tV_x(g'') < {}_tV_x(g') \\
\vdots \\
{}_tV_x(g_2) < {}_tV_x(g'''\cdots)
\end{gathered}
$$

statthaben, welche auf ${}_tV_x(g_2) < {}_tV_x(g_1)$ führen.

Es gilt daher in bezug auf die Reserve für alle vorkommenden Absterbeordnungen der Satz:

Eine Erhöhung des Parameters c oder s bewirkt eine Erhöhung der Reserve der lebenslänglichen Todesfallversicherung, ein Erhöhen des Parameters g dagegen führt zu einer Verkleinerung der Reserve.

Es ist uns nicht gelungen, diese Untersuchung der relativen Schwankungen und der Reserve auf *gemischte* Versicherungen auszudehnen; einzig für den *Parameter s* haben wir das Resultat auch auf die gemischten Versicherungen anwendbar gemacht. Eine Übertragung der auf ${}_tV_x$ angewendeten Methode auf ${}_tV_{\overline{x\,n}}$ führt aber voraussichtlich auf ähnliche Resultate. Doch würde mich die allseitige Untersuchung dieser doch vorwiegend theoretischen Frage zu weit führen. Dagegen findet sich im folgenden Paragraphen ein Versuch, das für ${}_tV_x(g)$ gefundene Resultat auf einem andern Wege zu verifizieren.

§ 10.

Die mathematische Reserve, ausgedrückt durch Gammafunktionen. Einige Spezialfälle.

Unter Benützung der für den Barwert der kontinuierlichen Leibrente gefundenen Formeln können wir einen analytischen Ausdruck für die Reserve einer im Alter x abgeschlossenen Todesfallversicherung und einer gemischten Versicherung finden.

Aus

$$\bar{a}_x = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^k \operatorname{Log} c} \, Q(\lambda, k)$$

wo $\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}$ folgt, wenn x in $x + t$ übergeht:

$$\bar{a}_{x+t} = \frac{e^{\lambda c^t}}{(\lambda c^t)^k \operatorname{Log} c} \, Q(\lambda c^t, k)$$

denn λ geht dabei über in $\lambda' = c^t \cdot \lambda$; weiter ist nun

$$(\lambda c^t)^k = \lambda^k \cdot (s v)^t .$$

Man erhält also für die Reserve folgende Formel:

$$_t\bar{V}_x = 1 - \frac{e^{\lambda(c^t - 1)}}{(s v)^t} \frac{Q(\lambda c^t, k)}{Q(\lambda, k)} \tag{53}$$

Für $t = 0$ wird $_0V_x = 0$, für $t = \infty$ wird $_tV_x = 1$, welch letztern Wert man durch Ermittlung des wahren Wertes der entstehenden unbestimmten Form findet.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Verhalten der Funktion $_tV_x$ bei veränderlichem λ, also bei Variation des Parameters g, zu untersuchen oder doch wenigstens die Werte dieser Funktion an den Intervallsgrenzen $g = 0$ und $g = 1$ zu bestimmen. Die Schwierigkeiten, denen wir hierbei begegnen, liegen darin begründet, dass hier überall *Quotienten* nicht sehr einfacher transzendenter Funktionen auftreten.

a) $g = 0, \lambda = \infty$.

$$\left({}_t\overline{V}_x\right)_{g=0} = 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} \lim_{\lambda=\infty} \left[\frac{Q_{\lambda c^t}}{e^{-\lambda(c^t-1)} \cdot Q_\lambda} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} \cdot U$$

Für U ergibt sich die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, deren wahren Wert man durch zweimaliges Differenzieren unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial\, Q_{\lambda c^t}}{\partial \lambda} = -\, e^{-\lambda c^t} \cdot \lambda^{k-1} \cdot c^{kt}$$

findet zu

$$U = \frac{(s\,v)^t}{c^t}$$

so dass

$$\left({}_t\overline{V}_x\right)_{g=0} = 1 - \frac{1}{c^t} \tag{54}$$

Wegen der Bedeutung von c und t ist dies ein positiver echter Bruch, der den Bedingungen ${}_0V_x = 0$ und ${}_\infty V_x = 1$ genügt.

b) $g = 1$.

$$\left({}_t\overline{V}_x\right)_{g=1} = 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} \lim_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda(c^t-1)} \cdot Q_{\lambda c^t}}{Q_\lambda}$$

$$= 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} \cdot \lim_{\lambda=0} \frac{Q_{\lambda c^t}}{Q_\lambda}$$

Der auftretende Grenzwert nimmt vorerst die unbestimmte Form $\frac{-\infty}{-\infty}$ an; sein wahrer Wert ist:

$$\operatorname*{limes}_{\lambda=0} \frac{-\overline{e}^{\lambda c^t} \cdot \lambda^{k-1} \cdot c^{kt}}{-\lambda^{k-1} \cdot \overline{e}^{\lambda}} = c^{kt} = (s\,v)^t \cdot$$

somit ist

$$({}_t\overline{V}_x)_{g=1} = 1 - \frac{(s\,v)^t}{(s\,v)^t}$$

oder

$$({}_tV_x)_{g=1} = 0 \tag{55}$$

Letztere Formel folgt jedoch auch unmittelbar aus der Überlegung, dass bei Annahme einer konstanten Sterblichkeitsintensität $\left(\mu_x = \operatorname{Log} \frac{1}{s}\right)$ der Rentenbarwert für alle Alter konstant ist[1]), so dass direkt

$$({}_tV_x)_{g=1} = 1 - 1 = 0 .$$

Für die Reserve einer *gemischten* Versicherung auf n Jahre findet man:

$${}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{\overline{a}_{x+t\,\overline{n-t}|}}{\overline{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

oder

$${}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|} = 1 - \frac{e^{\lambda(c^t-1)}}{(s\,v)^t} \cdot \frac{Q(\lambda\,c^t, k) - Q(\lambda\,c^n, k)}{Q(\lambda, k) - Q(\lambda\,c^n, k)} \tag{56}$$

Um die Werte der Funktion ${}_t\overline{V}_{x\,\overline{n}|}(g)$ an den Grenzen $g = 0$ und $g = 1$ zu bestimmen, hat man auch wieder einige Grenzübergänge zu machen.

a) $g = 0$.

$${}_tV_{x\,\overline{n}|}(0) = 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} F_1 ,$$

[1]) Vgl. II. Teil, § 5.

wo

$$F_1 = \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{e^{-\lambda(c^t-1)}} \frac{Q_{\lambda c^t} - Q_{\lambda c^n}}{Q_\lambda - Q_{\lambda c^n}}$$

$$= \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\lambda=\infty} \frac{-e^{-\lambda c^t} \cdot \lambda^{k-1} \cdot c^{kt} + e^{-\lambda c^n} \cdot \lambda^{k-1} \cdot c^{kn}}{-e^{-\lambda(c^t-1)} \cdot (c^t-1) \cdot \left[Q_\lambda - Q_{\lambda c^n}\right] - e^{-\lambda(c^t-1)} \left[\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda} - e^{-\lambda c^n} \cdot \lambda^{k-1} \cdot c^{kn}\right]}$$

$$= \lim_{\lambda=\infty} \frac{c^{kt} - e^{-\lambda(c^n - c^t)} \cdot c^{kn}}{(c^t - 1) \dfrac{Q_\lambda - Q_{\lambda c^n}}{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}} + 1 - e^{-\lambda(c^n-1)} \cdot c^{kn}}$$

$$= \frac{c^{kt}}{c^t - 1 + 1} = \frac{(s\,v)^t}{c^t},$$

denn

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{Q_\lambda - Q_{\lambda c^n}}{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}} = \frac{0}{0} = 1;$$

wir finden somit den Wert

$$ {}_t\overline{V}_{x\,\overline{n|}}(0) = 1 - \frac{1}{c^t} \tag{57}$$

welcher mit ${}_t\overline{V}_x(0)$ übereinstimmt.

b) $g = 1$.

$$ {}_t\overline{V}_{x\,\overline{n|}}(1) = 1 - \frac{1}{(s\,v)^t} F_2,$$

wo man

$$F_2 = \lim_{\lambda=0} e^{\lambda(c^t-1)} \cdot \frac{Q_{\lambda c^t} - Q_{\lambda c^n}}{Q_\lambda - Q_{\lambda c^n}}$$

$$= \frac{c^{kt} - c^{kn}}{1 - c^{kn}} = \frac{(s\,v)^t - (s\,v)^n}{1 - (s\,v)^n}$$

findet; daher ist

$$ {}_t\overline{V}_{x\,n}(1) = 1 - \frac{1-(s\,v)^{n-t}}{1-(s\,v)^n} \tag{58} $$

Dies ist stets ein positiver echter Bruch. Man erhält diese Formel auch ohne Grenzübergang direkt aus Gleichung (28[a]) in § 5.

In diesem Spezialfall ist es ein Leichtes, den Einfluss einer Veränderung des *Parameters s* auf die Höhe der Reserve zu ersehen[1]). Diese Formel (58) ist nichts anderes als die im I. Teil unserer Arbeit (§ 5) aufgestellte Formel

$$ {}_t\overline{V}_x = 1 - \frac{1-v^{n-t}}{1-v^n} \tag{ω} $$

wobei v übergegangen ist in den *kleinern* Wert $(s\,v)$. Berücksichtigen wir nun, dass v mit wachsender Verzinsungsintensität abnimmt, so können wir umgekehrt sagen, dass die Substitution $v_1 = sv$ einer Vergrösserung der Intensität δ gleichkommt. Da aber nach einem in § 6 des I. Teils bewiesenen Satz bei wachsender Verzinsungsintensität die durch (ω) dargestellte Reserve abnimmt, so ist vorerst zu schliessen, dass der Ausdruck (ω) grösser ist als (58). Lassen wir ferner s übergehen in $s_1 > s$, so kommt dies auf eine Verkleinerung der Zinsintensität in (ω) hinaus, und dies hat die Ungleichung

$$ V(s_1) > V(s) $$

zur Folge, d. h. *mit wachsendem Parameter s nimmt die durch (58) dargestellte Reserve zu.* Dieses Resultat stimmt vollständig mit dem in § 9 für die Funktionen ${}_tV_x(s)$ und ${}_tV_{\overline{x\,n}}(s)$ *allgemein* bewiesenen Satz überein.

[1]) Vgl. z. B. *Goldmann*, Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, 10. Heft, 1915.

Wir kehren nun zu Formel (53) zurück. Bis jetzt ist gezeigt, dass die Funktion ${}_t\overline{V}_x(g)$ an den Grenzen $g = 0$ und $g = 1$ die Werte

$$ {}_t\overline{V}_x(0) = 1 - \frac{1}{c^t}\,; \quad {}_t\overline{V}_x(1) = 0 $$

besitzt, somit ist

$$ {}_t\overline{V}_x(0) > {}_t\overline{V}_x(1)\,. \tag{o} $$

Weiter folgt, dass ${}_t\overline{V}(g)$ im Intervall $0 < g < 1$ *stetig* verläuft, denn $\overline{a}_x$ und $\overline{a}_{x+t}$ verlaufen stetig und $\overline{a}_x$ hat in diesem Intervall keine Nullstelle.

Setzen wir abkürzend

$$ \overline{a}'_x = \frac{\partial\,\overline{a}_x}{\partial g}\,, $$

$$ \overline{a}'_{x+t} = \frac{\partial\,\overline{a}_{x+t}}{\partial g}\,, $$

so folgt

$$ \frac{\partial\,{}_t\overline{V}}{\partial g} = \frac{\overline{a}_{x+t} \cdot \overline{a}'_x - \overline{a}_x \cdot \overline{a}'_{x+t}}{(\overline{a}_x)^2} $$

$$ = \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}\left\{\frac{\overline{a}'_x}{\overline{a}_x} - \frac{\overline{a}'_{x+t}}{\overline{a}_{x+t}}\right\} \tag{59} $$

Diese Gleichung besagt, dass die Funktion ${}_t\overline{V}(g)$ nur dann einen extremen Wert besitzen kann, wenn die logarithmischen Ableitungen der Rentenbarwerte $\overline{a}_x$ und $\overline{a}_{x+t}$ einander gleich sind [1]).

---

[1]) Dieses Kriterium gilt übrigens immer für den Quotienten zweier Funktionen, vorausgesetzt, dass die Nennerfunktion im betreffenden Intervall keine Nullstelle besitzt.

Wir fanden

$$\bar{a}'_x = \frac{1-(\mu_x+\delta)\,\bar{a}_x}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c}$$

$$\bar{a}'_{x+t} = \frac{1-(\mu_{x+t}+\delta)\,\bar{a}_{x+t}}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c}$$

so dass statt (59) gesetzt werden kann:

$$\frac{\partial\,{}_t\bar{V}_x}{\partial g} = \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} \cdot \frac{\frac{1}{\bar{a}_x} - \frac{1}{\bar{a}_{x+t}} + \mu_{x+t} - \mu_x}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c}$$

$$= \frac{(\mu_{x+t}-\mu_x)\,\bar{a}_{x+t} - {}_t\bar{V}_x}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c \cdot \bar{a}_x} \tag{60}$$

oder unter Einführung einer Hülfsfunktion

$$f(g) = (\mu_{x+t}-\mu_x)\,\bar{a}_{x+t} \tag{60^a}$$

$$\frac{\partial\,{}_t\bar{V}_x}{\partial g} = \frac{f(g) - {}_t\bar{V}_x(g)}{g \operatorname{Log}\frac{1}{g} \operatorname{Log} c \cdot \bar{a}_x} \tag{61}$$

Der Nenner dieses Bruches hat für $0 < g < 1$ einen positiven endlichen Wert; daher ist

$$\frac{\partial\,{}_t\bar{V}_x}{\partial g} < 0, \text{ wenn } {}_t\bar{V}_x(g) > f(g)$$

Wegen Ungleichung (0) muss diese letztere Ungleichung wenigstens für ein gewisses Stück des Intervalles

$0 < g < 1$ gelten; wir werden sogleich sehen, dass sie im ganzen Intervall gilt. Wir betrachten die Hülfsfunktion $f(g)$, für die sich unter Benützung der frühern Ausdrücke ergibt:

$$f(g) = \frac{c^t - 1}{(s\,v)^t} \cdot \frac{e^{\lambda c^t}}{\lambda^{k-1}} \cdot Q_{\lambda c^t} \tag{60^b}$$

Man findet ferner:

$$g = 0: \quad f(0) = \frac{c^t - 1}{(s\,v)^t} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \frac{Q_{\lambda c^t}}{e^{-\lambda c^t} \cdot \lambda^{k-1}}$$

$$= \frac{c^t - 1}{(s\,v)^t} \cdot \frac{0}{0} = \frac{c^t - 1}{(s\,v)^t} \cdot \frac{(s\,v)^t}{c^t}$$

oder schliesslich

$$f(0) = 1 - \frac{1}{c^t} = {}_t\overline{V}_x(0)$$

$g = 1$: Wegen $\mu_{x+t} = \mu_x = \operatorname{Log} \dfrac{1}{s}$ wird aus (60ᵃ):

$$f(1) = 0 = {}_t\overline{V}_x(1)$$

Stimmen der Funktionen f und $\overline{V}$ an einer weitern Stelle, innerhalb der Grenzen 0 und 1, überein, so besitzt ${}_t\overline{V}_x(g)$ nach (61) dort einen extremen Wert.

Unser Ziel ist nun, den Verlauf von $f(g)$ zu verfolgen und dann rückwärts auf denjenigen von ${}_t\overline{V}_x(g)$ zu schliessen. Aus (60ᵇ) ergibt sich nach einiger Umformung der Differentialquotient:

$$\frac{d\,f(g)}{d\,g} = -\frac{c^x}{g}\,\frac{c^t - 1}{(s\,v)^t}\,\frac{Q_{\lambda c^t} \cdot e^{\lambda c^t} \cdot \dfrac{\lambda\,c^t + 1 - k}{\lambda} - \lambda^{k-1} \cdot c^{kt}}{\lambda^{k-1}} \tag{60^c}$$

Für das Vorzeichen dieses Differentialquotienten ist der Zähler ausschlaggebend. Mit Hülfe einer von *Schlömilch* gegebenen Reihe für die Q-Funktion habe ich diesen Zähler in eine unendliche Reihe entwickelt und schliesslich das Resultat erhalten

$$\frac{d f(g)}{d g} < 0 \tag{60^d}$$

d. h. die Hülfsfunktion $f(g)$ nimmt monoton ab, wenn g von 0 bis 1 wächst. Ich verzichte darauf, hier den etwas langwierigen Beweis für die Richtigkeit von (60^d) mitzuteilen.

Überträgt man nun den in § 5 hiervor entwickelten Gedankengang (vgl. Seite 202 ff.) auf diese Funktion, so erkennt man, dass auch die stetige Funktion ${}_t\overline{V}_x(g)$ keine extremen Werte besitzt und wegen $V(0) > V(1)$ eine monoton fallende ist.

$$\frac{d\, {}_t\overline{V}_x(g)}{d g} < 0\,,$$

was zu beweisen war. In Worten:

Variiert der Parameter g von 0 bis 1, so nimmt die Funktion ${}_t\overline{V}_x$ stetig ab von

$${}_t\overline{V}(0) = 1 - \frac{1}{C^t} \text{ bis } {}_t\overline{V}(1) = 0\,.$$

Es ist dies eine schöne Bestätigung des in § 8 auf ganz anderem Wege gefundenen Resultates.

* * *

Der soeben skizzierte Beweis wird recht einfach in demjenigen Spezialfall, welcher entsteht, wenn $\delta = 0$ und $s = 1$ gesetzt wird, d. h. wenn man die

Verzinsung ausser Acht lässt und statt des allgemeinen Gompertz-Makehamschen Ausdruckes das von *Gompertz* stammende Sterbegesetz $l_x = k\,g^{c^x}$ zugrunde legt.

Alsdann wird nämlich der Parameter $k = 0$ und die Reserve kann durch die unter dem Namen *Integrallogarithmus* bekannte Transzendente ausgedrückt werden:

$${}_t\overline{V}_x = 1 - \frac{e^{\lambda(c^t-1)}\,Q(\lambda c^t, 0)}{Q(\lambda, 0)}$$

oder

$${}_t\overline{V}_x = 1 - \frac{e^{\lambda c^t}\cdot li(\bar{e}^{\lambda c^t})}{e^{\lambda}\cdot li(\bar{e}^{\lambda})} \qquad (62)$$

Die Formel (60^c) des Differentialquotienten der Hülfsfunktion $f(g)$ geht für diesen Spezialfall über in:

$$\frac{d\,f(g)}{d\,g} = \frac{c^x(c^t-1)}{g}\left[(\lambda c^t+1)\cdot e^{\lambda c^t}\cdot li(\bar{e}^{\lambda c^t})+1\right] \qquad (63)$$

Der Faktor vor der eckigen Klammer ist positiv; das Vorzeichen des Differentialquotienten hängt also nur vom Klammer-Ausdruck ab. Wir setzen abkürzend

$$\lambda c^t = u$$

Die eckige Klammer wird $= (u+1)\cdot e^u li(\bar{e}^u) + 1$ Um das Vorzeichen dieses Ausdrucks zu bestimmen, entwickeln wir $li(\bar{e}^u)$ in eine konvergente, unendliche Reihe, welche von *Schlömilch* stammt [1]):

$$li(\bar{e}^u) = -\frac{\bar{e}^u}{u}\left\{1 - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)(u+2)} - \frac{2}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \frac{4}{(u+1)(u+2)(u+3)(u+4)} - + \cdots\right\} \qquad (64)$$

---

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1859, Bd. 4, S. 401.

Hieraus
$$(u+1)\,e^{u}\,li(\bar{e}^{u})+1=$$
$$=1-\frac{u+1}{u}\left\{\frac{u}{u+1}+\frac{1}{(u+1)\,(u+2)}-\frac{2}{(u+1)\,(u+2)\,(u+3)}+-\cdots\right\}$$
$$=-\frac{u+1}{u}\left\{\frac{1}{(u+1)\,(u+2)}-\frac{2}{(u+1)\,(u+2)\,(u+3)}+-\cdots\right\}$$

Das Bildungsgesetz des Koeffizienten dieser Fakultätenreihe ist allerdings nicht sehr einfach; doch fällt für uns nur die Tatsache der Konvergenz der Reihe und der Wert der ersten Entwicklungskoeffizienten in Betracht. Es ist nämlich für $u>0$ in der geschweiften Klammer *von Anfang an* [1]) jedes Glied kleiner als das vorhergehende [2]), d. h. die geschweifte Klammer besitzt einen *positiven,* endlichen Wert, daher ist
$$(u+1)\cdot e^{u}\,li(\bar{e}^{u})+1<0$$

Daraus folgt weiterhin gemäss Gleichung (63):
$$\frac{d\,f(g)}{d\,g}<0\,.$$

Damit ist $f(g)$ als eine im Intervall $0<g<1$ monoton fallende erkannt, und gleich wie im allgemeinen Fall $(s\neq 1)$ schliesst man hieraus
$$\frac{\partial\,{}_tV_x}{\partial\,g}<0\,.$$

---

[1]) Das Unterstrichene ist wichtig; dass die spätern Glieder alle dieser Bedingung genügen, ist ja eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz.

[2]) Beispielsweise kann das zweite Glied geschrieben werden:
$$\frac{1}{(u+1)\,(u+3)}\,\frac{1}{1+\frac{u}{2}}<\frac{1}{(u+1)\,(u+2)}\,.$$

Wird die Überlebensordnung durch das Gompertzsche Gesetz dargestellt, so nimmt die Reserve ${}_t\overline{V}_x$ *monoton ab, wenn der Parameter* g *von* 0 *bis* 1 *wächst, vorausgesetzt, dass man hierbei auf den Einfluss der Zinsintensität keine Rücksicht nimmt.*

Man kann nun hier auf den I. Teil dieser Arbeit verweisen, wo dargelegt wurde, dass eine Vernachlässigung der Verzinsung beim Studium des Einflusses von μ_x die Verhältnisse *nicht* entstellte, und schliessen, dass der soeben bewiesene Satz auch für $\delta \neq 0$ Gültigkeit besitzt.

Anhang.

Schätzung des Restgliedes in der Formel

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} + R\,.$$

Es ist öfters von Vorteil, eine Formel zu kennen, welche den Übergang von a_x bzw. a_x zu $\bar{a}_x$ vermittelt. Solche Näherungsformeln sind verschiedene bekannt; ich erwähne als Beispiele die folgenden[1]):

$$\bar{a}_x = \frac{i\,d}{\delta^2}\,\mathrm{a}_x - \frac{i - d}{\delta^2}$$

und

$$\bar{a}_x = \mathrm{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{i}{6}$$

Eine weitere sehr bekannte Formel ist die von *Woolhouse*[2]) aufgestellte, welche lautet:

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12}\,,$$

welche neben der Verzinsung auch noch eine Korrektur für jedes Alter x berücksichtigt. Mit dieser Formel wollen wir uns in diesem Anhang befassen und zwar gehen wir aus von der folgenden erweiterten Formel:

---

[1]) Vgl. z. B. Vorlesungen von Prof. Dr. *Moser* über ausgewählte versicherungswissenschaftliche Kapitel, S. S. 1917.

[2]) *J. I. A*, Bd. XV, p. 106.

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} + R \qquad (65)$$

wo

$$R = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)^2}{4!} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{D^{(4)}(x+n+t)}{D(x)} \cdot dt \qquad (65^a)$$

Ihre Ableitung verdankt man dem französischen Versicherungsmathematiker *H. Poterin du Motel,* der wohl als erster diese Restfunktion R berücksichtigt hat. Zu ihrer Herleitung geht *du Motel* aus von der bekannten Eulerschen Summenformel, die er auf die *Summe*

$$D(x) + D\left(x + \frac{1}{m}\right) + D\left(x + \frac{2}{m}\right) + \cdots$$

wo $D(x) = v^x \cdot l_x$, anwendet. Voraussetzung ist hierbei, dass $D(x)$ eine Funktion sei, welche ebenso wie ihre aufeinanderfolgenden Differentialquotienten stetig verläuft und welche ferner der Bedingung genügt:

$$D(\infty) = D'(\infty) = D''(\infty) = \cdots = 0.$$

Diese Summe lässt sich dann durch ein *Integral* ausdrücken, wozu noch eine Reihe von Ausdrücken in den einzelnen Differentialquotienten von $D(x)$, verbunden mit gewissen Koeffizienten (Bernoullische Zahlen) treten. Von diesen Ausdrücken, die in ihrer Aufeinanderfolge eine alternierende Reihe und zwar eine sogenannte semikonvergente Reihe darstellen, berücksichtigt du Motel nur die drei ersten Glieder und stellt den Rest durch das der Eulerschen Summenformel eigene Restintegral [1]) dar. Dadurch gelangt er

---

[1]) Vgl. z. B. *Markoff,* Differenzenrechnung (1896).

auf eine lineare Beziehung zwischen den Barwerten $a_x^{(m)}$ und $\bar{a}_x$, welche sich im Spezialfall $m = 1$ auf die Formel (65) reduziert. Die skizzierte Ableitung von du Motel findet sich in seiner weiter oben erwähnten, schönen Arbeit „Technique de l'assurance sur la vie" [1]).

Die Formel (65) bzw. (65ª) soll uns nun dazu dienen, zu schätzen, welchen Fehler man begeht, wenn man die gewöhnliche Formel von Woolhouse verwendet. Es ist ja in der Tat bei Näherungsformeln in der Mathematik und ihren angewandten Gebieten stets sehr wichtig, anzugeben, innerhalb welcher Grenzen sie gültig sind.

Um diese Untersuchung durchführen zu können, müssen wir über den Verlauf der Absterbeordnung eine bestimmte Voraussetzung machen; wir nehmen an, sie gehorche dem *Makehamschen Gesetz.*

Die Summe unter dem Integral (65ª) soll vorerst etwas umgeformt werden. $D^{(4)}(x)$ bedeutet die vierte Ableitung von $D(x) = v^x\, l(x)$ nach x; durch sukzessives Differenzieren findet man

$$D^{(4)}(x) = v^x\, l_x \Big\{ -\mu_x''' + 4\,(\mu_x + \delta)\,\mu_x'' + 3\,(\mu_x')^2$$
$$-6\,(\mu_x + \delta)^2 \cdot \mu_x' + (\mu_x + \delta)^4 \Big\}.$$

Nun ist nach Makeham

$$l_x = k\, s^x\, g^{c^x}$$

$$\mu_x = \operatorname{Log}\frac{1}{s} + c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g}$$

$$\mu_x + \delta = \operatorname{Log} c \left[\theta + c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g}\right], \text{ wo } \theta = \left(\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta\right)\frac{1}{\operatorname{Log} c}$$

---

[1]) Encyclopédie des sciences mathématiques, tome I, volume 4, page 527.

$$\mu'_x = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} (\operatorname{Log} c)^2$$

$$\mu''_x = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} (\operatorname{Log} c)^3$$

$$\mu'''_x = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} (\operatorname{Log} c)^4 .$$

Daher wird, wenn $(\operatorname{Log} c)^4$ vorweggenommen wird:

$$\begin{aligned} D^{(4)}(x) = v^x l_x (\operatorname{Log} c)^4 \Big\{ & - c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} \\ & + 4 \left(\Theta + c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}\right) c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} \\ & + 3 \left(c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}\right)^2 \\ & - 6 \left(\Theta + c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}\right)^2 c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g} \\ & + \left(\Theta + c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}\right)^4 \Big\} \end{aligned}$$

und infolgedessen, wenn wir x durch $x + n + t$ ersetzen und mit $D(x)$ dividieren, sowie gleichzeitig die Abkürzung

$$\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}$$

einführen:

$$\begin{aligned} \frac{D^{(4)}(x+n+t)}{D(x)} = (v\,s)^{n+t} \cdot e^{-\lambda(c^{n+t}-1)} \cdot (\operatorname{Log} c)^4 \Big\{ & -\lambda\, c^{n+t} + \\ + 4 (\Theta + \lambda\, c^{n+t}) \lambda\, c^{n+t} + 3 (\lambda\, c^{n+t})^2 - 6 (\Theta + \lambda\, c^{n+t})^2 \cdot \lambda\, c^{n+t} + \\ + (\Theta + \lambda\, c^{n+t})^4 \Big\} = (v\,s)^{n+t} \cdot e^{-\lambda(c^{n+t}-1)} \cdot (\operatorname{Log} c)^4 \cdot F, \quad (66) \end{aligned}$$

wo F den Ausdruck in der geschweiften Klammer bedeutet. Wenn wir diesen Quotienten in der Restfunktion (65^a) einsetzen, so geht diese über in

$$R = e^{\lambda} (\mathrm{Log}\, c)^4 \int_0^1 \frac{t^2 (1-t)^2}{4!} (s\,v)^t \sum_{n=0}^{n=\infty} (s\,v)^n \, e^{-\lambda c^{n+t}} \cdot F \cdot dt \tag{67}$$

Wir betrachten nun das Produkt $e^{-\lambda c^{n+t}} \cdot F$, in welchem wir abkürzend

$$\lambda\, c^{n+t} = u > 0$$

setzen; es ergibt sich, wenn gleichzeitig nach Potenzen von u geordnet wird:

$$e^{-\lambda c^{n+t}} \cdot F = e^{-u} \left\{ \alpha + \beta\, u + \gamma\, u^2 + \delta\, u^3 + u^4 \right\}, \tag{68}$$

worin die Koeffizienten bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \theta^4 \\ \beta &= -(1 - 4\cdot\theta + 6\cdot\theta^2 - 4\cdot\theta^3) \\ \gamma &= 7 - 12\cdot\theta + 6\cdot\theta^2, \\ \delta &= -(6 - 4\cdot\theta) \end{aligned}\right\}, \text{ wobei } \quad \theta = \frac{\mathrm{Log}\,\frac{1}{s} + \delta}{\mathrm{Log}\, c} = -k \quad \big(\text{vgl. § 2, Beziehung (8)}\big).$$

Weil $0 < \theta < 1$, so gehorchen diese Koeffizienten den Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &< \alpha < +1, \\ -1 &< \beta < +1 \\ +1 &< \gamma < +7 \\ -6 &< \delta < -2. \end{aligned}\right\} \tag{68^a}$$

Statt (68) können wir setzen:

$$e^{-\lambda c^{n+t}} \cdot F = \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + u^4}{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots}$$

$$= 4! \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + u^4}{4! + 4!\, u + 12 u^2 + 4 u^3 + u^4 + 4! \left\{\frac{u^5}{5!} + \cdots\right\}}$$

oder

$$e^{-\lambda c^{n+t}} \cdot F < 4! \tag{69}$$

denn infolge der Ungleichungen (68[a]) sind stets die entsprechenden Koeffizienten der Potenzen von u im Zähler kleiner als die im Nenner, und zudem schreitet im Nenner die Potenzreihenentwicklung weiter.

Wir erhalten auf diese Weise die Ungleichung

$$R < e^{\lambda} (\operatorname{Log} c)^4 \int_0^1 t^2 (1-t)^2 (s\,v)^t \underbrace{\sum_{n=0}^{n=\infty} (s\,v)^n} \cdot dt$$

oder weil

$$0 < s\,v < 1$$

$$R < \frac{e^{\lambda} (\operatorname{Log} c)^4}{1 - s\,v} \int_0^1 t^2 (1-t)^2 (s\,v)^t \cdot dt \tag{70}$$

Bezeichnen wir das Integral mit J,

$$J = \int_0^1 t^2 (1-t)^2 (s\,v)^t \cdot dt$$

so gilt, weil für $0 \leqq t \leqq 1$ stets $0 \leqq (s\,v)^t \leqq 1$ ist:

$$J < \int_0^1 t^2 (1-t)^2 \cdot dt$$

oder

$$J < \frac{1}{30},$$

so dass als erste Schätzungsformel für den Rest R die einfache Ungleichung resultiert:

$$\text{(I)} \qquad R < \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{30\,(1 - s\,v)}\, e^{\lambda}$$

wobei $\lambda = c^x \operatorname{Log} \dfrac{1}{g}$.

Das Integral J können wir jedoch genau berechnen:

$$J = \int_0^1 t^2 (s\,v)^t \cdot dt - 2 \int_0^1 t^3 (s\,v)^t\, dt + \int_0^1 t^4 (s\,v)^t \cdot dt$$

Wir substituieren $(s\,v)^t = \bar{e}^{\,u}$,

$u = -t \operatorname{Log}(s\,v) = \varepsilon\, t$, Grenzen:

t	u
0	0
1	ε

$$J = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_0^{\varepsilon} u^2 \cdot \bar{e}^{\,u} \cdot du - \frac{2}{\varepsilon^4} \int_0^{\varepsilon} u^3 \cdot \bar{e}^{\,u} \cdot du + \frac{1}{\varepsilon^5} \int_0^{\varepsilon} u^4 \cdot \bar{e}^{\,u} \cdot du$$

oder

$$J = \frac{P(\varepsilon, 3)}{\varepsilon^3} - \frac{2\,P(\varepsilon, 4)}{\varepsilon^4} + \frac{P(\varepsilon, 5)}{\varepsilon^5} \qquad (71)$$

d. h. wir haben unser Integral auf 3 *unvollständige Gammafunktionen* mit ganzzahligem Argument zurückgeführt, wobei zur Abkürzung

$$\varepsilon = -\operatorname{Log} s\,v = \operatorname{Log}\frac{1}{s\,v} > 0$$

gesetzt wurde. Solche Funktionen sind mit Hülfe der Legendreschen Fakultätenreihe als einfache Reihen darstellbar, allgemein

$$P(\varepsilon, n) = (n-1)!\left[1 - e^{-\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!}\right]^{1)}$$

so dass

$$J = \frac{2}{\varepsilon^5}\left\{12 - 6\,\varepsilon + \varepsilon^2 - e^{-\varepsilon}(12 + 6\,\varepsilon + \varepsilon^2)\right\}$$

und durch Entwicklung der Exponentialfunktion

$$J = \frac{1}{30} - \frac{\varepsilon}{60} + \frac{\varepsilon^2}{210} - \frac{5\,\varepsilon^3}{30\cdot 7\cdot 24} + - \cdots$$

$$= \frac{1}{30}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{7} - \frac{5\cdot\varepsilon^3}{7\cdot 24} + - \cdots\right] \qquad (71^{a})$$

Es ist dies eine alternierende Reihe, deren Glieder sehr rasch abnehmen und die wie die Entwicklung für $e^{-\varepsilon}$ absolut konvergent ist. Setzen wir sie in (70) ein, so erhalten wir

$$R < \frac{e^{\lambda}(\operatorname{Log} c)^4}{30\,(1 - s\,v)}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{7} - \frac{5\cdot\varepsilon^3}{7\cdot 24} + - \cdots\right] \quad (72)$$

woraus man sofort die Schätzungsformel I erhält, wenn man sich in der Klammer auf das erste Glied

---

[1]) *Nielsen*, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, pag. 28.

beschränkt. Nun ist aber ε sehr nahe bei 0 gelegen, die Näherung I also berechtigt. Eine bessere Näherung erhalten wir dagegen, wenn wir in der Klammer die drei ersten Glieder berücksichtigen; dies ergibt die *brauchbarste Näherungsformel:*

$$\text{(II)} \qquad R < \frac{(\operatorname{Log} c)^4 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{7}\right)}{30\,(1 - s\,v)}\, e^{\lambda}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass $s\,v = \bar{e}^{\varepsilon}$, also $1 - s\,v = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6} - \frac{\varepsilon^4}{24} + - \cdots$, so können wir statt (II) setzen:

$$R < \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{30\,\varepsilon} \, \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{7}}{1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6}}\, e^{\lambda}$$

und um so mehr

$$\text{(III)} \qquad R < \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{30\,\varepsilon}\, e^{\lambda}$$

wo stets $\lambda = c^x \operatorname{Log} \frac{1}{g}$, $\varepsilon = \operatorname{Log} \frac{1}{s\,v}$.

Aus dem Bau dieser drei Restformeln ersieht man wegen des Faktors e^{λ}, dass der Rest R um so kleiner wird, je kleiner x ist; ferner wird R um so kleiner ausfallen, je kleiner v ist, d. h.

Die Näherungsformel von Woolhouse

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12}$$

trifft um so besser zu, je niedriger das Eintrittsalter und je höher der Zinsfuss i ist.

Es soll nun die in den Formeln (I), (II), (III) enthaltene obere Schranke für das Restglied R in einem konkreten Beispiel berechnet werden; wir wählen die Tafel *A. F.*, den Zinsfuss 3 %; für diese Schranke ergeben sich folgende Werte:

x	nach Formel I	nach Formel II	nach Formel III
25	0.0000 59	0.0000 58	0.0000 58
50	0.0000 66	0.0000 65	0.0000 65
75	0.0001 79	0.0001 76	0.0001 76
95	0.0384 34	0.0377 76	0.0377 94

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass — wenn man von den höchsen Altern absieht — der Rest R kleiner ausfällt als 0.00018 (im Alter 75), ja *für die meisten für die Praxis in Betracht fallenden Alter erreicht der Rest R nicht einmal den Wert* $\frac{1}{10\,000}$. Erst für Alter $x > 85$ ergeben die Restformeln Beträge, die grösser sind als $\frac{1}{1000}$; erst von diesem Alter an kann also die dritte Dezimalstelle im Barwert $\bar{a}_x$ ungenau werden; vom Alter 95 an kann sich der Fehler auch in die zweite Dezimalstelle verpflanzen:

$$x = 85 \qquad R < 0{,}000\,851$$
$$x = 86 \qquad R < 0{,}001\,090$$
$$x = 87 \qquad R < 0{,}001\,278$$
$$x = 90 \qquad R < 0{,}003\,766$$
$$x = 95 \qquad R < 0{,}037\,794$$

Da aber Rentenbarwerte für so hohe Alter überhaupt im allgemeinen ausser Betracht fallen, *so kann füglich aus dieser Untersuchung geschlossen werden, dass man* *praktisch in der Woolhouseschen Formel die Restfunktion R vernachlässigen darf.*

Die in § 7 verwendeten Rentenbarwerte wurden deshalb folgendermassen berechnet (*A. F.* 3 %):

x	μ_x	$\mu_x + \delta$	$\frac{\mu_x + \delta}{12}$	$a_x + 0{,}5$	$\bar{a}_x$
25	0,00625	0,03581	0,003	21,553	21,550
50	0,01602	0,04558	0,004	14,056	14,052
75	0,10359	0,13315	0,011	5,380	5,369
95	0,57476	0,60432	0,050	1,523	(1,473)

In gleicher Weise zeigt man, dass in der Formel[1])

$$\bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} - \frac{\mu_x + \delta}{12\, m^2} + R' \tag{73}$$

wo $a_x^{(m)}$ den Barwert der in m Raten postnumerando zahlbaren Leibrente 1 bedeutet, der Rest R' bei Voraussetzung des Makehamschen Gesetzes der Ungleichung genügt:

$$(\mathrm{II^a}) \qquad R' < \frac{(\operatorname{Log} c)^4 \left(1 - \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'^2}{7}\right)}{30\left[1 - (s\,v)^{1/m}\right] m^5}\, e^{\lambda}$$

wo $\varepsilon' = \frac{1}{m} \operatorname{Log} \frac{1}{s\,v}$; diese kann übergeführt werden in

$$(\mathrm{III^a}) \qquad R' < \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{30\, \varepsilon\, m^4}\, e^{\lambda}$$

wo $\varepsilon = \operatorname{Log} \frac{1}{s\,v}$. Wegen des Faktors m^4 im Nenner fällt diese Restfunktion R' noch viel kleiner aus als

[1]) H. Poterin du Motel, loc. cit.

R, so dass mit noch grösserer Berechtigung diese andere Näherungsformel von Woolhouse

$$\bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} - \frac{\mu_x + \delta}{12m^2} \tag{73a}$$

gilt. Durch Elimination von $\bar{a}_x$ zwischen (73) und (65) erhält man wegen der Kleinheit der Differenz $R - R'$ die bekannte Formel für den Barwert der in unterjährigen Raten zahlbaren Leibrente

$$\left.\begin{aligned} a_x^{(m)} &= a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta) \\ &\text{bzw.} \\ \mathbf{a}_x^{(m)} &= \mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta) \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

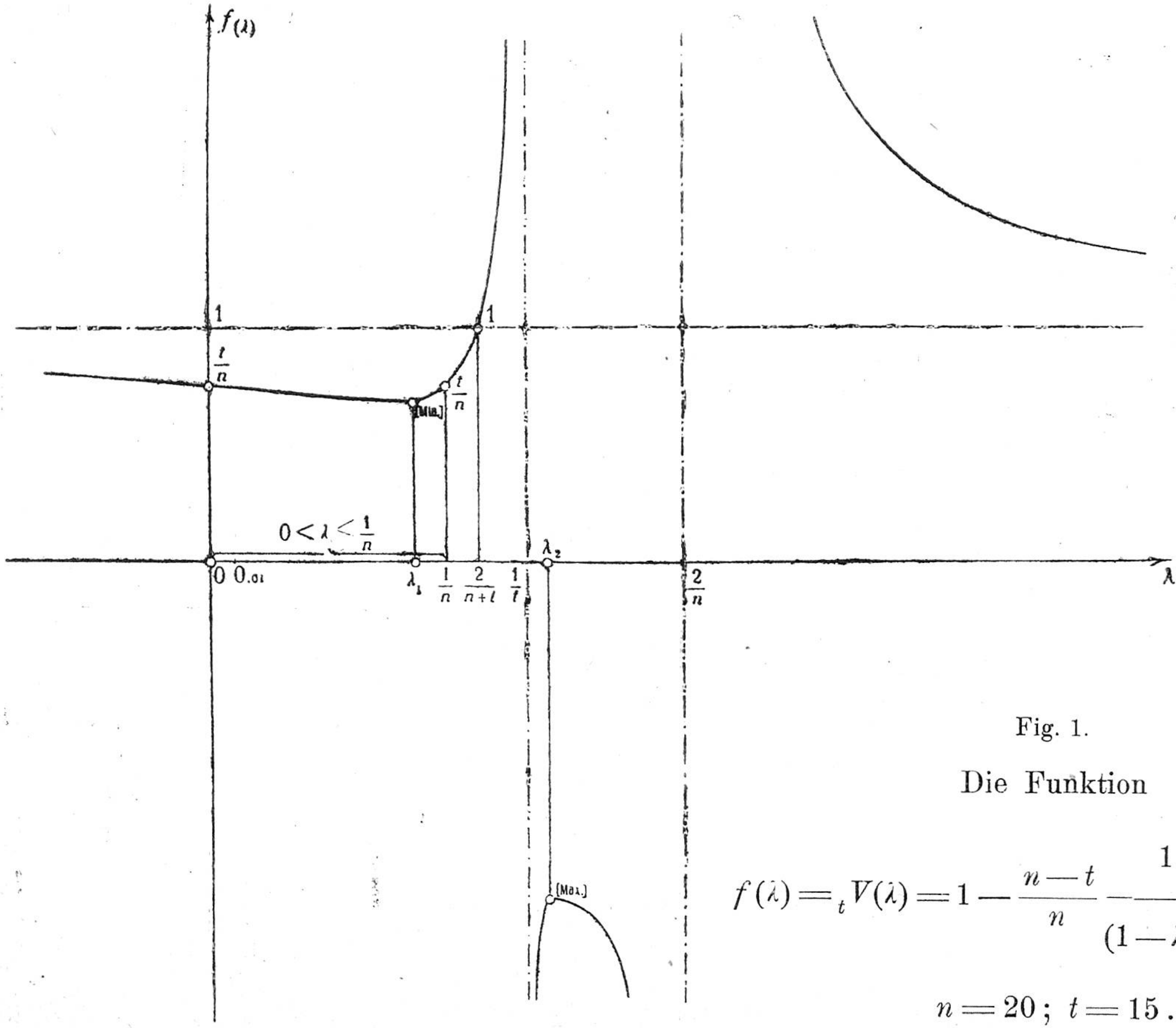


Fig. 1.

Die Funktion

$$f(\lambda) = {}_tV(\lambda) = 1 - \frac{n-t}{n} \, \frac{1-\lambda \dfrac{n+t}{2}}{(1-\lambda t)\left(1-\lambda \dfrac{n}{2}\right)}$$

$n = 20 ; \; t = 15 .$

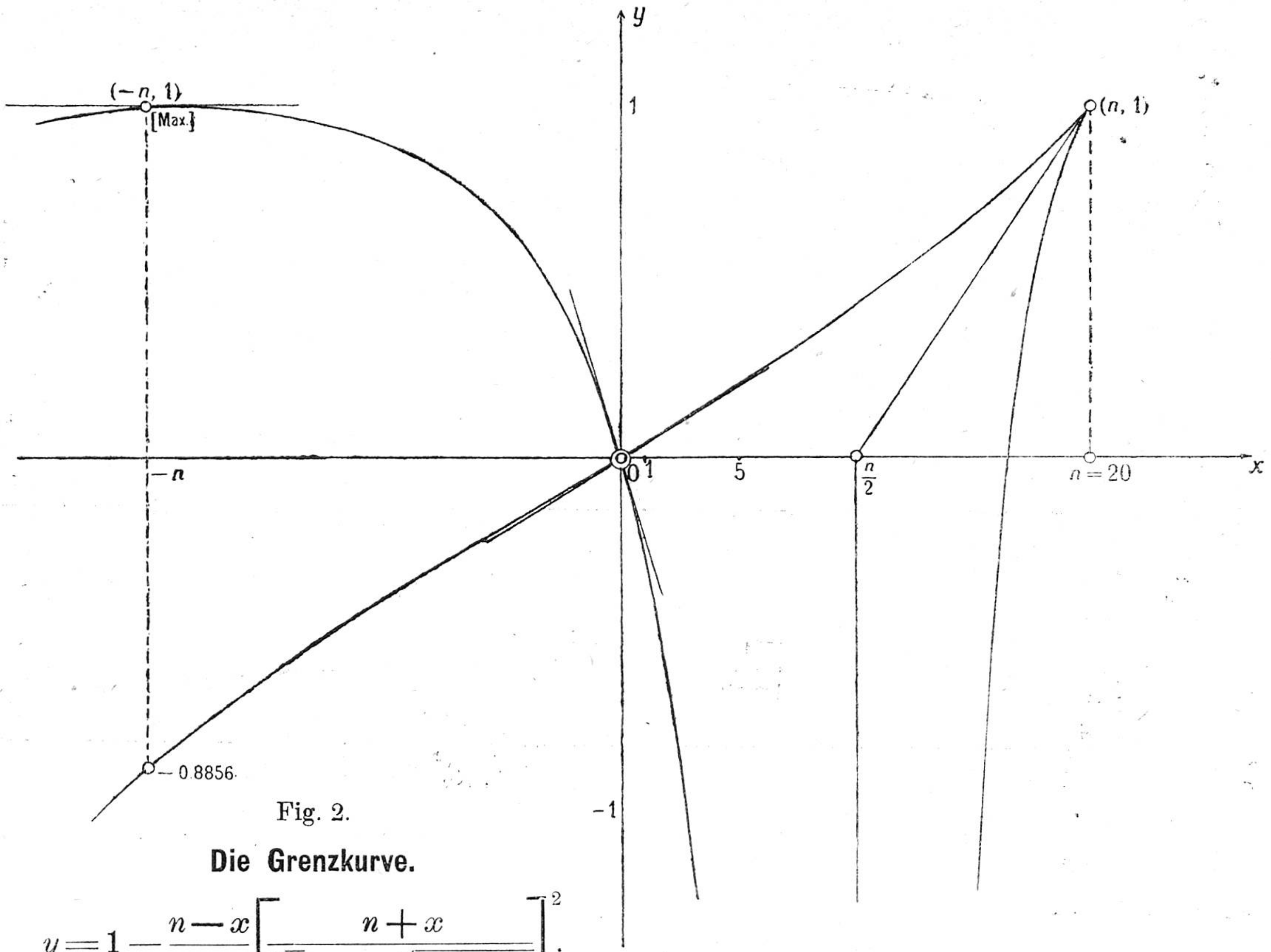


Fig. 2.

Die Grenzkurve.

$$y = 1 - \frac{n-x}{n}\left[\frac{n+x}{\sqrt{2}\cdot x \pm \sqrt{n(n-x)}}\right]^2.$$

Inhalt.

Anhang.